BULLETIN DE LA S. M. F.

HÉLÈNE MAYNADIER

Polynômes de Bernstein-Sato associés à une intersection complète quasi-homogène à singularité isolée

Bulletin de la S. M. F., tome 125, nº 4 (1997), p. 547-571

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_4_547_0>

Bull. Soc. math. France,
125, 1997, p. 547–571.

POLYNÔMES DE BERNSTEIN-SATO ASSOCIÉS À UNE INTERSECTION COMPLÈTE QUASI-HOMOGÈNE À SINGULARITÉ ISOLÉE

PAR HÉLÈNE MAYNADIER (*)

RÉSUMÉ. — Nous calculons explicitement des équations fonctionnelles vérifiées par une intersection complète quasi-homogène à singularité isolée ou un germe semi-quasi-homogène, sous des hypothèses supplémentaires de singularité isolée pour les sous-familles. Nous montrons de plus qu'en dimension deux, l'idéal de Bernstein-Sato associé à deux polynômes quasi-homogènes à singularité isolée, définissant l'origine, est principal, et nous déterminons son générateur.

ABSTRACT. — We calculate explicitly functional equations satisfied by a weighted homogeneous isolated complete intersection singularity or a semi-quasi-homogeneous germ, under extra conditions of isolated singularity for the subfamilies. Furthermore we prove that, in dimension two, the Bernstein-Sato ideal associated with two weighted homogeneous polynomials with isolated singularity, defining the origin, is principal, and we determine its generator.

1. Introduction — Énoncés

La notion de polynôme de Bernstein-Sato a été généralisée par C. Sabbah, qui a démontré dans [14] et [15] qu'étant données des fonctions $f_1, \dots, f_p$ holomorphes au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$, il existe des équations fonctionnelles de la forme

$$(*) \qquad b(s_1, \dots, s_p) f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p} \in \mathcal{M},$$

où $\mathcal{M} = \mathcal{D}[s] f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1}$ et b est un produit de formes affines à coefficients entiers ($\mathcal{D}[s]$ désigne l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbb{C}\{x\} = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, polynomiaux en $s_1, \dots, s_p$).

(*) Texte reçu le 31 janvier 1997, révisé le 30 juin 1997 et le 22 octobre 1997.
H. MAYNADIER, Université d'Angers, Département de Mathématiques, 2 bd. Lavoisier, 49045 Angers CEDEX 01. Email : hlm@tonton.univ-angers.fr.
Mots clés : $\mathcal{D}$-modules, polynôme de Bernstein-Sato généralisé, singularités quasi-homogènes, singularités semi-quasi-homogènes.

Classification AMS : 32C38, 32S05, 14B05.

L'ensemble des polynômes $b(s)$ vérifiant une telle relation est *l'idéal de Bernstein-Sato* de $f = (f_1, \dots, f_p)$, noté $\mathcal{B}(f)$. De même, nous considérons les idéaux $\mathcal{B}_j(f)$, $\mathcal{B}_{\hat{k}}(f)$, $\mathcal{B}_\Sigma(f)$, correspondant respectivement aux cas où $\mathcal{M}$ est le $\mathcal{D}[s]$-module

$$\mathcal{D}[s]f_j f^s,\ (j = 1, \dots, p)\,;\ \sum_{\substack{j=1,\dots,p\\ j\neq k}} \mathcal{D}[s]f_j f^s,\ (k = 1, \dots, p)\,;\ \sum_{j=1}^{p} \mathcal{D}[s]f_j f^s.$$

Nous écrirons seulement $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_j, \dots$ si aucune confusion n'est possible. De plus, nous abrégerons dans la suite $f_1^{s_1} \cdots f_p^{s_p}$ en f^s et $f_1^{s_1+1} \cdots f_p^{s_p+1}$ en f^{s+1}.

Ces équations fonctionnelles donnent lieu à des égalités dans le $\mathbb{C}\{x\}[s, 1/f]$-module libre $\mathbb{C}\{x\}[s, 1/f]f^s$, qui est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}[s]$-module à gauche ($\mathbb{C}\{x\}[s, 1/f]$ est le localisé de $\mathbb{C}\{x\}[s]$ par rapport aux puissances de $f_1 \cdots f_p$).

Fixons un système de poids $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ pour toute la suite, les α_i étant premiers entre eux ; le but de ce travail est de calculer de telles équations fonctionnelles dans les cas où f est une intersection complète α-homogène à singularité isolée, ou une α-intersection complète à singularité isolée.

Rappelons quelques définitions.

• Un polynôme est dit *α-homogène de degré ρ* s'il s'écrit comme combinaison linéaire de monômes $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ avec $\alpha_1 i_1 + \cdots + \alpha_n i_n = \rho$. (Nous introduisons de nouvelles dénominations sur la suggestion du rapporteur, dans le but d'alléger les appellations ; un tel polynôme est habituellement dit « quasi-homogène de degré ρ pour le système α ».)

• Une intersection complète $(f_1, \dots, f_p)$ dont les composantes f_j sont α-homogènes (de degrés ρ_j éventuellement distincts) est elle-même dite α-homogène.

• Nous définissons la fonction d'ordre

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{C}\{x\} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{N}, \\ f = \sum a_I x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} &\longmapsto \rho(f) = \min \Big\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j i_j\ ;\ a_I \neq 0 \Big\} \end{aligned}$$

en posant en outre $\rho(0) = +\infty$. Nous appelons $\mathcal{P}_\rho$ le sous-espace des fonctions d'ordre au moins égal à ρ et $(\mathcal{P}_\bullet)$ la filtration ainsi obtenue ; le gradué associé est $\mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{\rho \in \mathbb{N}} H_\rho$ où H_ρ est le sous-espace vectoriel des polynômes α-homogènes de degré ρ ou nuls.

• La *partie initiale* $\mathrm{In}(f)$ d'une série $f \in \mathbb{C}\{x\}$ est sa composante α-homogène de degré minimal.

• On dit que le germe $V(f_1, \dots, f_p) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ (ou le germe d'application analytique f) est une *α-intersection complète à singularité isolée* (α-SIIC) si les formes initiales des fonctions $f_1, \dots, f_p$ définissent une intersection complète à singularité isolée (on dit habituellement d'un tel germe qu'il est « semi-quasi-homogène pour α »).

• Par ailleurs, la *colongueur* d'un idéal I d'une k-algèbre A est la dimension du k-espace vectoriel quotient A/I.

• Lorsqu'un idéal I α-homogène, c'est-à-dire admettant un système de générateurs α-homogènes, est de colongueur finie, nous appelons *cobase α-homogène de I* un système de polynômes α-homogènes dont les classes forment une base du quotient $\mathbb{C}[x]/I$. L'ensemble des degrés d'une telle famille de polynômes est noté $\mathcal{W}(I)$.

Étant donnée une équation fonctionnelle vérifiée par une application α-homogène, considérer la composante de degré convenable, dans le gradué associé à la filtration $(\mathcal{P}_\bullet)$, permet d'obtenir en fait une équation fonctionnelle α-homogène, donc avec opérateurs dans l'algèbre $\mathbb{A}_n(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[s_1, \dots, s_p]$. Dans les « situations polynomiales », nous notons alors encore $\mathcal{D}$ l'algèbre de Weyl $\mathbb{A}_n(\mathbb{C})$, sauf mention contraire. On peut remarquer par ailleurs que tout ce qui est fait dans la suite est encore valable sur k, un corps algébriquement clos de caractéristique nulle (et $\mathcal{D}$ désigne alors $\mathbb{A}_n(k)$).

Donnons quelques propriétés facilement vérifiables de l'idéal de Bernstein-Sato. On remarque tout d'abord que l'on a les inclusions :

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_j \subset \mathcal{B}_{\hat{k}} \subset \mathcal{B}_\Sigma \quad \text{pour} \quad j \neq k.$$

De plus, si les idéaux $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ ne sont pas nuls, il en est de même pour $\mathcal{B}$. (Il suffit pour le voir de multiplier successivement f^s par un élément non trivial de chaque $\mathcal{B}_j$, en effectuant un décalage sur le p-uplet s.) Pour $j = 1, \dots, p$, notons

$$\widehat{f^j} = (f_1, \dots, \widehat{f_j}, \dots, f_p)$$

l'application obtenue à partir de f en supprimant la j-ième composante ; nous pouvons alors énoncer la

PROPOSITION 1.1. — *Soient $c(s)$ dans $\mathcal{B}_\Sigma(f)$, $b_j(s)$ dans $\mathcal{B}(\widehat{f^j})$ pour $j = 1, \dots, p$, et $d(s)$ le ppcm des polynômes $b_j(s)$. Alors il existe un entier ℓ tel que*

$$d(s)\Big[\prod_{\substack{(\delta_1,\dots,\delta_p)\in\mathbb{N}^p \\ \delta_1+\cdots+\delta_p\leq\ell}} c(s_1+\delta_1, \dots, s_p+\delta_p)\Big] \in \mathcal{B}(f).$$

Preuve. — On remarque tout d'abord que, pour un entier m assez grand :

$$\forall j, \quad d(s)f_j^{m+1}f^s \in \mathcal{D}[s]f^{s+1}.$$

L'idée est donc de commencer par itérer une équation fonctionnelle vérifiée par $c(s)$ jusqu'à obtenir, agissant sur f^s, un opérateur différentiel dont les coefficients (à droite) appartiennent à l'idéal $(f_1, \dots, f_p)^{mp+1}$. On conclut alors en multipliant cette équation par $d(s)$. □

Cette proposition fournit, par récurrence, un polynôme de $\mathcal{B}(f)$ à partir de polynômes de $\mathcal{B}_\Sigma(g)$ pour toutes les familles g extraites de f.

Enfin, on sait déterminer un facteur obligatoire des polynômes de Bernstein-Sato associés aux intersections complètes :

LEMME 1.2. — *Si $f_1, \dots, f_p \in \mathbb{C}\{x\}$ sont deux à deux sans facteur commun, $(s_1+1)\cdots(s_p+1)$ divise tout polynôme de Bernstein-Sato de $f = (f_1, \dots, f_p)$.*

Preuve. — Se placer en un point générique de la variété des zéros de f_j. □

Posons :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$
$$\rho \cdot s = \rho_1 s_1 + \cdots + \rho_p s_p,$$
$$\ell_w(s) = \rho \cdot s + |\alpha| + w \qquad \text{pour tout } w \in \mathbb{N}.$$

De plus, si $K = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{N}^p$, avec $1 \le k_1 < \cdots < k_p \le n$, nous notons Δ_K le $p \times p$-mineur de la matrice jacobienne de f construit sur les colonnes $k_1, \dots, k_p$; si $p = n$, Δ est le déterminant jacobien de f. Nous désignons par $J(f)$ l'idéal engendré par ces mineurs, et posons

$$I(f) = J(f) + (f_1, \dots, f_p).$$

Rappelons que l'opérateur d'Euler associé au système de poids α est

$$\chi = \sum \alpha_i x_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx_i}}.$$

Si f est α-homogène, nous montrons qu'il est suffisant, pour calculer un polynôme réalisant (*), de résoudre le problème suivant : trouver un idéal I de $\mathbb{C}[x]$, α-homogène de colongueur finie, et un polynôme $d(s)$, tels que :

$$d(s) I f^s \subset \mathcal{M}. \tag{**}$$

En effet, si l'on dispose de tels d et I, les monômes de degré assez grand sont éléments de I. Il suffit donc de savoir «faire monter l'ordre» des fonctions apparaissant devant f^s pour conclure. Or cette « ascension » est possible grâce à l'opérateur d'Euler. Nous donnons donc, pour chacun des modules $\mathcal{M}$ considérés, et sous des hypothèses de singularité isolée adaptées, un idéal I et un polynôme d vérifiant (**), et par suite, une formule explicite de polynôme b réalisant une équation fonctionnelle (*). Le résultat général est le

THÉORÈME 1.3. — *Soient $f_1 \in H_{\rho_1}, \dots, f_p \in H_{\rho_p}$. Si, pour tout $k = 1, \dots, p$, tout k-uplet $f_L = (f_{\ell_1}, \dots, f_{\ell_k})$ de fonctions extrait de f définit une intersection complète à singularité isolée, alors pour tout k-uplet $L = (\ell_1, \dots, \ell_k)$ (où $1 \le \ell_1 < \cdots < \ell_k \le p$ et $k = 2, \dots, p$), il existe des entiers positifs m_L tels que, si l'on note l'idéal*

$$I(L) = J(f_L)^{2k-1} + (f_{\ell_1}, \dots, f_{\ell_k})^{k\, m_L + 1},$$

on ait :

$$b(s) = \Big[\prod_{j=1}^{p} (s_j + 1)\Big] \tilde{b}(s) \in \mathcal{B}(f_1, \dots, f_p)$$

où $\tilde{b}(s)$ est le polynôme réduit :

$$\tilde{b}(s) = \prod_{j=1}^{p} \prod_{w \in \mathcal{W}(J(f_j))} (\rho_j s_j + |\alpha| + w)$$
$$\times \prod_{k=2}^{p} \prod_{1 \le \ell_1 < \cdots < \ell_k \le p} \prod_{w \in \mathcal{W}(I(L))} (\rho_{\ell_1} s_{\ell_1} + \cdots + \rho_{\ell_k} s_{\ell_k} + |\alpha| + w).$$

Contrairement à la situation « classique » ($p = 1$), nous ne savons plus *a priori* si l'idéal de Bernstein-Sato de $(f_1, \dots, f_p)$ est principal. Bien qu'il soit plus raisonnable de penser qu'il ne l'est pas, nous montrons ici :

THÉORÈME 1.4 (cas $n = 2$). — *Soit f_1, f_2 des polynômes α-homogènes à singularité isolée, tels que le morphisme $f = (f_1, f_2)$ définisse l'origine dans $\mathbb{C}^2$. Alors l'idéal de Bernstein-Sato de f est principal.*

Plus précisément, sous ces mêmes hypothèses, si les polynômes f_1, f_2, de degrés respectifs $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{N}$, sont de déterminant jacobien $\Delta \in \mathfrak{M}$, considérons l'idéal

$$K = (f_1 f_2, f_1 \Delta, f_2 \Delta).$$

Si $\dim_{\mathbb{C}} H_{\rho(\Delta)} = 1$, posons $\mathcal{W}' = \mathcal{W}(K) - \{\rho(\Delta)\}$; sinon $\mathcal{W}' = \mathcal{W}(K)$. Alors l'idéal de Bernstein-Sato $\mathcal{B}(f)$ est engendré par

$$b(s) = (s_1 + 1)(s_2 + 1) \prod_{w \in \mathcal{W}'} \ell_w(s).$$

(Nous nous permettons de noter $\mathfrak{M}$ aussi bien l'idéal maximal de $\mathbb{C}\{x\}$ que l'idéal maximal engendré par $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{C}[x]$.)

Les démonstrations de ces résultats reposent sur des calculs de variétés caractéristiques et d'annulateurs semblables à ceux de [1]. Le doute quant à la principalité est toutefois levé à présent : on peut trouver le calcul d'un contre-exemple, en dimension 3, dans [5]. Il reste encore à déterminer dans quels cas l'idéal est principal. Signalons que A. Gyoja [9] donne une condition algébrique suffisante, en dimension quelconque, avec $p = 2$.

Enfin, nous étudions le cas des α-SIIC. Nous considérons des fonctions $f_1, \ldots, f_p$ d'ordres $\rho_1, \ldots, \rho_p$ telles que pour tout ℓ, $1 \leq \ell \leq p$, pour tout ℓ-uplet $(j_1, \ldots, j_\ell) \subset \{1, \ldots, p\}$, le germe $V(f_{j_1}, \ldots, f_{j_\ell})$ soit une α-SIIC.

Pour tout ℓ-uplet d'entiers $I = (i_1, \ldots, i_\ell)$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq n$, nous notons $d_{J,I}$ le mineur de la matrice jacobienne de l'application

$$f_J = (f_{j_1}, \ldots, f_{j_\ell})$$

formé sur les colonnes $i_1, \ldots, i_\ell$. Nous définissons alors, si $j_1 < \cdots < j_{\ell-1}$, l'idéal I_J de $\mathbb{C}\{x\}$ engendré par $f_{j_1}, \ldots, f_{j_{\ell-1}}$ et les mineurs $d_{J,I}$.

Les applications $(f_{j_1}, \ldots, f_{j_{\ell-1}})$ et f_J étant des α-SIIC, elles définissent des germes d'intersections complètes à singularité isolée (*cf.* [8, th. 5.1, p. 83] ou [M2, prop. II.1.2.2.2, p. 74]). D'après la formule de Greuel-Lê (voir [7], [10]), I_J est donc un idéal de colongueur finie. Soit alors N le plus petit entier tel que l'idéal $\mathcal{P}_N$ soit inclus dans tous les I_J, et posons

$$N_0 = N + 2\,(\rho_1 + \cdots + \rho_p).$$

La formule permettant de calculer un polynôme de Bernstein-Sato dans ce cadre est donnée par la

PROPOSITION 1.5. — *Soient des fonctions $f_1, \ldots, f_p$ d'ordres non nuls $\rho_1, \ldots, \rho_p$ pour le système de poids α, telles que toute famille extraite de $\{f_1, \ldots, f_p\}$ définisse une α-SIIC. Alors*

$$b(s) = \Big[\prod_{j=1}^{p}(s_j + 1) \prod_{0 \leq w \leq N_0} \ell_w(s)\Big] \in \mathcal{B}(f_1, \ldots, f_p).$$

Les principes du calcul s'inspirent des deux procédures de « montée des poids » (c'est-à-dire « montée de l'ordre » selon nos notations) et « récriture par division » qui sont les bases de l'algorithme mis au point par J. Briançon, M. Granger, Ph. Maisonobe et M. Miniconi [4] dans le cas d'une hypersurface.

Ce polynôme de Bernstein-Sato n'est pas directement comparable à celui calculé pour les α-homogènes. D'une part, dans la formule du théorème 1.3, $\tilde{b}(s)$ est un produit de formes affines correspondant à toutes les sous-familles, alors que seules des formes associées à $(f_1,\ldots,f_p)$ interviennent dans le polynôme de la proposition 1.5. D'autre part, nous verrons que l'idée de notre algorithme de calcul, appliquée aux α-homogènes, ne «perturbe» pas le symbole $f_1^{s_1}\cdots f_p^{s_p}$, alors qu'il fait apparaître en général des $f_1^{s_1-k_1}\cdots f_p^{s_p-k_p}$. Ce fait se traduit par des «décalages entiers» entre les facteurs $\ell_w(s)$ du polynôme de Bernstein-Sato calculé pour les α-SIIC, et celui obtenu pour les intersections complètes α-homogènes à singularité isolée (le phénomène avait déjà lieu dans le cas d'une hypersurface [4]). Ainsi, on peut écrire la «dernière» forme, ℓ_{N_0}, de la manière suivante :

$$\ell_{N_0}(s) = \rho_1[s_1 - (-2)] + \cdots + \rho_p[s_p - (-2)] + |\alpha| + N$$

où -2 est la plus petite valeur possible pour les décalages k_j dans l'algorithme. De plus, pour les α-SIIC, les constantes w croissent jusqu'à $N_0 = N+2\rho_1+\cdots+2\rho_p$, où N est le plus petit entier majorant strictement les degrés des cobases des idéaux associés à toutes les sous-familles, alors que dans la situation α-homogène, les w ne prennent que les valeurs des degrés des cobases.

On peut par ailleurs donner, en utilisant [3], la majoration suivante de N en fonction des ordres :

$$N \leq (n+1)(\rho_1 + \cdots + \rho_p).$$

On en déduit que les décalages entiers dans les facteurs $\ell_w(s)$ correspondent à des multi-indices $\kappa = (k_1,\ldots,k_p)$ tels que

$$\rho\cdot\kappa < (n+1)(\rho_1 + \cdots + \rho_p).$$

Comme dans le cas d'une intersection complète α-homogène, nous obtenons un polynôme de Bernstein-Sato pour une α-SIIC, en supposant que toutes les sous-familles vérifient les hypothèses de singularité isolée. Toutefois, le traitement de la situation α-SIIC (pour $p \geq 2$) fait apparaître de nouveaux problèmes pour la recherche d'autres types d'équations fonctionnelles. Ainsi, nous verrons que l'on peut trouver dans

$$(s_1+1)\cdots(s_p+1)\mathbb{C}[\rho_1 s_1 + \cdots + \rho_p s_p]$$

des polynômes de l'idéal $\mathcal{B}_\Sigma$ d'une intersection complète α-homogène à singularité isolée.

L'exemple suivant montre que ce n'est plus vrai pour une α-SIIC. Soit

$$f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2,$$
$$x = (x_1, x_2) \longmapsto (f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_2^2 + x_1^3).$$

Le polynôme de Bernstein-Sato de f_1 est $b_1(s_1) = (s_1 + 1)$. En outre, f_2 est un polynôme $(2,3)$-homogène, à singularité isolée; son polynôme de Bernstein-Sato est

$$b_2(s_2) = (s_2 + 1)(6s_2 + 5)(6s_2 + 7).$$

L'application f définissant l'origine, le théorème 1.4 affirme alors que son idéal de Bernstein-Sato est engendré par le polynôme

$$\begin{aligned} b(s) = (s_1 + 1)(s_2 + 1)(2s_1 + 6s_2 + 5)(2s_1 + 6s_2 + 7) \\ \times (2s_1 + 6s_2 + 9)(2s_1 + 6s_2 + 11). \end{aligned}$$

D'autre part, f est une $(2,1)$-SIIC, d'ordre $(2,2)$. Si un polynôme appartenant à l'espace vectoriel $(s_1 + 1)(s_2 + 1)\mathbb{C}[2s_1 + 2s_2]$ était élément de l'idéal $\mathcal{B}_\Sigma(f)$, on sait, d'après la proposition 1.1, que f admettrait un polynôme de Bernstein-Sato de la forme :

$$\begin{aligned} b'(s) = \prod_{k \in A_1} (s_1 + k)^{m_1(k)} \prod_{k \in A_2} (s_2 + k)^{m_2(k)} (6s_2 + 5)(6s_2 + 7) \\ \times \prod_{\lambda \in \Lambda} (s_1 + s_2 + \lambda)^{m(\lambda)} \end{aligned}$$

(où A_1, A_2 sont des sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$, Λ un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$, et $m_1(k)$, $m_2(k)$, $m(\lambda)$ des entiers positifs), ce qui est impossible. $\square$

Les résultats de cet article sont extraits de ma thèse de doctorat. Je tiens à remercier Joël BRIANÇON, qui a guidé mes recherches.

2. Le cas des intersections complètes α-homogènes à singularité isolée

2.1. La recherche d'équations.

Soit g une application α-homogène; si un idéal $I \subset \mathbb{C}[x]$ et un polynôme $d(s) \in \mathbb{C}[s]$ vérifient une relation $d(s)If^s \subset \mathcal{M}$, on dit que le couple $(I, d(s))$ est du type

- (B) si $\mathcal{M} = \mathcal{D}[s]g^{s+1}$;
- $(B_{\hat{k}})$ si $\mathcal{M} = \sum_{1 \leq j \leq p, j \neq k} \mathcal{D}[s]g_j g^s$;
- (B_j) si $\mathcal{M} = \mathcal{D}[s]g_j g^s$;
- (B_Σ) si $\mathcal{M} = \sum_{j=1}^p \mathcal{D}[s]g_j g^s$.

LEMME 2.1.1 (montée des ordres). — *Soit $I \subset \mathbb{C}[x]$ un idéal α-homogène de colongueur finie. Alors, pour tout entier k_0, on a l'inclusion*

$$\Big[\prod_{\substack{w\in\mathcal{W}(I)\\ w\geq k_0}} \ell_w(s)\Big]\mathcal{P}_{k_0}g^s \subset \mathcal{D}[s]Ig^s.$$

Preuve. — Ce résultat se démontre par récurrence décroissante sur k_0 ; il repose sur l'identité d'Euler écrite pour ug^s, avec u dans H_{k_0} tel que $k_0 \in \mathcal{W}(I)$:

$$(\rho\cdot s + |\alpha| + k_0)ug^s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx_i}}(x_i u g^s). \quad \square$$

On déduit directement de ce lemme-clef (avec $k_0 = 0$) le résultat suivant :

PROPOSITION 2.1.2. — *S'il existe $I \subset \mathbb{C}[x]$, idéal α-homogène de colongueur finie, et $d(s) \in \mathbb{C}[s]$ non nul, formant un couple du type (B) (resp. (B_j), ou $(B_{\hat{k}})$, ou (B_Σ)), alors l'idéal $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}_j$, ou $\mathcal{B}_{\hat{k}}$, ou $\mathcal{B}_\Sigma$) contient un élément non trivial :*

$$b(s) = d(s)\prod_{w\in\mathcal{W}(I)} \ell_w(s).$$

2.1.3. *Exemple : un arrangement d'hyperplans.* — Soient $g_1,\ldots,g_{n+1}$ des formes linéaires sur $\mathbb{C}^n$ indépendantes n à n. Alors la proposition précédente, avec $I = (g_1,\ldots,g_{n+1})^{n+1}$, assure que

$$(s_1+1)\cdots(s_{n+1}+1)(s_1+\cdots+s_{n+1}+n)\cdots(s_1+\cdots+s_{n+1}+2n)$$

est un polynôme de Bernstein-Sato de $g = (g_1,\ldots,g_{n+1})$.

2.2. Les équations obtenues.

Voici maintenant les différents polynômes de Bernstein-Sato calculés, à l'aide de la proposition 2.1.2, pour une *intersection complète α-homogène à singularité isolée* $f = (f_1,\ldots,f_p)$, de degrés $\rho_1,\ldots,\rho_p$ non nuls. Rappelons que, d'après la formule de Greuel-Lê (*cf.* [7], [10]), si une intersection complète à singularité isolée $g = (g_1,\ldots,g_p) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ est telle que la variété définie par $\hat{g}^k$, un $(p-1)$-uplet extrait, soit à singularité isolée, alors l'idéal $(g_1,\ldots,\widehat{g_k},\ldots,g_p) + J(g)$ est de colongueur finie.

Corollaire 2.2.1 (cas $n = p = 2$). — *Supposons de plus que f_1 et f_2 soient à singularité isolée, et soit l'idéal $K = (f_1 f_2, f_1\Delta, f_2\Delta)$. Alors*

$$b(s) = (s_1+1)(s_2+1) \prod_{w\in\mathcal{W}(K)} \ell_w(s) \in \mathcal{B}(f_1, f_2).$$

Preuve. — L'idéal K est de colongueur finie, et le couple qu'il forme avec le polynôme $d(s) = (s_1+1)(s_2+1)$ est du type (B) : il suffit de constater que, si $\{i,j\} = \{1,2\}$:

$$\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx_i}} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx_j}}\Big) f^{s+1} = (s_i+1) f_j \Delta f^s. \quad \square$$

Corollaire 2.2.2. — *Pour tout $d(s)$ dans $\sum\limits_{j=1}^{p} \mathbb{C}[s](s_j+1)$,*

$$b(s) = d(s) \prod_{w\in\mathcal{W}(I(f))} \ell_w(s) \in \mathcal{B}_\Sigma(f_1,\ldots,f_p).$$

Preuve. — Pour $j = 1,\ldots,p$ et $1 \le k_1 < \cdots < k_p \le n$, avec $K = (k_1,\ldots,k_p)$, soient $\sigma_{j,1}^{(K)},\ldots,\sigma_{j,p}^{(K)}$ les cofacteurs respectivement relatifs à $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_{k_1}},\ldots,\dfrac{\partial f_j}{\partial x_{k_p}}$ dans le mineur Δ_K. Considérant l'opérateur

$$\Xi_{j,K} = \sum_{\ell=1}^{p} \sigma_{j,\ell}^{(K)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_{k_\ell}}$$

nous obtenons

$$(\Diamond) \qquad \Xi_{j,K} f_j f^s = (s_j+1)\Delta_K f^s.$$

Le couple $(I(f), d(s))$ est donc du type (B_Σ). $\square$

Corollaire 2.2.3. — *Supposons qu'un $(p-1)$-uplet extrait $\widehat{f^k}$ définisse encore une intersection complète à singularité isolée, et posons*

$$I = (f_1,\ldots,\widehat{f_k},\ldots,f_p) + J(f)\,;$$

alors pour tout $d(s)$ élément de $\sum\limits_{j\neq k} \mathbb{C}[s](s_j+1)$, on a :

$$b(s) = d(s) \prod_{w\in\mathcal{W}(I)} \ell_w(s) \in \mathcal{B}_{\hat{k}}(f_1,\ldots,f_p).$$

Preuve. — La formule ($\diamondsuit$) donnée dans la preuve du corollaire 2.2.2 permet encore de démontrer que pour tout

$$d(s) \in \sum_{j \neq k} \mathbb{C}[s](s_j + 1),$$

le couple $(I, d(s))$ est du type $(B_{\hat{k}})$. $\square$

2.3. Preuve du théorème 1.3.

La méthode suivie jusqu'ici échoue dans le cas général pour le calcul d'un élément de l'idéal $\mathcal{B}$. De fait, il nous faut, pour réussir, des hypothèses supplémentaires de singularité isolée sur toutes les familles extraites. Nous raisonnons par récurrence sur p.

- Pour $p = 1$, la proposition 2.2.2 nous donne le résultat. Dans ce cas, en effet, $I(f) = J(f)$.
- Supposons la proposition vraie au rang $p-1$. Le ppcm des polynômes $b_j \in \mathcal{B}(\widehat{f^j})$, où $j = 1, \ldots, p$, donnés par l'hypothèse de récurrence s'écrit $d(s) = \big[\prod_{j=1}^{p} (s_j + 1)\big] \tilde{d}(s)$, où $\tilde{d}(s)$ est de la forme demandée avec $k \leq p-1$.

Considérons l'idéal de colongueur finie $I = J(f)^q + (f_1, \ldots, f_p)^{mp+1}$.

— En itérant l'identité ($\diamondsuit$) de la preuve du corollaire 2.2.2, nous obtenons : pour tout u élément de $(J(f))^q$, avec q au moins égal à $2p-1$,

$$(s_1 + 1) \cdots (s_p + 1) u f^s \in \mathcal{D}[s] f^{s+1}.$$

— Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$b_j(s) f_j^{m+1} f^s \in \mathcal{D}[s] f^{s+1} \quad \text{pour } j = 1, \ldots p.$$

Alors, si v est dans$(f_1, \ldots, f_p)^{mp+1}$, $d(s) v f^s$ appartient à $\mathcal{D}[s] f^{s+1}$.

Le résultat est alors donné par la proposition 2.1.2. $\square$

3. Un idéal de Bernstein-Sato principal en dimension 2

Le but de cette partie est de démontrer le théorème 1.4.

Les résultats des sections 3.1 et 3.2, dont nous allons nous servir dans le cas α-homogène, sont valables plus généralement dans l'anneau $\mathbb{C}\{x\}$ des germes de fonctions holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^2$; nous désignons alors par $\mathcal{D}$ l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbb{C}\{x\}$.

Soient $f_1, f_2 \in \mathbb{C}\{x\} = \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$ *dans l'idéal maximal* (x_1, x_2), *à singularité isolée, tels que* $f = (f_1, f_2)$ *définisse l'origine.*

Notons K l'idéal $(f_1 f_2, f_1\Delta, f_2\Delta)$ et :

$$
\begin{aligned}
S_1 &= f'_{1x_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_2} - f'_{1x_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_2}f'_{1x_1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_1}f'_{1x_2} \in \mathcal{D},\\
S_2 &= f'_{2x_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_1} - f'_{2x_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_1}f'_{2x_2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_2}f'_{2x_1} \in \mathcal{D},\\
R_1(s_1) &= f_1 S_2 - s_1\Delta = S_2 f_1 - (s_1+1)\Delta \in \mathcal{D}[s_1],\\
R_2(s_2) &= f_2 S_1 - s_2\Delta = S_1 f_2 - (s_2+1)\Delta \in \mathcal{D}[s_2].
\end{aligned}
$$

Nous désignons respectivement par s et ξ les couples d'indéterminées (s_1, s_2) et (ξ_1, ξ_2).

3.1. L'annulateur de f^s dans $\mathcal{D}[s_1]$.

Considérons, sur un voisinage X de $\{0\}$ dans $\mathbb{C}^2$ assez petit, les espaces conormaux relatifs à f_1 et f :

$$
\begin{aligned}
W_{f_1} &= \overline{\{(x, (s/f_1)\mathrm{d}f_1)\,;\ x \notin f_1^{-1}(0),\ s \in \mathbb{C}\}} \subset T^*X,\\
W_f &= \overline{\{(x, (s_1/f_1)\mathrm{d}f_1 + (s_2/f_2)\mathrm{d}f_2)\,;\ x \notin f_1^{-1}(0) \cup f_2^{-1}(0)\}} \subset T^*X
\end{aligned}
$$

ainsi que que le sous-espace de $T^*X \times \mathbb{C}$ suivant :

$$
W_f^{\#,1} = \overline{\{(x, (s_1/f_1)\mathrm{d}f_1 + (s_2/f_2)\mathrm{d}f_2, s_1)\,;\ x \notin f_1^{-1}(0) \cup f_2^{-1}(0)\}}.
$$

Si P est dans $\mathcal{D}[s]$, nous notons $\sigma(P)$ son symbole principal, qui est un élément de $\mathbb{C}\{x\}[\xi, s]$.

LEMME 3.2.1.

(a) *$W_f^{\#,1}$ est inclus dans la variété caractéristique de $\mathcal{D}[s_1]f^s$.*

(b) *$(\sigma(R_1))$ est l'idéal premier des fonctions nulles sur $W_f^{\#,1}$.*

Preuve.

(a) Étant donné $P \in \mathcal{D}[s_1]$, de degré total d, annulant f^s, considérer la composante de degré d en s de Pf^s dans $\mathbb{C}\{x\}[1/f, s]f^s$.

(b) En effet, $(\sigma(R_1))^{-1}(0) = W_f^{\#,1}$: $W_f^{\#,1}$ est un sous-ensemble analytique irréductible de dimension 4 de $T^*\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$; or c'est aussi le cas de $(\sigma(R_1))^{-1}(0)$, dans lequel il est inclus. $\square$

PROPOSITION 3.1.2. — *L'annulateur de f^s dans $\mathcal{D}[s_1]$ est un idéal principal, engendré par $R_1(s_1)$.*

Preuve. — Si $P \in \mathcal{D}[s_1]$ annule f^s, son symbole est multiple de celui de R_1, d'après le lemme 3.1.1. Par suite, P admet une écriture $P = QR_1 + S$, où $\deg S < \deg P$, et $S \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}[s_1]} f^s$. On conclut en raisonnant par récurrence sur le degré. □

3.2. L'annulateur de $f_1^\lambda f_2^{s_2}$ dans $\mathcal{D}$, pour λ non entier positif.

LEMME 3.2.1. — *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'espace conormal relatif à f_2 est inclus dans la variété caractéristique de $\mathcal{D} f_1^\lambda f_2^{s_2}$.*

Preuve. — L'idée de la preuve est semblable à celle de la première partie du lemme 3.1.1. □

PROPOSITION 3.2.2. — *Si $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{N}$, l'annulateur de $f_1^\lambda f_2^{s_2}$ dans $\mathcal{D}$ est engendré par $R_1(\lambda)$.*

Preuve. — Nous menons un raisonnement par récurrence sur le degré d d'un opérateur $P \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}} f_1^\lambda f_2^{s_2}$. D'après le lemme 3.2.1, $\sigma(P)$ est nul sur W_{f_2}, c'est-à-dire

$$\sigma(P) = \widetilde{Q} \cdot (f'_{2x_2}\xi_1 - f'_{2x_1}\xi_2)$$

(voir [16, lemme 2.20, p. 133–134]), où $\widetilde{Q}$ est un polynôme homogène en ξ, de degré $d-1$. Alors

$$P = Q \cdot \Big(f'_{2x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_1} - f'_{2x_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_2} \Big) + R, \quad \text{où} \quad \deg Q = d-1,\ \deg R < d,$$

et l'opérateur $P' = \lambda Q\Delta + Rf_1$, de degré inférieur ou égal à $d-1$, annule $f_1^{\lambda-1} f_2^{s_2}$, où $\lambda - 1 \notin \mathbb{N}$. Par hypothèse de récurrence, il existe donc un opérateur S de $\mathcal{D}$ tel que $P' = SR_1(\lambda - 1)$.

Ainsi, la quantité $\lambda\sigma(Q)\Delta + \sigma_{d-1}(R)f_1$ (qui est soit nulle, soit égale au symbole de P') est multiple de f_1. Or, f_1 est premier avec Δ. Par suite,

$$\sigma(P) = \widetilde{Q}' f_1 (f'_{2x_2}\xi_1 - f'_{2x_1}\xi_2)$$

et P est de la forme $P = Q'R_1(\lambda) + R'$, où R', qui est de degré strictement inférieur à d, vérifie l'hypothèse de récurrence. □

Bien sûr, on établit de même les analogues des résultats de ce paragraphe 3.2 en spécialisant s_2 au lieu de s_1.

3.3. L'idéal de Bernstein-Sato d'une application (f_1, f_2) α-homogène.

Donnons-nous un système de poids $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ premiers entre eux. Dorénavant, nous supposons de plus que f_1 et f_2 sont des polynômes *α-homogènes*, de degré respectifs ρ_1 et ρ_2 non nuls. La proposition 3.1.2 admet donc ici le corollaire suivant (où $\mathcal{D}$ désigne à nouveau l'algèbre de Weyl) :

COROLLAIRE 3.3.1. — *On a :*

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s = (R_1, \chi - \rho_1 s_1 - \rho_2 s_2) = (R_2, \chi - \rho_1 s_1 - \rho_2 s_2).$$

On sait que si $f = (f_1, f_2)$ est une submersion, son idéal de Bernstein-Sato est principal, engendré par $(s_1 + 1)(s_2 + 1)$. Nous nous intéressons donc maintenant au cas où Δ est *dans l'idéal maximal* $\mathfrak{M} = (x_1, x_2)$.

LEMME 3.3.2. — *Soient* $1 - \lambda \notin \mathbb{N}$ *et* $c(s) \in \mathbb{C}[s]$; *si* $(s_1 + \lambda)c(s)$ *est dans* $\mathcal{B}$, *alors* $c(s)$ *appartient à* $\mathcal{B}$.

Preuve. — Par hypothèse, il existe un opérateur P de $\mathcal{D}[s]$ tel que

$$(s_1 + \lambda)c(s) f^s = P f^{s+1}. \tag{$\natural$}$$

Quitte à diviser P à droite par l'opérateur $\chi - \rho_1(s_1 + 1) - \rho_2(s_2 + 1)$, nous pouvons supposer que P ne dépend pas de s_2. La division de P par $s_1 + \lambda$ s'écrit alors $P = Q \cdot (s_1 + \lambda) + R, Q \in \mathcal{D}[s_1], R \in \mathcal{D}$, et l'on déduit de ($\natural$) que R annule $f_1^{-\lambda+1} f_2^{s_2+1}$. Ainsi, d'après la proposition 3.2.2, il existe un opérateur S de $\mathcal{D}$ tel que $R = S R_1(-\lambda + 1)$. Reportons cette expression dans ($\natural$) ; il vient

$$(s_1 + \lambda)c(s) f^s = (Q + S\Delta) \cdot (s_1 + \lambda) f^{s+1},$$

et il en découle que $c(s) f^s = (Q + S\Delta) f^{s+1}$. $\square$

LEMME 3.3.3. — *Soit* $c(s) \in \mathbb{C}[s]$; *si* $(s_1 + 1)^2 c(s)$ *est dans* $\mathcal{B}$, *alors* $(s_1 + 1)c(s)$ *appartient à* $\mathcal{B}$.

Preuve. — L'application f étant α-homogène, on peut supposer que

$$(s_1 + 1)^2 c(s) f^s = P f^{s+1}, \quad P \in \mathcal{D}[s_1],$$

soit encore, en divisant P par $s_1 + 1$:

$$(s_1 + 1)^2 c(s) f^s = \big(Q \cdot (s_1 + 1) + R\big) f^{s+1}, \quad Q \in \mathcal{D}[s_1],\ R \in \mathcal{D}.$$

Fixer $s_1 = -1$ permet d'en déduire que

$$R \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}} f_2^{s_2+1} = \Big(f'_{2x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_1} - f'_{2x_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_2}\Big)$$

(voir [Mal, p. 117] ou [Y, th. 2.19, p. 133]). Il existe donc un opérateur S de $\mathcal{D}$ tel que

$$(s_1 + 1)c(s) f^s = Q f^{s+1} + S\Delta f_1^{s_1} f_2^{s_2+1}.$$

Alors, d'après la proposition 3.2.2, l'opérateur $Q(-1)f_1 + S\Delta$ est un multiple de $R_1(-1) = \left(f'_{2x_2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_1} - f'_{2x_1}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_2}\right)f_1$. D'où le résultat, après division de Q par (s_1+1). □

LEMME 3.3.4. — *Sous les hypothèses du théorème* 1.4 (*avec* $\Delta \in \mathfrak{M}$), *supposons que* $\dim_{\mathbb{C}} H_{\rho(\Delta)} = 1$. *Alors la forme affine* $\ell_{\rho(\Delta)}(s)$ *n'est pas un facteur de tous les polynômes de* $\mathcal{B}(f)$.

Preuve. — Nous utilisons la méthode propre au cas des applications α-homogènes : nous « faisons monter l'ordre » par le lemme 2.1.1, sauf pour les termes de la forme Puf^s ($P \in \mathcal{D}[s]$ et $u \in H_{\rho(\Delta)}$), pour lesquels nous procédons de la façon suivante : par hypothèse, u est nécessairement égal à Δ (à une constante multiplicative près). Or, nous disposons de l'égalité

$$(s_1+1)\Delta f^s = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_1}f'_{2x_2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_2}f'_{2x_1}\right)f_1^{s_1+1}f_2^{s_2}$$

où $\rho(f'_{2x_2}f_1) = \rho_1 + \rho_2 - \alpha_2$ et $\rho(f'_{2x_1}f_1) = \rho_1 + \rho_2 - \alpha_1$ sont strictement supérieurs à $\rho(\Delta)$. Nous pouvons ainsi obtenir un polynôme $d(s)$ non divisible par $\ell_{\rho(\Delta)}(s)$ tel que $d(s)f^s$ appartienne à $\mathcal{D}[s](f_2,\Delta)f_1^{s_1+1}f_2^{s_2}$. Or

$$(s_2+1)(f_2,\Delta)f_1^{s_1+1}f_2^{s_2} \subset \mathcal{D}[s]f^{s+1}.$$

Finalement, nous avons construit un polynôme de Bernstein-Sato de (f_1,f_2) dont $\ell_{\rho(\Delta)}(s)$ n'est pas facteur. □

REMARQUE. — Les couples (f_1,f_2) vérifiant les hypothèses du lemme précédent sont (quitte à échanger f_1 et f_2) de la forme

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} f_1 = a_{1,1}x_1^{\alpha_2} + a_{1,2}x_2^{\alpha_1} \\ f_2 = a_{2,1}x_1^{\alpha_2} + a_{2,2}x_2^{\alpha_1} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0, \\ \text{et, si } \alpha_1 \neq 1 \text{ et } \alpha_2 \neq 1, \\ a_{1,1}a_{1,2} \neq 0,\ a_{2,1}a_{2,2} \neq 0, \end{cases}$$

ou

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} f_1 = x_1, \\ f_2 = cx_1^{\alpha_2} + dx_2^{\alpha_1} \end{cases} \quad \text{avec} \quad cd \neq 0 \text{ si } \alpha_1 \neq 1 \text{ et } \alpha_2 \neq 1,$$

ou

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} f_1 = x_2 \\ f_2 = cx_1^{\alpha_2} + dx_2^{\alpha_1} \end{cases} \quad \text{avec} \quad cd \neq 0 \text{ si } \alpha_1 \neq 1 \text{ et } \alpha_2 \neq 1.$$

Preuve du théorème 1.4. — Soit $b(s)$ le pgcd des générateurs de $\mathcal{B}$; alors $\mathcal{B}$ se décompose en produit d'idéaux $\mathcal{B} = (b(s)) \cdot \mathcal{B}'$, où $\mathcal{B}'$ définit un nombre fini de points de $\mathbb{C}^2$: $V(\mathcal{B}') = \{(a_{k1}, a_{k2})\}_{k=1,\dots,N}$. D'après le théorème des zéros, il existe un entier m tel que

$$b(s) \prod_{k=1}^{N} (s_j - a_{kj})^m \in \mathcal{B}, \qquad j = 1, 2.$$

Par suite, nous savons, grâce au lemme 3.3.2, que $V(\mathcal{B}')$ est contenu dans $(-1,-1) + \mathbb{N}^2$. D'autre part, le corollaire 2.2.1 assure que

$$V(\mathcal{B}') \subset \{s_1 = -1\} \cup \{s_2 = -1\} \cup \bigcup_{w \in \mathcal{W}(K)} \{\ell_w(s) = 0\}.$$

Les coefficients des formes affines $\ell_w(s)$ étant strictement positifs, aucun point de $\mathbb{N}^2$ ne peut appartenir à $V(\mathcal{B}')$. Finalement, $V(\mathcal{B}')$ est inclus dans $\{s_1 = -1\} \cup \{s_2 = -1\}$, et il existe un entier r tel que $b(s)(s_1+1)^r(s_2+1)^r$ soit dans $\mathcal{B}$. D'après les lemmes 3.3.3 et 1.2, $b(s)$ est donc lui-même élément de $\mathcal{B}$.

Nous cherchons maintenant à déterminer un générateur de $\mathcal{B}$, dans le cas où $\Delta \in \mathfrak{M}$. En fait, d'après le corollaire 2.2.1 et le lemme 1.2, l'idéal $\mathcal{B}$ est engendré par :

$$b(s) = (s_1 + 1)(s_2 + 1)\tilde{b}(\rho_1 s_1 + \rho_2 s_2),$$

où $\tilde{b}$ est un polynôme à une variable.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe u dans H_w ($w \neq \rho(\Delta)$ dans les cas (I), (II), (III)), et $u \notin K$, tel que $\tilde{b}(-\alpha_1 - \alpha_2 - w) \neq 0$. Il existe un opérateur P de $\mathcal{D}[s]$ tel que

$$(\ominus) \qquad (s_1 + 1)(s_2 + 1)\tilde{b}(\rho_1 s_1 + \rho_2 s_2) f^s = P f^{s+1}.$$

Nous pouvons supposer que $P \in \mathcal{D}[s_1]$, et après division,

$$P(s_1) = (s_1 + 1)A(s_1) + B, \quad A \in \mathcal{D}[s_1], \ B \in \mathcal{D}.$$

Si l'on pose $s_1 = -1$, $(\ominus)$ donne $B = C \cdot \left(f'_{2x_2} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_1} - f'_{2x_1} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}_2}\right)$, avec $C \in \mathcal{D}$ (d'après [11, p. 117] ou [16, th. 2.19, p. 133]). D'après $(\ominus)$, il vient alors

$$(s_2 + 1)\tilde{b}(\chi) - A(s_1) f_1 f_2 - C \Delta f_2 \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}[s]} f^s.$$

Si $A' \in \mathcal{D}[s_2]$ est le reste de la division de A par $\chi - \rho_1(s_1+1) - \rho_2(s_2+1)$, cela donne encore :

$$(s_2+1)\tilde{b}(\chi) - A'(s_2)f_1f_2 - C\Delta f_2 = D(s_2)R_2, \quad D \in \mathcal{D}[s_2]$$

d'après la proposition 3.1.2. Multiplions cette égalité à gauche par u. Or

$$\begin{aligned} u\chi &= u\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx_i}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx_i}} x_i u - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(u + x_i u'_{x_i}) \\ &= (\bar{\chi} - |\alpha| - w)u, \end{aligned}$$

où l'on note $\bar{\chi} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx_i}} x_i$; il vient donc

$$(\bowtie) \qquad \begin{aligned} (s_2+1)\tilde{b}(\bar{\chi} - |\alpha| - w)u &= \widetilde{A}(s_2)f_1f_2 + \widetilde{C}\Delta f_2 \\ &+ \widetilde{D}(s_2)\Big[\Big(f'_{1x_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx_2}} - f'_{1x_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx_1}}\Big)f_2 - (s_2+1)\Delta\Big] \end{aligned}$$

où $\widetilde{A} \in \mathcal{D}[s_2]$, de degré en s_2, r, non nul, $\widetilde{C} \in \mathcal{D}, \widetilde{D} \in \mathcal{D}[s_2]$. Identifions alors, dans cette égalité entre éléments de $\mathcal{D}[s_2]$, les coefficients des puissances de (s_2+1) ; sachant que f_1 est premier avec Δ, on montre que l'on a, pour le degré 1 :

$$\tilde{b}(\bar{\chi} - |\alpha| - w)u = A_1f_1f_2 + D_1S_1f_1f_2 + D_2\Delta,$$

où $A_1, D_1, D_2 \in \mathcal{D}$. En considérant le terme constant en les dérivations, nous arrivons à

$$\tilde{b}(-|\alpha| - w)u \in (f_1f_2, \Delta),$$

soit une relation α-homogène

$$(\smile) \qquad u = \lambda f_1 f_2 + \mu\Delta, \lambda, \mu \in \mathbb{C}[x],$$

puisque nous avons supposé que $-|\alpha| - w$ n'annule pas $\tilde{b}$. De plus, $u \notin K$ par hypothèse. Il s'ensuit que $u' = \mu\Delta \notin K$.

D'autre part, nous pouvons écrire, d'après $(\bowtie)$,

$$(s_2+1)\tilde{b}(\bar{\chi} - |\alpha| - w)\mu\Delta f^s = \Big[\bar{A}(s_2)f_1f_2 + \widetilde{C}\Delta f_2\Big]f^s,$$

où $\bar{A} \in \mathcal{D}[s_2]$. Après division de $\bar{A}$ par $\chi - \rho_1(s_1+1) - \rho_2(s_2+1)$, nous avons encore, pour un $\breve{A} \in \mathcal{D}[s_1]$,

$$\tilde{b}(\bar{\chi} - |\alpha| - w)\mu S_1 f_2 f^s = \left[\breve{A}(s_1) f_1 f_2 + \widetilde{C}\Delta f_2\right] f^s.$$

Il en découle que

$$\tilde{b}(\bar{\chi} - |\alpha| - w)(S_1\mu - S_1(\mu)) - (\breve{A}(s_1)f_1 + \widetilde{C}\Delta) = E(s_1)(S_2 f_1 - (s_1+1)\Delta)$$

d'après le calcul d'annulateur de la proposition 3.1.2. Nous identifions ensuite les termes constants; en utilisant encore l'hypothèse faite sur $\tilde{b}(-|\alpha| - w)$, il vient $S_1(\mu) \in (f_1, \Delta)$, et l'on peut obtenir de même que $S_2(\mu) \in (f_2, \Delta)$. D'où l'égalité matricielle :

$$\Delta\begin{pmatrix} \mu'_{x_1} \\ \mu'_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_{2x_1} & f'_{1x_1} \\ f'_{2x_2} & f'_{1x_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} af_1 + b\Delta \\ cf_2 + d\Delta \end{pmatrix},$$

puis, en multipliant à gauche par la matrice ligne $(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2)$:

$$\rho(\mu)\Delta\,\mu = (\rho_2 f_2, \rho_1 f_1)\begin{pmatrix} af_1 + b\Delta \\ cf_2 + d\Delta \end{pmatrix} \in (f_1 f_2, f_1\Delta, f_2\Delta).$$

- Si μ n'est pas constant, ce résultat contredit ce qui a été déduit précédemment de l'hypothèse $u \notin K$.
- Si $\mu \in \mathbb{C}$, l'égalité α-homogène ($\smile$) impose, d'une part, qu'il ne soit pas nul, et d'autre part, que $u = \mu\Delta$, après considération des ordres. Nous sommes donc dans le cas où $w = \rho(\Delta)$. Hormis les cas (I), (II), (III), où $\ell_{\rho(\Delta)}(s)$ n'est pas facteur obligatoire de $\tilde{b}(s)$, d'après le lemme 3.3.4, nous savons grâce à la remarque 3.3.5 qu'il existe un monôme u de degré $\rho(\Delta)$ qui ne s'écrit pas $\mu\Delta$. Nous sommes donc ramenés au cas précédent ($\rho(\mu) \neq 0$), et nous concluons encore à une absurdité. □

3.4. Un exemple.

Considérons l'application $(5,3)$-homogène de degré $(5,15)$:

$$f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2,$$
$$x = (x_1, x_2) \longmapsto (f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_1^3 + x_2^5),$$

Le déterminant jacobien est de degré 12. L'idéal engendré par $f_1 f_2$, $f_1\Delta$ et $f_2\Delta$ coïncide avec l'idéal $(x_1^4, x_2^9, x_1 x_2^4)$, dont l'ensemble de monômes

$$\left\{ \{x_1^i x_2^j\}_{\substack{0\le i\le 3 \\ 0\le j\le 3}}, \{x_2^i\}_{4\le i\le 8} \right\}$$

est une cobase $(5,3)$-homogène. L'ensemble de ses degrés est

$$\{0,3,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18,19,21,24\} = \mathcal{W}.$$

Soit $\mathcal{W}' = \mathcal{W} - \{12\}$. L'idéal de Bernstein-Sato de f est donc engendré par le polynôme

$$b(s) = (s_1+1)(s_2+1)\prod_{w\in\mathcal{W}'}(5s_1+15s_2+8+w).$$

4. Équations fonctionnelles pour une α-intersection complète à singularité isolée

Soient $f_1,\ldots,f_p$ des éléments de $\mathbb{C}\{x\}$ d'ordres $(\rho_1,\ldots,\rho_p) = \rho \in (\mathbb{N}^*)^p$ pour α. Nous définissons les fonctions h_j d'ordre strictement supérieur à ρ_j :

$$h_j = \chi(f_j) - \rho_j f_j, \qquad \text{pour tout } j = 1,\ldots,p.$$

Soient $s_1,\ldots,s_p$ des indéterminées ; nous notons $\widetilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N}\cup\{-2,-1\}$, et pour $K = (k_1,\ldots,k_p) \in (\widetilde{\mathbb{N}})^p$,

$$f^{s-K} = f_1^{s_1-k_1}\cdots f_p^{s_p-k_p},$$

$$\tau_k(t) = \begin{cases} t(t-1)\cdots(t-k+1) & \text{si } k \geq 1,\\ 1 & \text{si } k\in\{-2,-1,0\},\end{cases}$$

$$\theta_K = \Big[\prod_{j=1}^{p}\tau_{k_j}(s_j)\Big] f^{s-K}.$$

Nous considérons d'autre part les sous-$\mathcal{D}[s]$-modules de $\mathbb{C}\{x\}[s,1/f]f^s$:

$$\mathcal{M}_w(\theta_K) = \mathcal{D}[s]\mathcal{P}_{w+\rho\cdot K}\theta_K$$

pour tous $w\in\mathbb{N}$ et $K\in(\widetilde{\mathbb{N}})^p$.

4.1. Montée de l'ordre.

LEMME 4.1.1. — *Pour tout multi-indice $K\in(\widetilde{\mathbb{N}})^p$, pour tout entier positif w,*

$$\ell_w(s)\mathcal{M}_w(\theta_K) \subset \mathcal{M}_{w+1}(\theta_K) + \sum_{j=1}^{p}\mathcal{M}_{w+1}(\theta_{K+\varepsilon_j}).$$

(Pour $j = 1,\ldots,p$, ε_j désigne le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{Z}^p$ avec, de plus, $\varepsilon_0 = (0,\ldots,0)$.)

Preuve. — Ce résultat découle directement de la formule suivante : pour toute fonction $u \in \mathbb{C}\{x\}$, pour tout multi-indice $\kappa \in (\widetilde{\mathbb{N}})^p$ et tout entier positif $w \in \mathbb{N}$,

$$\ell_w(s)u\theta_K = \Big[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx_i}} x_i u + \big[(w+\rho\cdot\kappa)u - \chi(u)\big]\Big]\theta_K - u\sum_{j=1}^{p} \varphi_K(s_j)h_j\theta_{K+\varepsilon_j}$$

où

$$\varphi_K(s_j) = \begin{cases} s_j+2 & \text{si } k_j = -2,\\ s_j+1 & \text{si } k_j = -1,\\ 1 & \text{sinon.} \quad \square \end{cases}$$

4.2. Un polynôme de l'idéal de Bernstein-Sato.

Nous nous intéressons maintenant à des fonctions $f_1, \dots, f_p$ telles que pour tout ℓ, $1 \le \ell \le p$, pour tout ℓ-uplet $(j_1, \dots, j_\ell) \subset \{1, \dots, p\}$, le germe $V(f_{j_1}, \dots, f_{j_\ell})$ soit une α-SIIC.

Nota Bene. — Nous renvoyons le lecteur à la première partie pour la signification des notations utilisées ici. Rappelons que l'idéal de $\mathbb{C}[x]$ engendré par les formes initiales des éléments d'un idéal I de $\mathbb{C}\{x\}$ est appelé son *idéal initial* et noté $\mathrm{In}(I)$.

Si $D_{J,I}$ désigne le mineur formé sur les colonnes $1 \le i_1 < \dots < i_\ell \le n$ de la jacobienne de l'application α-homogène $(\mathrm{In}(f_{j_1}), \dots, \mathrm{In}(f_{j_l}))$, l'idéal

$$\Big(\mathrm{In}(f_{j_1}), \dots, \mathrm{In}(f_{j_{\ell-1}}), \{D_{J,I}\}_{I=(i_1,\dots,i_\ell), 1\le i_1<\dots<i_\ell\le n}\Big)$$

est de colongueur finie. Cet idéal est en fait l'idéal initial de I_J. Cela se montre en utilisant le fait que le quotient de $\mathbb{C}\{x\}$ par l'idéal des mineurs maximaux de la jacobienne d'une intersection complète à singularité isolée est de Cohen-Macaulay (voir les résultats sur les idéaux déterminantiels de Eagon et Northcott dans [12, p. 103], par exemple), et la caractérisation par la colongueur de la platitude de la déformation de $\mathbb{C}\{x\}/I_J$ sur le gradué (*cf* [6, lemme I, 1,2, p. 9]).

De plus, si $D_{J,I}$ est non nul, ce mineur est la forme initiale de $d_{J,I}$. Soit donc l'ensemble de multi-indices

$$\mathcal{I}_J = \big\{I = (i_1, \dots, i_\ell)\,;\ 1 \le i_1 < \dots < i_\ell \le n,\ D_{J,I} \ne 0\big\}$$

(c'est encore l'ensemble des multi-indices I pour lesquels $d_{J,I}$ a l'ordre attendu $\rho_{j_1} + \dots + \rho_{j_l} - \alpha_{i_1} - \dots - \alpha_{i_\ell}$) ; il vient :

$$I_J = \big(f_{j_1}, \dots, f_{j_{\ell-1}}, \{d_{J,I}\}_{I\in\mathcal{I}_J}\big).$$

Pour tout $\omega \in \mathbb{N}$, soit $(E_J)_\omega$ un supplémentaire de $\mathrm{In}(I_J) \cap H_\omega$ dans H_ω ; soit

$$E_J = \bigoplus_{\omega \in \mathbb{N}} (E_J)_\omega.$$

Alors E_J est, bien sûr, un supplémentaire de $\mathrm{In}(I_J)$ dans $\mathbb{C}[x]$, mais aussi un supplémentaire de I_J dans $\mathbb{C}\{x\}$. Soit encore

$$\mathcal{W}_J = \{\omega \in \mathbb{N}\,;\ (E_J)_\omega \neq 0\}.$$

Nous notons ω_J le plus grand élément de $\mathcal{W}_J$: $(E_J)_\omega = 0$ si $\omega > \omega_J$. D'autre part, appelons $\mathcal{E}_{J,\omega}$ le sous-$\mathbb{C}[s]$-espace vectoriel de $\mathcal{D}[s]$ engendré par $\{(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^L e\,;\ L \in \mathbb{N}^n,\ e \in (E_J)_\omega\}$, et posons

$$\mathcal{E}_{J,\omega}(\theta_K) = \Big(\bigoplus_{q \geq \omega + \rho \cdot K} \mathcal{E}_{J,q}\Big)\theta_K \subset \mathcal{M}_\omega(\theta_K).$$

4.2.1. *Divisions.* — Énonçons une forme élémentaire du théorème de division, avec contrôle de l'ordre sans unicité des quotients (*cf.* [2]), pour un idéal de colongueur finie. On peut en trouver une preuve dans [M2].

THÉORÈME 4.2.1.1. — *Soient $I \subset \mathbb{C}\{x\}$ un idéal de colongueur finie et $g_1 = \mathrm{In}(f_1), \ldots, g_r = \mathrm{In}(f_r)$ un système de générateurs de $\mathrm{In}(I)$, où $f_1, \ldots, f_r$ sont dans I. Soit $(e_1, \ldots, e_\mu)$ une famille de polynômes α-homogènes dont les classes forment une base de $\mathbb{C}[x]/\mathrm{In}(I)$ sur $\mathbb{C}$. Alors pour tout h dans $\mathbb{C}\{x\}$, il existe $(u_j)_{j=1,\ldots,r}$ dans $(\mathbb{C}\{x\})^r$, et un unique $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ dans $\mathbb{C}^\mu$, tels que*

$$h = \sum_{j=1}^{r} u_j f_j + \sum_{k=1}^{\mu} \lambda_k e_k$$

avec

- $\rho(u_j) + \rho(f_j) \geq \rho(h)$ *pour tout* $j = 1, \ldots, r$,
- $\lambda_k = 0$ *ou* $\rho(e_k) \geq \rho(h)$ *pour tout* $k = 1, \ldots, \mu$.

Nous pouvons alors récrire les éléments de $\mathcal{M}_\omega(\theta_K)$ grâce à la division par l'idéal I_J : classons tout d'abord les fonctions f_j selon κ :

$$\{1, \ldots, p\} = J_{\max}(\kappa) \sqcup J_{-2}(\kappa) \sqcup J(\kappa),$$

avec

$$J_{\max}(\kappa) = \{1 \leq j \leq p\,;\ k_j = m(\kappa)\} \quad \text{où} \quad m(\kappa) = \max_{1 \leq \ell \leq p} \{k_\ell\},$$

$$J_{-2}(\kappa) = \{1 \leq j \leq p\,;\ k_j = -2\}.$$

Posons alors $J = (j_1, \dots, j_\ell)$, où

- $\{j_1, \dots, j_\ell\} = J_{\max}(K) \sqcup J(K)$;
- $j_1 < \dots < j_{\ell-1}$;
- $\{j_1, \dots, j_{\ell-1}\} \cap J_{\max}(K) \neq \emptyset$.

LEMME 4.2.1.2 (récriture des éléments de $\mathcal{M}_\omega(\theta_K)$ par division par I_J). *Soit* $\tilde{\jmath} \in \{j_1, \dots, j_{\ell-1}\} \cap J_{\max}(K)$.

(a) *Si* $m(K) = 0$,

$$(s_{\tilde{\jmath}} + 1)\mathcal{M}_\omega(\theta_K) \subset (s_{\tilde{\jmath}} + 1) \sum_{\substack{j \in \{j_1, \dots, j_{\ell-1}\} \\ j \neq \tilde{\jmath}}} \mathcal{M}_\omega(\theta_{K-\varepsilon_j}) + \mathcal{M}_\omega(\theta_{K-\varepsilon_{\tilde{\jmath}}}) + \sum_{j \in J_{-2}(K)} \mathcal{M}_\omega(\theta_{K-\varepsilon_{\tilde{\jmath}}+\varepsilon_j}) + \mathcal{E}_{J,\omega}(\theta_K).$$

(b) *Si* $m(K) \geq 1$,

$$\mathcal{M}_\omega(\theta_K) \subset \sum_{j \in \{j_1, \dots, j_{\ell-1}\}} \mathcal{M}_\omega(\theta_{K-\varepsilon_j}) + \sum_{j \in J_{-2}(K)} \mathcal{M}_\omega(\theta_{K-\varepsilon_{\tilde{\jmath}}+\varepsilon_j}) + \mathcal{E}_{J,\omega}(\theta_K).$$

Preuve. — Soit $u\theta_K$ un élément de $\mathcal{M}_\omega(\theta_K)$ (avec u dans $\mathbb{C}\{x\}$), que l'on récrit en divisant u par l'idéal I_J. L'étude des ordres des coefficients des opérateurs différentiels qui agissent sur les différents θ_L apparaissant dans l'écriture de $u\theta_K$ (ou de $(s_{\tilde{\jmath}} + 1)u\theta_K$) est évidente, sauf pour les termes en $d_{J,I}\theta_K$. On considère pour cela le développement du mineur $d_{J,I}$ par rapport à la t-ième ligne, où $\tilde{\jmath} = j_t$:

$$d_{J,I} = \sum_{i \in \{i_1, \dots, i_\ell\}} \delta_{\tilde{\jmath},i} \frac{\partial f_{\tilde{\jmath}}}{\partial x_i},$$

où $\delta_{\tilde{\jmath},i}$ désigne le cofacteur relatif à $\frac{\partial f_{\tilde{\jmath}}}{\partial x_i}$ dans $d_{J,I}$. On calcule alors les quantités suivantes :

$$\Big(\sum_{i \in \{i_1, \dots, i_\ell\}} \delta_{\tilde{\jmath},i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx_i}} \Big) \theta_{K-\varepsilon_{\tilde{\jmath}}} - \sum_{j \in J_{-2}(K)} \Big(\sum_{i \in \{i_1, \dots, i_\ell\}} \delta_{\tilde{\jmath},i} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \Big) (s_j + 2)\theta_{K-\varepsilon_{\tilde{\jmath}}+\varepsilon_j} = \begin{cases} (s_{\tilde{\jmath}} + 1)d_{J,I}\theta_K & \text{si } m(K) = 0, \\ d_{J,I}\theta_K & \text{si } m(K) \geq 1, \end{cases}$$

ce qui permet de conclure. □

4.2.2. *Preuve de la proposition 1.6.* — Il s'agit de récrire $f^s = \theta_0$ en fonction de $f^{s+1} = \theta_{(-1,\dots,-1)}$ grâce aux divisions par des idéaux I_J. Toutefois, il faut éviter d'obtenir des « restes », éléments des $\mathcal{E}_{J,\omega}(\theta_K)$, pour lesquels aucun exposant des f_j ne change. Pour cela, nous commençons en fait par augmenter suffisamment l'ordre des coefficients des opérateurs qui apparaissent devant les θ_K.

LEMME 4.2.2.1. — *Pour tout entier positif ν,*

$$\Big[\prod_{\omega\le w\le\omega+\nu}\ell_w(s)\Big]\mathcal{M}_\omega(\theta_K)\subset\mathcal{M}_{\omega+\nu+1}(\theta_K)+\sum_{j=1}^{p}\mathcal{M}_{\omega+\nu+1}(\theta_{K+\varepsilon_j})$$
$$+\cdots+\sum_{1\le j_1,\dots,j_{\nu+1}\le p}\mathcal{M}_{\omega+\nu+1}(\theta_{K+\varepsilon_{j_1}+\cdots+\varepsilon_{j_{\nu+1}}})$$

Preuve. — Ce résultat s'obtient de manière évidente à partir du lemme 4.1.1. ▯

LEMME 4.2.2.2. — *Dès que ω est strictement supérieur à N_0, l'inclusion suivante a lieu :*

$$\Big[\prod_{\substack{1\le j\le p\\ k_j\ge0}}(s_j+1)\Big]\mathcal{M}_\omega(\theta_K)\subset\mathcal{D}[s]f^{s+1},$$

quel que soit $K=(k_1,\dots,k_p)$ multi-indice dans $(\widetilde{\mathbb{N}})^p$.

Preuve. — Procédons par récurrence sur les quantités

$$|K|=\sum_{j=1}^{p}k_j,\quad |K|_{>-2}=\sum_{j\notin J_{-2}(K)}k_j,$$

qui sont respectivement minorées par $-2p$ et $-p$. Soit $U\in\mathcal{M}_\omega(\theta_K)$, et plaçons-nous dans le cas où $|K|>-2p$ et $|K|_{>-2}>-p$, en supposant que le résultat soit établi pour les multi-indices K' tels que $|K'|<|K|$ ou $(|K'|=|K|$ et $|K'|_{>-2}<|K|_{>-2})$. Il suffit de traiter le cas où $m(K)\ge0$.

Soit $\tilde{\jmath}\in J_{\max}(K)$. Nous notons $\{j_1,\dots,j_\ell\}=J_{\max}(K)\sqcup J(K)$ avec $j_1<\cdots<j_{\ell-1}$ et $\tilde{\jmath}\in\{j_1,\dots,j_{\ell-1}\}$, et $J=(j_1,\dots,j_\ell)$. Effectuons la division par I_J (selon le lemme 4.2.1.2) ; le déroulement de cette démonstration étant commun aux deux cas $m(K)=0$ et $m(K)\ge1$, nous le décrivons seulement pour $m(K)=0$, par exemple. Par hypothèse sur ω, il vient :

$$(s_{\tilde{\jmath}}+1)U=(s_{\tilde{\jmath}}+1)\sum_{\substack{j\in\{j_1,\dots,j_{\ell-1}\}\\ j\ne\tilde{\jmath}}}U_j+U_{\tilde{\jmath}}+\sum_{j\in J_{-2}(K)}V_j,$$

où

- pour $j \in \{j_1, \dots, j_{l-1}\}$, on a $U_j \in \mathcal{M}_\omega(\theta_{K-\varepsilon_j})$;
- pour $j \in J_{-2}(\kappa)$, on a $V_j \in \mathcal{M}_\omega(\theta_{K-\varepsilon_{\tilde{\jmath}}+\varepsilon_j})$.

— Les U_j : puisque $|\kappa - \varepsilon_j| < |\kappa|$, on sait, par hypothèse de récurrence, que

$$\Big[\prod_{\substack{1\le i\le p\\ k_i\ge 0, i\ne j}} (s_i+1)\Big] U_j \in \mathcal{D}[s]f^{s+1} \quad \text{si} \quad k_j = 0,$$

$$\Big[\prod_{\substack{1\le i\le p\\ k_i\ge 0}} (s_i+1)\Big] U_j \in \mathcal{D}[s]f^{s+1} \quad \text{si} \quad k_j = -1.$$

— Les V_j : ici, $|\kappa - \varepsilon_{\tilde{\jmath}} + \varepsilon_j| = |\kappa|$, mais $|\kappa - \varepsilon_{\tilde{\jmath}} + \varepsilon_j|_{>-2} < |\kappa|_{>-2}$; nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurrence :

$$\Big[\prod_{\substack{1\le i\le p\\ k_i\ge 0, i\ne \tilde{\jmath}}} (s_i+1)\Big] V_j \in \mathcal{D}[s]f^{s+1}.$$

Finalement,

$$\Big[\prod_{\substack{1\le i\le p\\ k_i\ge 0}} (s_i+1)\Big] U = \Big[\prod_{\substack{1\le i\le p\\ k_i\ge 0, i\ne \tilde{\jmath}}} (s_i+1)\Big]\Big[(s_{\tilde{\jmath}}+1)\sum_{\substack{j\in\{j_1,\dots,j_{\ell-1}\}\\ j\ne\tilde{\jmath}}} U_j + U_{\tilde{\jmath}} + \sum_{j\in J_{-2}(K)} V_j\Big]$$

appartient à $\mathcal{D}[s]f^{s+1}$. □

D'après les lemmes 4.2.2.1 et 4.2.2.2, nous avons :

PROPOSITION 4.2.2.3. — *Soient $\omega \in \mathbb{N}, \kappa \in (\widetilde{\mathbb{N}})^p$, alors*

$$\Big[\prod_{j=1}^{p}(s_j+1)\prod_{\omega\le w\le N_0}\ell_w(s)\Big]\mathcal{M}_\omega(\theta_K) \subset \mathcal{D}[s]f^{s+1}.$$

Ce résultat fournit le polynôme de Bernstein-Sato de la proposition 1.5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIOSCA (H.), BRIANÇON (J.), MAISONOBE (Ph.), MAYNADIER (H.). — *Espaces conormaux relatifs II – Modules différentiels*, à paraître aux Publ. RIMS.

[2] BRIANÇON (J.). — *Weierstrass préparé à la Hironaka*, Astérisque 7–8, 1973, p. 67–73.
[3] BRIANÇON (J.). — *Sur le degré des relations entre polynômes*, Note aux CRAS, t. **297**, 1983, p. 553–556.
[4] BRIANÇON (J.), GRANGER (M.), MAISONOBE (Ph.), MINICONI (M.). — *Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein : cas non dégénéré*, Ann. Institut Fourier, Grenoble 39–3, 1989, p. 553–610.
[5] BRIANÇON (J.), MAYNADIER (H.). — *Équations fonctionnelles généralisées : transversalité et principalité de l'idéal de Bernstein-Sato*, Prépublication de l'UNSA n° 483, 1997.
[6] BRIANÇON (J.), SPEDER (J.-P.). — *Familles équisingulières d'hypersurfaces à singularité isolée*, Thèse de doctorat d'État de J. Briançon, 2e partie, Université de Nice, 1976.
[7] GREUEL (G.M.). — *Der Gauß-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten*, Math. Ann., t. **214**, 1975, p. 235–266.
[8] GREUEL (G.M.), HAMM (H.). — *Invarianten quasihomogener vollständiger Durchschnitte*, Invent. Math., t. **49**, 1978, p. 67–86.
[9] GYOJA (A.). — *A remark on principality of Bernstein-Sato ideals*, Prépublication, 1997.
[10] LÊ (D.T.). — *Calculation of Milnor number of isolated singularity of complete intersection*, Functional Analysis and its Applications, 1974, p. 127–131.
[11] MALGRANGE (B.). — *Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée*, Lecture Note in Math., Springer Verlag, t. **459**, 1975, p. 98–119.
[12] MATSUMURA (H.). — *Commutative ring theory.* — Cambridge Studies in Advanced Math., Cambridge University Press, 1986.
[13] MAYNADIER (H.). — *Équations fonctionnelles pour une intersection complète quasi-homogène à singularité isolée et un germe semi-quasi-homogène*, Thèse UNSA, 1996.
[14] SABBAH (C.). — *Proximité évanescente I. La structure polaire d'un $\mathcal{D}$-module*, Compositio Math., t. **62**, 1987, p. 283–328.
[15] SABBAH (C.). — *Proximité évanescente II. Équations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques*, Compositio Math., t. **64**, 1987, p. 213–241.
[16] YANO (T.). — *On the theory of b-functions*, Publ. RIMS, t. **14**, 1978, p. 111–202.