

# BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-CLAUDE PICAUD

## **Cohomologie bornée des surfaces et courants géodésiques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 125, n° 1 (1997), p. 115-142

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1997\\_\\_125\\_1\\_115\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_1_115_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## COHOMOLOGIE BORNÉE DES SURFACES ET COURANTS GÉODÉSINIQUES

PAR

JEAN-CLAUDE PICAUD (\*)

---

RÉSUMÉ. — Nous considérons dans cet article le deuxième groupe de cohomologie bornée réelle d'une surface  $(S, h_0)$  hyperbolique sans cusps, dont le premier groupe fondamental est de type fini. C'est un espace de Banach de dimension infinie. Nous montrons qu'il contient un sous-espace de codimension finie qui s'interprète naturellement en termes d'objets définis sur le bord à l'infini du revêtement universel de  $S$ , qui sont liés à la dynamique de l'action de  $\Gamma = \Pi_1(S)$  sur son ensemble limite.

ABSTRACT. — Let  $(S, h_0)$  be a hyperbolic surface without cusps, such that  $\Gamma = \Pi_1(S)$  is finitely generated. The second real bounded cohomology space of  $S$  (or  $\Gamma$ ) is infinite dimensional. We propose here an interpretation of a finite codimensional space in terms of objects (measures classes) defined on the boundary of the universal covering. We show that for bounded classes previously defined by Brooks and Barge-Ghys, those measures classes can be view as equilibrium states.

### 0. Introduction

Soit  $G$  un groupe discret. La cohomologie bornée réelle de  $G$ , notée  $H_b^*(G, \mathbb{R})$ , est l'homologie du sous-complexe d'Eilenberg-MacLane des cochaînes bornées de  $G$  à valeurs réelles (voir [Gr], [Iv]). La norme uniforme naturelle sur l'espace des 2-cochaînes bornées induit encore une norme sur  $H_b^2(G, \mathbb{R})$  (voir [MaMo]).

Si  $G = \Gamma = \Pi_1(S)$  est un groupe de surface de type hyperbolique, cet espace (de Banach) est de dimension infinie et la richesse du contenu géométrique de  $H_b^2(\Gamma, \mathbb{R})$  est liée au caractère hyperbolique de la surface  $S$  ou du groupe  $\Gamma$  (voir [Br], [Mi], [Gh1], [Ma], [BaGh], [EpFu],...). Nous supposons par la suite que  $\Gamma$  est de type fini et nous fixons sur  $S$  une

---

(\*) Texte reçu le 9 avril 1996, révisé le 27 septembre 1996.

J.-C. PICAUD, Université d'Évry, Val-d'Essonne (France).

Email : [picaud@lami.univ-evry.fr](mailto:picaud@lami.univ-evry.fr).

Classification AMS : 53A35, 58A10, 53C23, 58F17.

métrique  $h_0$  hyperbolique sans cusps. Notons alors  $\partial\tilde{S}$  le bord à l'infini du revêtement universel riemannien de  $S$ , sur lequel  $\Gamma$  agit. Nous montrons que le noyau de l'application naturelle

$$\Psi_2 : H_b^2(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow H^2(\Gamma, \mathbb{R})$$

de codimension finie, peut se « lire » sur le bord à l'infini.

Fixons un système symétrique de générateurs de  $\Gamma$ . À chaque classe  $c = [df]_b \in \text{Ker } \Psi_2$ , nous associons une mesure de type Patterson  $\mu_c$  sur  $\partial\tilde{S}$  et, suivant un procédé classique, une mesure  $m_c$  sur  $US$ , le fibré unitaire de  $S$ , invariante par le flot géodésique  $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ . Notons  $\langle \mathcal{M} \rangle$  l'espace des classes de mesures de Radon positives sur  $US$   $(\Phi_t)$ -invariantes, et  $\langle \mathcal{M}_{\text{qi}}(\Lambda) \rangle$  l'espace des classes de mesures quasi-invariantes supportées par l'ensemble limite du groupe  $\Lambda \subset \partial\tilde{S}$ . Nous établissons le :

**THÉORÈME 0.1.** — *Soit  $(S, h_0)$  une surface hyperbolique sans cusps dont le groupe fondamental est supposé de type fini. Alors, les applications*

$$\begin{aligned} \text{Ker } \Psi_2 &\longrightarrow \langle \mathcal{M}_{\text{qi}}(\Lambda) \rangle, & \text{Ker } \Psi_2 &\longrightarrow \langle \mathcal{M} \rangle \\ c &\longmapsto \langle \mu_c \rangle & c &\longmapsto \langle m_c \rangle \end{aligned}$$

sont injectives.

L'injectivité des deux applications est équivalente : la classe de mesures  $\langle m_c \rangle$  est caractérisée par la classe (invariante) de mesures  $\{\gamma_* \mu_c ; \gamma \in \Gamma\}$  supportées par  $\Lambda$ . Au paragraphe 3, nous décrivons plus précisément les classes de mesures invariantes correspondant aux exemples de classes bornées mis en évidence par R. Brooks [Br] et par J. Barge et E. Ghys [BaGh]. Nous montrons en particulier que les classes bornées citées s'interprètent naturellement dans le contexte dynamique des classes de fonctions Hölder sur le sous-décalage de type fini  $(\Sigma_\Gamma, \sigma)$ , et que les classes de mesures invariantes construites correspondent alors aux mesures de Gibbs de ces classes de fonctions Hölder.

Je remercie chaleureusement Gérard Besson, à l'origine de ce travail, de m'avoir constamment soutenu. Je tiens également à remercier François Ledrappier, à qui je dois quelques conversations lumineuses.

## 1. Cohomologie bornée des groupes de surfaces

### 1.1. Cohomologie bornée d'un groupe discret $G$ .

**DÉFINITIONS 1.1.1.** — Soit  $A = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ . Pour  $n \geq 1$ ,

- un  $n$ -simplexe de  $G$  est un élément de  $G^n$  ;
- une  $n$ -cochaîne bornée à valeurs dans  $A$  est une fonction  $f : G^n \rightarrow A$  bornée ;

• l'espace  $C_b^n = C_b^n(G, A)$  est muni de la norme uniforme et l'opérateur bord  $d_n : C_b^n \rightarrow C_b^{n+1}$  défini par

$$(d_n f)(g_0, \dots, g_n) = f(g_1, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_0, \dots, g_{i-1} g_i, \dots, g_n) + (-1)^{n+1} f(g_0, \dots, g_{n-1})$$

est continu.

La cohomologie bornée de  $G$  à coefficients dans  $A$  est l'homologie du complexe d'espaces de Banach  $(C_b^*, \|\cdot\|_\infty, d_*)$  (cf. [Gr], [Iv]). On note

$$H_b^*(G, A) = \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n-1}$$

le  $n$ -ième groupe de cohomologie bornée de  $G$ . Signalons que

$$H_b^1(G, A) = 0$$

puisque

$$\text{Ker } d_1 = \{f : G \rightarrow A; f \text{ morphisme borné}\}.$$

Signalons également que la cohomologie bornée réelle d'un groupe  $G$  moyennable (voir [Gre]) est triviale (P. Trauber) : en effet, la moyenne invariante sur les fonctions bornées induit un inverse continu de  $d_n$  pour  $n \geq 2$  (cf. [Gri], [Pi]).

REMARQUE 1.1. — La notion de cohomologie bornée réelle a été introduite par P. Trauber pour un groupe discret et par M. Gromov pour un espace topologique. Un théorème fondamental, dû essentiellement à M. Gromov (cf. [Gr], [Br], voir également [Iv]), affirme que la cohomologie bornée réelle d'un espace topologique est isométriquement isomorphe à celle de son premier groupe fondamental. Ce qui permet d'étudier la notion de cohomologie bornée du point de vue algébrique ou topologique.

Il existe une application naturelle

$$\Psi_* : H_b^*(G, A) \rightarrow H^*(G, A).$$

Les classes non triviales de  $\text{Ker } \Psi_*$  sont représentées par le bord borné (non nul) de cochaînes non bornées de  $G$ . Nous concentrons notre étude sur le noyau de l'application  $\Psi_2$  (en cohomologies réelles) dans le cas des groupes de surfaces (pas nécessairement compactes).

### 1.1.2. Le noyau de $\Psi_2$ .

DÉFINITION 1.1 (voir [Be], [Ba] et aussi [Gri]). — Un *quasi-morphisme* de  $G$  est une fonction  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

$$(1) \quad \exists C(f) \geq 0, \forall (g_1, g_2) \in G^2,$$

$$|(df)(g_1, g_2)| = |f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1)| \leq C(f).$$

Bien entendu, la plus petite constante vérifiant (1) est

$$\|df\|_\infty = \sup_{G^2} |df(g_1, g_2)|$$

On désigne par  $\mathcal{Q}(G)$  l'espace des quasi-morphismes de  $G$  et par  $\mathcal{Q}_h(G)$  le sous-espace des quasi-morphismes *homogènes* de  $G$ , c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall g \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(g^n) = nf(g).$$

Un quasi-morphisme de  $G$  induit une 2-classe bornée réelle  $[df]_b$ , et si  $h$  est un autre quasi-morphisme de  $G$ ,  $[df]_b = [dh]_b$  si et seulement si  $f$  et  $h$  diffèrent d'un morphisme et d'une fonction uniformément bornée sur  $G$ . Énonçons le :

LEMME 1.1 (cf. [Be]). — Soient  $f_1, f_2 \in \mathcal{Q}(G)$ ; alors :

(i) Pour  $i = 1, 2$ , la fonction définie sur  $G$  par

$$\bar{f}_i(g) = \lim_n \frac{1}{n} f_i(g^n) = \inf_n \frac{1}{n} f_i(g^n)$$

est un quasi-morphisme homogène, constant sur les classes de conjugaison de  $G$ , et qui vérifie  $\|f_i - \bar{f}_i\|_\infty \leq \|df_i\|_\infty$ . De plus,

$$[df_1]_b = [df_2]_b \iff (\bar{f}_1 - \bar{f}_2) \text{ est un morphisme.}$$

(ii) Pour tout  $f \in \mathcal{Q}(G)$ , on a :

$$\lim_n \frac{1}{n} f(g_1^n g_2^n (g_1 g_2)^{-n}) = \lim_n \frac{1}{n} \bar{f}(g_1^n g_2^n (g_1 g_2)^{-n}) = df(g_1, g_2).$$

En particulier, si  $f$  (ou  $\bar{f}$ ) est borné sur le sous-groupe  $G'$  des commutateurs de  $G$ , on a  $[df]_b = 0$ .

REMARQUE 1.2. — Soit  $L = L_n = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$  le groupe libre (non abélien) à  $n$  générateurs,  $L'$  son groupe dérivé et  $G = \langle L; r_1, \dots, r_k \rangle = \langle L; R \rangle$  un groupe de présentation finie. Soit  $m_i$  le morphisme de  $L$  défini par  $m_i(s_j) = \delta_{ij}$ . La condition  $R \subset L'$  entraîne que tout morphisme de  $L$  induit un morphisme de  $G$ , et si  $f \in \mathcal{Q}(G)$ ,

$$f_0 = \bar{f} - \sum_i \bar{f}(s_i) m_i$$

est l'unique quasi-morphisme homogène de  $G$ , nul sur le système (symétrique) de générateurs fixé  $S(G) = \{s_i^{\pm 1}\}$ , vérifiant  $[df_0]_b = [df]_b$ . On notera  $\mathcal{Q}_h^0(G)$  le sous-espace des quasi-morphismes homogènes de  $G$  nuls sur le système de générateurs  $\{s_i^{\pm 1}\}$ .

REMARQUE 1.3. — Un quasi-morphisme de  $G$  est uniformément borné sur l'ensemble des commutateurs de  $G$ .

REMARQUE 1.4. — Soit  $G = \langle L; R \rangle$ ,  $S(G)$  un système symétrique de générateurs,  $s_{i_k} \in S(G)$  et  $f$  un quasi-morphisme de  $G$ . Par définition, on a la relation :

$$(2) \quad f(s_{i_1} \cdots s_{i_r}) = \sum_{k=1}^r f(s_{i_k}) - \sum_{k=1}^{r-1} df(s_{i_k}, s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_r}).$$

En particulier, si  $f$  est nul sur  $S(G)$ , la relation précédente entraîne

$$(3) \quad |f(s_{i_1} \cdots s_{i_r})| = \left| \sum_{k=1}^{r-1} df(s_{i_k}, s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_r}) \right| \leq (r-1) \|df\|_\infty.$$

## 1.2 Quasi-morphismes des groupes de surfaces et bord à l'infini.

1.2.1 *Notations et rappels.* — On rappelle que  $(S, h_0)$  désigne une surface  $C^\infty$  connexe, orientable, sans bord, sur laquelle on fixe une métrique hyperbolique  $h_0$  sans cusps. On suppose que  $\Gamma = \Pi_1(S)$  son premier groupe fondamental est de type fini, et on note

$$(4) \quad \langle s_1, \dots, s_k; r \rangle$$

une présentation standard de  $\Gamma$  (rappelons que  $r$  est vide si  $S$  n'est pas compacte et que  $r = \prod_1^g [s_{2i-1}, s_{2i}]$  si  $S$  est compacte de genre  $g \geq 2$ ).

On rappelle encore que

$$(\tilde{S}, \tilde{h}_0) \simeq (\mathbb{H}^2, \text{hyp.}), \quad \partial \tilde{S} \simeq S^1$$

où  $\partial \tilde{S}$  est le bord géométrique de  $(\tilde{S}, \tilde{h}_0)$ , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques asymptotiques, et

$$\Lambda = \overline{\Gamma \tilde{x}} \setminus \Gamma \tilde{x} \subset \partial \tilde{S}$$

l'ensemble limite de  $\Gamma$  qui ne dépend pas du point  $\tilde{x} \in \tilde{S}$ .

On définit sur  $\partial \tilde{S}$  (et par restriction sur  $\Lambda$ ) la métrique géodésique de la manière suivante : soient  $\eta \neq \xi \in \partial \tilde{S}$ . Il existe une unique géodésique  $(\eta, \xi)$  de  $\tilde{S}$  d'extrémités  $\eta$  et  $\xi$  ; on note  $D_{\tilde{x}_0}(\eta, \xi)$  la distance de l'origine fixée à cette géodésique. Alors

$$(5) \quad d(\xi, \eta) = d_{\tilde{x}_0, \epsilon}(\xi, \eta) = \exp(-\epsilon D_{\tilde{x}_0}(\eta, \xi))$$

définit une distance pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit (voir [Yu] et les références citées).

Le groupe  $\Gamma$ , identifié au groupe des automorphismes de revêtement, agit par isométries sur  $\tilde{S}$ . Cette action se prolonge sur  $\partial\tilde{S}$  par homéomorphismes respectant l'orientation, et l'action à gauche de  $\Gamma$  sur  $\Gamma\tilde{x}_0 \simeq \Gamma$  se prolonge en une action sur  $\Lambda$  et (de manière diagonale) sur

$$\Lambda_2 = \Lambda \times \Lambda \setminus \text{Diag}.$$

Rappelons enfin la :

DÉFINITION 1.2. — Soit  $G$  un groupe discret agissant à gauche sur un espace mesuré  $(X, \mu)$ . Un *cocycle à valeurs réelles* est une fonction borélienne  $c : G \times X \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$(6) \quad c(g_1 g_2, x) = c(g_1, g_2 x) + c(g_2, x) \quad (g_1, g_2 \in G, x \in X)$$

1.2.2 *Quasi-morphismes de  $\Gamma$  et cocycles sur  $\Lambda$ .* — Nous définissons dans ce paragraphe un « quasi-cocycle » sur le bord associé à chaque quasi-morphisme de  $\Gamma$ . Nous verrons au § 3 que cette définition apparaît de manière naturelle, et qu'il est possible, pour certaines classes bornées au moins, de choisir un quasi-morphisme auquel on peut associer un *cocycle Hölder* sur le bord.

DÉFINITION 1.3. — Soit  $f$  un quasi-morphisme de  $\Gamma$ . On appelle *quasi-cocycle associé à  $f$*  la fonction définie sur  $\Gamma \times \Lambda$  par

$$(7) \quad \bar{F}_f(\gamma, \xi) = \sup_{\gamma_n \tilde{x}_0 \rightarrow \xi} \overline{\lim}_n \{f(\gamma \gamma_n) - f(\gamma_n)\}.$$

On définit également la *fonction de normalisation associée à  $f$*  sur  $\Lambda_2$  par

$$(8) \quad \bar{H}_f(\xi, \eta) = \sup_{(\gamma_n), (\gamma'_n)} \left\{ \overline{\lim}_n (f(\gamma_n) + f(\gamma_n^{-1} \gamma'_n) + f(\gamma'_n^{-1})) \right\};$$

$$\gamma_n \tilde{x}_0 \rightarrow \xi, \gamma'_n \tilde{x}_0 \rightarrow \eta \}.$$

La définition qui précède permet d'associer un objet défini sur le bord associé à n'importe quel quasi-morphisme. Nous verrons au § 3 qu'il est possible de choisir pour les classes de Brooks et de Barge-Ghys un quasi-morphisme plus régulier au regard de la définition suivante :

DÉFINITION 1.4. — Un quasi-morphisme  $f$  de  $\Gamma$  *satisfait la propriété  $(P_b)$*  si pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et pour toute suite  $(\gamma_n)$  d'éléments de  $\Gamma$  vérifiant  $\gamma_n \tilde{x}_0 \rightarrow \xi$ , la suite

$$f(\gamma \gamma_n) - f(\gamma_n)$$

converge vers  $F_f(\gamma, \xi)$ , cocycle Hölder continu en la variable du bord.

Par la relation (1), les expressions qui apparaissent dans (7) et (8) sont uniformément bornées en  $n$  donc les fonctions  $\bar{F}_f$  et  $\bar{H}_f$  sont bien définies. La terminologie adoptée est justifiée par le lemme élémentaire ci-dessous et par les relations (24) et (25) (voir § 2).

LEMME 1.2. — Soient  $f \in \mathcal{Q}(\Gamma)$  et  $C_f = \|df\|_\infty + |f(e)|$ . Alors, les fonctions  $\bar{F}_f$  et  $\bar{H}_f$  vérifient les relations :

$$(9) \quad -2\|df\|_\infty \leq \bar{F}_f(g_1g_2, \xi) - \bar{F}_f(g_1, g_2\xi) - \bar{F}_f(g_2, \xi) \leq 0$$

(où  $g_1, g_2 \in \Gamma$  et  $\xi \in \Lambda$ ) et, pour  $\gamma \in \Gamma$  et  $(\xi, \eta) \in \Lambda_2$ ,

$$(10) \quad |\{\bar{F}_f(\gamma, \xi) - \bar{F}_f(\gamma, \eta)\} - \{\bar{H}_f(\gamma\xi, \gamma\eta) - \bar{H}_f(\xi, \eta)\}| \leq 6C_f$$

*Preuve.* — Remarquons que le choix de la limite supérieure dans la définition de  $\bar{F}$  (et  $\bar{H}$ ) est arbitraire. Cependant, puisque  $f$  est un quasi-morphisme, la fonction définie par

$$\underline{F}(g, \xi) = \inf_{\gamma_n} \lim_n (f(g\gamma_n) - f(\gamma_n))$$

vérifie

$$(11) \quad 0 \leq \bar{F} - \underline{F} \leq 2\|df\|_\infty.$$

De manière analogue, on note  $\underline{H}$  la fonction définie comme dans l'expression (8) en remplaçant «sup» par «inf». On a alors

$$|\bar{H} - \underline{H}| \leq 2C_f.$$

Les inégalités (9) résultent de la relation

$$\begin{aligned} f(g_1g_2\gamma_n) - f(\gamma_n) &= \{f(g_1g_2\gamma_n) - f(g_2\gamma_n)\} + \{f(g_2\gamma'_p) - f(\gamma'_p)\} \\ &\quad + [-f(g_2) + f(g_2\gamma_n) - f(\gamma_n)] + [f(g_2) - f(g_2\gamma'_p) + f(\gamma'_p)] \end{aligned}$$

et de la propriété de sous-additivité de la limite supérieure.

Par définition,

$$\gamma_*\bar{H}_f(\xi, \eta) = \bar{H}_f(\gamma\xi, \gamma\eta).$$

Remarquons que

$$(12) \quad f \in \mathcal{Q}(\Gamma) \implies |f(\gamma) + f(\gamma^{-1})| \leq C_f$$

Posons :

$$a_n = (f(\gamma\gamma_n) - f(\gamma_n)) - (f(\gamma\gamma'_n) - f(\gamma'_n)),$$

$$b_n = f(\gamma\gamma_n) + f(\gamma'_n\gamma^{-1}) + f(\gamma_n^{-1}\gamma^{-1}\gamma\gamma'_n),$$

$$c_n = f(\gamma_n) + f(\gamma_n^{-1}\gamma'_n) + f(\gamma'_n^{-1}).$$

Alors (11) implique  $|a_n - (b_n - c_n)| \leq 2C_f$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \overline{\lim} a_n &\leq 2C_f + \overline{\lim}(b_n - c_n) \leq 2C_f + \overline{\lim} b_n - \underline{\lim} c_n \\ &\leq 2C_f + \gamma_*\bar{H} - \underline{H} \\ &\leq \gamma_*\bar{H} - \bar{H} + 4C_f. \end{aligned}$$

De même,

$$\underline{\lim} a_n \geq \underline{\lim} a_n \geq \gamma_*\bar{H} - \bar{H} - 4C_f. \quad \square$$



## 2. Une interprétation géométrique de $\text{Ker } \Psi_2$

Ce paragraphe est consacré à la preuve du théorème 0.1. En 2.1, nous donnons la construction explicite d'une mesure (de type Patterson) associée à chaque quasi-morphisme de  $\Gamma$ . Nous déduisons en 2.2, en suivant un procédé classique, une mesure sur le carré du bord, quasi invariante par l'action diagonale du groupe. On en déduit alors l'existence d'une mesure invariante dans la même classe de mesures, et par conséquent une mesure à support compact sur le fibré unitaire  $US$  de  $S$  associée à chaque quasi-morphisme, invariante par l'action du flot géodésique  $\Phi_t$ . L'ergodicité du flot géodésique pour chacune de ces mesures permet de conclure.

### 2.1. Quasi-morphismes de $\Gamma$ et mesures de Patterson.

#### 2.1.1. Construction des mesures.

Le revêtement universel  $(\tilde{S}, \tilde{h}_0)$  est identifié au disque de Poincaré et  $\Gamma$  à un sous-groupe discret convexe cocompact d'isométries de  $\mathbb{H}^2$ . On note :

- $d_h$  la distance hyperbolique sur  $\tilde{S}$ ;  $\tilde{x}_0, \tilde{x}, \dots$  des points de  $\tilde{S}$ ;
- $S(\Gamma)$  le système symétrique de générateurs associé à la présentation standard (4) de  $\Gamma$ ;
- $\mathcal{G} = \mathcal{G}(S(\Gamma))$  le graphe de Cayley de  $\Gamma$  (cf. [GhHa]), muni de la métrique des mots  $d_{\mathcal{G}}$ .

On rappelle (voir [GhHa]) que les espaces métriques  $(\mathcal{G}, d_{\mathcal{G}})$  et  $(\mathbb{H}^2, d_h)$  sont quasi isométriques puisque  $\Gamma$  agit de manière cocompacte sur l'enveloppe convexe de  $\Lambda$  (dans  $\tilde{S} \cup \partial\tilde{S}$ ).

Soit  $f \in \mathcal{Q}(\Gamma)$ . On déduit de la remarque précédente et de l'inégalité (3) qu'il existe une constante  $D_0 = D(h_0) > 0$  et  $F \subset \Gamma$ ,  $\#F < \infty$  tels que

$$(13) \quad \forall \gamma \in \Gamma \setminus F, \quad |f(\gamma)| \leq \|df\|_{\infty} D_0 d_h(\tilde{x}_0, \gamma\tilde{x}).$$

Considérons alors la série de Poincaré

$$(14) \quad N_{f, \tilde{x}}(s, t) = \sum_{\Gamma} \exp\{-s(f(\gamma) + td_h(\tilde{x}_0, \gamma\tilde{x}))\}.$$

LEMME 2.1. — *Il existe  $D_f > 0$  tel que  $N_{f, \tilde{x}}(s, D_f) = N_{f, \tilde{x}}(s)$  converge si  $s > 1$  et diverge si  $s < 1$ .*

*Preuve.* — Pour tout  $t \geq 0$ , notons  $\delta(t) \in [0, +\infty]$  l'exposant de convergence de la série de Poincaré  $N_{f, \tilde{x}}(s, t)$  (qui ne dépend pas de  $\tilde{x}$ )

$$(15) \quad N_{f, \tilde{x}}(s, t) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-stn} \left( \sum_{C_n} e^{-sf(\gamma)} \right)$$

où  $\sim$  signifie que les deux séries sont de même nature et où

$$C_n = \{\gamma \in \Gamma; n \leq d(\tilde{x}_0, \gamma\tilde{x}_0) < n+1\}.$$

Par conséquent,  $\delta(t)$  est solution de l'équation implicite

$$st = \overline{\lim}_n \frac{1}{n} \log \left( \sum_{C_n} e^{-sf(\gamma)} \right)$$

et il suffit de prendre

$$t_0 = P(df) = P(-df) = \overline{\lim}_n \frac{1}{n} \log \left( \sum_{C_n} e^{f(\gamma)} \right)$$

qui vérifie  $\delta(t_0) = 1$  d'après (15) (voir § 3, remarque 3.2.).  $\square$

À partir de maintenant, nous considérons la série de Poincaré

$$N_{f,\tilde{x}}(s) = N_{f,\tilde{x}}(s, D_f).$$

Supposons que l'on ait

$$(16) \quad N_f(s) \longrightarrow N_f(1) = \infty$$

lorsque  $s$  tend vers 1 en décroissant et, pour  $s > 1$ , définissons

$$(17) \quad \mu_{f,s,\tilde{x}_0} = \frac{1}{N_{f,\tilde{x}_0}(s)} \sum_{\Gamma} \exp\{-s(f(\gamma) + D_f d(\tilde{x}_0, \gamma\tilde{x}))\} \delta_{\gamma\tilde{x}}$$

où  $\delta_{\gamma\tilde{x}}$  est la masse de Dirac en  $\gamma\tilde{x}$ .

L'hypothèse (16) n'est pas essentielle : si  $N_f(1) < \infty$ , il est possible d'accélérer la divergence de  $N_f$  en pondérant le terme général de (14) de sorte que la série de Poincaré  $\tilde{N}_f$  obtenue vérifie  $\tilde{N}_f(s) < \infty$  si et seulement si  $s > 1$  (voir [Pa], [Ni]). En outre, cette pondération, reportée dans (17), n'entraîne pas de modification pour ce qui suit (voir [Pi] pour les détails dans ce contexte).

Notons  $\mathcal{M}_b(\overline{\Gamma\tilde{x}})$  l'ensemble des mesures positives de masse uniformément bornée sur  $\overline{\Gamma\tilde{x}}$  compact. Cet ensemble, muni de la topologie de la convergence vague des mesures, est compact. Notons  $\mu_{f,\tilde{x}_0}$  la limite d'une sous-suite  $\mu_{f,s_i,\tilde{x}_0}$  lorsque  $s_i$  tend vers 1 en décroissant. L'action de  $\Gamma$  sur  $\tilde{S}$  est totalement discontinue : un ouvert relativement compact de  $\tilde{S}$  ne contient qu'un nombre fini de points de l'orbite  $\Gamma\tilde{x}$ . L'hypothèse (16) entraîne alors que  $\text{Supp}(\mu_{f,\tilde{x}_0}) \subset \Lambda$ . Le point d'accumulation  $\mu_{f,\tilde{x}_0}$  dépend *a priori* de la sous-suite  $s_i \searrow 1$ . Nous verrons au paragraphe 2 (corollaire 2.4.) qu'il y a en fait unicité de la limite.

Le lemme qui suit précise le comportement de  $\mu_{f,\tilde{x}_0}$  vis-à-vis de l'action du groupe.

On rappelle (voir [BGS]) que la *fonction de Busemann* normalisée en  $\tilde{x}_0$  est définie par

$$b_\xi(\tilde{x}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\tilde{x}, c(t)) - t \quad (\tilde{x} \in \tilde{S}, \xi \in \partial\tilde{S})$$

où  $c$  est le rayon géodésique représentant  $\xi$  qui vérifie  $c(0) = \tilde{x}_0$ . On rappelle également que le *cocycle* de Busemann défini par

$$(18) \quad B_\xi(\tilde{x}, \tilde{y}) = b_\xi(\tilde{x}) - b_\xi(\tilde{y})$$

ne dépend plus de  $c$  représentant de  $\xi$  et vérifie la propriété d'invariance

$$B_{\gamma\xi}(\gamma\tilde{x}, \gamma\tilde{y}) = B_\xi(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (\gamma \in \Gamma)$$

Enfin, rappelons que le groupe  $\Gamma$  agit à gauche sur  $\mathcal{M}_b(\Lambda)$  par

$$g_*\mu(E) = \mu(g^{-1}E) \quad (E \text{ borélien de } \Lambda, g \in \Gamma).$$

LEMME 2.2. — *Il existe  $K_1 \geq 1$  telle que*

$$(19) \quad K_1^{-1} \leq \exp\{\mathcal{F}_f(g, \xi)\} \frac{dg_*\mu_f}{d\mu_f}(\xi) \leq K_1$$

où

$$(20) \quad \mathcal{F}_f(g, \xi) = \bar{F}_f(g^{-1}, \xi) + D_f B_\xi(g\tilde{x}_0, \tilde{x}_0).$$

*Preuve.* — Soit  $g, \gamma \in \Gamma$ ; notons  $\gamma' = g\gamma$  :

$$(21) \quad \begin{aligned} g_*(\exp\{-s(f(\gamma) + D_f d(\tilde{x}_0, \gamma\tilde{x}))\})\delta_{\gamma\tilde{x}} &= \exp\{-s(f(\gamma) + D_f d(\tilde{x}_0, \gamma\tilde{x}))\}\delta_{g\gamma\tilde{x}} \\ &= \exp\{-s(f(\gamma) - f(\gamma') + D_f(d(\tilde{x}_0, \gamma\tilde{x}) - d(\tilde{x}_0, \gamma'\tilde{x})))\} \\ &\quad \times \exp\{-s(f(\gamma') + D_f d(\tilde{x}_0, \gamma'\tilde{x}))\}\delta_{\gamma'\tilde{x}} \end{aligned}$$

Lorsque  $\gamma'\tilde{x}$  tend vers  $\xi \in \Lambda$ , on a

$$(22) \quad d(\tilde{x}_0, \gamma\tilde{x}) - d(\tilde{x}_0, \gamma'\tilde{x}) = d(g\tilde{x}_0, \gamma'\tilde{x}) - d(\tilde{x}_0, \gamma'\tilde{x}) \longrightarrow B_\xi(g\tilde{x}_0, \tilde{x}_0)$$

et

$$(23) \quad f(\gamma) - f(\gamma') = f(g^{-1}\gamma') - f(\gamma') \sim \bar{F}_f(g^{-1}, \xi) \sim f(g^{-1}) \sim -f(g)$$

où  $a(g, \xi) \sim b(g, \xi)$  signifie que  $(a - b)$  est uniformément borné en  $g \in \Gamma$  et  $\xi \in \Lambda$ . Le lemme se déduit aisément de (21), (22) et (23).  $\square$

REMARQUE 2.1. — Il ressort de (23) que les inégalités données par (19) sont encore vraies lorsque l'on pose

$$\mathcal{F}_f(g, \xi) = -f(g) + D_f B_\xi(g\tilde{x}_0, \tilde{x}_0).$$

Nous verrons au § 3 que certains quasi-morphismes permettent de construire un cocycle, *i.e.* que (19) devient une égalité (avec  $K_1 = 1$ ).

REMARQUE 2.2. — Si, dans l'expression (17),  $f$  est remplacée par  $f + b$  où  $b$  est bornée sur  $\Gamma$ , il est clair que la classe de mesures  $\langle \mu_{f, \tilde{x}_0} \rangle$  reste inchangée.

Par la suite l'origine  $\tilde{x}_0$  est fixée, ainsi que la sous-suite qui a permis de définir  $\mu_f = \mu_{f, \tilde{x}_0}$ .

## 2.2. Le point de vue des courants géodésiques.

Chaque classe d'homotopie libre de  $(S, h)$  contient une unique géodésique fermée et l'ensemble de ces classes d'homotopie s'identifie à l'ensemble des classes de conjugaison du groupe  $\Gamma$  (*cf.* [K1]). Du lemme 1.2 (i) et de la remarque 1.2, on déduit l'identification

$$\text{Ker } \Psi_2 \simeq \mathcal{Q}_h^0(\Gamma).$$

Par conséquent, chaque classe de  $\text{Ker } \Psi_2$  définit de manière unique une fonction antisymétrique sur les géodésiques périodiques orientées de  $(S, h_0)$ , ou encore, suivant le point de vue de F. Bonahon (voir [Bo1], [Bo2]), sur les masses de Dirac du cône positif des courants géodésiques orientés de  $S$ , noté  $\mathcal{C}_0(S)$ .

Nous montrons dans cette section que la construction précédente permet d'injecter par dualité les éléments de  $\text{Ker } \Psi_2$  dans  $\mathcal{C}_0(S)$ .

### 2.2.1. Courants géodésiques sur $S$ .

DÉFINITION 2.1 (Bonahon-Sullivan). — Un *courant géodésique (orienté)* sur  $S$  est une mesure de Radon positive supportée par  $\Lambda_2$ , invariante par l'action (diagonale) de  $\Gamma$ .

Si  $\langle \gamma \rangle$  est une géodésique primitive orientée de  $(S, h_0)$ , on note  $\delta_{\langle \gamma \rangle}$  la somme des masses de Dirac sur les couple (ordonnés) des extrémités des relevés de  $\langle \gamma \rangle$  dans  $\tilde{S}$ . Ces couples  $(\gamma^-, \gamma^+)$  s'accroissent sur la diagonale de  $\Lambda_2$ . La mesure  $\delta_{\langle \gamma \rangle}$ ,  $\Gamma$ -invariante, est finie sur les compacts de  $\Lambda_2$  et

$$\langle \gamma \rangle \longmapsto \delta_{\langle \gamma \rangle}$$

prolongée par homogénéité, définit une injection des géodésiques périodiques de  $S$  dans  $\mathcal{C}_0(S)$  (voir [Bo1], [Bo2], [Ot]).

Le lemme 1.1 et la remarque 1.3 permettent d'associer à chaque classe de  $c \in \text{Ker } \Psi_2$  une unique fonction  $f_c$  sur  $\{\delta_{\langle \gamma \rangle}\} \subset \mathcal{C}_0(S)$ . La remarque 1.3 entraîne qu'il n'est pas possible de la prolonger de manière continue à  $\mathcal{C}_0(S)$  (voir [Pi, partie A]). En revanche, la construction de 2.1.1. permet d'associer à chaque quasi-morphisme et, moyennant une normalisation naturelle, à chaque classe de  $\text{Ker } \Psi_2$  un élément de  $\mathcal{C}_0(S)$ .

2.2.2 Courant géodésique d'un quasi-morphisme.

Soient  $f \in \mathcal{Q}(\Gamma)$  et  $\mu_{\pm f}$  une mesure associée à  $\pm f$  (suivant la construction précédente). Posons

$$(24) \quad \bar{\nu}_f(d\xi \times d\eta) = \bar{K}_f(\xi, \eta) \mu_f(d\xi) \otimes \mu_{-f}(d\eta)$$

avec

$$(25) \quad \bar{K}_f(\xi, \eta) = \exp\{\bar{H}_f(\xi, \eta) + D_f(B_\xi(\tilde{x}_0, y) + B_\eta(\tilde{x}_0, y))\}$$

où

$$B_\xi(\tilde{x}_0, y) + B_\eta(\tilde{x}_0, y)$$

ne dépend pas du point  $y = y(\xi, \eta)$  de la géodésique  $(\xi, \eta)$  et où  $\bar{H}_f$  est donnée par (8).

Des relations (19), (20) et (21), on déduit qu'il existe une constante  $K \geq 1$  telle que, pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et  $\bar{\nu}_f$ -presque tout  $\theta = (\xi, \eta) \in \Lambda_2$

$$(26) \quad K^{-1} \leq \frac{d\gamma_* \bar{\nu}_f}{d\bar{\nu}_f}(\theta) \leq K$$

Notons  $\langle \bar{\nu}_f \rangle$  la classe de mesures de  $\bar{\nu}_f$ . Le lemme qui suit résulte de l'adaptation d'un argument de K. Schmidt (voir [Zi2], [Kai2]). Nous en donnons une démonstration particulièrement simple suggérée par E. Ghys.

LEMME 2.3 (voir [Gh2]). — Il existe  $\nu_f \in \mathcal{C}_0(S)$  vérifiant  $\langle \nu_f \rangle = \langle \bar{\nu}_f \rangle$ .

Preuve (Ghys). — Notons  $c(\gamma, \theta)$  le cocycle (multiplicatif) de Radon Nikodym donné par (26), i.e.

$$c(\gamma, \theta) = \frac{d\gamma_*^{-1} \bar{\nu}_f}{d\bar{\nu}_f}(\theta).$$

Posons

$$h_f(\theta) = \sup_{\gamma} c(\gamma, \theta) \in [K^{-1}, K] \quad \text{et} \quad \nu_f = h_f \bar{\nu}_f.$$

Il vient, pour  $g \in \Gamma$  :

$$\begin{aligned} g_*^{-1}\nu_f(d\theta) &= \sup_{\gamma} (c(\gamma, g\theta))c(g, \theta)\bar{\nu}_f(d\theta) \\ &= \sup_{\gamma} (c(\gamma g, \theta))\bar{\nu}_f(d\theta) \\ &= \sup_{\gamma} (c(\gamma, \theta))\bar{\nu}_f(d\theta) = \nu_f(d\theta). \quad \square \end{aligned}$$

On posera par la suite  $K_f = h_f \bar{K}_f$ .

**2.3. L'injection  $\text{Ker } \Psi_2 \hookrightarrow \mathcal{C}_0(S)$ .**

Pour chaque classe  $c \in \text{Ker } \Psi_2$ , nous noterons désormais  $f_c$  l'unique quasi-morphisme de  $\mathcal{Q}_h^0(\Gamma)$  vérifiant

$$c = [df_c]_b ;$$

$\mu_c$  une mesure associée à  $f_c$  et  $\nu_c$  le courant géodésique qui lui correspond. Nous démontrons dans cette section le résultat principal (théorème 0.1), formulé de manière équivalente par le

**THÉORÈME 2.1.** — *Notons  $\langle \mathcal{C}_0(S) \rangle$  l'espace des classes de courants géodésiques orientés de  $S$ . L'application*

$$\begin{aligned} \text{Ker } \Psi_2 &\longrightarrow \langle \mathcal{C}_0(S) \rangle \\ c &\longmapsto \langle \nu_c \rangle \end{aligned}$$

*est injective.*

Notons  $C(\Lambda)$  l'enveloppe convexe de l'ensemble limite (dans  $\mathbb{H}^2$ ) et  $KS = \Gamma \backslash C(\Lambda)$  un domaine fondamental compact. L'identification

$$U(\widetilde{KS}) \simeq \Lambda_2 \times \mathbb{R}$$

induit un isomorphisme entre  $\mathcal{C}_0(S)$  et l'espace des mesures de Radon positives sur  $U(KS)$  invariantes par le flot géodésique  $(\Phi_t)$  (voir par exemple [Kai1]). Notons alors

$$\tilde{m}_c = \nu_c \otimes dt$$

la mesure  $\Gamma$ -invariante et  $\Phi_t$ -invariante sur  $\Lambda_2 \times \mathbb{R}$  et  $m_c$  la mesure  $\Phi_t$ -invariante sur  $U(KS)$ .

Le flot  $(\Phi_t)$  est un flot d'Anosov. Nous désignerons par  $W^j$  (avec  $j = s, ss, u, su$ ) les feuilletages stable, fortement stable, instable, et fortement instable, associés à une décomposition et  $m_c^j$  les mesures conditionnelles associées à  $m_c$  (qui, par construction, se désintègre localement pour la structure de produit local sur  $U(KS)$ ). Le lemme qui suit, dont la démonstration s'inspire des arguments de Hopf (voir proposition 2.1.), précise la correspondance entre les classes de mesures conditionnelles et les classes de mesures qui se désintègrent localement sur  $U(KS)$  compact.

LEMME 2.4 (voir [Le]). — Soient  $m_1$  et  $m_2$  deux mesures sur  $U(KS)$  qui se désintègrent localement. Alors,

$$\langle m_1^{ss} \rangle = \langle m_2^{ss} \rangle \iff \langle m_1 \rangle = \langle m_2 \rangle \iff \langle m_1^{su} \rangle = \langle m_2^{su} \rangle.$$

Preuve. — Voir [Kai1], [Le], [Pi], etc.  $\square$

En particulier, nous déduisons le

COROLLAIRE 2.1. — Soient  $c_1 = [df_1]_b, c_2 = [df_2]_b \in \text{Ker } \Psi_2, \mu_{1,\pm} = \mu_{\pm f_1}, \mu_{2,\pm} = \mu_{\pm f_2}$  et  $\nu_1, \nu_2$  les courants géodésiques associés. Alors,

$$\langle \mu_{1,-} \rangle = \langle \mu_{2,-} \rangle \iff \langle \nu_1 \rangle = \langle \nu_2 \rangle \iff \langle \mu_{1,+} \rangle = \langle \mu_{2,+} \rangle.$$

Preuve. — Notons  $m_1$  et  $m_2$  les mesures sur  $U(KS)$  déduites des courants géodésiques  $\nu_1$  et  $\nu_2$ . Chaque feuille fortement instable (resp. fortement stable) de  $U(\widetilde{KS})$  s'identifie à  $\Lambda \setminus \{\eta_0\}$  (resp.  $\Lambda \setminus \{\xi_0\}$ ) et l'expression de  $\tilde{m}_i^{su}$  (resp.  $\tilde{m}_i^{ss}$ ) n'est autre que  $K_i(\cdot, \eta_0)\mu_{i,+}$  (resp.  $K_i(\xi_0, \cdot)\mu_{i,-}$ ) (l'indice  $i = 1, 2$  correspondant à l'indice de la classe  $c_i$ ).  $\square$

L'ergodicité de  $m_c$ , à support compact, invariante par le flot géodésique, est un fait général : chaque mesure  $\tilde{m}_c$  est un quasi-produit (cf. [Kai1]), i.e. s'écrit  $K_f \mu_f \otimes \mu_{-f} \otimes dt$ .

PROPOSITION 2.1 (Hopf-Sullivan). — Soit  $\nu = K\mu_+ \otimes \mu_- \in \mathcal{C}_0(S)$  supportée par  $\Lambda_2$ , où  $\mu_+$  et  $\mu_-$  sont deux mesures de probabilité sur  $\Lambda$ . On suppose en outre qu'il existe  $k > 0$  tel que  $K \geq k$   $\nu$ -presque partout (noté  $\nu$ -p.p.). Alors,  $m, \Phi_t$ -invariante sur  $U(KS)$  déduite de  $\nu$ , est ergodique.

Preuve. — Soit  $h$  (uniformément) continue sur  $U(KS)$  compact ; le théorème de Birkhoff permet de définir

$$h_{\pm}(\cdot) = \lim_{+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T h(\Phi_{\pm t}(\cdot)) dt$$

$m$ -presque partout,  $m$ -presque partout égales (disons sur  $E$ ) et  $\Phi_t$ -invariantes. Il nous faut montrer que  $h_+$  (et  $h_-$ ) sont  $\mu_+$ -presque sûrement (et  $\mu_-$ -p.s.) constantes. Nous avons

$$\tilde{E} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Phi_t(\tilde{E}_0)$$

et, par le théorème de Fubini,

$$m(E^c) = 0 \implies 0 = \nu(\tilde{E}_0^c) \geq k\mu_+ \otimes \mu_-(\tilde{E}_0^c) = 0.$$

Par le théorème de Fubini, on a

$$\tilde{E}_0 = \bigcup_{\xi \in F} (\{\xi\} \times G(\xi)) \quad \text{avec } \mu_+(F) = \mu_-(G(\xi)) = 1.$$

L'uniforme continuité de  $h$  entraîne que  $h_+$ ,  $\Phi_t$ -invariante, est constante sur chaque feuille stable  $\{\xi\} \times G(\xi) \times \mathbb{R}$  et  $h_-$  sur chaque feuille instable. Il en résulte que la constante ne dépend pas de la feuille stable  $\mu_+$ -p.s. (ou de la feuille instable,  $\mu_-$ -p.s.).  $\square$

**COROLLAIRE 2.2.** — Soit  $c \in \text{Ker } \Psi_2$ ; alors  $m_c$ ,  $\Phi_t$ -invariante, est ergodique.

*Preuve.* — Il suffit de montrer que  $K_{\tilde{f}} \geq k > 0$ . Soit  $\tilde{f} \in \mathcal{Q}_h^0(\Gamma)$  avec  $[d\tilde{f}]_b = c$ . Nous avons :

$$K_{\tilde{f}} = h_{\tilde{f}} \bar{K}_{\tilde{f}} = h_{\tilde{f}} \exp\{\bar{H}_{\tilde{f}} + D_{\tilde{f}}(B_{\xi}(\tilde{x}_0, y) + B_{\eta}(\tilde{x}_0, y))\}.$$

Par construction,  $K^{-1} \leq h_{\tilde{f}} \leq K$  (cf. preuve du lemme 2.3.),

$$|\bar{H}_{\tilde{f}}(\xi, \eta)| = \left| \sup_{\substack{\gamma_n \tilde{x}_0 \rightarrow \xi \\ \gamma_n \tilde{x}_0 \rightarrow \eta}} \overline{\lim}_n [\tilde{f}(\gamma_n) + \tilde{f}(\gamma_n^{-1} \gamma'_n) + \tilde{f}(\gamma_n'^{-1})] \right| \leq 2 \|d\tilde{f}\|_{\infty}$$

et, si  $\mathbb{H}^2 \simeq D(0, 1)$ ,  $\tilde{x}_0 = 0$ ,

$$\exp\{D_{\tilde{f}}(B_{\xi}(\tilde{x}_0, y) + B_{\eta}(\tilde{x}_0, y))\} = \frac{1}{|\xi - \eta|^{2D_{\tilde{f}}}} \geq 2^{-2D_{\tilde{f}}} > 0. \quad \square$$

**COROLLAIRE 2.3.** — L'action de  $\Gamma$  sur  $(\Lambda, \mu_{\pm c})$  est ergodique.

*Preuve.* — Un borélien  $A \subset \Lambda$ ,  $\Gamma$ -invariant, permet de construire  $\Gamma \backslash (A \times \Lambda \times \mathbb{R})$  borélien de  $U(KS)$ , de  $m_c$ -mesure nulle ou pleine par ergodicité de  $m_c$ ; le borélien  $A$  est par conséquent de  $\mu_c$ -mesure nulle ou pleine.  $\square$

**COROLLAIRE 2.4** (unicité). — Soit  $f \in \mathcal{Q}(\Gamma)$ . Deux points d'accumulation  $\mu_1$  et  $\mu_2$  de la famille de mesures  $\{\mu_{f,s}; s > 1\}$  sont proportionnels.

*Preuve.* — Deux points d'accumulation  $\mu_1$  et  $\mu_2$  vérifient l'identité (19) qui permet de leur associer deux courants géodésiques  $\nu_1 = K_1 \mu_1 \otimes \mu_{-f}$  et  $\nu_2 = K_2 \mu_2 \otimes \mu_{-f}$  et deux mesures sur  $U(KS)$  dont les mesures conditionnelles sur les feuilles fortement stables sont absolument continues. Par le corollaire 2.1,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont absolument continues et par ergodicité de l'action de  $\Gamma$ , elles sont proportionnelles.  $\square$



Montrons alors le théorème 2.1. Soient  $c_1 = [df_1]_b$  et  $c_2 = [df_2]_b$  deux classes de  $\text{Ker } \Psi_2$ , où  $f_i \in \mathcal{Q}_h^0(\Gamma)$ ; soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  les mesures associées. Par le corollaire 2.3, si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont supposées absolument continues, la densité  $d\mu_2/d\mu_1$  est (presque sûrement) constante, ce qui entraîne, par (19) et (23), qu'il existe une constante  $C \geq 0$  telle que

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad -C \leq f_2(\gamma) - f_1(\gamma) + (D_{f_1} - D_{f_2})B_\xi(\gamma\tilde{x}_0, \tilde{x}_0) \leq C$$

et l'on peut supposer que ces inégalités sont vraies pour tout  $\xi \in \Lambda$ . Le quasi-morphisme  $(f_2 - f_1)$  est uniformément borné sur l'ensemble des commutateurs de  $\Gamma$  (remarque 1.3), ce qui implique  $D_{f_1} = D_{f_2}$  et alors  $(f_2 - f_1)$  est uniformément borné (en fait identiquement nul), *i.e.*  $[df_1]_b = [df_2]_b$ .  $\square$

### 3. Cohomologie bornée et dynamique symbolique

Nous donnons dans ce paragraphe une description complémentaire des classes de mesures de Patterson associées aux classes de  $\text{Ker } \Psi_2$  décrites par R. Brooks dans [Br] et par J. Barge et E. Ghys dans [BaGh]. Celle-ci nous permet de déduire une injection (linéaire) de ces classes dans l'espace des classes de fonctions Hölder sur le sous-décalage unilatéral  $(\Sigma_\Gamma, \sigma)$  associé au groupe  $\Gamma$ . L'existence d'un quasi-morphisme homogène qui «représente» chaque classe de  $\text{Ker } \Psi_2$  à un morphisme près correspond alors, dans ce contexte dynamique, au théorème de Livsič.

Nous notons dans ce paragraphe  $\mathcal{Q}_{0,b}(\Gamma)$  le sous-espace des quasi-morphismes de  $\Gamma$  qui vérifient la propriété  $(P_b)$  (définition 1.4.) et qui sont nuls sur le système symétrique de générateurs  $S(\Gamma)$  donné par (4).

#### 3.1. Le sous-décalage de type fini associé à $\Gamma$ .

On rappelle (voir [GhHa] et [PoSh]) qu'un groupe  $G$  de présentation finie est *fortement Markov* si pour tout système symétrique fini de générateurs  $S(G)$ , il existe un graphe fini orienté avec :

- un ensemble de sommets  $\mathcal{S}$ ;
- un ensemble d'arêtes orientées  $\mathcal{A} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ ;
- un sommet privilégié noté  $*$  sur lequel aucune arête ne finit;
- une application de «marquage» des arêtes  $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow S(G)$  telle qu'il existe une *bijection* entre les chemins orientés finis du graphe partant du sommet  $*$  et les éléments de  $G$ .

Étant donné  $G$  fortement Markov,  $\mathcal{S}$ ,  $*$ ,  $\mathcal{A}$  et  $\lambda$  définis comme ci-dessus (pour un système de générateurs fixé), on code  $G$  et son bord en lui associant l'espace symbolique  $(\Sigma_G, \sigma)$  défini de la manière suivante. Notons :

- $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S} \cup \{0\}$  ;
- $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \cup (\{*\} \times (\mathcal{S} \setminus \{*\}))$  ;
- $A = (A(i, j))$  la matrice carrée de taille  $\#\mathcal{S}_1$  où

$$A(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in \mathcal{A}, \\ 1 & \text{si } j = 0 \text{ et } i \in (\mathcal{S} \cup \{0\}) \setminus \{*\}, \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

On pose alors

$$\Sigma_G = \{\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 0} ; x_n \in \mathcal{S}_1, A(x_n, x_{n+1}) = 1\}$$

et  $\sigma : \Sigma_G \rightarrow \Sigma_G$  l'application décalage définie par  $(\sigma(\mathbf{x}))_n = x_{n+1}$ , continue pour la métrique  $d$  sur  $\Sigma_G$  :

$$(27) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n \geq 0} \frac{1 - \delta_{x_n, y_n}}{2^n}$$

On note

$$\Sigma_G^+ = \{\mathbf{x} \in \Sigma_G ; x_n \neq 0 \text{ pour tout } n\}$$

Soit  $a > 0$ . On note  $C^a = C^a(\Sigma_G, \mathbb{R})$  l'espace (de Banach) des fonctions  $a$ -Hölder sur  $(\Sigma_G, d)$  compact muni de la norme Hölder définie par

$$\|h\|_a = \sup_{\Sigma_G} |h| + \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \left\{ \frac{|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})|}{d^a(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right\}.$$

Deux fonctions  $h_1, h_2 \in C^a$  sont *cohomologues* s'il existe  $u \in C^a$  telle que  $h_1 - h_2 = u - u \circ \sigma$ .

Le groupe Fuchsien  $\Gamma$ , convexe cocompact est fortement Markov (voir par exemple [PoSh] et les références citées).

Lorsque  $S$  non compacte de genre  $g$  admet  $r$  bouts ( $\simeq S^1 \times \mathbb{R}$ ) de volume infini (avec  $(g = 0 \text{ et } r \geq 3)$  ou  $(g \geq 1 \text{ et } r \geq 1)$ ),  $\Gamma$  est isomorphe au groupe libre  $L$  à  $2g + r - 1$  générateurs,  $\Sigma_\Gamma^+$  s'identifie à l'ensemble des mots réduits infinis en les générateurs et leurs inverses, i.e. à  $\partial L \simeq \Lambda_\Gamma$  et  $(\Sigma_L^+, \sigma)$  est *topologiquement mélangeant* (i.e. pour tous  $U, V$  ouverts de  $\Sigma_L^+$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\sigma^n(U) \cap V \neq \emptyset$ ) (cf. [Bow1]).

Lorsque  $S$  est compacte, la surjection Hölder  $\pi : \Sigma_\Gamma^+ \rightarrow \Lambda_\Gamma$  n'est plus bijective, mais la préimage de  $\xi \in \Lambda_\Gamma$  est constituée de deux points au plus et de deux points exactement lorsque  $\xi$  appartient à un ensemble dénombrable de points de  $\Lambda_\Gamma$  (voir [Bow2], [BoSe], [Se1], [Se2]). Cela permet de rappeler les fonctions (ou les cocycles) Hölder en des fonctions sur le sous-décalage  $(\Sigma_\Gamma^+, \sigma)$  encore topologiquement mélangeant (voir [Bow1] et [Bow2]).

**3.2. Propriété (P<sub>b</sub>) et fonctions Hölder.**

On décrit dans cette section la correspondance entre les classes bornées associées aux éléments de  $\mathcal{Q}_{0,b}(\Gamma)$  et les classes de fonctions Hölder sur  $\Sigma_\Gamma^+$ .

Soient  $q \in \mathcal{Q}_{0,b}(\Gamma)$  et  $F_q$  le cocycle associé (définition 1.4.). Pour tout  $\xi = s_{i_1} \cdots s_{i_k} \cdots \in \Lambda_\Gamma \simeq \partial\Gamma$ , posons :

$$\begin{aligned}
 (28) \quad f_q(\xi) &= F_q(s_{i_1}; s_{i_1} \cdots s_{i_k} \cdots) \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (q(s_{i_1} \cdots s_{i_k}) - q(s_{i_2} \cdots s_{i_k})) \\
 &= - \lim_{k \rightarrow +\infty} dq(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots).
 \end{aligned}$$

Par hypothèse, la fonction  $f_q$ , bien définie, est Hölder continue et peut être appelée en une fonction Hölder sur  $\Sigma_\Gamma^+$  que nous noterons encore  $f_q$ .  
Notons

$$S_n f_q = \sum_{k=0}^{n-1} f_q \circ \sigma^k$$

la  $n$ -ième somme de Birkhoff de  $f_q$  et  $\pi_n : \Sigma_\Gamma^+ \rightarrow \Gamma$  la  $n$ -ième projection définie par

$$\pi_n(\mathbf{x}) = \lambda(*, x_1) \cdots \lambda(x_{n-1}, x_n).$$

LEMME 3.1. — *Il existe  $C = C(q)$  telle que*

$$(29) \quad |q \circ \pi_n - S_n f_q| \leq C$$

*Preuve.* — Soient  $\mathbf{x} = (*, x_1, \dots, x_n, \dots) \in \Sigma_\Gamma^+$  et  $\pi_n(\mathbf{x}) = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$ . Par (2), et puisque  $q$  s'annule sur  $S(\Gamma)$ ,

$$q \circ \pi_n(\mathbf{x}) = - \sum_{j=1}^{n-1} dq(s_{i_j}; s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_n}).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 &|q \circ \pi_n(\mathbf{x}) - S_n f_q(\mathbf{x})| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^{n-1} (dq(s_{i_j}; s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_n} \cdots) - dq(s_{i_j}; s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_n})) \right. \\
 &\quad \left. + dq(s_{i_n}; s_{i_{n+1}} \cdots) \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^{n-1} |dq(s_{i_j}; s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_n} \cdots) - dq(s_{i_j}; s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_n})| + \|dq\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Puisque  $q$  vérifie  $(P_b)$ , il existe  $a > 0$  et  $C' \geq 0$  tel que

$$|dq(s_{i_j}; s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_n} \cdots) - dq(s_{i_j}; s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_n})| \leq C' 2^{-(a(n-j+1))}$$

ce qui entraîne

$$|q \circ \pi_n(\mathbf{x}) - S_n f_q(\mathbf{x})| \leq \frac{C'}{2^a - 1} + \|dq\|_\infty. \quad \square$$

Nous en déduisons la correspondance linéaire suivante :

PROPOSITION 3.1. — Soient  $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}_{0,b}(\Gamma)$  et  $f_1, f_2 : \Sigma_\Gamma^+ \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions Hölder associées. Alors,

$$f_1 \sim f_2 \iff [dq_1]_b = [dq_2]_b.$$

*Preuve.*

Sens  $\Rightarrow$ . Nous avons les équivalences

$$\begin{aligned} f_1 \sim f_2 &\iff \forall \mathbf{x} \in \Sigma_\Gamma^+, \quad \lim_n \left( \frac{1}{n} S_n f_1(\mathbf{x}) - \frac{1}{n} S_n f_2(\mathbf{x}) \right) = 0, \\ &\iff \forall \mathbf{x} \in \Sigma_\Gamma^+, \quad \lim_n \frac{1}{n} q_1 \circ \pi_n(\mathbf{x}) = \lim_n \frac{1}{n} q_2 \circ \pi_n(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

En particulier, pour  $\pi(\mathbf{x}) = s_{i_1} \cdots s_{i_k} s_{i_1} \cdots s_{i_k} \cdots \in \Lambda_\Gamma$  périodique, pour  $\gamma = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$  de longueur  $\ell(\gamma) = k$  et  $n = rk + p$  :

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1}{n} q_i \circ \pi_n(\mathbf{x}) &= \lim_n \frac{1}{n} q_i(\gamma^r s_{i_1} \cdots s_{i_p}) = \lim_n \frac{1}{n} q_i(\gamma^r) \\ &= \frac{1}{\ell(\gamma)} \lim_r \frac{1}{r} q_i(\gamma^r) = \frac{\bar{q}_i(\gamma)}{\ell(\gamma)}. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $f_1 \sim f_2$  implique  $\bar{q}_1/\ell = \bar{q}_2/\ell$  qui implique à son tour  $\bar{q}_1 = \bar{q}_2$ ; on en déduit  $[dq_1]_b = [dq_2]_b$ .

Sens  $\Leftarrow$ . On déduit de  $[dq_1]_b = [dq_2]_b$  que l'on a  $q_1 - q_2 = m + b$  (avec  $m$  morphisme et  $b$  bornée). Puisque  $q_1$  et  $q_2$  s'annulent sur  $S(\Gamma)$ ,  $m \equiv 0$  et  $b$  vérifie encore  $(P_b)$ , ce qui entraîne

$$\sup_n |S_n f_1 - S_n f_2| < \infty.$$

L'application  $\sigma : \Sigma_\Gamma^+ \rightarrow \Sigma_\Gamma^+$  est topologiquement mélangeante. Par le théorème 1.28 de [Bow1], on a  $f_1 \sim f_2$ .  $\square$

REMARQUE 3.1. — La proposition précédente nous dit que les classes bornées représentées par le bord des éléments  $q \in \mathcal{Q}_{0,b}(\Gamma)$  sont déterminées par la classe de cohomologie  $[f_q]$  de  $f_q$ , et donc (théorème de Livsič) par les valeurs de  $S_n f_q$  (ou encore de  $q \circ \pi_n$ ) sur les orbites  $n$ -périodiques, ce qui correspond, dans ce contexte, à l'existence de l'unique quasi-morphisme homogène nul sur  $S(\Gamma)$  dont le bord représente une classe bornée donnée.

REMARQUE 3.2. — Posons

$$\text{Per}_n = \{ \mathbf{x} \in \Sigma_\Gamma^+ ; \sigma^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \text{ et } \sigma^j(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x} \text{ pour } j < n \},$$

$$C_{x_1^0, \dots, x_n^0} = \{ \mathbf{x} \in \Sigma_\Gamma^+ ; x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0 \}.$$

Soit  $q \in \mathcal{Q}_{0,b}(\Gamma)$ ; la *pression* de  $s f_q$  (pour  $s \in \mathbb{R}$ ) est définie (voir [Bow1]) par :

$$\begin{aligned} P(s f_q) &= P(-s f_q) = \overline{\lim}_n \frac{1}{n} \log \left( \sum_{\text{Per}_n} \exp(s S_n f_q(\mathbf{x})) \right) \\ &= \overline{\lim}_n \frac{1}{n} \log \left( \sum_{\text{Per}_n} \exp(s \bar{q} \circ \pi_n(\mathbf{x})) \right). \end{aligned}$$

À  $[f_q]$  (ou encore à  $[dq]_b$ ), on associe de manière unique *une mesure de Gibbs* sur  $\Sigma_\Gamma^+$ , *i.e.* une mesure  $\mu_q$  vérifiant :

$$\exists K \geq 1, \forall \mathbf{x} \in \Sigma_\Gamma^+, \quad K^{-1} \leq \frac{\mu_q(C_{x_1^0, \dots, x_n^0})}{\exp\{-nP(f_q) + \bar{q} \circ \pi_n(\mathbf{x})\}} \leq K.$$

C'est une description complémentaire de la classe de mesures de type Patterson associée à  $q$ .

### 3.3. Deux exemples.

#### 3.3.1. Classes de Brooks du groupe libre.

Nous supposons ici que  $\Gamma = L$  est un groupe libre et  $S(L)$  désigne le système symétrique de générateurs associé. Chaque élément de  $\gamma$  admet une unique écriture réduite. Pour  $\gamma_0 \in L$  réduit et  $\gamma \in L$  (pas nécessairement réduit), on note  $n_{\gamma_0}(\gamma)$  le nombre d'occurrences dans l'écriture réduite de  $\gamma$  et

$$b_{\gamma_0}(\gamma) = n_{\gamma_0}(\gamma) - n_{\gamma_0}(\gamma^{-1})$$

le quasi-morphisme de  $L$  ([Br]). Remarquons que  $b_{\gamma_0}$  est un morphisme ssi  $\gamma_0 \in S(L)$ .

LEMME 3.2. — Soit  $\gamma_0 \in L$  un mot réduit. Pour  $\gamma \in L$ , on note :

(i)  $\gamma = \alpha\gamma_1^r\alpha^{-1} = \alpha(s_1 \cdots s_k)^r\alpha^{-1}$  l'écriture minimale de  $\gamma$ , c'est-à-dire l'écriture telle que :

(a)  $\gamma = \alpha\gamma_1^r\alpha^{-1}$  est l'écriture réduite de  $\gamma$  et  $s_1 \neq s_k^{-1}$  ;

(b)  $r$  est maximal pour cette écriture.

(ii)  $t_1 \cdots t_\ell$ , les  $\ell$  premiers générateurs apparaissant dans l'écriture réduite de  $\gamma_1^n$  (avec  $n \geq [\ell/k]$  où  $[ ]$  est la partie entière).

Alors, le quasi-morphisme homogène  $\bar{b}_{\gamma_0}$  associé à  $b_{\gamma_0}$  est donné par :

$$\bar{b}_{\gamma_0}(\gamma) = \bar{b}_{\gamma_0}(\alpha\gamma_1^r\alpha^{-1}) = r b_{\gamma_0}(t_1 \cdots t_{\ell(\gamma_0)+\ell(\gamma_1)-1}).$$

Preuve. — Voir [Pi, lemme 3.8].  $\square$

Il est facile de voir que  $b_{\gamma_0}$  vérifie la propriété  $(P_b)$  alors que  $\bar{b}_{\gamma_0}$  ne la vérifie pas. La fonction  $f_{\gamma_0}$  sur  $\Sigma_L^+ \simeq \partial L$  déduite de  $b_{\gamma_0}$  ne dépend que d'un nombre fini — qui dépend de  $l(\gamma_0)$  — de termes de la variable du bord. Dans ce cas, le quasi-cocycle  $F_{\gamma_0}$  associé à  $b_{\gamma_0}$  est un cocycle et les inégalités (19) et (26) correspondent à des égalités (avec  $K_1 = K = 1$ ).

3.3.2. Classes de Barge-Ghys des surfaces compactes.

Notons  $\Omega^p(S)$  l'espace des  $p$ -formes  $C^\infty$  sur  $(S, h_0)$  compacte,  $\alpha$  un élément de  $\Omega^1(S)$ ,  $x_0$  une origine fixée sur  $S$ ,  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  le segment géodésique orienté d'extrémités  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{S} = \tilde{S} \cup \partial\tilde{S}$  et  $T(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  le triangle orienté à bords géodésiques de sommets  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in \tilde{S}$  (d'aire uniformément bornée). Par compacité de  $S$ , la fonction définie sur  $\Gamma$  par

$$(30) \quad \tau_\alpha(\gamma) = \int_{(\tilde{x}_0, \gamma\tilde{x}_0)} \tilde{\alpha}$$

(où  $\tilde{\alpha}$  est la 1-forme relevée  $\Gamma$ -invariante) est un quasi-morphisme (voir [BaGh]) et la classe bornée  $[d\tau_\alpha]_b$  ne dépend pas de  $\tilde{x}_0$ .

PROPOSITION 3.2. — La fonction  $F_\alpha$  définie sur  $\Gamma \times \Lambda_\Gamma \simeq \Gamma \times S^1$  par

$$F_\alpha(g, \xi) = \tau_\alpha(\gamma) + \int_{T(\tilde{x}_0, g^{-1}\tilde{x}_0, \xi)} d\tilde{\alpha}$$

est le cocycle Hölder associé à  $\tau_\alpha$  suivant la définition 1.3.

Preuve. — Nous avons les égalités :

$$\tau_\alpha(g\gamma_n) - \tau_\alpha(\gamma_n) = \int_{(\tilde{x}_0; g\gamma_n\tilde{x}_0)} \tilde{\alpha} - \int_{(\tilde{x}_0; \gamma_n\tilde{x}_0)} \tilde{\alpha}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{(g^{-1}\tilde{x}_0; \gamma_n \tilde{x}_0)} \tilde{\alpha} - \int_{(\tilde{x}_0; \gamma_n \tilde{x}_0)} \tilde{\alpha} \\
 &= - \int_{(\tilde{x}_0; g^{-1}\tilde{x}_0)} \tilde{\alpha} + \int_{T(\tilde{x}_0; g^{-1}\tilde{x}_0; \gamma_n \tilde{x}_0)} d\tilde{\alpha} \quad \text{(Stokes)} \\
 &= \int_{(\tilde{x}_0; g\tilde{x}_0)} \tilde{\alpha} + \int_{T(\tilde{x}_0; g^{-1}\tilde{x}_0; \gamma_n \tilde{x}_0)} d\tilde{\alpha} .
 \end{aligned}$$

Montrons que

$$A_n = \left| \int_{T(\tilde{x}_0; g^{-1}\tilde{x}_0; \xi)} d\tilde{\alpha} - \int_{T(\tilde{x}_0; g^{-1}\tilde{x}_0; \gamma_n \tilde{x}_0)} d\tilde{\alpha} \right|$$

tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini.

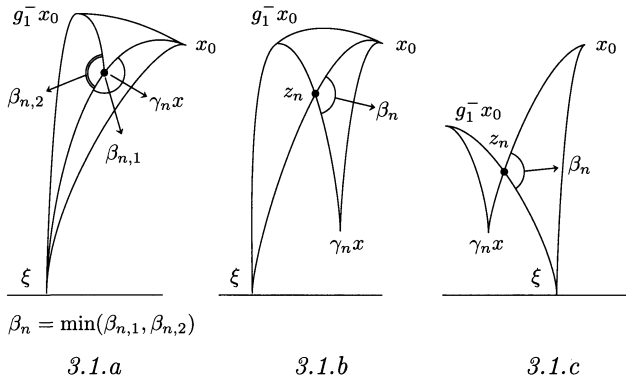


Figure 3.1

On pose (voir figures 3.1.a , 3.1.b et 3.1.c) ;

$$\tilde{z}_n = \begin{cases} [g^{-1}\tilde{x}_0; \gamma_n \tilde{x}_0] \cap [\tilde{x}_0; \xi] & \text{si } [g^{-1}\tilde{x}_0; \gamma_n \tilde{x}_0] \cap [\tilde{x}_0; \xi] \neq \emptyset, \\ [\tilde{x}_0; \gamma_n \tilde{x}_0] \cap [g^{-1}\tilde{x}_0; \xi] & \text{si } [\tilde{x}_0; \gamma_n \tilde{x}_0] \cap [g^{-1}\tilde{x}_0; \xi] \neq \emptyset, \end{cases}$$

où [ ; ] désigne le segment géodésique et [ ; ) le rayon géodésique.

On note encore :

$$T_{1;n} = \begin{cases} T(g^{-1}\tilde{x}_0; \gamma_n \tilde{x}_0; \xi) & \text{(a),} \\ T(g^{-1}\tilde{x}_0; \tilde{z}_n; \xi) & \text{(b),} \\ T(g^{-1}\tilde{x}_0; \tilde{z}_n; \gamma_n \tilde{x}_0) & \text{(c),} \end{cases} \quad T_{2;n} = \begin{cases} T(\tilde{x}_0; \gamma_n \tilde{x}_0; \xi) & \text{(a),} \\ T(\tilde{x}_0; \tilde{z}_n; \gamma_n \tilde{x}_0) & \text{(b),} \\ T(\tilde{x}_0; \tilde{z}_n; \xi) & \text{(c).} \end{cases}$$

Dans les trois cas, on a

$$A_n \leq \|d\tilde{\alpha}\|_{\infty} (\text{vol}_{\tilde{h}_0}(T_{1;n}) + \text{vol}_{\tilde{h}_0}(T_{2;n})),$$

soit

$$A_n \leq 2\|d\tilde{\alpha}\|_\infty(\pi - \beta_n)$$

où

$$\beta_n = \begin{cases} \min(\angle(g^{-1}\tilde{x}_0; \gamma_n\tilde{x}_0; \xi); \angle(\tilde{x}_0; \gamma_n\tilde{x}_0; \xi)) & \text{(a),} \\ \angle(\tilde{x}_0; \tilde{z}_n; \gamma_n\tilde{x}_0) & \text{(b),} \\ \angle(\tilde{x}_0; \tilde{z}_n; \xi) & \text{(c).} \end{cases}$$

Le lemme qui suit établit la convergence :

LEMME 3.3. — *On a  $\lim \beta_n = \pi$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.*

*Preuve.* — Dans les trois cas, l'angle  $\beta_n$  est déterminé par  $\tilde{x}_0$ ,  $g^{-1}\tilde{x}_0$ ,  $\xi$  et un quatrième point ( $\tilde{z}_n$  ou  $\gamma_n\tilde{x}_0$ ) qui reste dans  $T(\tilde{x}_0; g^{-1}\tilde{x}_0; \xi)$  et qui converge vers  $\xi$ ; nous montrons dans un premier temps que si :

- a)  $\tilde{y}$  (égal à  $\tilde{x}_0$  ou  $g^{-1}\tilde{x}_0$ ) est un point fixé,
- b)  $\tilde{y}_n \rightarrow \xi$  est une suite de points de  $T(\tilde{x}_0; g^{-1}\tilde{x}_0; \eta)$ ,

alors  $\angle(\tilde{y}; \tilde{y}_n; \xi)$  tend vers  $\pi$  lorsque  $n$  tend vers l'infini (Fig. 3.2.a).

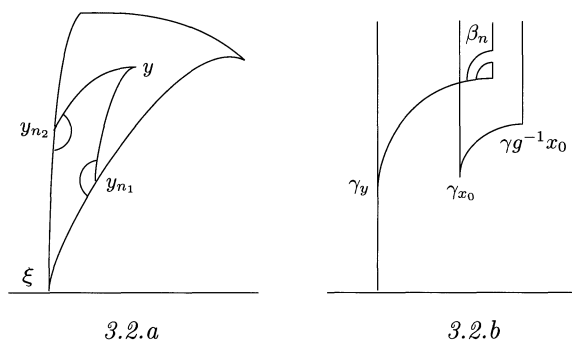


Figure 3.2

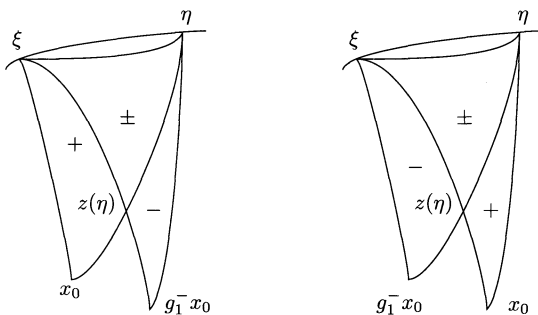
Une isométrie  $\gamma$  qui envoie  $\xi$  en  $\infty$  ne change pas les angles (euclidiens) et le cercle orthogonal au bord qui passe par  $\tilde{y}$  et  $\tilde{y}_n$  converge vers la droite verticale qui passe par  $\tilde{y}$  (Fig. 3.2.b) donc  $\angle(\tilde{y}; \tilde{y}_n; \xi)$  tend vers  $\pi$ .  $\square$

Pour achever la preuve de la proposition, il reste à montrer le :

LEMME 3.4. — *Pour tout  $g \in \Gamma$ , il existe  $C = C(g; \tilde{x}_0)$  et il existe  $a = a(\tilde{x}_0; g; \epsilon) > 0$  tels que pour tout  $(\xi; \eta) \in (\partial\tilde{S})^2$  on ait*

$$|F_\alpha(g; \xi) - F_\alpha(g; \eta)| \leq Cd^a(\xi; \eta).$$





3.3.a

3.3.b

Figure 3.3

*Preuve.* — Par compacité,  $d\alpha$  est comparable à la forme d’aire  $\omega_{h_0}$  de la métrique hyperbolique sur  $S$ .

$$\begin{aligned}
 |F_\alpha(g; \xi) - F_\alpha(g; \eta)| &= \left| \int_{T(\tilde{x}_0; g^{-1}\tilde{x}_0; \xi)} d\tilde{\alpha} - \int_{T(\tilde{x}_0; g^{-1}\tilde{x}_0; \eta)} d\tilde{\alpha} \right| \\
 &= \left| \int_{T(\tilde{x}_0; \xi; \eta)} d\tilde{\alpha} - \int_{T(g^{-1}\tilde{x}_0; \xi; \eta)} d\tilde{\alpha} \right| \\
 &= \begin{cases} \left| \int_{T(\tilde{x}_0; \xi; z(\eta))} d\tilde{\alpha} - \int_{T(g^{-1}\tilde{x}_0; z(\eta); \eta)} d\tilde{\alpha} \right| \\ \quad \text{si } [\tilde{x}_0; \eta] \cap [g^{-1}\tilde{x}_0; \xi] = z(\eta) \neq \emptyset, \quad (\text{Fig. 3.3.a}); \\ \left| \int_{T(\tilde{x}_0; z(\eta); \eta)} d\tilde{\alpha} - \int_{T(g^{-1}\tilde{x}_0; \xi; z(\eta))} d\tilde{\alpha} \right| \\ \quad \text{si } [\tilde{x}_0; \xi] \cap [g^{-1}\tilde{x}_0; \eta] = z(\eta) \neq \emptyset, \quad (\text{Fig. 3.3.b}). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Il suffit par conséquent de majorer chacune des intégrales intervenant dans la dernière égalité par une puissance convenable de la distance géodésique donnée par (5) (voir le § 1). Comme  $\xi, \eta$  d’une part,  $\tilde{x}_0, g^{-1}\tilde{x}_0$  d’autre part, jouent des rôles symétriques, il suffit de montrer que :

$$\left| \int_{T(\tilde{x}_0; z(\eta); \xi)} \tilde{\omega}_{h_0} \right| \leq C d^a(\xi; \eta) = C \exp(-a\epsilon D_{\tilde{x}_0}(\xi; \eta))$$

ou encore qu’il existe  $C \geq 0$  et  $\epsilon' > 0$  qui ne dépendent ni de  $\xi$ , ni de  $\eta$  et telles que :

$$\left| \int_{T(\tilde{x}_0; z(\eta); \xi)} \tilde{\omega}_{h_0} \right| \leq C \exp(-\epsilon' D_{\tilde{x}_0}(\xi; \eta)).$$

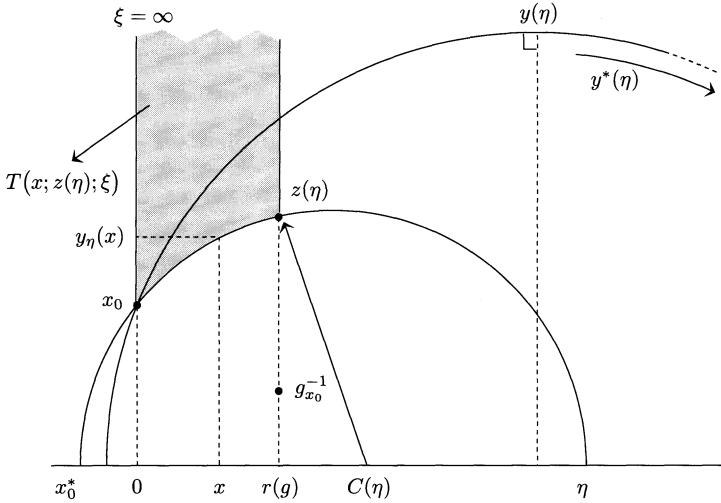


Figure 3.4

Dans le modèle du demi-plan de Poincaré, en supposant  $\xi = \infty$ ,  $\tilde{x}_0 = i$  et  $g^{-1}\tilde{x}_0 \in \{r(g) + iy; y > 0\}$  ( $r(g) > 0$ ), on a (Fig. 3.4) :

$$\left| \int_{T(\tilde{x}_0; z(\eta); \xi)} \tilde{\omega}_{h_0} \right| = \int_0^{r(g)} \int_{y_\eta(x)}^{+\infty} \frac{dx dy}{y^2} = \int_0^{r(g)} \frac{dx}{y_\eta(x)}.$$

On a

$$y_\eta^2(x) = 1 + C^2(\eta) - (x - C(\eta))^2$$

où  $C(\eta)$  est l'abscisse du centre du cercle passant par  $\tilde{x}_0, z(\eta)$  et orthogonal à  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Donc,

$$\left| \int_{T(\tilde{x}_0; z(\eta); \xi)} \tilde{\omega}_h \right| = \int_0^{r(g)} \frac{dx}{\sqrt{1 + C^2(\eta) - (x - C(\eta))^2}} = \int_{\frac{C(\eta) - r(g)}{\sqrt{1 + C^2(\eta)}}}^{\frac{C(\eta)}{\sqrt{1 + C^2(\eta)}}} \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}. \quad (*)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(*) \leq \frac{\sqrt{r(g)}}{\sqrt{2}(1 + C^2(\eta))^{\frac{1}{4}}} \left\{ \left[ \ln \left( \frac{1 + u}{1 - u} \right) \right]_{\frac{C(\eta) - r(g)}{\sqrt{1 + C^2(\eta)}}}^{\frac{C(\eta)}{\sqrt{1 + C^2(\eta)}}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

soit :

$$(*) \leq \frac{K}{\sqrt{2}(1 + C^2(\eta))^{\frac{1}{4}}} \left\{ \ln \left( \frac{\sqrt{1 + C^2(\eta)} + C(\eta)}{\sqrt{1 + C^2(\eta)} + C(\eta) - r(g)} \right) + \ln \left( \frac{\sqrt{1 + C^2(\eta)} - (C(\eta) - r(g))}{\sqrt{1 + C^2(\eta)} - C(\eta)} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

( $K$  désigne une constante indéterminée qui ne dépend pas de  $\eta$  et on note  $a(\eta) \sim b(\eta)$  lorsqu'il existe deux constantes  $C_1, C_2 > 0$  (indépendantes de  $\eta$ ) telles que :

$$C_1^{-1}a(\eta) - C_2 \leq b(\eta) \leq C_1a(\eta) + C_2$$

Lorsque  $\eta$  tend vers l'infini (=  $\xi$ ),

$$\ln \left( \frac{\sqrt{1 + C^2(\eta)} + C(\eta)}{\sqrt{1 + C^2(\eta)} + C(\eta) - r(g)} \right)$$

tend vers zéro et

$$\ln \left( \frac{\sqrt{1 + C^2(\eta)} - (C(\eta) - r(g))}{\sqrt{1 + C^2(\eta)} - C(\eta)} \right) = \ln \left\{ 1 + r(g)(C(\eta) + \sqrt{1 + C^2(\eta)}) \right\} \\ \sim \ln(3r(g)C(\eta)).$$

Finalement,

$$(*) \leq \frac{K \ln(C(\eta))}{(C(\eta))^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{K}{(C(\eta))^{\frac{1}{3}}} (**) \quad (\text{pour } \eta \text{ assez grand}).$$

Il reste à évaluer  $d_{h_0}(\tilde{x}_0; y(\eta)) = d_{h_0}(\tilde{x}_0; ]\eta; \xi[)$ . En notant  $\tilde{x}_0^*$  et  $y(\eta)^*$  les extrémités de la géodésique qui passe par  $\tilde{x}_0$  et  $y(\eta)$  (Fig. 3.4), il vient :

$$d_{h_0}(\tilde{x}_0; y(\eta)) = \ln([\tilde{x}_0^*; \tilde{x}_0; y(\eta); y(\eta)^*]) = \ln \left( \frac{|\tilde{x}_0^* - y(\eta)| \times |i - y(\eta)^*|}{|\tilde{x}_0^* - i| \times |y(\eta) - y(\eta)^*|} \right).$$

Lorsque  $\eta$  tend vers l'infini,  $\tilde{x}_0^*$  tend vers zéro et

$$|\tilde{x}_0^* - y(\eta)| \sim \sqrt{2}\eta \sim 2\sqrt{2}C(\eta), \quad y(\eta)^* \sim 2\eta \sim 4C(\eta).$$

Donc,

$$d_{h_0}(\tilde{x}_0; y(\eta)) \sim \ln \left( \frac{2\sqrt{2}C(\eta)4C(\eta)}{2\sqrt{2}C(\eta)} \right) \sim \ln(C(\eta))$$

et (\*\*) s'écrit bien :

$$\left| \int_{T(\tilde{x}_0; z(\eta); \xi)} \tilde{\omega}_{h_0} \right| \leq K \exp \left( -\frac{1}{3} \ln(C(\eta)) \right) \leq K \exp(-\epsilon' d_{h_0}(\tilde{x}_0; ]\eta; \xi[)). \quad \square$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [BaGh] BARGE (J.) et GHYS (E.). — *Surfaces et cohomologie bornée*, Inventiones Math., t. **92**, 1988, p. 509–526.
- [BGS] BALLMANN (W.), GROMOV (M.) and SCHROEDER (V.). — *Manifolds of non positive curvature*, Progress in Math., t. **61**, 1985.
- [Ba] BAVARD (C.). — *Longueur stable des commutateurs*, L'enseignement mathématique, t. **37**, 1991, p. 109–150.
- [Be] BESSON (G.). — *Séminaire sur la cohomologie bornée*, École Norm. Sup. Lyon (fév. 1988).
- [Bo1] BONAHOH (F.). — *Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3*, Annals of Math., t. **124**, 1986, p. 71–158.
- [Bo2] BONAHOH (F.). — *The geometry of Teichmüller space via geodesic currents*, Inventiones Math., t. **92**, 1988, p. 139–162..
- [Bow1] BOWEN (R.). — *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*. — Springer Lectures Notes, Berlin, 1975.
- [Bow2] BOWEN (R.). — *Hausdorff dimension of quasi-circles*, Publ. Math. de l' I.H.E.S., t. **50**, 1979, p. p. 11–26.
- [BoSe] BOWEN (R.) and SERIES (C.). — *Markov maps associated to Fuchsian groups*, Publ. Math. I.H.E.S., t. **50**, 1979, p. 153–170.
- [Br] BROOKS (R.). — *Some remarks on bounded cohomology*, Annals Math. Studies, t. **97**, 1980, p. 53–63.
- [EpFu] EPSTEIN (D.B.A.) and FUJIWARA (K.). — *The second bounded cohomology of word hyperbolic groups*. — Prépublication, 1994.
- [Gh1] GHYS (E.). — *Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée*, Contemporary Math., t. **58**, 1987, p. 81–105.
- [Gh2] GHYS (E.). — Communication orale.
- [GhHa] GHYS (E.) et DE LA HARPE (P.). — *Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov*. — Birkhäuser, 1990.
- [Gre] GREENLEAF (F.P.). — *Invariant means on topological groups*. — Math. Stud., Van Nostrand, 1969.
- [Gri] GRIGORCHUK (R.I.). — *Some results on bounded cohomology*, in *Combinatorial and Geometric Group Theory*, Lecture Note Series, t. **204**, 1993, p. 111–163.
- [Gro] GROMOV (M.). — *Volume and bounded cohomology*, Pub. Math. I.H.E.S., t. **56**, 1982, p. 5–100.
- [Iv] IVANOV (N.V.). — *Foundations of the theory of bounded cohomology*, Zap. Nau. Sem. Len. ot. Mat. Inst. im V.A. Steklova, t. **167**, 1988, p. 69–109.

- [Kai1] KAIMANOVICH (V.A.). — *Ergodicity of harmonic invariant measures for the geodesic flow on hyperbolic spaces.*, J. Reine angew. Math., t. **455**, 1994, p. 57–103.
- [Kai2] KAIMANOVICH (V.A.). — Communication orale.
- [Kl] KLINGENBERG (W.). — *Riemannian geometry.* — W. de Gruyter, DATE???.
- [Le] LEDRAPPIER (F.). — *Structure au bord des variétés à courbure négative*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Grenoble 1994–1995, p. 97–122.
- [Ma] MATSUMOTO (S.). — *Numerical invariants for semi-conjugacy of homeomorphisms of the circle*, Proc. A.M.S., t. **98**, n° 1, 1986, p. 163–168.
- [MaMo] MATSUMOTO (S.) and MORITA (S.). — *Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms.* — Proc. A.M.S., t. **94**, 1985, p. 539–544.
- [Mi] MITSUMATSU (Y.). — *Bounded cohomology and  $\ell^1$  homology of surfaces*, Topology, t. **23**, n° 4, 1984, p. 465–471.
- [Ni] NICHOLLS (P.J.). — *The ergodic theory of discrete groups.* — Cambridge University Press, 1989.
- [Ot] OTAL (J.P.). — *Le spectre marqué des surfaces à courbure négative*, Ann. of Math., t. **13**, 1990.
- [Pat] PATTERSON (S.J.). — *The limit set of a Fuchsian group*, Acta Math., t. **136**, 1976, p. 241–273.
- [Pi] PICAUD (J.C.). — *Thèse de l'Université de Grenoble*, oct. 1995.
- [PoSh] POLLICOTT (M.) and SHARP (R.). — *Comparison theorems and orbit counting in hyperbolic geometry*, prépublication.
- [Se1] SERIES (C.). — *The infinite word problem and limit sets in Fuchsian groups*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, t. **1**, 1981, p. 337–360.
- [Se2] SERIES (C.). — *Geometrical Markov coding of geodesics on surfaces of constant negative curvature*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, t. **6**, 1986, p. 601–625.
- [Yu] YUE (C.B.). — *The ergodic theory of discrete isometry groups on manifolds of variable negative curvature*, prépublication, 1992.
- [Zi1] ZIMMER (R.J.). — *Ergodic Theory and Semisimple Groups.* — Monographs in Math., Birkhäuser, 1984.
- [Zi2] ZIMMER (R.J.). — *On the cohomology of ergodic groups actions*, Israel J. Math., t. **35**, 1980, p. 289–300.