

# BULLETIN DE LA S. M. F.

WEILL

**Sur un triangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, premiers entre eux et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 10 (1882), p. 55-58

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1882\\_\\_10\\_\\_55\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__55_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Sur un triangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, premiers entre eux, et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier; par M. WEILL.*

(Séance du 3 février 1882.)

Soit un triangle ABC, dans lequel B est égal à  $(n + 1)$  fois l'angle A, désignons par  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}$ ,  $c_{n+1}$  ses côtés; si nous menons une droite BD faisant avec BA un angle égal à  $\widehat{A}$ , le triangle BDE, formé en menant DE parallèle à AB, aura un angle  $\widehat{DBE}$  qui vaudra  $n$  fois l'angle  $\widehat{EDB}$ ; si l'on désigne par  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  les côtés de ce nouveau triangle, et par  $\lambda$  le rapport des côtés du triangle CDE au triangle CAB auquel il est semblable, on trouve facilement les formules suivantes :

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n+1}(1 + \lambda), \\ b_n &= c_{n+1}\lambda, \\ c_n &= b_{n+1}(1 + \lambda), \\ \lambda &= \frac{b_n^2}{b_n^2 + c_n^2 - a_n^2}. \end{aligned}$$

La dernière formule s'obtient en calculant la longueur de DE, bissectrice de l'angle D, dans le triangle CDB.

Ceci posé, si  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  représentent des nombres entiers, les formules précédentes donnent pour  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  des valeurs commensurables, qui sont

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{a_n(b_n^2 + c_n^2 - a_n^2)}{c_n^2 - a_n^2}, \\ b_{n+1} &= \frac{c_n(b_n^2 + c_n^2 - a_n^2)}{c_n^2 - a_n^2}, \\ c_{n+1} &= \frac{b_n(b_n^2 + c_n^2 - a_n^2)}{b_n^2}. \end{aligned}$$

Nous supposons  $b_n$ ,  $c_n$  et  $a_n$  premiers entre eux et nous voulons trouver pour  $b_{n+1}$ ,  $a_{n+1}$ ,  $c_{n+1}$  des nombres entiers premiers entre

eux ; d'après cela, nous pouvons déjà adopter les valeurs entières

$$(1) \quad \begin{cases} a_{n+1} = c_n b_n, \\ b_{n+1} = c_n b_n, \\ c_{n+1} = c_n^2 - a_n^2. \end{cases}$$

Or un calcul direct, très facile, donne les formules qui conviennent à  $n = 2$  et à  $n = 3$ , et l'on trouve, en désignant par  $q$  et  $p$  deux nombres entiers premiers entre eux,

$$\begin{aligned} a_2 &= q^2, & a_3 &= q^3, \\ b_2 &= qp, & b_3 &= c_2 q, \\ c_2 &= p^2 - q^2. \end{aligned}$$

Admettons la généralité de la loi, c'est-à-dire supposons que l'on ait

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= q^n q, \\ b_{n+1} &= c_n q, \\ c_{n+1} &= \frac{c_n^2 - a_n^2}{c_{n-1}}. \end{aligned}$$

Ces formules ne sont autres que les formules (1), après que l'on a divisé les seconds membres par le nombre entier  $\frac{b_n}{q} = c_{n-1}$  ; elles représenteront des nombres entiers premiers entre eux, pourvu que l'expression de  $c_{n+1}$  représente un nombre entier, et que les deux nombres  $b_n$  et  $(b_n^2 - a_n^2)$  ne puissent avoir d'autre facteur commun que  $\frac{b_n}{q}$  ; ce dernier point est évident, car les quotients de  $b_n$  et de  $(c_n^2 - a_n^2)$  par  $\frac{b_n}{q}$  ne pourraient avoir de facteur premier commun qu'un facteur premier de  $q$ , qui diviserait  $c_n^2 - a_n^2$ , et, par suite, diviserait à la fois  $c_n$ ,  $a_n$  et  $b_n$ , puisque  $a_n$  et  $b_n$  sont multiples de  $q$ .

Reste à prouver que l'expression de  $c_{n+1}$  représente un nombre entier. Pour cela, partons d'un triangle isocèle ayant pour côtés  $q$  et  $p$ , et dont  $\varphi$  est l'angle à la base, on aura  $\cos \varphi = \frac{p}{2q}$  ; si cet angle  $\varphi$  appartient à tous les triangles dont nous parlons, et y est opposé au côté  $a$ , on aura

$$\frac{a_{n-1}}{\sin \varphi} = \frac{b_{n-1}}{\sin(n-1)\varphi} = \frac{c_{n-1}}{\sin n\varphi}.$$

Or on a

$$\frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} = 2^{n-1} \cos^{n-1} \varphi - 2^{n-3} \frac{(n-2)}{1} \cos^{n-3} \varphi + \dots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{c_{n-1}}{a_{n-1}} = 2^{n-1} \frac{p^{n-1}}{2^{n-1} q^{n-1}} - \dots$$

Donc, si l'on prend pour  $a_{n-1}$  le nombre entier  $q^{n-1}$ , l'expression correspondante de  $c_{n-1}$  sera un nombre entier. Donc enfin, les formules générales qui résolvent la question, en nombres entiers premiers entre eux, sont

$$\begin{aligned} a_n &= q^n, \\ b_n &= c_{n-1} q, \\ c_n &= \frac{c_{n-1}^2 - q^{2n-2}}{c_{n-2}} = p^n - \frac{n-1}{1} p^{n-2} q^2 + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} p^{n-4} q^4 + \dots \end{aligned}$$

On a, d'ailleurs,  $q < p < 2q$ .

L'analyse précédente prouve que les seules solutions de la question, en nombres entiers premiers entre eux, sont celles dans lesquelles  $a_n$  est la  $n^{\text{ième}}$  puissance d'un nombre entier; elle démontre en outre que, si l'on considère la suite,

$$\begin{aligned} a_1 &= q, & a_2 &= q^2, & a_3 &= q^3, \\ b_1 &= q, & b_2 &= qp, & b_3 &= q c_2, \\ c_1 &= p, & c_2 &= p^2 - q^2, & c_3 &= \frac{c_2^2 - q^4}{c_1}; \\ a_n &= q^n, \\ b_n &= q c_{n-1}, \\ c_n &= \frac{c_{n-1}^2 - q^{2n-2}}{c_{n-2}}, \end{aligned}$$

les quantités  $c_n$  divisent algébriquement les quantités

$$(c_{n+1}^2 - q^{2n+2}).$$

Parmi les triangles répondant à la question, il en existe dans lesquels les nombres entiers qui représentent les trois côtés sont consécutifs.

Lorsque l'un des angles doit être double de l'autre, on trouve facilement que le seul triangle est celui dont les côtés sont représentés par les nombres 4, 5, 6. D'après cela, soit un triangle général, dans lequel les côtés soient représentés par trois entiers

consécutifs; une première hypothèse à examiner est la suivante :

$$\begin{aligned} a_n &= q^n, \\ b_n &= c_{n-1}q = q^n + 1, \\ c_n &= \frac{c_{n-1}^2 - q^{2n-2}}{c_{n-2}} = q^n + 2. \end{aligned}$$

On en déduit

$$q^2(q^n + 2)c_{n-2} = 2q^n + 1,$$

et  $n$  est au moins égal à 3, car nous avons parlé du cas de  $n = 1$  et  $n = 2$  : donc  $c_{n-2}$  existe et est au moins égal à 1; l'égalité précédente est alors impossible, à moins de faire  $q = 1$ , ce qui ne donne pas de véritable triangle. Reste à examiner la deuxième hypothèse,

$$\begin{aligned} a_n &= q^n, \\ b^n &= q^n + 2, \\ c_n &= q^n + 1; \end{aligned}$$

on en tire  $c_{n-2} = \frac{4}{q^2}$ , ce qui exige  $q = 2$  et  $c_{n-2} = 1$ ; cette dernière relation exige  $n = 2$ , car, si  $n$  était supérieur à 2,  $c_{n-2}$  serait plus grand que 1; cela est impossible, parce que si  $n$  est, par exemple, égal à 3,  $c_1$  serait égal à 1, et  $a_1$  et  $b_1$  seraient supérieurs à  $c_1$ .

Donc, enfin, le seul triangle dont les côtés soient représentés par 3 entiers consécutifs, et dans lequel le rapport de deux angles est un nombre entier, est celui qui a un angle double d'un autre, et dont les côtés sont représentés par les nombre 4, 5, 6. Dans le cas général, il faut remarquer que  $c_n$  doit avoir une valeur positive; il faut donc que l'on ait

$$c_{n-1} > q^{n-1}.$$

Si donc on a choisi pour  $q$  un nombre entier quelconque, il faut prendre pour  $p$  un nombre entier premier avec  $q$ , plus petit que  $2q$  et, en outre, plus grand que  $mq$ ,  $m$  étant un nombre qui dépend de la valeur de  $n$  que l'on considère. Nous donnons les formules relatives à  $n = 2, 3, 4, 5$ ,

$$\begin{aligned} a_2 &= q^2, & b_2 &= qp, & c_2 &= p^2 - q^2, \\ a_3 &= q^3, & b_3 &= q(p^2 - q^2), & c_3 &= p(p^2 - 2q^2), \\ a_4 &= q^4, & b_4 &= qp(p^2 - 2q^2), & c_4 &= (p^2 - pq - q^2)(p^2 - q^2 + pq), \\ a_5 &= q^5, & b_5 &= q(p^2 - pq - q^2)(p^2 - q^2 + pq), & c_5 &= p(p^2 - q^2)(p^2 - 3q^2). \end{aligned}$$