BULLETIN DE LA S. M. F.

CAMILLE JORDAN

Sur le mouvement des figures dans le plan et dans l'espace

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 144-148

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__144_1>

Sur le mouvement des figures dans le plan et dans l'espace;
par M. Camille Jordan.

(Séance du 2 avril 1873)

Nous nous proposons d'établir, dans cette note, que les équations qui définissent analytiquement le mouvement d'une figure plane dans son plan fournissent immédiatement, outre les principaux théorèmes déjà connus relativement à ce mouvement, une classe étendue de propositions nouvelles. Appliquant ensuite les mêmes principes au mouvement d'un solide dans l'espace, nous obtiendrons une série de théorèmes analogues, quoique moins élégants.

I

Considérons une figure plane en mouvement dans son plan. Soient x_0, y_0 les coordonnées de l'un de ses points à l'instant initial; ses coordonnées au bout du temps t seront données par les formules

$$(1) \qquad x = ax_0 + by_0 + \alpha, \quad y = bx_0 + ay_0 + \beta,$$

a, b, α, β étant des fonctions de t liées par la relation $a^2 + b^2 = 1$, où a et b désignent le sinus et le cosinus de l'angle dont la figure a tourné.

Désignons par x^m, y^m, a^m, ... les dérivées $m^{\text{ièmes}}$ de x, y, a, ... par rapport à t, suivant la notation de Lagrange; on aura, en différenciant les équations (1),

$$x^m = a^m x_0 + b^m y_0 + \alpha^m, \quad y^m = b^m x_0 + a^m y_0 + \beta^m.$$

Posons, pour abréger,

$$x^m x^n + y^m y^n = A_{mn}, \quad x^m y^n - x^n y^m = B_{mn}.$$

On voit sans peine qu'en remplaçant x^m, y^m, x^n, y^n par leurs valeurs, ces expressions seront de la forme

$$A_{mn} = (a^m a^n + b^m b^n)(x_0^2 + y_0^2) + Mx_0 + Ny_0 + P,$$
$$B_{mn} = (a^n b^m - a^m b^n)(x_0^2 + y^2) + M'x_0 + N'y_0 + P'.$$

Donc le lieu des points, pour lesquels A_{mn} aura une valeur constante k, sera un cercle. En faisant varier k, on obtiendra une série de cercles concentriques.

De même pour le lieu des points pour lesquels B_{mn} est constant.

Les points pour lesquels on aura $A_{mn}=kA_{\mu\nu}$ seront encore sur des cercles, passant tous par les points d'intersection des deux cercles $A_{mn}=0$, $A_{\mu\nu}=0$.

De même pour le lieu des points qui satisfont à l'une des équations $A_{mn}=kB_{\mu\nu}$, $B_{mn}=kB_{\mu\nu}$.

La signification géométrique des quantités A_{mn}, B_{mn} est évidente. Désignons en effet par D_m la droite dont les projections sur les axes coordonnés sont x^m, y^m; soit en outre (D_mD_n) l'angle des deux droites D_m et D_n; on aura évidemment

$$A_{mn}=D_mD_n\cos(D_mD_n),\quad B_{mn}=D_mD_n\sin(D_mD_n),$$

car B_{mn} représente, comme on sait, l'aire du triangle formé sur les deux droites D_m et D_n.

En nous bornant aux dérivées du second ordre, nous remarquerons que D_0 désigne le rayon vecteur du point (x, y), D_1 sa vitesse, D_2 son accélération, $D_2\cos(D_1D_2)$ et $D_2\sin(D_1D_2)$ les accélérations tangentielle et normale; et celles des relations précédentes, dans lesquelles figurent ces seules quantités, nous donneront un cercle pour chacun des lieux suivants :

1° Vitesse aréolaire constante $B_{01}=k$;

2° Vitesse constante $A_{11}=k$ (théorème connu);

3° Accélération constante $A_{22}=k$ (théorème connu);

4° Rapport constant entre la vitesse D_1 et l'une quelconque des trois accélérations D_2, $D_2\cos(D_1D_2)$, $D_2\sin(D_1D_2)$;

5° Angle constant entre la vitesse et l'accélération (théorème connu dans le cas où cet angle est nul ou égal à 90°); etc.

On doit remarquer d'ailleurs que tous ces théorèmes s'étendent au cas où l'on considérerait, au lieu d'un mouvement continu, une suite de déplacements finis. Les quantités x^m, y^m, au lieu de désigner les dérivées $m^{\text{ièmes}}$ de x, y, représenteraient leurs différences $m^{\text{ièmes}}$.

Remarquons encore qu'il n'a été fait aucun usage de l'équation de condition $a^2+b^2=1$. Nos résultats subsisteraient donc encore en supposant que la figure considérée éprouve dans le cours de son déplacement des mouvements de contraction ou de dilatation, les mêmes dans tous les sens.

II

Passons au mouvement d'un solide dans l'espace. Le point dont les coordonnées initiales étaient x_0, y_0, z_0 aura pour coordonnées à un instant quelconque

$$(2) \qquad \begin{cases} x = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + \alpha, \\ y = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + \beta, \\ z = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + \gamma, \end{cases}$$

$a_{11}, \ldots, \gamma$ étant des fonctions de t satisfaisant, comme on sait, aux six équations de condition

$$(3) \qquad \begin{cases} a_{\rho 1}^2 + a_{\rho 2}^2 + a_{\rho 3}^2 = 1 \quad (\rho = 1, 2, 3), \\ a_{\rho 1}a_{\sigma 1} + a_{\rho 2}a_{\sigma 2} + a_{\rho 3}a_{\sigma 3} = 1 \quad (\sigma \lesssim \rho); \end{cases}$$

en outre, le déterminant des a doit être égal à $+1$.

En différentiant les équations (2), on voit que les $m^{\text{ièmes}}$ dérivées des coordonnées x^m, y^m, z^m s'expriment chacune par des fonctions linéaires de x_0, y_0, z_0. Soit, comme précédemment, D_m la ligne dont ces dérivées sont les projections respectives sur les axes coordonnés ; on aura immédiatement les résultats suivants :

Le lieu des points pour lesquels D_m a une direction constante est défini par les équations

$$x^m : y^m : z^m :: p : q : r,$$

p, q, r étant les constantes qui définissent la direction donnée. Ce sera une droite, comme on le voit en remplaçant les dérivées par leurs valeurs en x_0, y_0, z_0.

Le lieu des points pour lesquels D_m est parallèle à un plan donné sera le plan défini par les équations

$$x^m \cos\varphi + y^m \cos\psi + z^m \cos\chi = 0,$$

φ, ψ, χ étant les angles que la normale au plan donné fait avec les axes.

Plus généralement, soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation d'un cône de degré r passant par l'origine. Le lieu des points pour lesquels D_m est parallèle à une génératrice de ce cône sera un cône du même degré $F(x^m, y^m, z^m) = 0$, dont le sommet S sera défini par les trois équations linéaires $x^m = y^m = z^m = 0$. Si ces trois équations sont incompatibles, le cône se changera en un cylindre.

Le lieu des points, pour lesquels on aura

$$D_m^2 = x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 = \text{une constante } k^2,$$

sera un ellipsoïde ayant son centre en S, point pour lequel $D_m = 0$. Si les trois équations du point S sont incompatibles, les ellipsoïdes se réduiront à des cylindres concentriques, dont l'axe sera le lieu des points pour lesquels D_m est minimum.

On sait que cette circonstance se présente en général pour la ligne D_1. Ce résultat connu se déduirait très-facilement des équations de condition (3), dont nous n'avons pas tenu compte, Il est aisé de voir au contraire que si $m > 1$, les équations $x^m = y^m = z^m = 0$ sont en général compatibles

Le lieu des points pour lesquels on a

$$(4) \qquad D_m D_n \cos (D_m D_n) = x^m x^n + y^m y^n + z^m z^n = \text{constante}$$

sera une surface du second degré. Celui des points qui satisfont à la relation

$$(5) \quad [D_m D_n \sin (D_m D_n)]^2 = (x^m y^n - x^n y^m)^2 + (y^m z^n - y^n z^m)^2 + (z^m x^n - z^n x^m)^2 = k^2$$

sera une surface du quatrième ordre.

En particulier, le lieu des points pour lesquels $(D_m D_n) = 0$ s'obtiendra en posant $k = 0$. Ce sera l'intersection commune des trois hyperboloïdes

$$x^m y^n - x^n x^m = 0, \quad y^m z^n - y^n z^m = 0, \quad z^m x^n - z^n x^m = 0.$$

Les deux premiers hyperboloïdes ont pour intersection la droite $y^m = y^n = 0$ et une cubique gauche, qui constituera à elle seule le lieu cherché, la droite n'étant pas sur le troisième hyperboloïde.

En divisant la formule (5) par le carré de la formule (4), on voit que le lieu des points pour lesquels $(D_m D_n)$ est une constante, différente de 0 et de $\frac{\pi}{2}$, sera une surface du quatrième ordre. Mais si $(D_m D_n) = \frac{\pi}{2}$, on aura $x^m x^n + y^m y^n + z^m z^n = 0$, équation d'une surface du second degré.

Le lieu des points pour lesquels D_p est perpendiculaire à D_m et à D_n sera une biquadratique gauche. Enfin il y aura huit points pour lesquels D_m, D_n et D_p seront rectangulaires.

Le tétraèdre formé sur les trois lignes D_m, D_n, D_p a pour volume, comme on le sait, le déterminant Δ_{mnp} formé avec les quantités x^m, y^m, z^m; x^n, y^n, z^n; x^p, y^p, z^p. En l'égalant à une constante, on aura pour lieu une surface du troisième ordre.

En particulier, si le déterminant est nul, les trois droites D_m, D_n, D_p seront dans un même plan.

Le lieu des points pour lesquels quatre droites D_m, D_n, D_p, D_q sont dans un même plan sera l'intersection commune des surfaces du troisième ordre

$$\Delta_{mnp} = 0, \quad \Delta_{mnq} = 0, \quad \Delta_{mpq} = 0, \quad \Delta_{npq} = 0.$$

Les deux premières surfaces se coupent suivant la cubique gauche, lieu des points pour lesquels $(D_m D_n) = 0$, et suivant une courbe complémentaire du sixième ordre, qui sera le lieu cherché.

Enfin les points pour lesquels les cinq droites D_m, D_n, D_p, D_q, D_r sont dans un même plan seront communs aux surfaces

$$\Delta_{mnp} = 0, \quad \Delta_{mnq} = 0, \quad \Delta_{mpr} = 0, \quad \Delta_{pqr} = 0.$$

Ils sont au nombre de neuf. En effet, les trois premières surfaces se coupent en vingt-sept points. Mais neuf d'entre eux sont l'intersection de Δ_{mpr} avec la cubique gauche $(D_m D_n) = 0$; neuf autres sont l'intersection de Δ_{mnq} avec la cubique $(D_m D_p) = 0$. En général, ces dix-huit points n'auront aucune raison d'appartenir à la quatrième surface Δ_{pqr}. Il ne reste donc que neuf points qui satisfassent à la question.