BULLETIN DE LA S. M. F.

BÉNÉDICTE BASILI

Indice de Clifford des intersections complètes de l'espace

Bulletin de la S. M. F., tome 124, nº 1 (1996), p. 61-95

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_1_61_0>

Bull. Soc. math. France,
124, 1996, p. 61–95.

INDICE DE CLIFFORD DES INTERSECTIONS COMPLÈTES DE L'ESPACE

PAR

BÉNÉDICTE BASILI (*)

RÉSUMÉ. — Soient $C \subset \mathbb{P}^3$ une courbe gauche, lisse et intersection complète et ℓ le degré maximum d'un diviseur positif aligné de C. On montre que la gonalité de C est $(\deg C - \ell)$ et qu'un diviseur positif $\Gamma \subset C$ calcule cette gonalité si et seulement si Γ est le résiduel d'un diviseur aligné de degré ℓ dans une section plane de C. On montre de plus que pour $\deg C \neq 9$, l'indice de Clifford de C est $(\deg C - \ell - 2)$.

ABSTRACT. — Let $C \subset \mathbb{P}^3$ be a twisted smooth complete intersection curve and ℓ the maximum degree of a linear positive divisor of C. We show that the gonality of C is $(\deg C - \ell)$ and that an effective divisor $\Gamma \subset C$ computes this gonality if and only if Γ is the residual of a linear divisor of degree ℓ in a plane section of C. We show furthermore that if $\deg C \neq 9$, the Clifford index of C is $(\deg C - \ell - 2)$.

Introduction

L'objet principal de ce travail est l'étude de l'indice de spécialité d'un groupe de points Γ de $\mathbb{P}^3$.

DÉFINITION. — Soit Γ un groupe de points de $\mathbb{P}^r$. On appelle *indice de spécialité* de Γ (*i.e.* du plongement de Γ dans $\mathbb{P}^r$) l'entier

$$e(\Gamma) = \max\{n\,;\ h^1(\mathcal{J}_\Gamma(n)) \neq 0\}.$$

C'est le plus grand entier n tel que Γ n'impose pas des conditions indépendantes sur les hypersurfaces de degré n.

Sous certaines hypothèses, on donne la valeur maximum de e et on caractérise les groupes de points pour lesquels l'indice est maximum ou sous-maximum :

(*) Texte reçu le 3 juin 1994.

B. BASILI, Institut de Mathématiques, Analyse Algébrique, Université Pierre-et-Marie-Curie, case 247; 4, place Jussieu, 75252 Paris CEDEX 05, France.

Classification AMS : 14.

Soient g et d deux entiers strictement positifs avec $d \leq g^2$ et i l'unique entier tel que $(i-1)g < d \leq ig$. Soit Γ un groupe de points analytiquement plan de $\mathbb{P}^3$ de degré d vérifiant l'une des hypothèses suivantes :

1) *$\Gamma \subset C$, où C est une courbe réduite irréductible, intersection de surfaces de degré g, avec $\deg C \geq i$.*

2) *$H^0(\mathfrak{I}_\Gamma(g))$ n'a pas de courbe fixe.*

THÉORÈME 3.1. — *On a $e(\Gamma) \leq i + g - 3$, avec égalité si et seulement si Γ est une intersection complète de degrés $(1, i, g)$.*

THÉORÈME 3.2. — *Si $e(\Gamma) = i + g - 4$, alors il existe un plan H tel que $e(\Gamma \cap H) = e(\Gamma) = i + g - 4$, avec un certain nombre d'exceptions.*

Notons que C. Ciliberto et R. Lazarsfeld démontrent un cas particulier de ce résultat dans [CL, § 2.6].

Pour les groupes de points Γ tels que

$$\deg \Gamma \leq 3e(\Gamma) + 3,$$

le Théorème 3.2 est vrai sans les hypothèses 1) ou 2). C'est ce qui est démontré au paragraphe 2.

Le paragraphe 3 est consacré à la preuve des Théorèmes 3.1 et 3.2. Soulignons qu'une difficulté majeure dans ces démonstrations vient du fait que l'on ne suppose pas les points distincts, ce qui ne permet pas les raisonnements combinatoires.

Dans un dernier paragraphe, on applique ces résultats :

Soit C une courbe gauche lisse, intersection complète dans $\mathbb{P}^3$.

THÉORÈME 4.2. — *La gonalité de C est $\mathrm{gon}(C) = \deg C - \ell$, où ℓ est le degré maximum d'un groupe de points aligné dans C.*

De plus, en utilisant un résultat de M. Coppens et G. Martens, on calcule l'indice de Clifford de C.

THÉORÈME 4.3. — *On a $\mathrm{Cliff}(C) = \mathrm{gon}(C) - 2$ sauf si $\deg C = 9$.*

REMERCIEMENTS. — Je tiens à remercier Christian PESKINE qui m'a dirigée et aidée dans ce travail.

1. Définitions et résultats préliminaires

Certaines démonstrations font appel au caractère d'un groupe de points plan dont nous rappelons la définition (Gruson–Peskine) :

Soient X un groupe de points de $\mathbb{P}^2$ de cône projetant A et L une droite générale de cône projetant R. Si O est un point général de $\mathbb{P}^2$, la projection de centre O de X sur L induit une application $R \to A$. Elle donne à A une structure de module gradué de type fini sur R. Une résolution minimale de A comme R-module gradué sera de la forme :

$$0 \to \bigoplus_{i=0}^{s-1} R[-n_i] \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{s-1} R[-i] \longrightarrow A \to 0,$$

où s est le degré minimal d'une courbe plane contenant X. On remarque que les nombres s, $n_0,\ldots,$ n_{s-1}, ne dépendent pas de la projection.

La suite d'entiers $(n_0, n_1, \ldots, n_{s-1})$, avec $n_0 \geq n_1 \geq \cdots \geq n_{s-1} \geq s$, est appelée *caractère numérique* de X.

On aura besoin des deux lemmes suivants qui se démontrent de façon purement numérique en utilisant le caractère.

LEMME 1.1. — *Soit $k \geq 3$ un entier et soit X un groupe de points de $\mathbb{P}^2$ d'indice de spécialité $e(X) \leq k$.*

- *Si* $2k+3 \leq \deg X \leq 2k+4$, *alors* $h^1(\mathcal{J}_X(k-1)) \leq 4$.
- *Si* $\deg X = 2k+2$, *alors* $h^1(\mathcal{J}_X(k-1)) \leq 3$.
- *Si* $\deg X \leq 2k+1$, *alors* $h^1(\mathcal{J}_X(k-1)) \leq 2$.

LEMME 1.2. — *Soit X un groupe de points de $\mathbb{P}^2$ d'indice de spécialité e, avec $e \geq 3$.*

- *Si* $\deg X = e+3$, *alors* $h^1(\mathcal{J}_X(e-2)) = 3$.
- *Si* $\deg X = e+4$, *alors* $h^1(\mathcal{J}_X(e-2)) \leq 4$.
- *Si* $e+5 \leq \deg X \leq 2e+2$, *alors* $h^1(\mathcal{J}_X(e-2)) \leq 5$.
- *Si* $\deg X = 2e+3$, *alors* $h^1(\mathcal{J}_X(e-2)) \leq 6$.

Dans toute la suite Γ désigne un groupe de points de $\mathbb{P}^3$ de degré d et d'indice de spécialité e.

On utilisera souvent, pour une surface S de degré s, le *résiduel* Γ_1 de $\Gamma \cap S$ dans Γ défini par la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{J}_{\Gamma_1}(-s) \xrightarrow{S} \mathcal{J}_\Gamma \longrightarrow \mathcal{J}_{\Gamma\cap S/S} \to 0.$$

Elle montre que $\deg \Gamma = \deg \Gamma_1 + \deg(\Gamma \cap S)$. De plus :

REMARQUE 1.1. — *Si* $e(\Gamma \cap S) < e$, *alors* $e(\Gamma_1) \geq e - s$.

En utilisant que $(h^1(\mathfrak{I}_\Gamma(n)))_{0 \leq n \leq e}$ décroît strictement, on montre le résultat suivant :

LEMME 1.3.

- *On a* $e \leq d - 2$, *avec égalité si et seulement si* Γ *est aligné. Dans ce cas* $h^1(\mathfrak{I}_\Gamma(e)) = 1$.
- *Si* $e = d - 3$, *alors* Γ *est plan et on a :*

$$h^1\big(\mathfrak{I}_\Gamma(e)\big) = \begin{cases} 1 & \textit{pour } d \neq 3, \\ 2 & \textit{pour } d = 3. \end{cases}$$

De plus pour $d \geq 5$, *il existe une droite* L *telle que* $\deg(\Gamma \cap L) = d - 1$.

LEMME 1.4. — *Soit* S *une surface de degré* s *telle que*

$$\deg(S \cap \Gamma) \geq d - e + s - 1.$$

Alors $e(S \cap \Gamma) = e(\Gamma)$.

Démonstration. — Soit Γ_1 le résiduel de $\Gamma \cap S$ dans Γ. On a une suite exacte :

$$0 \to \mathfrak{I}_{\Gamma_1}(e - s) \longrightarrow \mathfrak{I}_\Gamma(e) \longrightarrow \mathfrak{I}_{\Gamma \cap S/S}(e) \to 0.$$

Comme $\deg \Gamma_1 \leq e - s + 1$, on déduit du Lemme 1.3 que $h^1(\mathfrak{I}_{\Gamma_1}(e-s)) = 0$. Ceci entraîne $e(\Gamma \cap S) = e$. $\square$

LEMME 1.5. — *Soient* ℓ *et* n *deux entiers positifs tels que* $h^1(\mathfrak{I}_\Gamma(\ell)) \neq 0$. *Soit :*

$$k = h^1\big(\mathfrak{I}_\Gamma(\ell)\big) - h^1\big(\mathfrak{I}_\Gamma(\ell - n)\big) + \binom{n+3}{3} - 2.$$

Si $k \geq 0$, *il existe une famille de surfaces de degré* n, *de dimension* $\geq k$, *telle que pour toute surface* S *de cette famille* $e(\Gamma) \geq e(\Gamma \cap S) \geq \ell$.

Démonstration. — Soit :

$$V = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\big(H^1(\mathfrak{I}_\Gamma(\ell - n)), H^1(\mathfrak{I}_\Gamma(\ell))\big).$$

Les classes d'homomorphismes non surjectifs, éléments de V, forment une sous-variété de $\mathbb{P}(V)$ de codimension

$$r = h^1\big(\mathfrak{I}_\Gamma(\ell - n)\big) - h^1\big(\mathfrak{I}_\Gamma(\ell)\big) + 1.$$

Les surfaces de degré n définissant une application non surjective de $H^1(\mathfrak{I}_\Gamma(\ell - n))$ dans $H^1(\mathfrak{I}_\Gamma(\ell)))$ forment une sous-variété Y de codimension $\leq r$ de $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)))$. Donc si $k \geq 0$, alors Y est non vide de dimension $\geq k$. Soit $S \in Y$, alors $h^1(\mathfrak{I}_{\Gamma \cap S/S}(\ell)) \neq 0$ et $e(\Gamma) \geq e(\Gamma \cap S) \geq \ell$.

COROLLAIRE 1.6. — *On suppose que pour tout sous-groupe de points* Γ' *distinct de* Γ *on a* $e(\Gamma') < e$. *Alors, pour tout entier* n, *on a :*

$$h^0\big(\mathcal{I}_\Gamma(n)\big) \geq \binom{n+3}{3} - h^1\big(\mathcal{I}_\Gamma(e-n)\big).$$

LEMME 1.7. — *On suppose que, pour tout sous-groupe de points* Γ' *distinct de* Γ, *on a* $e(\Gamma') < e$. *Si* Γ *n'est pas plan, alors* Γ *est intersection de surfaces de degré* $e+1$.

Démonstration. — Il est clair que $h^1(\mathcal{I}_\Gamma(e)) = 1$. Soit Δ un groupe de points de degré $d+1$ contenant Γ. Si $h^0(\mathcal{I}_\Delta(e+1)) = h^0(\mathcal{I}_\Gamma(e+1))$, alors pour tout $n \leq e+1$, on a

$$h^1\big(\mathcal{I}_\Delta(n)\big) = h^1\big(\mathcal{I}_\Gamma(n)\big) + 1.$$

En particulier, on a $h^1(\mathcal{I}_\Delta(e+1)) = 1$ et $h^1(\mathcal{I}_\Delta(e)) = 2$.

D'après le Lemme 1.5 avec $\ell = e$ et $n = 1$, il existe un plan H tel que $h^1(\mathcal{I}_{\Delta\cap H}(e+1)) \neq 0$, ce qui entraîne $h^1(\mathcal{I}_{\Delta\cap H}(e)) \geq 2$. On en déduit $h^1(\mathcal{I}_{\Gamma\cap H}(e)) \geq 1$, ce qui implique $\Gamma \cap H = \Gamma$; c'est une contradiction.

On a donc

$$h^0\big(\mathcal{I}_\Delta(e+1)\big) = h^0\big(\mathcal{I}_\Gamma(e+1)\big) - 1$$

pour tout groupe de points Δ de degré $d+1$ contenant Γ, d'où le résultat.

PROPOSITION 1.8. — *Soient* $R = \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ *et* M *un* R*-module gradué. On suppose qu'il existe un entier* e *tel que :*

- $M_n = 0$ *pour* $n > e$,
- $\operatorname{rang}(M_e) = 1$,
- $\operatorname{Hom}_R(R/(X_0, X_1, X_2, X_3), M) = M_e$.

Si N *est un sous-module de* M *tel que* $N_e = 0$, *alors* $N = 0$.

COROLLAIRE 1.9. — *Soit* M *vérifiant les hypothèses de la proposition* 1.8 *et* M' *un quotient de* M. *Si* $M'_e \neq 0$, *alors* $M \simeq M'$.

COROLLAIRE 1.10. — *Soit* Γ *un groupe de points de* $\mathbb{P}^3$ *d'indice de spécialité* e *tel que pour tout sous-groupe strict* Γ' *de* Γ *on ait* $e(\Gamma') < e$. *Soient* H *un plan et* Γ_1 *le résiduel de* $\Gamma \cap H$ *dans* Γ. *On note :*

$$M = \bigoplus_{n\geq 0} H^1\big(\mathcal{I}_{\Gamma_1}(n)\big).$$

Si M *vérifie les hypothèses de la proposition* 1.8, *alors pour tout* $n \geq 0$, *on a une surjection*

$$H^0\big(\mathcal{I}_\Gamma(n)\big) \longrightarrow H^0\big(\mathcal{I}_{\Gamma\cap H/H}(n)\big) \to 0.$$

Démonstration. — Comme $e(\Gamma \cap H) < e$, on a $e(\Gamma_1) = e - 1$. Soit M'_n l'image du morphisme

$$H^1(\mathfrak{I}_{\Gamma_1}(n)) \longrightarrow H^1(\mathfrak{I}_\Gamma(n+1)).$$

Alors $M' = \bigoplus_{n\geq 0} M'_n$ est un quotient de M tel que $M'_{e-1} \neq 0$ car $H^1(\mathfrak{I}_{\Gamma\cap H/H}(e)) = 0$. Du Corollaire 1.9, on déduit $M \simeq M'$. Donc pour tout $n \geq 0$ on a la surjection annoncée. ▯

L'énoncé suivant est bien connu :

PROPOSITION 1.11. — *Soit X un groupe de points de $\mathbb{P}^r$, intersection complète de degrés $(d_1, d_2, \dots, d_r)$. Notons :*

$$M = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H^1(\mathfrak{I}_X(n)).$$

Alors M vérifie les hypothèses de la proposition 1.8 avec

$$e = e(X) = \sum_{i=1}^{n} d_i - r - 1.$$

En particulier, si X' est un sous-groupe de X tel que $e(X') = e(X)$, alors on a $X' = X$.

2. Groupes de points tels que $\deg\Gamma \leq 3e(\Gamma) + 3$

THÉORÈME 2.1. — *Soit Γ un groupe de points de $\mathbb{P}^3$ de degré d et d'indice de spécialité e vérifiant l'une des hypothèses suivantes :*

- $e = 1$ *et* $d \leq 4$,
- $e = 2$ *et* $d \leq 8$,
- $e \geq 3$ *et* $d \leq 3e + 3$.

Alors Γ vérifie l'une des conditions suivantes :

(i) *il existe un plan H tel que $e(\Gamma \cap H) = e$;*

(ii) *il existe une cubique gauche T (éventuellement dégénérée) telle que* $\deg(T \cap \Gamma) \geq 3e + 2$ *avec les exceptions suivantes :*

1) $e = 2$, $d = 8$ *et Γ est une intersection complète de degrés* $(2, 2, 2)$;
2) $e = 3$, $d = 12$ *et Γ est une intersection complète de degrés* $(2, 2, 3)$;
3) $e = 3$, $d = 12$ *et il existe un plan X tel que* $\deg(\Gamma \cap X) = 8$, *le résiduel de $\Gamma \cap X$ dans Γ est aligné et l'application* $H^0(\mathfrak{I}_\Gamma(3)) \to H^0(\mathfrak{I}_{\Gamma\cap X/X}(3))$ *est surjective.*

Pour $d \leq 3e + 1$, si les points sont distincts, ce résultat est une conséquence d'un théorème plus général de D. Eisenbud et J.H. Koh (voir [EK]).

REMARQUES 2.1.

1) S'il existe une cubique gauche T telle que $\deg(\Gamma \cap T) \geq 3e + 2$, alors d'après le Lemme 1.4 on a $e(\Gamma \cap T) = e$ car T est intersection de quadriques.

2) Si $e = 1$ et $d \leq 4$, alors $h^0(\mathcal{J}_\Gamma(1)) \geq 1$. Donc Γ est plan et vérifie le Théorème 2.1.

3) Les exceptions 2 et 3 ont la même fonction de Hilbert.

Étudions d'abord le cas des groupes de points plans.

PROPOSITION 2.2. — *Soit Γ un groupe de points plan et vérifiant les hypothèses du théorème* 2.1. *Alors Γ vérifie l'une des conditions suivantes* :

- *il existe une droite L telle que* $\deg(\Gamma \cap L) = e + 2$;
- *il existe une conique C telle que* $\deg(\Gamma \cap C) \geq 2e + 2$;
- *il existe une cubique plane T telle que* $\deg(\Gamma \cap T) \geq 3e$;
- *on a* $e = 7$, $d = 24$ *et Γ a le caractère d'une intersection complète de degrés* $(4, 6)$;
- *on a* $e = 6$, $d = 20$ *et Γ a le caractère d'une intersection complète de degrés* $(4, 5)$;
- *on a* $e = 6$, $d = 21$ *et Γ a pour caractère* $(8, 7, 6, 6)$;
- *on a* $e = 6$, $d = 21$ *et Γ a pour caractère* $(8, 7, 6, 5, 5)$;
- *on a* $e = 5$, $d = 16$ *et Γ a le caractère d'une intersection complète de degrés* $(4, 4)$;
- *on a* $e = 5$, $d = 17$ *et Γ a pour caractère* $(7, 6, 5, 5)$;
- *on a* $e = 5$, $d = 18$ *et Γ a pour caractère* $(7, 6, 6, 5)$;
- *on a* $e = 5$, $d = 18$ *et Γ a pour caractère* $(7, 6, 5, 5, 5)$.

Démonstration. — Soit $n_0 \geq n_1 \geq \cdots \geq n_{s-1}$ le caractère de Γ, avec $n_0 = e + 2$. On a $d \geq e + 2$.

Si pour toute droite L, on a $\deg(\Gamma \cap L) < e + 2$, alors, d'après la proposition [EP], on a $s \geq 2$ et $n_0 - n_1 \leq 1$ et donc

$$d \geq n_0 + (n_1 - 1) \geq 2n_0 - 2 = 2e + 2.$$

Si pour toute conique C on a $\deg(\Gamma \cap C) < 2e + 2$, alors, d'après la proposition [EP], on a $s \geq 3$ et $n_1 - n_2 \leq 1$ et donc

$$d \geq n_0 + (n_1 - 1) + (n_2 - 2) \geq 3n_0 - 6 = 3e.$$

Si pour toute cubique plane T on a $\deg(\Gamma \cap T) < 3e$, alors, d'après la proposition [EP], on a $s \geq 4$ et $n_2 - n_3 \leq 1$ et donc

$$d \geq n_0 + (n_1 - 1) + (n_2 - 2) + (n_3 - 3) \geq 4n_0 - 12 = 4e - 4.$$

Or $d \leq 3e+3$, donc $e \leq 7$ et les seules possibilités sont les huit derniers cas énoncés.

LEMME 2.3. — *Si $d \leq 2e+2$ avec $e \geq 1$, alors Γ vérifie les deux conditions équivalentes suivantes :*

(i) *il existe un plan H tel que $e(H \cap \Gamma) = e$;*

(ii) *soit il existe une droite L telle que $\deg(\Gamma \cap L) = e+2$, soit Γ est une intersection complète de degrés $(1, 2, e+1)$.*

Démonstration. — Montrons d'abord que (i) et (ii) sont équivalentes.

Soit H un plan tel que $e(H \cap \Gamma) = e$. Soit $n_0 \geq n_1 \geq \cdots \geq n_{s-1}$ le caractère de $H \cap \Gamma$. Alors $n_0 = e+2$ et $d \geq \deg(H \cap \Gamma) \geq n_0 = e+2$.

Si $\deg(\Gamma \cap H) = e+2$, alors $\Gamma \cap H$ est aligné.

Si $\deg(\Gamma \cap H) > e+2$, alors $s \geq 2$ et $2e+2 \geq \deg(\Gamma \cap H) \geq n_0 + n_1 - 1$, ce qui entraîne $n_1 \leq e+1$.

Si $n_1 = e+1$ alors $\deg(H \cap \Gamma) = 2e+2 = d$ et $H \cap \Gamma = \Gamma$ a le caractère d'une intersection complète de degrés $(1, 2, e+1)$.

Si $n_1 \leq e$, alors, d'après la proposition [EP], il existe une droite telle que $\deg(L \cap \Gamma) = n_0 = e+2$.

La réciproque est évidente.

Montrons (i) par l'absurde.

Si $e = 1$, alors $d \leq 4$ et $h^0(\mathcal{J}_\Gamma(1)) \geq 1$. Donc Γ est plan et vérifie le lemme. Soit Γ de degré minimum contredisant le lemme, c'est-à-dire $d \leq 2e+2$, avec $e \geq 2$, et pour tout plan H on a $e(\Gamma \cap H) < e$.

On choisit H tel que $\deg(\Gamma \cap H)$ est maximum. Soit Γ_1 le résiduel de $\Gamma \cap H$ dans Γ. Comme $\deg(\Gamma \cap H) \geq 3$ et $e(\Gamma \cap H) < e$, on a $\deg \Gamma_1 \leq 2e-1$ et $e_1 = e(\Gamma_1) \geq e-1$, c'est-à-dire $\deg \Gamma_1 < 2e_1 + 2$.

Comme Γ_1 vérifie le lemme, il existe un plan H_1 tel que $e(\Gamma_1 \cap H_1) = e_1$. Comme $e > e(\Gamma \cap H_1) \geq e(\Gamma_1 \cap H_1)$, on en déduit $e_1 = e-1$.

Comme $\deg \Gamma_1 < 2e_1 + 2$, la seule possibilité est qu'il existe une droite L_1 telle que $\deg(\Gamma_1 \cap L_1) = e+1$. Il existe alors un plan H' tel que $\deg(\Gamma \cap H') \geq e+2$. Mais

$$\deg(\Gamma \cap H') \leq \deg(\Gamma \cap H) = d - \deg \Gamma_1 \leq (2e+2) - (e+1).$$

C'est une contradiction, donc Γ n'existe pas et le lemme est démontré.

LEMME 2.4. — *Soit Γ vérifiant les hypothèses du théorème 2.1. Si $h^0(\mathcal{J}_\Gamma(2)) \geq 2$, alors Γ vérifie le théorème 2.1.*

Démonstration. — Soit Γ de degré minimum contredisant le lemme. Alors d'après la remarque 2.1, 2), on a $e \geq 2$. De plus, pour tout sous-groupe de points strict Γ' de Γ, on a $e(\Gamma') < e$.

Premier cas.

On suppose qu'il existe deux quadriques Q_1 et Q_2 contenant Γ et se coupant proprement. D'après le Lemme 1.7, il existe une surface S de degré $e+1$ contenant Γ et coupant proprement la courbe $C = Q_1 \cap Q_2$.

Soit Γ' le groupe de points lié à Γ par $Q_1 \cap Q_2 \cap S$. On a :

$$\mathcal{I}_{\Gamma'/C} \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_C}\big(\mathcal{I}_{\Gamma/C}, \mathcal{O}_C(-e-1)\big) = \mathcal{I}^{\vee}_{\Gamma/C}(-e-1).$$

Comme $\mathcal{O}_C$ est un faisceau dualisant sur C, la condition $h^1(\mathcal{I}_{\Gamma/C}(e)) \neq 0$ entraîne $h^0(\mathcal{I}^{\vee}_{\Gamma/C}(-e)) \neq 0$, c'est-à-dire $h^0(\mathcal{I}_{\Gamma'/C}(1)) \neq 0$. Comme C est linéairement complète, il existe un plan H contenant Γ'.

• Si Q_1, Q_2 et H se coupent proprement, notons $C_1 = H \cap Q_1$ et $C_2 = H \cap Q_2$. Alors $\deg(C_1 \cap C_2) = 4$ ce qui entraîne $\deg \Gamma' \leq 4$. Or $\deg \Gamma' = 4(e+1) - \deg \Gamma$. Les seules possibilités sont $(e,d) = (2,8)$ ou $(e,d) = (3,12)$ avec $\Gamma' = H \cap Q_1 \cap Q_2$.

On a donc $\mathcal{I}_{\Gamma'/C} \simeq \mathcal{O}_C(-1)$, ce qui entraîne $\mathcal{I}_{\Gamma/C} \simeq \mathcal{O}_C(-e)$ avec $e = 2$ ou 3. Autrement dit, il existe une surface S' de degré e telle que $\Gamma = S' \cap Q_1 \cap Q_2$. C'est une contradiction car on a supposé que Γ ne vérifie pas le Théorème 2.1.

• Si $Q_1 \cap Q_2 \cap H$ est une conique C_1, alors C_1 est liée par $Q_1 \cap Q_2$ à une conique C_2 éventuellement dégénérée. Notons H' le plan de la conique C_2.

La quadrique dégénérée HH' est dans le pinceau engendré par Q_1 et Q_2. Donc il existe $a, b \in \mathbb{C}$ et Q une quadrique tels que $aQ_1 + bQ_2 = H'H$ et $Q_1 \cap Q_2 = H'H \cap Q$. On a alors $C_1 = H \cap Q$ et $C_2 = H' \cap Q$.

Soit $X = HH' \cap Q \cap S$. On a $\deg(H \cap X) = 2e+2$ et $\Gamma' \subset H \cap X$. On en déduit $\deg(\Gamma \cap H') \geq 2e+2$. Comme $\Gamma \subset Q$, on a $\deg(\Gamma \cap C_2) \geq 2e+2$, ce qui entraîne $e(\Gamma \cap H') = e(\Gamma \cap C_2) = e$. C'est une contradiction.

• Si $Q_1 \cap Q_2 \cap H$ est la réunion d'une droite L et d'un point (éventuellement immergé), alors L est liée à une cubique gauche T par $Q_1 \cap Q_2$.

Comme $\Gamma' \subset Q_1 \cap Q_2 \cap H$, le résiduel de $\Gamma' \cap L$ dans Γ' est de degré ≤ 1. De plus $\Gamma' \subset S$ et S coupe L proprement, ce qui entraîne $\deg(\Gamma' \cap L) \leq e+1$. On a donc

$$\deg(S \cap L) = e+1, \quad e+1 \leq \deg \Gamma' \leq e+2, \quad e \leq \deg(\Gamma' \cap L) \leq e+1.$$

Notons Γ'' le groupe de points lié à $\Gamma' \cap L$ par $Q_1 \cap Q_2 \cap S$. Rappelons que Γ est lié à Γ' par $Q_1 \cap Q_2 \cap S$. On vérifie que $S \cap T$ est lié à $S \cap L$ par $Q_1 \cap Q_2 \cap S$. Comme $\Gamma' \cap L \subset \Gamma'$ et $\Gamma' \cap L \subset S \cap L$, on a $\Gamma \subset \Gamma''$ et $S \cap T \subset \Gamma''$. De plus

$$\deg(S \cap T) = 3e+3, \quad 3e+3 \leq \deg \Gamma'' \leq 3e+4, \quad 3e+2 \leq \deg \Gamma \leq 3e+3.$$

Si $\deg \Gamma'' = 3e+3$, alors $\Gamma'' = S \cap T$ et $\Gamma \subset S \cap T$. On en déduit $\Gamma \cap T = \Gamma$ et $\deg(\Gamma \cap T) \geq 3e+2$. C'est une contradiction.

Si $\deg \Gamma'' = 3e+4$, alors $\deg(\Gamma' \cap L) = e$, $\deg \Gamma' = e+1$ et $\deg \Gamma = 3e+3$. on en déduit $\deg((S \cap T) \cap \Gamma) \geq 3e+2$, c'est-à-dire $\deg(\Gamma \cap T) \geq 3e+2$. C'est une contradiction.

Deuxième cas.

On suppose qu'il n'existe pas deux quadriques contenant Γ et se coupant proprement. Alors toutes les quadriques contenant Γ ont un plan commun H.

Si $h^0(\mathfrak{I}_\Gamma(2)) \geq 3$, soient HH_1, HH_2 et HH_3 trois quadriques indépendantes contenant Γ. Notons Γ_1 le résiduel de $\Gamma \cap H$ dans Γ. Alors $\deg \Gamma_1 \leq 1$. Ceci entraîne d'après le Lemme 1.4 que $e(\Gamma \cap H) = e$. C'est une contradiction. Donc $h^0(\mathfrak{I}_\Gamma(2)) = 2$.

Si $e = 2$ et $d \leq 8$, alors $h^0(\mathfrak{I}_\Gamma(2)) = 10 - d + h^1(\mathfrak{I}_\Gamma(2)) \geq 3$. C'est une contradiction, donc $e \geq 3$.

Notons HH_1 et HH_2 deux quadriques indépendantes contenant Γ et Γ_1 le résiduel de $\Gamma \cap H$ dans Γ. Alors Γ_1 est aligné et $\deg(\Gamma_1) \leq e+1$ d'après le Lemme 2.3. Comme $e(\Gamma \cap H) < e$, alors $e(\Gamma_1) = e-1$, donc $\deg \Gamma_1 = e+1$ et $\deg(\Gamma \cap H) \leq 2e+2$.

Si $e \geq 4$, alors d'après le Lemme 1.1 on a $h^1(\mathfrak{I}_{\Gamma \cap H}(e-2)) \leq 4$. On en déduit $h^1(\mathfrak{I}_\Gamma(e-2)) \leq 7$. Le Corollaire 1.6 entraîne alors $h^0(\mathfrak{I}_\Gamma(2)) \geq 3$. C'est une contradiction.

Si $e = 3$ et $d \leq 12$, alors d'après le Corollaire 1.6 avec $n = 1$, on a $h^1(\mathfrak{I}_\Gamma(2)) \geq 4$; comme $h^0(\mathfrak{I}_\Gamma(2)) = 2$, on en déduit $d = 12$. Donc $\deg \Gamma_1 = 4$ et $\deg(\Gamma \cap H) = 8$. De plus $h^1(\mathfrak{I}_{\Gamma \cap H/H}(3)) = 0$ et $h^1(\mathfrak{I}_{\Gamma_1}(2)) = 1$. On en déduit l'isomorphisme $H^1(\mathfrak{I}_{\Gamma_1}(2)) \simeq H^1(\mathfrak{I}_\Gamma(3))$. Donc l'application $H^0(\mathfrak{I}_\Gamma(3)) \to H^0(\mathfrak{I}_{\Gamma \cap H/H}(3))$ est surjective et Γ est l'exception 3) du Théorème 2.1.

LEMME 2.5. — *On suppose que* $e \geq 4$, $d \leq 3e+3$ *et que pour tout sous-groupe de points strict* Γ' *de* Γ *on a* $e(\Gamma') < e$. *S'il existe un plan* H *tel que* $\deg(\Gamma \cap H) \geq e+2$, *alors* Γ *est soit plan soit de degré* $d \geq 3e+2$ *et contenu dans une cubique gauche (éventuellement dégénérée).*

Démonstration. — Soit Γ de degré minimum contredisant le lemme. D'après le Lemme 2.4, on peut supposer $h^0(\mathfrak{I}_\Gamma(2)) \leq 1$. D'après le Corollaire 1.6, ceci entraîne $h^1(\mathfrak{I}_\Gamma(e-2)) \geq 9$.

Soit H un plan tel que $\deg(\Gamma \cap H)$ est maximum. On a :

$$d > \deg(\Gamma \cap H) \geq e+2 \quad \text{et} \quad e(\Gamma \cap H) < e.$$

Notons Γ_1 le résiduel de $\Gamma \cap H$ dans Γ. Alors

$$e(\Gamma_1) = e-1 \quad \text{et} \quad e+1 \leq \deg \Gamma_1 \leq 2e+1.$$

On a donc :

$$\deg(\Gamma \cap H) = 2e + 2 - k \quad \text{avec } 0 \leq k \leq e \text{ et } \deg \Gamma_1 \leq e + 1 + k.$$

De plus :

$$9 \leq h^1\big(\mathfrak{J}_\Gamma(e-2)\big) \leq h^1\big(\mathfrak{J}_{\Gamma_1}(e-3)\big) + h^1\big(\mathfrak{J}_{\Gamma\cap H/H}(e-2)\big).$$

Appliquons le Lemme 1.1 :

- Si $k \leq 1$, c'est-à-dire si $\deg(\Gamma \cap H) = 2(e-1)+4$ ou $2(e-1)+3$, alors

$$h^1\big(\mathfrak{J}_{\Gamma\cap H}(e-2)\big) \leq 4 \quad \text{donc} \quad h^1\big(\mathfrak{J}_{\Gamma_1}(e-3)\big) \geq 5.$$

- Si $k = 2$, c'est-à-dire $\deg(\Gamma \cap H) = 2(e-1)+2$, alors

$$h^1\big(\mathfrak{J}_{\Gamma\cap H}(e-2)\big) \leq 3 \quad \text{donc} \quad h^1\big(\mathfrak{J}_{\Gamma_1}(e-3)\big) \geq 6.$$

- Si $k \geq 3$, c'est-à-dire $\deg(\Gamma \cap H) \leq 2(e-1)+1$, alors

$$h^1\big(\mathfrak{J}_{\Gamma\cap H}(e-2)\big) \leq 2 \quad \text{donc} \quad h^1\big(\mathfrak{J}_{\Gamma_1}(e-3)\big) \geq 7.$$

Il reste à étudier $h^1(\mathfrak{J}_{\Gamma_1}(e-3))$.

Premier cas.

Supposons qu'il existe une droite L_1 telle que

$$\deg(\Gamma_1 \cap L_1) = e + 1.$$

Si $k = 0$, alors $\Gamma_1 \cap L_1 = \Gamma_1$ et $h^1(\mathfrak{J}_{\Gamma_1}(e-3)) = 3$. C'est une contradiction. Si $k \geq 1$, soit H_1 un plan contenant L_1 tel que $\deg(\Gamma_1 \cap H_1) \geq e+2$. On a :

$$e - 1 = e(\Gamma_1 \cap L_1) \leq e(\Gamma_1 \cap H_1) \leq e(\Gamma_1),$$

donc $e(\Gamma_1 \cap H_1) = e - 1$. De plus

$$e + 2 \leq \deg(\Gamma_1 \cap H_1) \leq e + 1 + k.$$

Soit Γ_2 le résiduel de $\Gamma_1 \cap H_1$ dans Γ_1. Alors $\deg \Gamma_2 \leq k - 1 \leq e - 1$, donc (Lemme 1.3) $e(\Gamma_2) \leq e - 3$. De plus :

$$h^1\big(\mathfrak{J}_{\Gamma_1}(e-3)\big) \leq h^1\big(\mathfrak{J}_{\Gamma_2}(e-4)\big) + h^1\big(\mathfrak{J}_{\Gamma_1\cap H_1}(e-3)\big).$$

- Si $e(\Gamma_2) \leq e - 5$, alors $h^1(\mathfrak{J}_{\Gamma_1}(e-3)) = h^1(\mathfrak{J}_{\Gamma_1\cap H_1}(e-3))$ et d'après le Lemme 1.2, on a :
  - ▷ Si $k = 1$, alors $h^1(\mathfrak{J}_{\Gamma_1\cap H_1}(e-3)) = 3$; contradiction.
  - ▷ Si $k = 2$, alors $h^1(\mathfrak{J}_{\Gamma_1\cap H_1}(e-3)) \leq 4$; contradiction.
  - ▷ Si $k \geq 3$, on a $h^1(\mathfrak{J}_{\Gamma_1\cap H_1}(e-3)) \leq 6$; contradiction.

• Si $e(\Gamma_2) = e-4$, alors $e-2 \leq \deg \Gamma_2 \leq k-1 \leq e-1$, ce qui entraîne $k \geq e-1 \geq 3$.

D'après le Lemme 1.3, on a $h^1(\mathcal{J}_{\Gamma_2}(e-4)) \leq 2$. D'autre part,

$$\begin{aligned}\deg(\Gamma_1 \cap H_1) &= \deg \Gamma_1 - \deg \Gamma_2 \\ &\leq (e+1+k) - (e-2) \leq e(\Gamma_1 \cap H_1) + 4.\end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.2, on a $h^1(\mathcal{J}_{\Gamma_1 \cap H_1}(e-3)) \leq 4$. Comme ceci implique

$$h^1(\mathcal{J}_{\Gamma_1}(e-3)) \leq 6,$$

c'est une contradiction.

• Si $e(\Gamma_2) = e-3$, alors (Lemme 1.3)

$$\deg \Gamma_2 = e-1, \quad \deg(\Gamma_1 \cap H_1) = e+2, \quad \deg \Gamma_1 = 2e+1 \text{ et } k = e.$$

De plus Γ_2 est contenu dans une droite. On a donc $h^1(\mathcal{J}_{\Gamma_2}(e-4)) = 2$ et, d'après le Lemme 1.2, $h^1(\mathcal{J}_{\Gamma_1 \cap H_1}(e-3)) = 3$. Ceci entraîne la contradiction

$$h^1(\mathcal{J}_{\Gamma_1}(e-3)) \leq 5.$$

Deuxième cas.

Supposons que pour toute droite L' on a :

$$\deg(\Gamma_1 \cap L') \leq e.$$

Si $\deg \Gamma_1 \leq 2e = 2e(\Gamma_1) + 2$, alors, d'après le Lemme 2.3, Γ_1 est une intersection complète de degrés $(1, 2, e)$. Comme $\deg(\Gamma \cap H)$ est maximum, ceci entraîne $\deg(\Gamma \cap H) \geq 2e$ et $\deg \Gamma_1 = 2e \leq e+3$. C'est une contradiction car $e \geq 4$.

Donc $\deg \Gamma_1 = 2e+1$ et $\deg(\Gamma \cap H) = e+2$. De plus $k = e \geq 4$ donc :

$$h^1\big(\mathcal{J}_{\Gamma_1}(e-3)\big) \geq 7.$$

Soit H_1 un plan tel que $\deg(\Gamma_1 \cap H_1)$ est maximum. Notons Γ_2 le résiduel de $\Gamma_1 \cap H_1$ dans Γ_1. Comme $\deg(\Gamma_1 \cap H_1) \geq 3$, on a $\deg \Gamma_2 \leq 2e-2$.

• Si $e(\Gamma_1 \cap H_1) = e-1$, alors, $\deg(\Gamma_1 \cap H_1) \geq 2e$ et $\deg \Gamma_2 \leq 1$, donc $e(\Gamma_2) \leq -1$. Comme $h^1(\mathcal{J}_{\Gamma_2}(e-4)) = 0$, on a :

$$h^1\big(\mathcal{J}_{\Gamma_1}(e-3)\big) = h^1\big(\mathcal{J}_{\Gamma_1 \cap H_1}(e-3)\big),$$

donc (Lemme 1.2) $h^1(\mathcal{J}_{\Gamma_1}(e-3)) \leq 6$. On en déduit $h^1(\mathcal{J}_{\Gamma}(e-2)) \leq 8$.

• Si $e(\Gamma_1 \cap H_1) \leq e-2$, alors $e(\Gamma_2) \geq e-2$ et $\deg \Gamma_2 \leq 2e(\Gamma_2) + 2$. D'après le Lemme 2.3, il existe un plan H_2 tel que $e(\Gamma_2 \cap H_2) = e(\Gamma_2)$. Or

$$\begin{aligned}\deg(\Gamma_2 \cap H_2) &\leq \deg(\Gamma_1 \cap H_1) = \deg \Gamma_1 - \deg \Gamma_2 \\ &\leq \deg \Gamma_1 - \deg(\Gamma_2 \cap H_2).\end{aligned}$$

Donc $\deg(\Gamma_2 \cap H_2) \leq e$ et la seule possibilité est que $e(\Gamma_2) = e-2$

et Γ_2 est aligné de degré e. De plus $\deg(\Gamma_1 \cap H_1) = e+1$. On a donc $h^1(\mathfrak{J}_{\Gamma_2}(e-4)) = 3$ et, d'après le Lemme 1.1, $h^1(\mathfrak{J}_{\Gamma_1 \cap H_1}(e-3)) \leq 2$. Donc $h^1(\mathfrak{J}_{\Gamma_1}(e-3)) \leq 5$; c'est une contradiction.

Démonstration du théorème 2.1.

On a remarqué que le théorème est évident pour $e = 1$ car si $d \leq 4$ alors $h^0(\mathfrak{J}_\Gamma(1)) \geq 1$.

Cas $e = 2$ et $d \leq 8$.

On a alors
$$h^0\big(\mathfrak{J}_\Gamma(2)\big) = 10 - d + h^1\big(\mathfrak{J}_\Gamma(2)\big) \geq 3.$$
D'après le Lemme 2.4, Γ vérifie le théorème.

Cas $e = 3$ et $d \leq 12$.

Supposons $h^1(\mathfrak{J}_\Gamma(2)) \leq 3$. D'après le Lemme 1.5 avec $\ell = e = 3$ et $n = 1$, il existe un plan H tel que $e(\Gamma \cap H) = e$. Supposons $h^1(\mathfrak{J}_\Gamma(2)) \geq 4$. Alors $h^0(\mathfrak{J}_\Gamma(2)) = h^1(\mathfrak{J}_\Gamma(2)) + 10 - d \geq 2$. D'après le Lemme 2.4, Γ vérifie le théorème.

Cas $e \geq 4$ et $d \leq 3e+3$.

Supposons le résultat faux. Soit Γ de degré minimum contredisant le théorème. Alors Γ vérifie les hypothèses suivantes :

(a) Si Γ' est un sous-groupe de points strict de Γ, alors $e(\Gamma') < e(\Gamma)$.

(b) Pour tout plan H on a $e(\Gamma \cap H) < e$.

(c) Pour toute cubique gauche T on a $\deg(\Gamma \cap T) \leq 3e+1$.

(d) $h^0(\mathfrak{J}_\Gamma(2)) \leq 1$ (Lemme 2.4).

(e) Pour tout plan H, on a $\deg(\Gamma \cap H) \leq e+1$ (Lemme 2.5). En particulier, pour toute droite L, on a $\deg(\Gamma \cap L) \leq e$ car $\deg \Gamma > e+1$ (Lemme 1.3).

Soit H un plan tel que $\deg(\Gamma \cap H)$ est maximum et soit Γ_1 le résiduel de $\Gamma \cap H$ dans Γ.

• Supposons que $\deg(H \cap \Gamma) \geq 5$. Alors $\deg \Gamma_1 \leq d-5 \leq 3e-2$. Comme $e(\Gamma \cap H) < e$, on a $e(\Gamma_1) = e-1$, donc $\deg \Gamma_1 \leq 3e(\Gamma_1)+1$. Comme Γ_1 vérifie le Théorème 2.1, il existe un plan H_1 tel que :
$$e(\Gamma_1 \cap H_1) = e(\Gamma_1) = e-1.$$
Or, d'après l'hypothèse (e) :
$$\deg(\Gamma_1 \cap H_1) \leq \deg(\Gamma \cap H_1) \leq e+1$$
Donc Γ_1 est aligné de degré $e+1$ (Lemme 1.3), ce qui contredit (e).

• Supposons que $\deg(\Gamma \cap H) \leq 4$. Alors pour toute droite L on a $\deg(\Gamma \cap L) \leq 3$ et pour tout plan H' on a $\deg(\Gamma \cap H') \leq 4$ et $e(\Gamma \cap H') \leq 1$.

On a $\deg \Gamma_1 \leq 3e$ et $e(\Gamma_1) = e - 1$, c'est-à-dire $\deg \Gamma_1 \leq 3e(\Gamma_1) + 3$, et Γ_1 vérifie le théorème. Comme pour toute droite L et tout plan H', on a $\deg(\Gamma_1 \cap L) \leq 3$ et $e(\Gamma_1 \cap H') \leq 1$, il y a *a priori* deux cas possibles.

- ▷ Γ_1 vérifie (ii) : il existe une cubique gauche T telle que $\deg(\Gamma_1 \cap T) \geq 3e - 1$. Soit Q une quadrique contenant T et soit Γ_2 le résiduel de $\Gamma \cap Q$ dans Γ. Comme $\deg \Gamma_2 \leq 4$ et pour toute droite L on a $\deg(\Gamma_2 \cap L) \leq 3$, on a $e(\Gamma_2) \leq 1 < e - 2$. On en déduit $e(\Gamma \cap Q) = e$. Donc, d'après l'hypothèse (a), on a $\Gamma \subset Q$ pour toute quadrique Q contenant T. Ceci contredit l'hypothèse (d).
- ▷ Γ_1 est l'exception 2) du théorème : $\Gamma_1 = Q_1 \cap Q_2 \cap K$ intersection complète de degrés $(2, 2, 3)$. Ceci entraîne $\deg(\Gamma \cap H) = 3$ et $\deg(\Gamma) = 15$. De plus pour toute droite L on a $\deg(\Gamma \cap L) \leq 2$. Soit S une surface de degré $s \leq 3$ contenant Γ_1 et soit Γ_2 le résiduel de $\Gamma \cap S$ dans Γ. Comme $\deg \Gamma_2 \leq 3$ et pour toute droite L, $\deg(\Gamma_2 \cap L) \leq 2$, on a $e(\Gamma_2) \leq 0$. Ceci entraîne $e(\Gamma \cap S) = e$ et de l'hypothèse (a), on déduit $\Gamma \subset S$. On en déduit $\Gamma \subset Q_1 \cap Q_2 \cap K = \Gamma_1$, ce qui est absurde.

Donc Γ n'existe pas. Le théorème est démontré.

3. Indice de spécialité maximum et sous-maximum

3.1. Les résultats.

Dans ce paragraphe, les démonstrations des principaux théorèmes utilisent la projection générale Γ' dans le plan de Γ. Il faut pour cela qu'en tout point de Γ l'espace tangent soit de dimension ≤ 2. On dira dans ce cas que Γ est analytiquement plan.

HYPOTHÈSE (H). — *Soient g et d deux entiers strictement positifs avec $d \leq g^2$ et i l'unique entier tel que $(i-1)g < d \leq ig$. Soit Γ un groupe de points analytiquement plan de $\mathbb{P}^3$ de degré d vérifiant l'une des hypothèses suivantes :*

1) *$\Gamma \subset C$ où C est une courbe réduite irréductible, intersection de surfaces de degré g, avec* $\deg C \geq i$.

2) *$H^0(\mathcal{J}_\Gamma(g))$ n'a pas de courbe fixe.*

THÉORÈME 3.1. — *Sous l'hypothèse* (H), *on a $e(\Gamma) \leq i + g - 3$, avec égalité si et seulement si Γ est une intersection complète de degrés* $(1, i, g)$.

THÉORÈME 3.2. — *Sous l'hypothèse* (H), *si* $e(\Gamma) = i + g - 4$, *alors il existe un plan* H *tel que* $e(\Gamma \cap H) = e(\Gamma) = i + g - 4$, *avec les exceptions suivantes :*

(i) $i = 2$, $g = 3$, $5 \le d \le 6$ *et pour tout plan* H, *on a* $\deg(\Gamma \cap H) \le 3$.

(ii) $i = 2$, $g = 4$, $d = 8$ *et* Γ *est soit une intersection complète de degrés* $(2, 2, 2)$ *soit sur une cubique gauche.*

(iii) $i = 3$, $g = 3$, $d = 8$ *et* Γ *est une intersection complète de degrés* $(2, 2, 2)$.

(iv) $i = 3$, $g = 3$, $d = 9$ *et* Γ *est dans l'intersection de deux quadriques. Si ces deux quadriques ne se coupent pas proprement, alors il existe un plan* H *tel que* $\deg(\Gamma \cap H) = 6$, $\Gamma \cap H$ *n'est pas sur une conique et le résiduel de* $\Gamma \cap H$ *dans* Γ *est aligné.*

(v) $i = 3$, $g = 4$, $d = 12$ *et on est dans l'un des deux cas suivants :*

- Γ *est une intersection complète de degrés* $(2, 2, 3)$.
- *Il existe un plan* X *tel que* $\deg(\Gamma \cap X) = 8$, *le résiduel de* $\Gamma \cap X$ *dans* Γ *est aligné et l'application* $H^0(\mathcal{J}_\Gamma(3)) \to H^0(\mathcal{J}_{\Gamma \cap X/X}(3))$ *est surjective.*

(vi) $i = 3$ *et il existe une cubique gauche* T *telle que* $\deg(\Gamma \cap T) \ge 3g - 1$.

(vii) $i = 4$ *et* Γ *est une intersection complète de degrés* $(2, 2, g)$.

REMARQUES 3.1.

- Si $g \le 3$, on passe en revue tous les triplets d'entiers (i, g, d) tels que $1 \le d \le ig \le g^2 \le 9$ et on étudie les groupes de points de degré d et d'indice de spécialité $e = i + g - 4$. On voit alors apparaître les exceptions (i), (iii), (iv) et (vi) du Théorème 3.2 ; dans tous les autres cas il existe un plan H tel que $e(\Gamma \cap H) = e(\Gamma)$. On peut donc supposer $g \ge 4$ pour démontrer le Théorème 3.2.

- Si $i = 1$, alors $e(\Gamma) = g - 3$ et $d \le g$. D'après le Lemme 1.3, Γ est contenu dans un plan donc vérifie le théorème.

Si $i = 2$ ou $i = 3$ et $g \ge 4$, le Théorème 3.2 est une conséquence du Théorème 2.1. (L'hypothèse (H) n'est pas utile dans ce cas.) On peut donc supposer $i \ge 4$ pour démontrer le Théorème 3.2.

Démonstration du théorème 3.1 dans le cas plan.

Si Γ est plan alors le Théorème 3.1 est une conséquence du résultat suivant :

LEMME 3.3. — *Soit* X *un groupe de points de* $\mathbb{P}^2$ *de degré* $d \le g^2$, *tel que pour toute courbe plane* T *de degré* t *on a* $\deg(X \cap T) \le tg$. *Alors* $e(X \cap T) \le d/g + g - 3$, *avec égalité si et seulement si* X *est une intersection complète de degrés* $(d/g, g)$.

Démonstration. — Soit $(n_0, n_1, \dots, n_{s-1})$ le caractère de X avec

$$e(X) = n_0 - 2.$$

Rappelons que s est le degré minimum d'une courbe plane S contenant X. Par hypothèse, on a $d = \deg(S \cap X) \leq sg$. Donc $s \geq d/g$.

Supposons qu'il existe $t < d/g$ tel que $n_{t-1} - n_t > 1$. Alors d'après [EP], il existe une courbe T de degré t telle que $T \cap X$ a pour caractère $(n_0, \dots, n_{t-1})$. Donc :

$$\deg(T \cap X) = \sum_{i=0}^{t-1} (n_i - i).$$

On choisit t minimum. Alors

$$tg \geq \sum_{i=0}^{t-1} (n_i - i) \geq \sum_{i=0}^{t-1} (n_0 - 2i) = tn_0 - t(t-1),$$

c'est-à-dire $e(X) = n_0 - 2 \leq g + t - 3 < g + d/g - 3$.

On remarque ensuite que s'il n'existe pas un tel entier t, alors, ou bien $e(X) < g + d/g - 3$, ou bien $e(X) = g + d/g - 3$ et X a le caractère d'une intersection complète de degrés $(d/g, g)$, c'est-à-dire $(g + d/g - 1, g + d/g - 2, \dots, g)$.

Dans ce second cas, on pose $i = d/g$. Alors i est le degré minimum d'une courbe plane T contenant Γ. En calculant avec le caractère, on trouve $h^1(\mathcal{J}_\Gamma(g)) = \frac{1}{2}(i-2)(i-1)$. On en déduit $h^0(\mathcal{J}_\Gamma(g)) - h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(g-i)) = 1$. Donc il existe une courbe S de degré g qui n'est pas multiple de T.

Si S et T ne se coupent pas proprement on peut écrire $S = DS'$ et $T = DT'$ où S' et T' se coupent proprement. Le résiduel de $\Gamma \cap D$ dans Γ est dans $S' \cap T'$, donc $ig - \deg(\Gamma \cap D) \leq (i-k)(g-k)$, où $k = \deg D$. On a donc $kg \geq \deg(\Gamma \cap D) \geq k(g + i - k)$, ce qui implique $i \leq k$. C'est une contradiction, donc $S \cap T = \Gamma$.

Nous allons maintenant démontrer les Théorèmes 3.1 et 3.2 parallèlement. Pour cela, on fixe g et on fait une récurrence sur d.

Si $d = 1$, alors $e = -1$ et $i = 1$; les théorèmes sont évidents. On suppose maintenant les résultats vrais jusqu'en degré $d - 1$.

3.2 Première étape.

LEMME 3.4. — *Soit Γ un groupe de points vérifiant* (H) *avec $i \geq 4$ et $e = i + g - 4$. S'il existe deux surfaces quadriques contenant Γ et se coupant proprement, alors Γ est une intersection complète de degrés $(2, 2, g)$.*

Démonstration. — Soient Q_1 et Q_2 deux quadriques contenant Γ et se coupant proprement.

Supposons que Γ vérifie la partie 1) de l'hypothèse (H) et que C est contenu dans $Q_1 \cap Q_2$. Comme $\deg C \geq i \geq 4$ et $\deg(Q_1 \cap Q_2) = 4$, on a $C = Q_1 \cap Q_2$ et $i = 4$, ce qui entraîne $e(\Gamma) = g$. D'autre part, on a

$$h^0\big(\mathcal{I}_{\Gamma/C}(g)\big) - h^1\big(\mathcal{I}_{\Gamma/C}(g)\big) = 4g - d \geq 0 \quad \text{et} \quad h^1\big(\mathcal{I}_{\Gamma/C}(g)\big) = h^1\big(\mathcal{I}_{\Gamma}(g)\big)$$

car $h^2(\mathcal{I}_C(g)) = h^1(\mathcal{O}_C(g)) = h^0(\mathcal{O}_C(-g)) = 0$. Donc $h^0(\mathcal{I}_{\Gamma/C}(g)) \geq 1$. Soit G une surface de degré g contenant Γ et pas C. Alors $\Gamma \subset Q_1 \cap Q_2 \cap G$.

Supposons que Γ vérifie vérifie la partie 2) de l'hypothèse (H) ou que Γ vérifie la partie 1) de l'hypothèse (H) et C n'est pas dans $Q_1 \cap Q_2$. Alors il existe une surface G de degré g coupant proprement $Q_1 \cap Q_2$, telle que $\Gamma \subset Q_1 \cap Q_2 \cap G$.

Dans les deux cas, comme $Q_1 \cap Q_2 \cap G$ est une intersection complète de degrés $(2, 2, g)$, d'après la Proposition 1.11, on a $e(Q_1 \cap Q_2 \cap G) = g$ et pour tout sous-groupe strict X de $Q_1 \cap Q_2 \cap G$, on a $e(X) < e(Q_1 \cap Q_2 \cap G) = g$.

Or $e(\Gamma) = i + g - 4 \geq g$. Donc $i = 4$ et $\Gamma = Q_1 \cap Q_2 \cap G$.

LEMME 3.5. — *Soit* Γ *un groupe de points vérifiant* (H). *On suppose qu'il existe une surface* S *de degré* s *ne contenant pas* Γ *telle que* $\deg(\Gamma \cap S) \geq sg$. *Alors* Γ *vérifie les théorèmes* 3.1 *et* 3.2.

Démonstration. — On peut supposer que Γ n'est pas plan. Soit s minimum tel qu'il existe une telle surface. On choisit S telle que $\deg(\Gamma \cap S)$ est maximum. Notons Γ_1 le résiduel de $\Gamma \cap S$ dans Γ.

Premier cas.

On suppose que $e \geq i + g - 3$.

Comme $S \cap \Gamma$ vérifie le Théorème 3.1, on a $e(\Gamma \cap S) < i + g - 3 \leq e$. (L'égalité ne peut avoir lieu car $\deg(\Gamma \cap S) < d \leq ig$.)

D'après la remarque 1.1, on a $e(\Gamma_1) \geq e(\Gamma) - s \geq i + g - 3 - s$. D'autre part

$$\deg \Gamma_1 = \deg \Gamma - \deg(\Gamma \cap S) \leq (i - s)g.$$

Comme Γ_1 vérifie le Théorème 3.1, on a $e(\Gamma_1) \leq i + g - 3 - s$. On en déduit $e(\Gamma_1) = i + g - 3 - s$ et Γ_1 est une intersection complète de degrés $(1, i - s, g)$.

Soit H un plan contenant Γ_1. Alors $\deg(\Gamma \cap H) \geq (i - s)g \geq g$. Comme s est minimum et Γ n'est pas plan, on en déduit $s = 1$. De plus

$$\deg(\Gamma \cap S) = d - \deg \Gamma_1 \leq ig - (i - 1)g = g,$$

donc $\deg(\Gamma \cap S) = g$. Comme pour tout plan H' on a $\deg(\Gamma \cap H') \leq \deg(\Gamma \cap S) = g$, on a aussi $\deg(\Gamma \cap H) = \deg \Gamma_1 = g$. Donc $i = 2$ et Γ_1 est une intersection complète de degrés $(1, 1, g)$, donc aligné. Mais alors il existe un plan H_1 contenant Γ_1 tel que $\deg(\Gamma \cap S) \geq \deg(H_1 \cap \Gamma) \geq g + 1$, c'est une contradiction. Donc $e < i + g - 3$.

Deuxième cas.

Si $e = i+g-4$, on peut supposer que pour tout sous-groupe strict Γ' de Γ, on a $e(\Gamma') < e$. En particulier $e(\Gamma \cap S) < e$. On en déduit (remarque 1.1) que $e(\Gamma_1) \geq e - s$. Le Théorème 3.1 entraîne alors $\deg \Gamma_1 \geq (i-s-1)g$. On en déduit $\deg(\Gamma \cap S) \leq (s+1)g$.

De plus $\deg \Gamma_1 = d - \deg(\Gamma \cap S) \leq (i-s)g$, ce qui entraîne, en vertu du Théorème 3.1, $e(\Gamma_1) \leq i - s + g - 3$. On a donc

$$(i-s-1)g \leq \deg \Gamma_1 \leq (i-s)g,$$

$$i-s+g-4 \leq e(\Gamma_1) \leq i-s+g-3.$$

D'autre part, $sg \leq \deg(\Gamma \cap S) < d \leq ig$, donc $s \leq i-1$. Si $s = i-1$, alors, d'après le Lemme 1.3, Γ_1 est soit aligné de degré $g-1$, soit plan de degré g. Donc il existe un plan H tel que $\deg(\Gamma \cap H) \geq g$. Comme Γ n'est pas plan et s est minimum, on en déduit $s = 1$, d'où $i = 2$. Ceci contredit l'hypothèse $i \geq 4$ (remarque 3.1). On a donc $s \leq i-2$, c'est-à-dire $i-s \geq 2$.

Si $e(\Gamma_1) = i-s+g-3$, alors Γ_1 est une intersection complète de degrés $(1, i-s, g)$. Il existe un plan H contenant Γ_1 tel que $\deg(\Gamma \cap H) \geq (i-s)g \geq 2g$. On en déduit $s = 1$ et $\deg(\Gamma \cap H) = 2g$ (première partie de la démonstration). Ceci entraîne $i = 3$, ce qui contredit l'hypothèse $i \geq 4$. Donc $e(\Gamma_1) = i-s+g-4$ et on applique le Théorème 3.2 à Γ_1. Passons d'abord en revue les exceptions (on rappelle que $g \geq i \geq 4$) :

- Supposons que Γ_1 est l'exception (ii). On a

$$i-s = 2, \quad g = 4, \quad \deg \Gamma_1 = 8,$$

et Γ_1 est soit une intersection complète de degrés $(2,2,2)$ soit sur une cubique gauche. Comme $4 \leq i \leq g$, on a nécessairement $i = g = 4$ et $s = 2$. De plus

$$8 \leq \deg(\Gamma \cap S) \leq 12, \quad \deg \Gamma \leq 16, \quad \deg \Gamma_1 = 8,$$

donc

$$\deg(\Gamma \cap S) = 8, \quad \deg \Gamma = 16.$$

Comme $H^0(\mathcal{J}_{\Gamma_1}(2)) = 3$, il existe deux quadriques indépendantes Q_1 et Q_2 telles que $\deg(\Gamma \cap Q_1) \geq 9$ et $\deg(\Gamma \cap Q_2) \geq 9$. Mais S est une quadrique ne contenant pas Γ telle que $\deg(\Gamma \cap S)$ est maximum. On en déduit $\Gamma \subset Q_1 \cap Q_2$. D'après le Lemme 3.4, on peut supposer que Q_1 et Q_2 ne se coupent pas proprement. Donc Q_1 et Q_2 ont un plan commun H, avec $\deg(\Gamma \cap H) \leq 3$ car s est minimum. Soit Γ_2 le résiduel de $\Gamma \cap H$ dans Γ. Alors Γ_2 est aligné de degré ≥ 13, ce qui est absurde car $e = 4$.

• Supposons que Γ_1 est l'exception (v). Alors

$$i - s = 3, \quad g = 4, \quad \deg \Gamma_1 = 12.$$

Comme $4 \leq i \leq g$, on a nécessairement $i = g = 4$ et $s = 1$. Comme

$$4 \leq \deg(\Gamma \cap S) \leq 8, \quad \deg \Gamma \leq 16, \quad \deg \Gamma_1 = 12,$$

on en déduit

$$\deg(\Gamma \cap S) = 4 \quad \text{et} \quad \deg \Gamma = 16.$$

Comme S est un plan tel que $\deg(\Gamma \cap S)$ est maximum, Γ_1 ne peut être qu'une intersection complète de degrés $(2, 2, 3)$ (Théorème 3.2).

Soit Q une quadrique contenant Γ_1. Si Q ne contient pas Γ, alors $e(\Gamma \cap Q) < e = 4$. Soit Γ_2 le résiduel de $\Gamma \cap Q$ dans Γ, alors $e(\Gamma_2) \geq e - 4 = 2$. Or $\deg \Gamma_2 \leq 4$. Donc (Lemme 1.3) Γ_2 est aligné de degré 4. Il existe alors un plan H tel que $\deg(\Gamma \cap H) \geq 5$, ce qui contredit $\deg(\Gamma \cap S)$ maximum. Donc $\Gamma \subset Q$ et il existe deux quadriques contenant Γ et se coupant proprement. On conclut avec le Lemme 3.4.

• Supposons que Γ_1 est l'exception (vi). Alors $i - s = 3$ et il existe une cubique gauche T telle que $\deg(\Gamma_1 \cap T) \geq 3g - 1$. D'après le Lemme 3.4, on peut supposer qu'il n'existe pas deux quadriques contenant Γ et se coupant proprement. On en déduit que Γ n'est pas contenu dans T. Soit Q une quadrique contenant T et pas Γ, alors $3g - 1 \leq \deg(\Gamma \cap Q) \leq 3g$. On en déduit $s \leq 2$.

- ▷ Si $(i, s) = (5, 2)$, alors $\deg \Gamma_1 \geq 3g - 1$ entraîne $\deg(\Gamma \cap S) \leq 2g + 1$. Or S est une quadrique ne contenant pas Γ telle que $\deg(\Gamma \cap S)$ est maximum. Pour toute quadrique Q contenant T et pas Γ, on a donc $3g - 1 \leq \deg(\Gamma \cap Q) \leq \deg(\Gamma \cap S) \leq 2g + 1$. Ceci est impossible.
- ▷ Si $(i, s) = (4, 1)$, alors $g \leq \deg(\Gamma \cap S) \leq g + 1$ et $3g - 1 \leq \deg \Gamma_1 \leq 3g$. De plus, pour tout plan H, on a $\deg(\Gamma \cap H) \leq \deg(\Gamma \cap S)$. Ceci entraîne que T est intègre. En effet, sinon il existerait une quadrique décomposée contenant T, ce qui entraînerait l'existence d'un plan H tel que $\deg(\Gamma \cap H) > g + 1$.

  Soient Q une quadrique contenant T et pas Γ et Γ_2 le résiduel de $\Gamma \cap Q$ dans Γ. Comme $e(\Gamma \cap Q) < e = g$, on a $e(\Gamma_2) \geq g - 2$. Or $\deg \Gamma_2 \leq g + 1$; on déduit du Lemme 1.3 qu'il existe une droite L telle que $\deg(\Gamma_2 \cap L) = g$. De plus $L \subset S$ et $\deg(\Gamma \cap S) = g + 1$.

  Notons

  $$M = \bigoplus_{n \geq 0} H^1(\mathcal{J}_{\Gamma_1}(n)).$$

Montrons que M vérifie les hypothèses de la Proposition 1.8. Comme $\deg \mathcal{J}_{\Gamma_1/T}(g-1) = 3(g-1) - (3g-1) = -2$, on a $\mathcal{J}_{\Gamma_1/T}(g-1) \simeq \omega_T$ (faisceau dualisant sur T) et la suite exacte :

$$0 \to \omega_T \longrightarrow \mathcal{O}_T(g-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\Gamma_1}(g-1) \to 0.$$

Du diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)\big) & \longrightarrow & H^0\big(\mathcal{O}_{\Gamma_1}(n)\big) & \longrightarrow & H^1\big(\mathcal{J}_{\Gamma_1}(n)\big) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \| & & & & \\
H^0\big(\mathcal{O}_T(n)\big) & \longrightarrow & H^0\big(\mathcal{O}_{\Gamma_1}(n)\big) & \longrightarrow & H^1\big(\omega_T(n-g+1)\big) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & & & & & \\
0 & & & & & &
\end{array}$$

on déduit l'isomorphisme

$$H^1\big(\mathcal{J}_{\Gamma_1}(n)\big) \simeq H^1\big(\omega_T(n-g+1)\big),$$

c'est-à-dire :

$$M \simeq \bigoplus_{n\geq 0} H^0\big(\mathcal{O}_T(g-1-n)\big)^{\vee}.$$

En particulier, on a $\operatorname{rang}(M_{g-1}) = 1$.

Soit a un élément de degré n de $\operatorname{Hom}_R(R/(X_0,X_1,X_2,X_3),M)$ et a' son image dans $H^0(\mathcal{O}_T(g-1-n))^{\vee}$. Pour tout j on a $a'X_jH^0(\mathcal{O}_T(g-1-n-1)) = 0$, ce qui entraîne $n = g-1$. Donc

$$\operatorname{Hom}_R(R/(X_0,X_1,X_2,X_3),M) \simeq M_{g-1}.$$

Soit M'_n l'image du morphisme : $H^1(\mathcal{J}_{\Gamma_1}(n)) \to H^1(\mathcal{J}_{\Gamma}(n+1))$. Alors $M' = \bigoplus_n M'_n$ est un quotient de M. De plus $M'_{g-1} = H^1(\mathcal{J}_{\Gamma}(g)) \neq 0$, car $H^1(\mathcal{J}_{\Gamma\cap S/S}(g)) = 0$. Du Corollaire 1.9, on déduit l'isomorphisme $M \simeq M'$. Donc pour tout n on a une surjection :

$$H^0\big(\mathcal{J}_{\Gamma}(n)\big) \longrightarrow H^0\big(\mathcal{J}_{\Gamma\cap S/S}(n)\big) \to 0.$$

Or $h^0(\mathcal{J}_{\Gamma\cap S/S}(2)) = 2$. Donc il existe deux quadriques indépendantes contenant Γ. D'après le Lemme 3.4, on peut supposer qu'elles ne se coupent pas proprement. On en déduit l'existence d'un plan H tel que $\deg(\Gamma\cap H) > g+1$; c'est une contradiction.

• Supposons que Γ_1 est l'exception (vii), c'est-à-dire une intersection complète de degrés $(2,2,g)$. Soit Q une quadrique contenant Γ_1. Alors $\deg(\Gamma\cap Q) \geq 4g$ et on a vu dans la première partie de la démonstration que cela entraîne $\Gamma \subset Q$. Donc Γ est contenu dans deux quadriques qui se coupent proprement. Le Lemme 3.4 permet de conclure.

Si Γ n'est pas une exception, il existe un plan H tel que

$$e(\Gamma_1 \cap H) = (i - s) + g - 4.$$

Ceci entraîne d'après le Théorème 3.1 que

$$\deg(\Gamma_1 \cap H) \geq (i - s - 1)g \geq g.$$

Donc $g \leq \deg(\Gamma \cap H) \leq 2g$ et on en déduit $s = 1$. De plus

$$\deg(\Gamma_1 \cap H) \leq 2g \Longrightarrow i = 4.$$

On en déduit $\deg(\Gamma_1 \cap H) = 2g$ et $\Gamma_1 \cap H = \Gamma \cap H$. Comme

$$e(\Gamma \cap H) = (i - s) + g - 4 = g - 1$$

et $\deg(\Gamma \cap H) = 2g$, d'après le Théorème 3.1, $\Gamma \cap H$ est une intersection complète de degrés $(1, 2, g)$. Soit Γ_2 le résiduel de $\Gamma \cap H$ dans Γ.

Comme $e = g$ et $e(\Gamma \cap H) < e$, on a $e(\Gamma_2) \geq g - 1$ (remarque 1.1). D'autre part $\deg(\Gamma_2) = d - \deg(\Gamma \cap H) \leq 2g$, donc, d'après le Théorème 3.1, Γ_2 est une intersection complète de degrés $(1, 2, g)$.

Finalement on a

$$\deg \Gamma_2 = 2g, \quad \deg(\Gamma \cap H) = 2g, \quad \deg \Gamma = 4g$$

et Γ_2 et $\Gamma \cap H$ sont des intersections complètes de degrés $(1, 2, g)$:

$$\Gamma \cap H = H \cap Q_1 \cap G \quad \text{et} \quad \Gamma_2 = H' \cap Q_2 \cap G.$$

On va montrer que ceci entraîne que Γ est une intersection complète de degrés $(2, 2, g)$, c'est-à-dire qu'il existe une quadrique Q telle que $\Gamma = HH' \cap Q \cap G$.

Soit $M = \bigoplus_n H^1(\mathcal{J}_{\Gamma_2}(n))$. D'après la Proposition 1.11, comme Γ_2 est une intersection complète de degrés $(1, 2, g)$, M vérifie les hypothèses de la Proposition 1.8 avec $e(\Gamma_2) = g - 1$.

Soit M'_n l'image du morphisme : $H^1(\mathcal{J}_{\Gamma_2}(n)) \to H^1(\mathcal{J}_\Gamma(n+1))$. Alors $M' = \bigoplus_n M'_n$ est un quotient de M. De plus $M'_{g-1} = H^1(\mathcal{J}_\Gamma(g)) \neq 0$, car $H^1(\mathcal{J}_{\Gamma \cap H/H}(g)) = 0$. Du Corollaire 1.9 on en déduit l'isomorphisme $M \simeq M'$. Donc pour tout n on a une surjection :

$$H^0(\mathcal{J}_\Gamma(n)) \longrightarrow H^0(\mathcal{J}_{\Gamma \cap H/H}(n)) \to 0.$$

En particulier, pour $n = 2$, on en déduit que la quadrique générale qui contient Γ coupe proprement H. De même, la quadrique générale contenant Γ coupe proprement H'. Il existe donc une quadrique Q telle que $\Gamma = HH' \cap Q \cap G$. On conclut avec le Lemme 3.4.

3.3 Deuxième étape.

LEMME 3.6. — *Soient* Γ *vérifiant l'hypothèse* (H) *et* S *une surface de degré* s *contenant* Γ (*et pas* C).

- *Si* $s \leq d/g$, *alors* Γ *vérifie le théorème* 3.1.
- *Si* $s < d/g$, *alors* Γ *vérifie le théorème* 3.2.

Démonstration. — On choisit une surface S de degré minimum s contenant Γ (et pas C). On peut supposer $s > 1$ car le Théorème 3.1 est démontré pour Γ plan et le Théorème 3.2 est évidemment vrai dans ce cas.

Supposons d'abord que S *est intègre.*

D'après (H), il existe deux surfaces G et G' de degrés g contenant Γ telles que S, G et G' se coupent proprement. Notons $C' = G \cap G'$. Soit Δ le groupe de points lié à Γ par $S \cap G \cap G'$. On a :

$$\mathcal{I}_{\Delta/C'}(s) \simeq \mathcal{I}^{\vee}_{\Gamma/C'} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{C'}}(\mathcal{I}_{\Gamma/C'}, \mathcal{O}_{C'}).$$

La multiplication par S définit un morphisme injectif :

$$H^0\big(\mathcal{O}_{C'}(2g-4-e)\big) \xrightarrow{\varphi_S} H^0\big(\mathcal{I}_{\Delta/C'}(s+2g-4-e)\big).$$

Or on a les isomorphismes :

$$H^0\big(\mathcal{O}_{C'}(2g-4-e)\big) \simeq H^1\big(\mathcal{O}_{C'}(e)\big)^{\vee} \simeq H^2\big(\mathcal{I}_{C'}(e)\big)^{\vee}$$

$$H^0\big(\mathcal{I}_{\Delta/C'}(s+2g-4-e)\big) \simeq H^0\big(\mathcal{I}^{\vee}_{\Gamma/C'}(2g-4-e)\big) \simeq H^1\big(\mathcal{I}_{\Gamma/C'}(e)\big)^{\vee}.$$

Comme $h^1(\mathcal{I}_{\Gamma/C'}(e)) - h^2(\mathcal{I}_{C'}(e)) = h^1(\mathcal{I}_{\Gamma}(e)) \neq 0$,, on a :

$$h^0\big(\mathcal{O}_{C'}(2g-4-e)\big) \neq h^0\big(\mathcal{I}_{\Delta/C'}(s+2g-4-e)\big).$$

Donc φ_S n'est pas un isomorphisme. Il existe une surface S' de degré $2g-4-e+s$ contenant Δ et pas C', non multiple de S. Comme S est intègre, S et S' se coupent proprement et il existe une surface G'' de degré g contenant Δ telle que S, S' et G'' se coupent proprement. Comme $\Delta \subset G'' \cap S \cap S'$, on en déduit, puisque $d \leq ig$:

$$\deg \Delta = sg^2 - d \leq gs(s+2g-e-4) \implies e \leq g+s+i/s-4.$$

Premier cas.

Si $e \geq i+g-3$ et $s \leq d/g \leq i$, comme $s > 1$, alors :

$$i+g-3 \leq g+s+i/s-4 \Rightarrow i(s-1) \leq s(s-1) \Rightarrow i \leq s.$$

On en déduit $i = s$. Ceci entraîne $e = i + g - 3$ et

$$\deg \Delta = sg^2 - d = sg(g-1) = \deg(S \cap S' \cap G'').$$

Donc $\Delta = S \cap S' \cap G''$ et $\mathcal{I}_{\Delta/S\cap G''} \simeq \mathcal{O}_{S\cap G''}(-g+1)$. Or $\mathcal{I}_{\Delta/S\cap G''} \simeq \mathcal{I}^{\vee}_{\Gamma/S\cap G''}(-g)$. Donc $\mathcal{I}_{\Gamma/S\cap G''} \simeq \mathcal{O}_{S\cap G''}(-1)$, c'est-à-dire, Γ est une intersection complète de degrés $(1, s, g)$. Mais c'est une contradiction car Γ n'est pas plan. Donc $e < i + g - 3$ et Γ vérifie le Théorème 3.1.

Deuxième cas.
Si $e = i + g - 4$ et $s < d/g \leq i$, alors

$$\begin{aligned}
&s(s-i) + i \geq 0 \\
&\quad\Longrightarrow\ s^2 \geq (s-1)i \geq (s-1)(s+1) && (\text{car} \quad s < i) \\
&\quad\Longrightarrow\ i(s-1) = s^2 \quad \text{ou} \quad i(s-1) = s^2 - 1 \\
&\quad\Longrightarrow\ s = i-1 \quad \text{ou} \quad s = 2 \quad \text{et} \quad i = 4 && (\text{car} \quad s > 1).
\end{aligned}$$

• Si $s = 2$ et $i = 4$, alors $e = g$ et $sg^2 - ig = sg(s + 2g - e - 4)$, c'est-à-dire $\deg \Delta = \deg(S \cap S' \cap G'')$. Donc Δ est une intersection complète de degrés $(2, g-2, g)$: $\Delta = S \cap S' \cap G''$. Or

$$\mathcal{I}_{\Gamma/S\cap G''} = \mathcal{I}^{\vee}_{\Delta/S\cap G''}(-g) = \mathcal{O}_{S\cap G''}(-2),$$

donc Γ est une intersection complète de degrés $(2, 2, g)$. C'est l'exception (vii) du Théorème 3.2.

• Si $s = i - 1$, alors $(s, s + 2g - e - 4, g) = (i-1, g-1, g)$. Soit Δ' le résiduel de Δ dans l'intersection complète $S \cap S' \cap G''$, alors :

$$\deg \Delta' = (i-1)(g-1)g - ((i-1)g^2 - d) = d - g(i-1) \leq g.$$

Notons $C'' = S \cap G''$. On a par la liaison :

$$\mathcal{I}_{\Delta'/C''} \simeq \mathcal{I}^{\vee}_{\Delta/C''}(-g+1) \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_{\Gamma/C''} \simeq \mathcal{I}^{\vee}_{\Delta/C''}(-g).$$

Donc $\mathcal{I}_{\Gamma/C''} \simeq \mathcal{I}_{\Delta'/C''}(-1)$. Notons σ la section de $\mathcal{I}^{\vee}_{\Delta'/C''}$ définissant Δ'.

- ▷ Si l'application $H^0(\mathcal{O}_{C''}(1)) \to H^0(\mathcal{I}^{\vee}_{\Delta'/C''}(1))$ définie par σ est un isomorphisme, alors il existe un plan H tel que Γ est le schéma des zéros de la section σH de $\mathcal{I}^{\vee}_{\Delta'/C''}(1) \simeq \mathcal{I}^{\vee}_{\Gamma/C''}$. Dans ce cas $H \cap C''$ est un sous-groupe de points plan de Γ qui est une intersection complète de degrés $(1, i-1, g)$. Comme $e(H \cap C'') = i + g - 4$, le lemme est démontré.

▷ Si l'application $H^0(\mathcal{O}_{C''}(1)) \to H^0(\mathcal{J}^{\vee}_{\Delta'/C''}(1))$ définie par σ n'est pas un isomorphisme, alors $h^0(\mathcal{J}^{\vee}_{\Delta'/C''}(1)) \geq 5$, donc par dualité $h^1(\mathcal{J}_{\Delta'/C''}(s+g-5)) \geq 5$. La suite exacte

$$0 \to H^1\big(\mathcal{J}_{\Delta'}(s+g-5)\big) \longrightarrow H^1\big(\mathcal{J}_{\Delta'/C''}(s+g-5)\big) \longrightarrow H^1\big(\mathcal{O}_{C''}(s+g-5)\big) \to 0$$

montre que $h^1(\mathcal{J}_{\Delta'}(s+g-5)) \neq 0$. Comme $s = i-1 \geq 3$, on en déduit $h^1(\mathcal{J}_{\Delta'}(g-2)) \neq 0$, donc Δ' est aligné de degré g. Comme $h^0(\mathcal{J}_{\Gamma/C''}(2)) = h^0(\mathcal{J}_{\Delta'/C''}(1)) \geq 2$, il existe deux quadriques Q_1 et Q_2 contenant Γ et pas C''.

Si Q_1 et Q_2 se coupent proprement, alors, d'après le Lemme 3.4, Γ est une intersection complète de degrés $(2,2,g)$. C'est l'exception (vii) du théorème.

Si Q_1 et Q_2 ont un plan commun H, notons Γ_1 le résiduel de $\Gamma \cap H$ dans Γ. Alors il existe une droite L contenant Γ_1. Si $e(\Gamma\cap H) < e$, alors $e(\Gamma_1) \geq e-1$, donc $\deg(\Gamma\cap L) \geq \deg(\Gamma_1) \geq e+1 = g+1$. Ceci entraîne $L \subset G\cap G'\cap S$; c'est une contradiction car G, G' et S se coupent proprement. Donc $e(\Gamma\cap H) = e$ et Γ vérifie le théorème.

Si S n'est pas intègre.

On peut écrire $S = S_1S_2$ avec $\deg S_i = s_i < s$. (On confond surface et polynôme homogène). Soit Γ_1 le résiduel de $\Gamma\cap S_1$ dans Γ. Alors $\Gamma_1 \subset S_2$ et

$$\begin{aligned}\deg(\Gamma\cap S_1) + \deg(\Gamma\cap S_2) &\geq \deg(\Gamma\cap S_1) + \deg\Gamma_1\\ &= d \geq sg = s_1g + s_2g.\end{aligned}$$

On a donc $d > \deg(\Gamma\cap S_1) \geq s_1g$ ou $d > \deg(\Gamma\cap S_2) \geq s_2g$. On conclut grâce au Lemme 3.5.

Le Corollaire 1.6 et le Lemme 3.6 entraînent :

COROLLAIRE 3.7. — *Soit Γ vérifiant l'hypothèse* (H) *tel que pour tout sous-groupe strict Γ' de Γ, on a $e(\Gamma') < e$. On suppose qu'il existe un entier $n < d/g$ tel que :*

- *Si Γ vérifie la partie* 1) *de l'hypothèse* (H),
$$h^1\big(\mathcal{J}_\Gamma(e-n)\big) < \binom{n+3}{3} - h^0\big(\mathcal{J}_C(n)\big).$$
- *Si Γ vérifie la partie* 2) *de l'hypothèse* (H),
$$h^1\big(\mathcal{J}_\Gamma(e-n)\big) < \binom{n+3}{3}.$$

Alors Γ vérifie les théorèmes 3.1 *et* 3.2.

3.4 Troisième étape.

Soient Γ vérifiant l'hypothèse (H) et Γ' la projection générale de Γ dans $\mathbb{P}^2$.

Supposons qu'il existe une courbe plane T de degré t telle que

$$\deg(\Gamma' \cap T) > tg.$$

Alors le cône au-dessus de T est une surface S de degré t telle que

$$d \geq \deg(\Gamma \cap S) > tg.$$

Si S ne contient pas Γ, alors le Lemme 3.5 démontre les Théorèmes 3.1 et 3.2. Si S contient Γ, alors, comme $t < d/g$, S ne peut pas contenir C et le Lemme 3.6 démontre les Théorèmes 3.1 et 3.2.

De même, si T est une courbe plane de degré t telle que

$$tg = \deg(\Gamma' \cap T) < d,$$

alors le cône S au-dessus de T est une surface de degré t ne contenant pas Γ telle que $\deg(\Gamma \cap S) \geq tg$. Le Lemme 3.5 démontre alors les Théorèmes 3.1 et 3.2.

On peut donc faire l'hypothèse suivante :

Hypothèse (H'). — *Pour toute courbe plane T de degré t, on a $\deg(\Gamma' \cap T) \leq tg$ avec égalité si et seulement si $\Gamma' \subset T$.*

Fin de la démonstration du théorème 3.1.

Le Lemme 3.3 entraîne $e(\Gamma') \leq d/g + g - 3$, avec égalité si et seulement si Γ' a le caractère d'une intersection complète de $\mathbb{P}^2$ de degrés $(d/g, g)$.

Or $e(\Gamma) \leq e(\Gamma')$, donc $e \leq i + g - 3$. De plus si $e = i + g - 3$, alors $e(\Gamma') = d/g + g - 3 = e$, et d'après le Lemme 3.3, Γ' est une intersection complète de degrés $(d/g, g)$. On a donc $h^1(\mathcal{J}_{\Gamma'}(e-1)) = 3$. Comme $h^1(\mathcal{J}_\Gamma(e-1)) \leq h^1(\mathcal{J}_{\Gamma'}(e-1))$, on en déduit

$$h^1\big(\mathcal{J}_\Gamma(e-1)\big) \leq h^1\big(\mathcal{J}_\Gamma(e)\big) + 2.$$

D'après le Lemme 1.5, il existe un plan H tel que $e(\Gamma \cap H) = e$. Le Théorème 3.1 est vrai.

Fin de la démonstration du théorème 3.2.

On suppose que $e = i + g - 4$. Soit $n_0 \geq n_1 \geq \cdots \geq n_{s-1}$ le caractère de Γ'.

LEMME 3.8. — *Pour tout $j < i$, on a $n_{j-1} - n_j \leq 1$ et $i + g - 1 \geq n_0 \geq i + g - 2$.*

Démonstration. — Les conditions $e(\Gamma') \geq e(\Gamma)$ et $n_0 = e(\Gamma') + 2$ entraînent $n_0 \geq i + g - 2$.

Soit j minimum tel que $n_{j-1} - n_j \geq 2$. D'après la Proposition [EP], il existe une courbe T de degré j telle que $T \cap \Gamma'$ a pour caractère $(n_0, n_1, \ldots, n_{j-1})$. On a alors :

$$\deg \Gamma' > \deg(T \cap \Gamma') = \sum_{k=0}^{j-1} (n_k - k) \geq \sum_{k=0}^{j-1} (n_0 - 2k),$$

ce qui entraîne

$$\deg \Gamma' > j(i + g - j - 1).$$

Comme T ne contient pas Γ', l'hypothèse (H') implique $\deg(\Gamma' \cap T) < jg$, d'où $j(i + g - j - 1) < jg$, c'est-à-dire $i \leq j$.

Supposons $n_0 \geq i + g$; alors

$$\deg \Gamma' \geq \sum_{k=0}^{i-1} (n_k - k) \geq \sum_{k=0}^{i-1} (n_0 - 2k) \geq i(g + 1),$$

ce qui contredit $\deg \Gamma' \leq ig$. Donc $n_0 \leq i + g - 1$.

LEMME 3.9. — *Si Γ vérifie la partie* 1) *de* (H) *et l'une des hypothèses suivantes :*

$$\begin{aligned} &h^1\big(\mathcal{J}_{\Gamma'}(e-1)\big) < 4, \quad \text{ou} \\ &h^1\big(\mathcal{J}_{\Gamma'}(e-2)\big) < 9, \quad \text{ou} \\ &h^1\big(\mathcal{J}_{\Gamma'}(e-3)\big) < 20 - h^0\big(\mathcal{J}_C(3)\big), \end{aligned}$$

ou si Γ vérifie la partie 2) *de* (H) *et l'une des hypothèses suivantes :*

$$\begin{aligned} &h^1\big(\mathcal{J}_{\Gamma'}(e-1)\big) < 4, \quad \text{ou} \\ &h^1\big(\mathcal{J}_{\Gamma'}(e-2)\big) < 10, \quad \text{ou} \\ &h^1\big(\mathcal{J}_{\Gamma'}(e-3)\big) < 20, \end{aligned}$$

alors Γ vérifie le théorème 3.2.

Démonstration. — Rappelons que pour tout entier n, on a :

$$h^1\big(\mathcal{J}_{\Gamma'}(n)\big) \geq h^1\big(\mathcal{J}_{\Gamma}(n)\big).$$

Supposons que Γ vérifie la partie 1) de l'hypothèse (H).

• Si $h^1(\mathcal{J}_{\Gamma'}(e-1)) < 4$, alors $h^1(\mathcal{J}_{\Gamma}(e-1)) < 4 - h^0(\mathcal{J}_C(1))$ car C n'est pas plane.

• Si $h^0(\mathcal{J}_C(2)) \geq 2$, alors Γ est contenu dans deux quadriques qui se coupent proprement car C est intègre. Le Lemme 3.4 donne le résultat. On peut donc supposer $h^0(\mathcal{J}_C(2)) \leq 1$. Si $h^1(\mathcal{J}_{\Gamma'}(e-2)) < 9$, alors $h^1(\mathcal{J}_{\Gamma}(e-2)) < 10 - h^0(\mathcal{J}_C(2))$.

• Si $h^1(\mathcal{J}_{\Gamma'}(e-3)) < 20 - h^0(\mathcal{J}_C(3))$, alors $h^1(\mathcal{J}_{\Gamma}(e-3)) < 20 - h^0(\mathcal{J}_C(3))$. Le Corollaire 3.7 donne le résultat.

Si Γ vérifie la partie 2) de l'hypothèse (H), c'est une conséquence immédiate du Corollaire 3.7.

Nous allons maintenant étudier toutes les possibilités pour le caractère de Γ'. Rappelons que

$$\deg \Gamma' = \sum_{j=0}^{s-1} (n_j - j) \geq \sum_{j=0}^{i-1} (n_j - j),$$
$$h^1\big(\mathcal{J}_{\Gamma'}(n)\big) \leq \sum_{k \geq n+2} \operatorname{Card}\{j\,;\ n_j \geq k\}.$$

• Si $n_2 < i+g-3$, alors $n_0 = i+g-2$ et $n_1 = i+g-3$ (Lemme 3.8). Ceci entraîne $h^1(\mathcal{J}_{\Gamma'}(i+g-5)) = 3$. On conclut grâce au Lemme 3.9.

• Si $n_2 \geq i+g-3$, alors les caractères possibles sont :

$(n_0, \dots, n_{i-1}) = (g+i-1, g+i-2, \dots, g+1, g)$,
$(n_0, \dots, n_{i-1}) = (g+i-2, g+i-2, g+i-3, \dots, g)$,
$(n_0, \dots, n_{i-1}) = (g+i-2, g+i-2, g+i-3, \dots, g+1, g+1)$,
$(n_0, \dots, n_i) = (g+i-2, g+i-2, g+i-3, \dots, g+1, g, i+1)$,
$(n_0, \dots, n_{i-1}) = (g+i-2, g+i-3, g+i-3, \dots, g+1, g)$,
$(n_0, \dots, n_{i-1}) = (g+i-2, g+i-3, g+i-3, \dots, g+1, g+1)$,
$(n_0, \dots, n_i) = (g+i-2, g+i-3, g+i-3, \dots, g+1, g, i+1)$,
$(n_0, \dots, n_{i-1}) = (g+i-2, g+i-3, g+i-3, \dots, g+2, g+2, g+1)$,
$(n_0, \dots, n_i) = (g+i-2, g+i-3, g+i-3, \dots, g+2, g+1, g+1, i+1)$,
$(n_0, \dots, n_i) = (g+i-2, g+i-3, g+i-3, \dots, g+2, g+1, g, i+2)$.

Dans tous les cas, on trouve :

$$h^1\big(\mathcal{J}_{\Gamma'}(i+g-6)\big) = 8 \quad \text{ou} \quad h^1\big(\mathcal{J}_{\Gamma'}(i+g-7)\big) \leq 15.$$

D'après le Lemme 3.9, le seul cas restant à étudier est le cas où Γ vérifie la partie 1) de l'hypothèse (H) et $h^0(\mathcal{J}_C(3)) \geq 5$.

De plus on peut supposer $h^0(\mathcal{J}_C(2)) \leq 1$, sinon comme C est intègre, le Lemme 3.4 permet de conclure.

LEMME 3.10. — *Soit C une courbe intègre de $\mathbb{P}^3$ telle que $h^0(\mathcal{J}_C(2)) \leq 1$ et $h^0(\mathcal{J}_C(3)) \geq 5$. Alors $\deg C \leq 6$.*

Démonstration.

- Supposons que $h^0(\mathcal{J}_C(2)) = 1$ et soit Q une quadrique contenant C. Alors Q est intègre et il existe une cubique qui coupe C proprement. Ceci entraîne $\deg C \leq 6$.

- Supposons que $h^0(\mathcal{J}_C(2)) = 0$. Alors il existe deux cubiques K et K' qui se coupent proprement. Ceci implique $\deg C \leq 9$.
  - ▷ Si $\deg C = 9$, alors $h^0(\mathcal{J}_C(3)) = 2$, c'est une contradiction.
  - ▷ Si $\deg C = 8$, alors C est liée par deux cubiques à une droite. On en déduit (*cf.* [PS]) que l'idéal gradué est engendré par deux cubiques et une quartique, ce qui contredit $h^0(\mathcal{J}_C(3)) \geq 5$.
  - ▷ Si $\deg C = 7$, alors C est liée par deux cubiques à une courbe C' de degré 2. On a la suite exacte de liaison (*cf.* [PS]) :

$$0 \to \omega_{C'}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{K\cap K'}(3) \longrightarrow \mathcal{O}_C(3) \to 0.$$

Donc $h^0(\mathcal{J}_C(3)) = h^0(\mathcal{J}_{K\cap K'}(3)) + h^0(\omega_{C'}(1)) = 2 + h^0(\omega_{C'}(1))$.

Si C' est une conique alors $h^0(\mathcal{J}_C(3)) = 3$, c'est une contradiction.

Si C' est la réunion de deux droites disjointes L et L', alors $\omega_{C'}(1) \simeq \mathcal{O}_L(-1) \oplus \mathcal{O}_{L'}(-1)$. Donc $h^0(\mathcal{J}_C(3)) = 2$, c'est une contradiction.

Si C' est une droite double de support L, alors il existe un entier k tel que l'on ait une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_L(k) \longrightarrow \mathcal{O}_{C'} \longrightarrow \mathcal{O}_L \to 0.$$

Comme $\mathcal{O}_L(k)$ est un quotient du fibré conormal $2\mathcal{O}_L(-1)$ de L, on en déduit $k \geq -1$. En dualisant la suite exacte, on obtient :

$$0 \to \omega_L(1) \longrightarrow \omega_{C'}(1) \longrightarrow \omega_L(1-k) \to 0.$$

Or $h^0(\omega_L(1)) = h^0(\mathcal{O}_L(-1)) = 0$ et

$$h^0(\omega_L(1-k)) = h^0\big(\mathcal{O}_L(-1-k)\big) \leq 1.$$

Donc $h^0(\omega_{C'}(1)) \leq 1$ et $h^0(\mathcal{J}_C(3)) \leq 3$, c'est une contradiction.

Il reste à étudier les cas $4 \leq i \leq \deg C \leq 6$. Pour cela on considère la suite exacte

$$0 \to \mathcal{I}_C(e) \longrightarrow \mathcal{I}_\Gamma(e) \longrightarrow \mathcal{I}_{\Gamma/C}(e) \to 0.$$

D'après le théorème de Castelnuovo sur la majoration du genre des courbes gauches intègres, et si $p_a(C)$ est le genre arithmétique de C, on a :

$$\begin{aligned} &\text{si } \deg C = 4, \text{ alors } p_a(C) \leq 1,\\ &\text{si } \deg C = 5, \text{ alors } p_a(C) \leq 2,\\ &\text{si } \deg C = 6, \text{ alors } p_a(C) \leq 4. \end{aligned}$$

Remarquons que si $(i, \deg C, p_a(C)) = (4,4,1)$, alors C est l'intersection complète de deux quadriques; on conclut grâce au Lemme 3.4.

On peut donc supposer

$$\big(i, \deg C, p_a(C)\big) \neq (4,4,1).$$

Comme $e = i + g - 4 \geq 4 \geq \deg C - 2$, on a $h^1(\mathcal{I}_C(e)) = 0$. On a donc une suite exacte :

$$0 \to H^1\big(\mathcal{I}_\Gamma(e)\big) \longrightarrow H^1\big(\mathcal{I}_{\Gamma/C}(e)\big) \longrightarrow H^1\big(\mathcal{O}_C(e)\big) \to 0,$$

et
$$1 \leq h^1\big(\mathcal{I}_\Gamma(e)\big) \leq h^1\big(\mathcal{I}_{\Gamma/C}(e)\big).$$

• Si C est lisse, on calcule directement

$$\deg(\mathcal{I}_{\Gamma/C}(e)) \geq e \deg C - ig = g(\deg C - i) + (i-4)\deg C,$$

et on trouve $\deg(\mathcal{I}_{\Gamma/C}(e)) > 2p_a(C) - 2$. Donc $h^1(\mathcal{I}_\Gamma(e)) = 0$, c'est une contradiction.

• Si C n'est pas lisse (seulement intègre), comme $h^1(\mathcal{I}_{\Gamma/C}(e)) \geq 1$, on a :

$$H^0\big(\mathrm{Hom}_C(\mathcal{I}_{\Gamma/C}(e), \omega_C)\big) \neq 0, \quad \text{donc} \quad \chi\big(\omega_C\big) \geq \chi\big(\mathcal{I}_{\Gamma/C}(e)\big).$$

Or $\chi(\omega_C) = p_a(C) - 1$ et

$$\chi\big(\mathcal{I}_{\Gamma/C}(e)\big) = \chi\big(\mathcal{O}_C(e)\big) - \chi\big(\mathcal{O}_\Gamma(e)\big) = e \deg C + 1 - p_a(C) - \deg \Gamma.$$

On trouve alors

$$2p_a(C) - 2 \geq g(\deg C - i) + (i-4)\deg C,$$

ce qui est impossible dans tous les cas. Le Théorème 3.2 est démontré.

4. Gonalité et indice de Clifford d'une courbe lisse intersection complète de $\mathbb{P}^3$

DÉFINITION 4.1.

• Soit C une courbe. On appelle *gonalité* de C et on note $\operatorname{gon}(C)$ le plus petit entier n tel qu'il existe un morphisme $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ de degré n. Autrement dit, c'est le plus petit entier n tel qu'il existe un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur C de degré n avec $h^0(\mathcal{L}) \geq 2$.

• Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur C. On appelle *indice de Clifford de* $\mathcal{L}$ l'entier

$$\operatorname{Cliff}(\mathcal{L}) = \deg \mathcal{L} - 2(h^0(\mathcal{L}) - 1).$$

• On appelle *indice de Clifford* de C et on note $\operatorname{Cliff}(C)$ le plus petit indice de Clifford des faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ sur C vérifiant $h^0(\mathcal{L}) \geq 2$ et $h^0(\mathcal{L}^{\vee} \otimes \omega_C) \geq 2$.

REMARQUES 4.1.

1) On a la majoration $\operatorname{Cliff}(C) \leq \operatorname{gon}(C) - 2$.

2) Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur C tel que

$$h^0(\mathcal{L}) \geq 0 \quad \text{et} \quad h^0(\mathcal{L}^{\vee} \otimes \omega_C) \geq 2.$$

Alors $\operatorname{Cliff}(\mathcal{L}^{\vee} \otimes \omega_C) = \operatorname{Cliff}(\mathcal{L})$.

LEMME 4.1. — *Soit $C = F \cap G$ une courbe intersection complète de degrés (f, g) dans $\mathbb{P}^3$, lisse et connexe. Soient $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur C et Γ le diviseur des zéros d'une section de $\mathcal{L}$. Alors*

$$h^0(\mathcal{L}) = h^1(\mathcal{J}_\Gamma(f + g - 4)) + 1.$$

On en déduit l'équivalence :

$$h^0(\mathcal{L}) \geq 2 \Leftrightarrow e(\Gamma) \geq f + g - 4.$$

Démonstration. — On considère la suite exacte :

$$(1) \qquad 0 \to H^1(\mathcal{J}_\Gamma(n)) \longrightarrow H^1(\mathcal{J}_{\Gamma/C}(n)) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_C(n)) \to 0.$$

On a $H^0(\mathcal{L})^{\vee} \simeq H^1(\mathcal{J}_{\Gamma/C} \otimes \omega_C)$ avec $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C(f + g - 4)$. Donc

$$h^0(\mathcal{L}) = h^1(\mathcal{J}_{\Gamma/C}(f + g - 4)).$$

On déduit de la suite exacte (1) :

$$h^0(\mathcal{L}) = h^1(\mathcal{J}_\Gamma(f + g - 4)) + 1.$$

THÉORÈME 4.2. — *Soit $C = F \cap G$ une courbe intersection complète de degrés (f,g) de $\mathbb{P}^3$ lisse et connexe. On suppose $g \geq f \geq 2$. Soit ℓ le degré maximum d'un groupe de points aligné dans C. Alors* $\mathrm{gon}(C) = gf - \ell$.

De plus si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur C, alors $h^0(\mathcal{L}) \geq 2$ et $\deg \mathcal{L} = fg - \ell$ si et seulement si le schéma des zéros d'une section de $\mathcal{L}$ est le résiduel dans une section plane de C d'un groupe de points aligné.

Démonstration. — Remarquons que $2 \leq \ell \leq g$. En effet, si $\ell > g$ alors il existe une droite L telle que $\deg(L \cap C) > g$, ce qui entraîne $L \subset F \cap G = C$; ce qui contredit les hypothèses sur C.

Fixons une droite L telle que $\deg(C \cap L) = \ell$. Soient H un plan contenant L et Γ le résiduel de $C \cap L$ dans $C \cap H$. Notons $\mathcal{L} = \mathcal{J}^{\vee}_{\Gamma/C}$ le faisceau inversible associé. On a $\deg \mathcal{L} = fg - \ell$ et $h^0(\mathcal{L}) \geq 2$. On en déduit $\mathrm{gon}(C) \leq fg - \ell$.

Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur C tel que $h^0(\mathcal{L}) \geq 2$ et $\deg \mathcal{L} \leq fg - \ell \leq fg - 2$. Notons Γ le schéma des zéros d'une section de $\mathcal{L}$. On a $\deg \Gamma < fg$, donc, d'après le Théorème 3.1, on a $e(\Gamma) < f + g - 3$. On déduit du Lemme 4.1 que $e(\Gamma) = f + g - 4$.

Alors d'après le Théorème 3.2 (avec $i = f$), il existe un plan H tel que $e(\Gamma \cap H) = f + g - 4$. En effet, comme $\deg \Gamma < fg - 1$, Γ ne peut pas être une des exceptions. Soit Δ le groupe de points lié à $\Gamma \cap H$ par $H \cap F \cap G$. On a :

$$\mathcal{J}_{\Delta/H\cap F} \simeq \mathcal{J}^{\vee}_{\Gamma\cap H/H\cap F}(-g),$$

$$h^1\big(\mathcal{J}_{\Gamma\cap H/H\cap F}(f+g-4)\big) = h^0\big(\mathcal{J}^{\vee}_{\Gamma\cap H/H\cap F}(1-g)\big) = h^0\big(\mathcal{J}_{\Delta/H\cap F}(1)\big).$$

Comme $h^1(\mathcal{J}_{\Gamma\cap H/H\cap F}(f+g-4)) \neq 0$, on en déduit que Δ est aligné. Comme $\deg \Delta \leq \ell$, on a

$$fg - \ell \geq \deg \Gamma \geq \deg(\Gamma \cap H) \geq fg - \deg \Delta \geq fg - \ell.$$

On en déduit $\deg \mathcal{L} = fg - \ell$ et $\mathrm{gon}(C) = fg - \ell$.

THÉORÈME 4.3. — *Soit $C = F \cap G$ une courbe lisse intersection complète de $\mathbb{P}^3$ de degrés (f,g), avec $g \geq f \geq 2$ et $(f,g) \neq (3,3)$. Alors* $\mathrm{Cliff}(C) = \mathrm{gon}(C) - 2$.

L'exception $(3,3)$ est étudiée par G. Martens dans [M]. Dans ce cas on a $\mathrm{gon}(C) = 6$ et $\mathrm{Cliff}(C) = \mathrm{gon}(C) - 3 = 3 = \mathrm{Cliff}(\mathcal{O}_C(1))$.

Pour les courbes planes de degré $d \geq 4$, on a $\mathrm{gon}(C) = d - 1$ et $\mathrm{Cliff}(C) = \mathrm{gon}(C) - 3$.

Démonstration. — Remarquons que si $(f, g) = (2, 2)$, alors la courbe est elliptique et on a $\mathrm{gon}(C) = 2$ et $\mathrm{Cliff}(C) = 0$. Si $(f, g) = (2, 3)$, alors la courbe est trigonale et $\mathrm{Cliff}(C) = 1$.

D'après la remarque 4.1, on a $\mathrm{Cliff}(C) \leq \mathrm{gon}(C) - 2$, et d'après le Théorème 4.2, $\mathrm{gon}(C) = fg - \ell$, où ℓ est le degré maximum d'un groupe de points aligné dans C.

- Si C est hyperelliptique, alors $\mathrm{gon}(C) \leq 2$ entraîne

$$(f-1)g \leq fg - \ell \leq 2,$$

donc $(f, g) = (2, 2)$. C'est un cas déjà traité.

- Si C est bi-elliptique, alors $\mathrm{gon}(C) \leq 4$ entraîne

$$(f-1)g \leq fg - \ell \leq 4,$$

donc $(f, g) = (2, 3)$, cas déjà traité, ou $(f, g) = (2, 4)$. Supposons donc que C est bi-elliptique de degrés $(2, 4)$. Alors, il existe un faisceau inversible $\mathcal{L}$ de degré 6 tel que $h^0(\mathcal{L}) = 3$. Doit Γ le schéma des zéros d'une section de $\mathcal{L}$. D'après le Lemme 4.1, on a $h^1(\mathcal{I}_\Gamma(2)) = h^0(\mathcal{L}) - 1 \geq 2$. Ceci entraîne $h^1(\mathcal{I}_\Gamma(1)) \geq 3$ donc Γ est plan et $\mathcal{L}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{O}_C(1)$. Mais $\deg \mathcal{L} = 6$ entraîne alors $h^0(\mathcal{L}) \leq 2$; c'est une contradiction.

On peut donc supposer dans la suite que (f, g) est différent de $(2, 2)$ et de $(2, 3)$ et que C n'est ni hyperelliptique, ni bi-elliptique.

Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur C calculant l'indice de Clifford et tel que $h^0(\mathcal{L})$ soit minimum. On note $r = h^0(\mathcal{L}) - 1$ et $d = \deg \mathcal{L}$. Alors

$$\mathrm{Cliff}(C) = \mathrm{Cliff}(\mathcal{L}) = d - 2r$$

et on a $d - 2r \leq fg - \ell - 2$. Si $\mathrm{Cliff}(C) < \mathrm{gon}(C) - 2$, alors d'après [ELMS, Lemme 1.1], $\mathcal{L}$ est très ample et l'image C' de C dans $\mathbb{P}^r$ n'a pas de k-plan $(2k-2)$-sécant pour $1 \leq k \leq r - 2$.

D'après [ELMS, Cor. 3.5], pour $d \neq 4r - 3$, on a $d \geq 6r - 6$. Donc $d \geq 4r - 7$. D'après [CM, Th. A], C' a un $(r-2)$-plan $(2r-3)$-sécant dans $\mathbb{P}^r$. Notons V_2 ce $(r-2)$-plan et $\mathcal{L}' = \mathcal{I}_{V_2 \cap C'/C'}(1)$. Alors $\mathcal{L}'$ est un sous-faisceau de $\mathcal{L}$ et on a :

$$\deg \mathcal{L}' = d - (2r - 3) = \mathrm{Cliff}(C) + 3.$$

De plus $h^0(\mathcal{L}') = 2$; donc $\mathrm{Cliff}(C) \geq \mathrm{gon}(C) - 3$. On en déduit :

$$\mathrm{Cliff}(C) = \mathrm{gon}(C) - 3 = \deg \mathcal{L}' - 3.$$

Soit s' une section de $\mathcal{L}'$ et s son image dans $H^0(\mathcal{L})$. On note respectivement Γ et Γ' les schémas des zéros de s et s' dans $\mathbb{P}^3$. On a $\Gamma' \subset \Gamma \subset C \subset \mathbb{P}^3$,

$$\deg \Gamma = d \quad \text{et} \quad \deg \Gamma' = d - (2r - 3) = fg - \ell.$$

D'après le Théorème 4.2, le schéma Γ' est le résiduel dans une section plane de C d'un groupe de points aligné de degré ℓ. Il existe donc un plan H de $\mathbb{P}^3$ tel que $\Gamma' \subset H \cap C$. Soit Γ_1 le résiduel de $\Gamma \cap H$ dans Γ. Alors

$$\deg \Gamma_1 = d - \deg(\Gamma \cap H) \leq d - \deg \Gamma' = 2r - 3,$$

c'est-à-dire $\deg \Gamma_1 \leq d - (fg - \ell)$.

D'après [CM, Cor. 3.2.5], si C n'est ni bi-elliptique ni hyperelliptique et

$$p_a(C) > \begin{cases} 2\,\mathrm{Cliff}(C) + 4 & \text{pour } \mathrm{Cliff}(C) \text{ impair,} \\ 2\,\mathrm{Cliff}(C) + 5 & \text{pour } \mathrm{Cliff}(C) \text{ pair,} \end{cases}$$

où $p_a(C)$ est le genre de C, alors $d \leq \frac{3}{2}(\mathrm{Cliff}(C) + 2)$.

Comme $\mathrm{Cliff}(C) = fg - \ell - 3$ et $2p_a(C) - 2 = fg(f+g-4)$, la condition numérique est équivalente à

$$fg(f + g - 8) > \begin{cases} -4\ell - 4 & \text{pour } fg - \ell \text{ impair,} \\ -4\ell - 6 & \text{pour } fg - \ell \text{ pair.} \end{cases}$$

Pour $f + g \geq 8$, ceci est toujours vrai. Il reste à étudier les cas :

$$(f, g) = (3, 4), \ (2, 4) \ \text{ou} \ (2, 5).$$

Mais si $f \leq 3$, comme F est normale elle contient des droites, et on a $\ell = g$. On voit alors que la condition est vérifiée. On a donc :

$$d \leq \tfrac{3}{2}(fg - \ell - 1) \implies \deg \Gamma_1 \leq \tfrac{1}{2}(fg - \ell - 3).$$

• Si $f = 2$, on trouve $\deg \Gamma_1 \leq \frac{1}{2}(g - 3)$, ce qui entraîne d'après le Lemme 1.3

$$e(\Gamma_1) \leq \tfrac{1}{2}(g - 3) - 2 = \tfrac{1}{2}(g - 7).$$

On en déduit $e(\Gamma_1) < g - 3 = f + g - 5$.

• Si $f \geq 3$, alors $\frac{1}{2}(fg - \ell - 3) < (f - 2)g$, donc $\deg \Gamma_1 < (f - 2)g$. D'après le Théorème 3.1, ceci entraîne $e(\Gamma_1) < f + g - 5$. De la suite exacte

$$0 \to \mathcal{J}_{\Gamma_1}(f + g - 5) \longrightarrow \mathcal{J}_{\Gamma}(f + g - 4) \longrightarrow \mathcal{J}_{\Gamma \cap H/H}(f + g - 4) \to 0,$$

on déduit $h^1(\mathcal{J}_{\Gamma}(f + g - 4)) = h^1(\mathcal{J}_{\Gamma \cap H/H}(f + g - 4))$.

Si on note $\mathcal{L}'' = \mathcal{I}^{\vee}_{\Gamma\cap H/C}$, on a (Lemme 4.1) :

$$h^0(\mathcal{L}'') = h^1\big(\mathcal{I}_{\Gamma\cap H}(f+g-4)\big) + 1 = h^1\big(\mathcal{I}_{\Gamma}(f+g-4)\big) + 1 = h^0(\mathcal{L}).$$

Donc $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}''$. Comme $\mathcal{L}''$ est un sous-fibré de $\mathcal{O}_C(1)$, on en déduit

$$2 \leq h^0(\mathcal{L}) \leq 4.$$

- Si $h^0(\mathcal{L}) = 4$, alors $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_C(1)$ et $\mathrm{Cliff}(\mathcal{L}) = fg - 6$, c'est une contradiction.

- Si $h^0(\mathcal{L}) = 3$, alors $\deg \mathcal{L} = fg - 1$ et $\mathrm{Cliff}(\mathcal{L}) = (fg-1) - 4$, c'est une contradiction.

- Si $h^0(\mathcal{L}) = 2$, alors $\deg \mathcal{L} = fg - \ell$ et $\mathrm{Cliff}(\mathcal{L}) = (fg-\ell) - 2$, c'est une contradiction.

Conclusion : on a

$$\mathrm{Cliff}(C) = \mathrm{gon}(C) - 2.$$

BIBLIOGRAPHIE

[ACGH] ARBARELLO (E.), CORNALBA (M.), GRIFFITHS (P.A.) and HARRIS (J.). — *Geometry of Algebraic Curves, vol 1.* — Springer, Lecture Note 267.

[CL] CILIBERTO (C.) and LAZARSFELD (R.). — *On the uniqueness of certain linear series on some classes of curves, Complete Intersections, Acireale 1983.* — Springer, Lecture Note 1092, p. 198-213.

[CM] COPPENS (M.) and MARTENS (G.) Secant Spaces and Clifford's Theorem. — Compositio Mathematica, t. **78**, 1991, p. 193–212.

[EK] EISENBUD (D.) and KOH (J.H.). — *Remarks on Points in a Projective Space, Commutative Algebra, Berkeley 1987, M.S.R.I.P, 15.* — Springer, 1989.

[ELMS] EISENBUD (D.), LANGE (H.), MARTENS (G.) and SCHREYER (F.O.). — *The Clifford dimension of a projective curve*, Compositio Mathematica, t. **72**, 1989, p. 173–204.

[EP] Ellia (P.) et Peskine (C.). — *Groupes de points de $\mathbb{P}^2$: caractère et position uniforme, Algebraic Geometry, Proceedings L'Aquila, 1988.* — Springer, Lecture Note 1417, p. 111-116.

[GP] Gruson (L.) et Peskine (C.). — *Genre des courbes de l'espace projectif.* — Springer, Lectures Notes in Math. 687, 1978.

[M] Martens (G.). — *Uber den Clifford Index algebraischer Kurven*, J. Reine angew. Math., t. **336**, 1982, p. 83–90.

[PS] Peskine (C.) et Szpiro (L.). — *Liaison des variétés algébriques*, Inventiones Math., t. **26**, 1974, p. 271–302.