BULLETIN DE LA S. M. F.

VINCENT THILLIEZ

Caractérisation tangentielle des classes de Carleman de fonctions holomorphes

Bulletin de la S. M. F., tome 122, nº 4 (1994), p. 487-504
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_4_487_0>

Bull. Soc. math. France,
122, 1994, p. 487–504.

CARACTÉRISATION TANGENTIELLE DES CLASSES DE CARLEMAN DE FONCTIONS HOLOMORPHES

PAR

VINCENT THILLIEZ

RÉSUMÉ. — Dans un voisinage U convenable d'un point du bord d'un ouvert Ω à frontière C^∞ dans $\mathbb{C}^2$, pour toute fonction f holomorphe dans $\Omega \cap U$, on démontre, lorsque f appartient à une classe de Carleman $C_M(\Omega \cap U)$, un gain de régularité C_M, lié à la géométrie de $\partial\Omega$, dans certaines directions, approximativement tangentielles-complexes. Réciproquement, on prouve que les estimations C_M dans ces directions, avec gain, caractérisent l'appartenance de f à $C_M(\Omega \cap U)$.

ABSTRACT. — In some suitable neighborhood U of a point on the boundary of a C^∞-bounded domain in $\mathbb{C}^2$, for every function f holomorphic in $\Omega \cap U$, we show, when f belongs to some Carleman class $C_M(\Omega \cap U)$, an improvement of C_M regularity, linked to the geometry of $\partial\Omega$, in certain directions, approximatively complex-tangential. Conversely, we show that the improved C_M-estimates in these directions imply that f belongs to $C_M(\Omega \cap U)$.

Introduction

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine Ω à bord C^∞ de $\mathbb{C}^N$. Il est bien connu qu'en règle générale, une régularité au bord donnée pour f entraîne — en fait — une régularité double dans les directions complexes tangentielles. Ces phénomènes ont été étudiés dans de nombreuses classes de fonctions (voir par exemple [S] dans le cas des classes de Lipschitz). Lorsque l'on s'intéresse au cas des classes

(*) Texte reçu le 24 décembre 1992.
V. THILLIEZ, CNRS-URA 751, Université des Sciences et Technologies de Lille, UFR de Mathématiques, 59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX. Email : thilliez@gat.univ-lille1.fr.
Mots clés : classes de Carleman, comportement au bord des fonctions holomorphes, itérés de champs de vecteurs.

Classification AMS : 32A40, 26E10.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1994/487/$ 5.00

ultradifférentiables, la nécessité d'estimer une infinité de dérivées oblige à introduire des méthodes spécifiques (voir [CC] dans le cas des classes de Gevrey). En outre, si on veut, dans ce cadre, améliorer localement le gain de régularité en fonction de la géométrie du bord, on se heurte à d'autres difficultés techniques et on est amené à utiliser de nouveaux objets (champs de vecteurs et régions d'estimation) adaptés au problème (voir [T] pour les classes de Gevrey d'un domaine de type fini dans $\mathbb{C}^2$).

Le but de cet article est d'étendre des estimations directes similaires à celles de [T] (gain tangentiel à partir d'une régularité donnée) au cas général des classes de Carleman et de démontrer, dans ce contexte, une réciproque. Plus précisément, étant donnés un voisinage U convenable d'un point p_0 du bord d'un domaine Ω à bord C^∞ dans $\mathbb{C}^2$ (non nécessairement pseudoconvexe ni de type fini) et une fonction ν qui à tout point z' de $U \cap \partial\Omega$ associe un entier pair $\nu(z')$ compris entre 2 et le type de z' (au sens usuel de [BG], [Ca], [K],...) et borné par un entier fixe m, on construit une famille $(Y_{z'})_{z' \in U\cap\partial\Omega}$ de champs de vecteurs C^∞ et une famille $\big(\mathcal{M}_\nu(z',b)\big)_{z'\in U\cap\partial\Omega}$ de régions contenues dans $\Omega \cap U$ telles que, pour toute fonction f holomorphe dans $\Omega \cap U$, on ait l'équivalence des propriétés suivantes :

(A) La fonction f appartient à la classe de Carleman C_M dans Ω au voisinage de p_0 (voir 1.4 pour la définition) ;

(B) Pour tout z' de $\partial\Omega$ voisin de p_0, la fonction f satisfait dans $\mathcal{M}_\nu(z',b)$ une estimation $C_{M'}$ avec $M'_p = M_{[p/\nu(z')]}$, relativement aux itérés de $Y_{z'}$ et $\overline{Y}_{z'}$.

Les champs $Y_{z'}$ sont approximativement tangentiels complexes en ce sens que l'on a $Y_{z'}(z') = L_1(z')$ où L_1 est tangentiel complexe.

En fait, modulo un changement de coordonnées adaptées, chaque $Y_{z'}$ n'est autre que le champ complexe tangentiel naturel associé à un domaine modèle $\{\zeta\,;\ \operatorname{Re}\zeta_2 + |\zeta_1|^{\nu(z')} < 0\}$ qui, à une dilatation près, ausculte $\partial\Omega$ en z' (voir 3.3). De façon simpliste, au voisinage de z', ce domaine peut aussi être vu comme translaté de la région $\mathcal{M}_\nu(z',b)$ le long de l'axe des $\operatorname{Im}\zeta_2$.

L'article est divisé en trois parties :

• La première partie comprend la définition et les propriétés principales des outils géométriques utilisés, qui sont fortement apparentés à ceux de [T] et sont fondés sur les systèmes de coordonnées locales de D. CATLIN [Ca]. On définit également les classes de Carleman $C_M(\Omega\cap U)$; il est à noter que l'on ne réclame que des hypothèses très faibles sur la suite $M = (M_n)_{n\geq 0}$ (essentiellement la stabilité de $C_M(\Omega \cap U)$ par dérivation, hypothèse 1.4.2). En particulier, les classes de Gevrey $G^{1+\alpha}(\Omega \cap U)$, $\alpha > 0$, entrent dans ce cadre.

• Dans la deuxième partie, on démontre les estimations directes (sens $(A) \Rightarrow (B)$) pour toute une classe de champs $Y_{z'}$. Le résultat central de cette partie (THÉORÈME 2.2) utilise une idée de [CC] (développement de Taylor sur un segment adapté) et la méthode d'estimations par récurrence développée dans [T], que l'on est amené à écrire ici sous une forme légèrement plus compliquée.

• La troisième partie, consacrée au sens réciproque ($(B) \Rightarrow (A)$), fait usage de deux ingrédients : la PROPOSITION 3.2 et une formule de représentation des itérés d'un crochet de champs de vecteurs, lorsque ces champs engendrent une algèbre de Lie stratifiée nilpotente, due à B. HELFFER et M. DAMLAKHI [DH]. Bien sûr, la réciproque repose également sur le choix, parmi toutes les familles de champs réalisant le sens direct (A) $\Rightarrow$ (B), d'une famille $(Y_{z'})_{z' \in U \cap \partial\Omega}$ convenable. Cette famille est géométriquement naturelle, dans un sens évoqué précédemment.

On notera qu'il existait déjà, dans le cas des classes ultradifférentiables locales (i.e. au sens de la régularité intérieure), de nombreux résultats pour des fonctions satisfaisant des estimations par rapport à des itérés de champs, sous des hypothèses convenables (condition de Hörmander par exemple) ; on pourra consulter M. DERRIDJ et C. ZUILY [DZ1], [DZ2] ainsi que [DH] et les références citées.

1. Préliminaires

Dans la suite, si X est un ensemble et $A(x)$, $B(x)$ sont deux expressions dépendant de x dans X, on écrira souvent $A(x) \lesssim B(x)$ pour dire que l'on a $A(x) \leq CB(x)$ où C est une constante positive indépendante de x. De même, $A(x) \approx B(x)$ signifie que l'on a simultanément $A(x) \lesssim B(x)$ et $B(x) \lesssim A(x)$.

Si $z = (z_1, z_2)$ est un point de $\mathbb{C}^2$ et (r_1, r_2) un couple de réels positifs, on note $P(z, r_1, r_2)$ le bidisque de centre z, de birayon (r_1, r_2) et on pose $x_j = \operatorname{Re} z_j$ et $y_j = \operatorname{Im}\ z_j$ pour $j = 1, 2$.

Dans tout ce qui suit, Ω désigne un domaine de $\mathbb{C}^2$ à frontière de classe C^∞. Enfin, p_0 est un point quelconque de $\partial\Omega$ et r une fonction définissante pour Ω au voisinage de p_0.

1.1. Géométrie locale. — On peut, sans perte de généralité, supposer que l'on a $\partial r / \partial x_2(p_0) > 0$. Il est alors démontré dans [Ca] qu'il existe, dans un voisinage convenable U de p_0, une suite d'applications $(d_j)_{j \geq 0}$ de classe C^∞, uniques, telles que, pour tout entier m (avec $m \geq 2$) et tout point z' de U, l'application $\Phi_{z'}$, qui à ζ de $\mathbb{C}^2$ associe z donné par

$$z_1 = z'_1 + \zeta_1, \quad z_2 = z'_2 + d_0(z')\zeta_2 + \sum_{j=1}^{m} d_j(z')\zeta_1^j$$

définisse un changement de coordonnées holomorphes sur $\mathbb{C}^2$ dans lequel la fonction $\rho_{z'} = r \circ \Phi_{z'}$, définissante pour $\Omega_{z'} = \Phi_{z'}^{-1}(\Omega)$ au voisinage de 0, admet un développement de la forme :

$$\rho_{z'}(\zeta) = r(z') + \operatorname{Re}\zeta_2 + \sum_{\substack{j\geq 1,\, k\geq 1\\ j+k\leq m}} a_{jk}(z')\zeta_1^j\bar{\zeta}_1^k + \mathrm{O}\big(|\zeta_1|^{m+1} + |\zeta|\cdot|\zeta_2|\big).$$

On pose $A_\ell(z') = \max_{j+k=\ell}\big|a_{jk}(z')\big|$.

L'entier m étant fixé, on considère une application ν qui à tout point z' de $U \cap \partial\Omega$ assigne un entier $\nu(z')$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $2 \leq \nu(z') \leq m$,

(ii) $\nu(z')$ est pair,

(iii) $\nu(z')$ est inférieur ou égal au type de z'.

(Pour la notion de type d'un point on pourra se reporter à [K], [BG].)

Si on fait l'hypothèse que le point p_0 est de type fini m, ce qui signifie que l'on a $A_m(p_0) \neq 0$ et $A_\ell(p_0) = 0$ pour $\ell < m$, on a alors, quitte à rétrécir U, $A_m \neq 0$ dans U (par continuité) et chaque point z' de $U \cap \partial\Omega$ est alors de type fini $\theta(z')$ compris entre 2 et m, défini par :

$$\theta(z') = \inf\big\{\ell\,;\ A_\ell(z') \neq 0\big\}.$$

Si en outre Ω est supposé pseudoconvexe, $\theta(z')$ est pair pour tout z'.

Ainsi, dans le cas où p_0 est de type m et où Ω est pseudoconvexe au voisinage de p_0, on peut prendre $\nu(z') = \theta(z')$ où θ est le type. Dans le cas strictement pseudoconvexe, $\nu(z')$ sera toujours égal à 2. $\square$

On peut supposer dans la suite que l'on a $|r(z)| < 1$ pour tout z de U.

Soit h un réel strictement positif. Pour tout z' de $U \cap \partial\Omega$, pour tout $z = \Phi_{z'}(\zeta)$ de $U \cap \Omega$ et tout t de $[0, 2]$, on pose

$$z^t = \Phi_{z'}(\zeta^t),$$

avec $\zeta^t = \zeta - \big(0, th/d_0(z')\big)$. Puisque l'on a supposé $\partial r/\partial x_2(p_0) > 0$, on a $\partial r/\partial x_2 \approx 1$ au voisinage de p_0. Donc, si U et h sont choisis assez petits, le point $z^t = (z_1, z_2 - th)$ vérifie

$$r(z^t) - r(z) \approx -t \tag{1.1.1}$$

et donc

$$r(z^t) \lesssim -t. \tag{1.1.2}$$

Soient à présent b un réel tel que $0 < b < 1$ et z' un point de $U \cap \partial\Omega$. On définit, pour $t \in]0,1[$, le bidisque

$$m_\nu(z', b, t) = P\big(0^t, (bt)^{1/\nu(z')}, bt\big)$$

et la région

$$\mathcal{M}_\nu(z', b) = \Phi_{z'}\Big(\bigcup_{0<t<1} m_\nu(z', b, t)\Big).$$

LEMME 1.2. — *Il existe b, avec $0 < b < 1$, ne dépendant que de m et de la géométrie de Ω, tel que les propriétés suivantes soient vérifiées, quitte à rétrécir U :*

(i) *Pour tout z' de $U \cap \partial\Omega$ et tout $z = \Phi_{z'}(\zeta)$ avec $\zeta \in m_\nu(z', b, t)$, $0 < t < 1$, on a :*

$$r(z) \approx -t.$$

(ii) *Pour tout z' de $U \cap \partial\Omega$, tout $z = \Phi_{z'}(\zeta)$ de $\mathcal{M}_\nu(z', b)$ et tout s de $[0,1]$ on a :*

$$P\Big(\zeta^s, \big(b|r(z^s)|\big)^{1/\nu(z')},\ b|r(z^s)|\Big) \subset\subset \Phi_{z'}^{-1}(\Omega \cap U)$$

et, en particulier, on a $\mathcal{M}_\nu(z', b) \subset \Omega \cap U$.

Preuve. — Pour abréger, on pose $\rho = \rho_{z'}$, $\nu = \nu(z')$, $\theta = \theta(z')$. Du développement de ρ donné en 1.1 et de l'inégalité $\nu \leq \theta$, on déduit que l'on a

$$\big|\rho(\xi)\big| \lesssim \delta \quad \text{pour} \quad |\xi_1| < \delta^{1/\nu},\ |\xi_2| < \delta, \tag{1.2.1}$$

où δ désigne un réel positif assez petit. Soit $z = \Phi_{z'}(\zeta)$ avec

$$\zeta \in m_\nu(z', b, t). \tag{1.2.2}$$

Alors on a $\zeta = \xi^t$, où ξ satisfait les estimations (1.2.1). Compte tenu de (1.1.1), on a donc $\rho(\zeta) - \rho(\xi) \approx -t$ et $|\rho(\xi)| \lesssim bt$, avec $\rho(\zeta) = r(z)$. Si b est assez petit, on a donc bien $r(z) \approx -t$, ce qui établit la propriété (i).

Soit à présent $z = \Phi_{z'}(\zeta)$ dans $\mathcal{M}_\nu(z', b)$. Par définition, il existe alors $t \in]0,1[$ tel que (1.2.2) ait lieu. Si on considère un point u du bidisque

$$P\Big(\zeta^s, \big(b\,|r(z^s)|\big)^{1/\nu}, b\,|r(z^s)|\Big), \tag{1.2.3}$$

on peut écrire $u = \omega^{t+s}$ où ω appartient au bidisque de centre ξ et de même birayon que le bidisque (1.2.3). On a alors, d'après (1.1.1),

$$\rho(u) - \rho(\omega) \approx -(s+t). \tag{1.2.4}$$

Par ailleurs, on a $|\omega_1| \leq |\omega_1 - \xi_1| + |\xi_1| \leq (b\,|r(z^s)|)^{1/\nu} + (bt)^{1/\nu}$ avec $r(z^s) - r(z) \approx -s$ et $r(z) \approx -t$ d'après la propriété (i). On en déduit $|r(z^s)| \lesssim s + t$ et $|\omega_1| \lesssim (b(s+t))^{1/\nu}$. On montrerait de même que l'on a $|\omega_2| \lesssim b(s+t)$. En appliquant (1.2.1) à ω, on a alors :

$$|\rho(\omega)| \lesssim b(s+t). \tag{1.2.5}$$

Si b est assez petit on déduit de (1.2.4) et (1.2.5) que l'on a $\rho(u) \lesssim -(s+t)$ sur le bidisque (1.2.3), d'où la propriété d'inclusion (ii). $\square$

Il est à noter que dans le cas d'un domaine de type fini, la région $\mathcal{M}_\nu(z', b)$ est contenue (pour b convenable) dans la région d'approche $U_{z'}^{1,a}$ construite dans [T]. Elle n'est cependant pas équivalente à une région d'approche : en reprenant les notations de [T], ceci est lié au fait que l'on a $\delta^{1/\theta(z')} \lesssim \tau(z', \delta)$ mais qu'il n'y a pas équivalence. $\square$

1.3. Notations. — Soient X un opérateur différentiel et n un entier naturel non nul. On posera

$$X^n = \underbrace{X \cdots X}_{n \text{ fois}} \quad \text{et} \quad X^{-n} = (\overline{X})^n,$$

où $\overline{X}$ désigne le conjugué de X. On convient de poser $X^0 = \mathrm{Id}$. Pour tout p-uple $(n_1, ..., n_p)$ d'entiers relatifs, on pose alors :

$$X^{(n_1, \cdots, n_p)} = X^{n_1} \cdots X^{n_p}.$$

Soit enfin $L = (\ell', \ell'') \in \mathbb{N}^2$ un bi-indice ; on posera

$$\ell = |L| = \ell' + \ell'', \quad L\,! = \ell'\,!\,\ell''\,!$$

et, pour $j = 1, 2$,

$$\partial_{\zeta_j}^L = \Big(\frac{\partial}{\partial \zeta_j}\Big)^{(\ell', -\ell'')} = \frac{\partial^\ell}{\partial \zeta_j^{\ell'} \partial \bar{\zeta}_j^{\ell''}}.$$

1.4. Classes de Carleman. — Soit $M = (M_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs vérifiant les propriétés suivantes :

(1.4.1) $(M_n)_{n\geq 0}$ croît et $M_0 = 1$,

(1.4.2) il existe une constante A positive telle que l'on ait, pour tout entier n,
$$M_{n+1} \leq A^{n+1} M_n.$$

Pour x réel positif, on notera par commodité $M[x] = M_{[x]}$.

On dira qu'une fonction f de classe C^∞ sur $\Omega \cap U$ *appartient à la classe de Carleman* $C_M(\Omega \cap U)$ *relative à la suite* $M = (M_n)_{n\geq 0}$ s'il existe une constante $C(f)$ positive telle que l'on ait
$$\left|\partial_{z_1}^P \partial_{z_2}^Q f(z)\right| \leq C(f)^{p+q+1}(p+q)\,!\, M_{p+q}$$
pour tous bi-indices P et Q de $\mathbb{N}^2$ et tout z de $\Omega \cap U$.

En particulier, lorsque $M_n = n\,!^{\,\alpha}$, avec $\alpha > 0$, il est facile de voir que (1.4.1) et (1.4.2) sont vérifiées. Pour ce choix de la suite M, $C_M(\Omega \cap U)$ n'est autre que la classe de Gevrey $G^{1+\alpha}(\Omega \cap U)$. $\square$

2. Estimations directes

2.1. Définition. — Soit B un réel positif. Une famille $(Y_{z'})_{z'\in U\cap\partial\Omega}$ de champs de vecteurs C^∞ sur $\overline{\Omega} \cap U$, indexée par $z' \in U \cap \partial\Omega$, est dite *satisfaire la condition* $\mathcal{C}(\nu, B)$ si on a, pour tout z' de $U \cap \partial\Omega$,
$$Y_{z'} = (\Phi_{z'})_* \Big(\frac{\partial}{\partial \zeta_1} + F_{z'} \frac{\partial}{\partial \zeta_2}\Big),$$
où $F_{z'}$ n'est fonction que de $(\zeta_1, \bar{\zeta}_1)$ et satisfait, pour tout bi-indice L et tout $z = \Phi_{z'}(\zeta)$ de $\mathcal{M}_\nu(z', b)$, l'estimation
$$\left|\partial_{\zeta_1}^L F_{z'}(\zeta_1)\right| \leq B \inf\big(1, |r(z)|^{1-(\ell+1)/\nu(z')}\big).$$

THÉORÈME 2.2. — *Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega \cap U$. Si f appartient à $C_M(\Omega \cap U)$ alors, pour tout réel positif B, toute famille $(Y_{z'})_{z'\in U\cap\partial\Omega}$ de champs satisfaisant $\mathcal{C}(\nu, B)$, tous z' de $U \cap \partial\Omega$ et z de $\mathcal{M}_\nu(z', b)$, tout entier p et tout p-uple $(j_1, \ldots, j_p)$ dans $\{-1, 1\}^p$, on a l'estimation :*

$$(*) \qquad \left|Y_{z'}^{(j_1,\ldots,j_p)} f(z)\right| \leq C(f, B)^{p+1} p\,!\, M\Big[\frac{p}{\nu(z')}\Big],$$

où $C(f, B)$ est une constante positive ne dépendant que de f, B, m et de la géométrie de Ω. En particulier, dans le cas strictement pseudoconvexe, on a $(*)$ avec $\nu(z') = 2$ pour tout z'.

Preuve. — On pose dans la suite $\nu = \nu(z')$. On part de l'estimation C_M dans la direction $\partial/\partial z_2$:

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial z_2^k}(z)\right| \leq C(f)^{k+1} k\,!\, M_k, \tag{2.2.1}$$

valable pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout z de $\Omega \cap U$. On montre alors que sous l'hypothèse (2.2.1), f vérifie, pour tous z' de $U \cap \partial\Omega$, $z = \Phi_{z'}(\zeta)$ de $\mathcal{M}_\nu(z', b)$, tout couple (i, j) d'entiers et tout réel λ satisfaisant

$$0 \leq \lambda \leq j(1 - 1/\nu), \tag{2.2.2}$$

l'estimation

$$\left|r(z)\right|^\lambda \left|\frac{\partial^{i+j} f \circ \Phi_{z'}}{\partial \zeta_1^i\, \partial \zeta_2^j}(\zeta)\right| \leq C(f)^{i/\nu + j - \lambda + 1}(i + j)\,!\, M\big[i/\nu + j - \lambda\big], \tag{2.2.3}$$

où $C(f)$ ne dépend que de f, m et de la géométrie de Ω.

La preuve de (2.2.3) s'inspire fortement de [T, th. 2.3] ; on se bornera à en indiquer les grandes lignes. Si on utilise la formule de Cauchy sur le bidisque décrit dans la propriété (ii) du LEMME 1.2, il vient

$$\left|\frac{\partial^{i+j+k} f \circ \Phi_{z'}}{\partial \zeta_1^i \partial \zeta_2^{j+k}}(\zeta^s)\right| \leq \frac{i\,!\, j\,!}{(b\left|r(z^s)\right|)^{i/\nu + j}} \sup\left|\frac{\partial^k f \circ \Phi_{z'}}{\partial \zeta_2^k}\right|, \tag{2.2.4}$$

et on a $\sup\left|\partial^k f \circ \Phi_{z'}/\partial \zeta_2^k\right| \leq C(f)^{k+1} k\,!\, M_k$ d'après (2.2.1) et l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_2} = (\Phi_{z'})_*^{-1}\Big(d_0(z')\frac{\partial}{\partial z_2}\Big)$$

où l'on a $d_0(z') \approx 1$.

Par ailleurs, d'après (1.1.2), on a

$$\left|r(z^s)\right| \gtrsim s \quad \text{et} \quad \left|r(z^s)\right| \gtrsim \left|r(z)\right|. \tag{2.2.5}$$

On utilise alors la formule de Taylor avec reste intégral sur le segment $[\zeta, \zeta^1]$, à l'ordre $n = [i/\nu + j - \lambda]$. On obtient

$$\left|\frac{\partial^{i+j} f \circ \Phi_{z'}}{\partial \zeta_1^i\, \partial \zeta_2^j}(\zeta)\right| \leq E_1 + E_2,$$

avec

$$E_1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!} \left| \frac{\partial^{i+j+k} f \circ \Phi_{z'}}{\partial \zeta_1^i \partial \zeta_2^{j+k}} (\zeta^1) \right| \cdot \left| \zeta - \zeta^1 \right|^k,$$

$$E_2 = \int_0^1 \frac{s^n}{n\,!} \left| \frac{\partial^{i+j+n+1} f \circ \Phi_{z'}}{\partial \zeta_1^i \partial \zeta_2^{j+n+1}} (\zeta^s) \right| \mathrm{d}s \cdot \left| \zeta - \zeta^1 \right|^{n+1}.$$

Quitte à modifier $C(f)$, on montre que l'on a

$$E_1 \leq C(f)^{i+j+1} (i+j)\,!$$

en utilisant l'analyticité de f et le fait que ζ^1 reste dans un compact de $\Omega \cap U$. On montre que l'on a

$$|r(z)|^{\lambda} E_2 \leq C(f)^{i/\nu + j - \lambda + 1} (i+j)\,! \, M\big[i/\nu + j - \lambda\big]$$

en utilisant (2.2.4), (2.2.5) et la propriété (1.4.2) de la suite $(M_n)_{n \geq 0}$. L'estimation (2.2.3) en résulte aussitôt.

Dans un deuxième temps, on montre que, sous l'hypothèse $\mathcal{C}(\nu, B)$, on peut remplacer $\partial^p / \partial \zeta_1^p$ par $(\partial / \partial \zeta_1 + F_{z'} \partial / \partial \zeta_2)^{(j_1, \ldots, j_p)}$ dans cette estimation, en changeant $C(f)$ en une constante $C(f, B)$ convenable. Pour cela, on pose

$$A_{I,J}^{(j_1, \ldots, j_p)} = \Big(\partial_{\zeta_1}^I \partial_{\zeta_2}^J \Big(\frac{\partial}{\partial \zeta_1} + F_{z'} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \Big)^{(j_1, \ldots, j_p)} (f \circ \Phi_{z'}) \Big) (\zeta),$$

où I et J sont deux bi-indices quelconques dans $\mathbb{N}^2$ et où $(j_1, \ldots, j_p)$ est un p-uple quelconque dans $\{-1, 1\}^p$. On définit également

$$\Pi(j_1, \ldots, j_p) = (\pi', \pi'')$$

où π' est le nombre d'indices j_k valant 1 et π'' le nombre d'indices j_k valant -1 (donc $\pi' + \pi'' = p$). On va montrer par récurrence sur p que, pourvu que la condition (2.2.2) soit vérifiée, on a :

$$\begin{aligned} (2.2.6) \quad & \big|r(z)\big|^{\lambda} \big|A_{I,J}^{(j_1, \ldots, j_p)}\big| \\ & \qquad \leq C(f)^{(p+i)/\nu + j - \lambda + 1} (1 + \mathrm{e}^2 B)^p \\ & \qquad\quad \times \big(I + J + \Pi(j_1, \ldots, j_p)\big)\,! \, M\big[(p+i)/\nu + j - \lambda\big]. \end{aligned}$$

Le théorème s'en déduit immédiatement, en faisant $I = J = 0$, $\lambda = 0$ et en remarquant que l'on a $(I + J + \Pi)\,! \leq (i + j + p)\,!$.

Pour $p=0$, (2.2.6) se réduit à l'estimation (2.2.3).

Supposons (2.2.6) établi au rang p et soit $j_{p+1}\in\{-1,1\}$. On pose :

$$\Pi_1=\Pi(j_1),\quad \Pi_2=\Pi(j_2,\dots,j_{p+1}),\quad \Pi=\Pi(j_1,\dots,j_{p+1}).$$

On a :

$$\Pi_1+\Pi_2=\Pi. \tag{2.2.7}$$

Par ailleurs, la formule de Leibniz, utilisée comme dans [T, th. 4.3] et jointe à la condition $\mathcal{C}(\nu,B)$, fournit la majoration suivante :

$$\begin{aligned}\bigl|A_{I,J}^{(j_1,\dots,j_{p+1})}\bigr| &\le \bigl|A_{I+\Pi_1,J}^{(j_2,\dots,j_{p+1})}\bigr| \\ &+B\sum_{L+K=I}\frac{I\,!}{L\,!\,K\,!}\inf\bigl(1,|r(z)|^{1-(\ell+1)/\nu}\bigr)\,\bigl|A_{K,J+\Pi_1}^{(j_2,\dots,j_{p+1})}\bigr|.\end{aligned}\tag{2.2.8}$$

L'hypothèse de récurrence, jointe à la remarque (2.2.7), donne

$$\begin{aligned}\bigl|r(z)\bigr|^{\lambda}\,\bigl|A_{I+\Pi_1,J}^{(j_2,\dots,j_{p+1})}\bigr| &\le C(f)^{(p+i+1)/\nu+j-\lambda+1}(1+\mathrm{e}^2B)^p \\ &\times (I+J+\Pi)\,!\,M\bigl[(p+i+1)/\nu+j-\lambda\bigr].\end{aligned}\tag{2.2.9}$$

• Dans la somme figurant au second membre de (2.2.8), on traite d'abord les termes pour lesquels on a $\ell+1\ge\nu$. Dans ce cas, on a $\inf(1,|r(z)|^{1-(\ell+1)/\nu})=1$ et on est amené à estimer $|r(z)|^{\lambda}|A_{K,J+\Pi_1}^{(j_2,\dots,j_{p+1})}|$. On a $0\le\lambda\le j(1-1/\nu)\le(j+1)(1-1/\nu)$ et, d'après l'hypothèse de récurrence et l'égalité (2.2.7),

$$\begin{aligned}\bigl|r(z)\bigr|^{\lambda}\bigl|A_{K,J+\Pi_1}^{(j_2,\dots,j_{p+1})}\bigr| &\le C(f)^{(p+k)/\nu+j+1-\lambda+1}(1+\mathrm{e}^2B)^p \\ &\times (K+J+\Pi)\,!\,M\bigl[(p+k)/\nu+j+1-\lambda\bigr].\end{aligned}$$

En outre, d'après l'inégalité $\ell+1\ge\nu$, on a :

$$\frac{p+k}{\nu}+j+1-\lambda=\frac{p+i-\ell}{\nu}+j+1-\lambda\le\frac{p+i+1}{\nu}+j-\lambda.$$

Pour ces termes, il vient donc :

$$\begin{aligned}\bigl|r(z)\bigr|^{\lambda}\,\bigl|A_{K,J+\Pi_1}^{(j_2,\dots,j_{p+1})}\bigr| &\le C(f)^{(p+i+1)/\nu+j-\lambda+1}(1+\mathrm{e}^2B)^p \\ &\times (K+J+\Pi)\,!\,M\bigl[(p+i+1)/\nu+j-\lambda\bigr].\end{aligned}\tag{2.2.10}$$

• Traitons alors les termes pour lesquels on a $\ell+1<\nu$. Dans ce cas on a $\inf(1,|r(z)|^{1-(\ell+1)/\nu})=|r(z)|^{1-(\ell+1)/\nu}$ et on est amené à estimer

$$\big|r(z)\big|^{\lambda+1-(\ell+1)/\nu}\,\big|A_{K,J+\Pi_1}^{(j_2,\dots,j_{p+1})}\big|.$$

On a :

$$0\le\lambda<\lambda+1-\frac{\ell+1}{\nu}\le j\Big(1-\frac{1}{\nu}\Big)+\Big(1-\frac{1}{\nu}\Big)-\frac{\ell}{\nu}\le(j+1)\Big(1-\frac{1}{\nu}\Big).$$

L'hypothèse de récurrence s'applique donc et, compte tenu de l'égalité

$$\frac{p+k}{\nu}+j+1-\Big(\lambda+1-\frac{\ell+1}{\nu}\Big)=\frac{p+\ell+k+1}{\nu}+j-\lambda=\frac{p+i+1}{\nu}+j-\lambda,$$

elle fournit le même majorant que pour (2.2.10). Compte tenu de tout ce qui précède, on arrive à la majoration

$$\begin{aligned}(2.2.11)\qquad \big|r(z)\big|^{\lambda}\,\big|A_{I,J}^{(j_1,\dots,j_{p+1})}\big|&\\ \le C(f)^{(p+i+1)/\nu+j-\lambda+1}&(I+J+\Pi)\,!\\ &\times M\big[(p+i+1)/\nu+j-\lambda\big](1+\mathrm{e}^2B)^pS,\end{aligned}$$

avec

$$S=1+B\sum_{L+K=I}\frac{1}{L\,!}\,\frac{I\,!\,(K+J+\Pi)\,!}{K\,!\,(I+J+\Pi)\,!}.$$

Il est facile de vérifier que l'on a

$$S\le1+B\sum_{L}\frac{1}{L\,!}=1+\mathrm{e}^2B,$$

ce qui achève la récurrence et la preuve du théorème. $\square$

2.3. Un cas particulier. — Dans le cas d'un domaine polynomial, c'est-à-dire lorsque l'on a $r(z)=\operatorname{Re}z_2+P(z_1,\bar z_1)$, où P est un polynôme homogène sous-harmonique de degré m sans terme pur, on vérifie aisément à partir de [T, lemme 4.2], que si L_1 désigne le champ complexe tangentiel $\partial/\partial z_1-2\partial P/\partial z_1\partial/\partial z_2$ et que l'on prend $Y_{z'}=L_1$ indépendamment de z', la condition $\mathcal{C}(\nu,B)$ est vérifiée pour un réel B convenable et pour ν égal au type θ. $\square$

2.4. Remarque. — L'estimation C_M transverse (2.2.1) suffit pour obtenir (2.2.3), dont on déduit aisément

$$(2.4.1)\qquad \Big|\frac{\partial^{i+j}f}{\partial z_1^i\,\partial z_2^j}(z)\Big|\le C(f)^{i+j+1}(i+j)\,!\,M_{i+j}$$

pour tous z' de $U\cap\partial\Omega$ et z de $\mathcal{M}_\nu(z',b)$, puisque $\Phi_{z'}$ est polynômiale de degré et coefficients bornés indépendamment de z'.

Ainsi, pour une fonction f holomorphe, (2.2.1) suffit à assurer que f appartient à la classe C_M d'un voisinage convenable de $\partial\Omega$ dans Ω au voisinage de p_0, donc à $C_M(\Omega \cap V)$, où V est un sous-voisinage de p_0 dans U.

Cette observation, déjà faite dans [T] pour les classes de Gevrey, sera utilisée dans le paragraphe 3. $\square$

3. Estimations réciproques

3.1. Position du problème. — Étant donnée une fonction f holomorphe dans $\Omega \cap U$, on cherche à savoir pour quel choix des champs $Y_{z'}$ satisfaisant $\mathcal{C}(\nu, B)$ pour une constante B convenable, la condition (*) du THÉORÈME 2.2 implique, réciproquement, que f appartienne à $C_M(\Omega \cap U)$ (quitte à remplacer U par un sous-voisinage de p_0).

La proposition ci-dessous peut être vue comme une réciproque au passage de (2.2.1) à (2.2.3).

PROPOSITION 3.2. — *Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega \cap U$. On suppose que l'on a, pour tous z' de $U \cap \partial\Omega$, z de $\mathcal{M}_\nu(z', b)$ et tout entier k,*

$$(**) \qquad \left|r(z)\right|^{k(1-2/\nu(z'))} \left|\frac{\partial^k f}{\partial z_2^k}(z)\right| \leq C^{k+1} k\,!\, M\left[\frac{2k}{\nu(z')}\right],$$

où C désigne une constante positive. Alors, la fonction f appartient à $C_M(\Omega \cap V)$, où V est un sous-voisinage de p_0 dans U.

Preuve. — On pose $\mathcal{A}(z') = \Phi_{z'}\big(\bigcup_{0<t<\frac{1}{2}} m_\nu(z', b, t)\big)$. Pour tout z' de $U \cap \partial\Omega$, tout z de $\mathcal{A}(z')$ et tout s de $[0, \frac{1}{2}]$, on a clairement

$$(3.2.1) \qquad z^s \in \mathcal{M}_\nu(z', b)$$

et, d'après (1.1.2),

$$(3.2.2) \qquad \left|r(z^s)\right| \gtrsim s.$$

On applique alors la formule de Taylor avec reste intégral sur le segment $[z, z^{1/2}]$, à un ordre n à déterminer a posteriori, à la fonction $\partial^k f / \partial z_2^k$, où k est un entier naturel quelconque. On obtient :

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial z_2^k}(z)\right| \leq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j\,!} \left|\frac{\partial^{k+j} f}{\partial z_2^{k+j}}(z^{1/2})\right| \cdot \left|z - z^{1/2}\right|^j$$
$$+ \int_0^{1/2} \frac{s^n}{n\,!} \left|\frac{\partial^{k+n+1} f}{\partial z_2^{k+n+1}}(z^s)\right| \mathrm{d}s \cdot \left|z - z^{1/2}\right|^{n+1}.$$

Notons E_1 (resp. E_2) la première (resp. deuxième) expression.

On majore d'abord E_2. D'après (3.2.1), (3.2.2) et l'hypothèse (**), on a, en notant $\nu = \nu(z')$,

$$E_2 \leq C^{k+n+1} \frac{(k+n+1)\,!}{n\,!}\, M\left[\frac{2(k+n+1)}{\nu}\right] \int_0^{1/2} s^{n-(k+n+1)(1-2/\nu)}\,\mathrm{d}s,$$

pour une constante C convenable. De l'inégalité

$$\frac{(p+q)\,!}{p\,!\,q\,!} \leq 2^{p+q},$$

on déduit que l'on a :

$$\frac{(k+n+1)\,!}{n\,!} \leq 4^{k+n+1} k\,!.$$

Puisque ν est pair, on peut choisir $n = (k+1)(\frac{1}{2}\nu - 1)$. On a alors $k+n+1 = k\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\nu \leq (k+1)\frac{1}{2}m$. Il vient alors, compte tenu de tout ce qui précède, $E_2 \leq C^{k+1} k\,!\,M_{k+1}$, avec $M_{k+1} \leq A^{k+1} M_k$ d'après (1.4.2). On en déduit donc $E_2 \leq C^{k+1} k\,!\,M_k$ pour une constante C convenable.

Par ailleurs, quitte à diminuer b, le point $z^{1/2}$ appartient à un compact fixe contenu dans $\Omega \cap U$, donc, pour tout entier q, on a

$$\left|\frac{\partial^q f}{\partial z_2^q}(z^{1/2})\right| \leq C^{q+1} q\,!$$

pour une constante C convenable, d'après l'analyticité de f. On en déduit facilement $E_1 \leq C^{k+1} k\,!$ pour un C convenable.

De ces estimations sur E_1 et E_2 on déduit que l'on a

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial z_2^k}(z)\right| \leq C^{k+1} k\,!\,M_k, \tag{3.2.3}$$

pour tous z' de $U \cap \partial\Omega$ et z de $\mathcal{A}(z')$. L'estimation (3.2.3) est donc valable pour tout z situé dans un voisinage convenable de $\partial\Omega$ dans Ω près de p_0. D'après la remarque (2.4), cette estimation C_M transverse suffit pour affirmer que f appartient à C_M, au voisinage de p_0 dans Ω. $\square$

3.3. Solution du problème. — On est à présent en mesure d'obtenir la réciproque cherchée à (2.2). On choisit

$$Y_{z'} = (\Phi_{z'})_* \Big(\frac{\partial}{\partial \zeta_1} + F_{z'} \frac{\partial}{\partial \zeta_2}\Big),$$

avec $\displaystyle F_{z'}(\zeta_1) = -2\,\frac{\partial |\zeta_1|^{\nu(z')}}{\partial \zeta_1} = -\nu(z')\,\zeta_1^{\frac{1}{2}\nu(z')-1}\,\bar{\zeta}_1^{\frac{1}{2}\nu(z')}.$

La fonction $F_{z'}$ est bien de classe C^∞ puisque $\nu(z')$ est toujours supposé pair. On peut remarquer que $Y_{z'}$ n'est autre que l'image par $\Phi_{z'}$ du champ L_1 associé au domaine polynomial $\{\zeta\,;\ \operatorname{Re}\zeta_2 + |\zeta_1|^{\nu(z')} < 0\}$ (voir (2.3.) et l'introduction). On obtient en deux temps le résultat suivant.

THÉORÈME.

(a) *La famille* $(Y_{z'})_{z'\in U\cap\partial\Omega}$ *satisfait* $\mathcal{C}(\nu, B)$ *pour une constante* B *convenable.*

(b) *Si* f *est holomorphe dans* $\Omega\cap U$ *et satisfait, pour ce choix des* $Y_{z'}$, *la condition* (*) *de* (2.2) *pour tous* z' *de* $U\cap\partial\Omega$, z *de* $\mathcal{M}_\nu(z', b)$ *et tout entier* p, *alors* f *appartient à* $C_M(\Omega\cap V)$, *où* V *est un sous-voisinage de* p_0 *dans* U.

Preuve :

a) On a clairement, pour tout bi-indice L,

$$\big|\partial^L_{\zeta_1} F_{z'}(\zeta_1)\big| \lesssim \inf\big(1, |\zeta_1|^{\nu(z')-(\ell+1)}\big).$$

Soit $z = \Phi_{z'}(\zeta)$ dans $\mathcal{M}_\nu(z', b)$ et $t\in\,]0,1[$ tel que l'on ait $\zeta\in m_\nu(z', b, t)$. D'après (1.2), propriété (i), on a $|r(z)|\approx t$. Par ailleurs on a $|\zeta_1|^{\nu(z')} < bt$. Il en résulte que l'on a $|\zeta_1|\lesssim |r(z)|^{1/\nu(z')}$ et, par suite,

$$\big|\partial^L_{\zeta_1} F_{z'}(\zeta_1)\big| \lesssim \inf\big(1, |r(z)|^{1-(\ell+1)/\nu(z')}\big),$$

comme annoncé.

b) On se ramène à (3.2). Soit $z = \Phi_{z'}(\zeta)$ dans $\mathcal{M}_\nu(z', b)$, où z' est un point quelconque de $U\cap\partial\Omega$ et soit $t\in\,]0,1[$ tel que l'on ait $\zeta\in m_\nu(z', b, t)$. On a donc :

$$\big|r(z)\big| \approx t. \tag{3.3.1}$$

D'après [DH, cor. 2.3], il existe un entier N, des indices $i_1,\dots,i_N$ dans $\{-1,1\}$ et des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_N$, ne dépendant que du degré de nilpotence $\nu(z')$ de l'algèbre de Lie engendrée par $Y_{z'}$ et $\overline{Y}_{z'}$ tels que l'on ait, pour tout entier k, la représentation en itérés de longueur $2k$:

$$\frac{1}{k!}\,\big[Y_{z'},\overline{Y}_{z'}\big]^k = \sum_{k_1+\cdots+k_N=2k} \frac{\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_N^{k_N}}{k_1!\cdots k_N!}\, Y_{z'}^{(i_1k_1,\dots,i_Nk_N)}. \tag{3.3.2}$$

L'hypothèse sur f s'écrit ici

$$\big|Y_{z'}^{(j_1,\dots,j_p)} f(z)\big| \le C^{p+1} p!\, M\Big[\frac{p}{\nu(z')}\Big], \tag{3.3.3}$$

pour $z\in\mathcal{M}_\nu(z', b)$ et $(j_1,\dots,j_p)\in\{-1,1\}^p$.

Le nombre $\nu(z')$ pouvant prendre un nombre fini de valeurs (dépendant de m), il en est de même des nombres N, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ de (3.3.2). Puisque $Y_{z'}^{(i_1 k_1, \dots, i_N k_N)}$ n'est autre que $Y_{z'}^{(j_1, \dots, j_p)}$ où on a posé $p = 2k$ et

$$(j_1, \dots, j_p) = \big(\underbrace{i_1, \dots, i_1}_{k_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{i_N, \dots, i_N}_{k_N \text{ fois}}\big),$$

on en déduit alors, compte tenu de (3.3.3), que l'on a

$$\left|\left[Y_{z'}, \bar{Y}_{z'}\right]^k f(z)\right| \le C^{k+1} k!\, M\Big[\frac{2k}{\nu(z')}\Big] \tag{3.3.4}$$

pour une constante C convenable.

D'autre part, il est aisé de vérifier que l'on a :

$$\left[Y_{z'}, \overline{Y}_{z'}\right] = (\Phi_{z'})_* \Big(\frac{\nu(z')^2}{2i} |\zeta_1|^{\nu(z')-2} \frac{\partial}{\partial(\operatorname{Im}\zeta_2)}\Big).$$

Compte tenu de (3.3.4) et du fait que, puisque $f \circ \Phi_{z'}$ est holomorphe, $\partial^k f \circ \Phi_{z'} / \partial \zeta_2^k$ est égal à $\partial^k f \circ \Phi_{z'} / \partial(\operatorname{Im}\zeta_2)^k$, on en déduit

$$|\zeta_1|^{k(\nu(z')-2)} \left|\frac{\partial^k f \circ \Phi_{z'}}{\partial \zeta_2^k}(\zeta)\right| \le C^{k+1} k!\, M\Big[\frac{2k}{\nu(z')}\Big], \tag{3.3.5}$$

pour tous z' de $U \cap \partial\Omega$, $z = \Phi_{z'}(\zeta)$ de $\mathcal{M}_\nu(s', b)$ et tout entier naturel k.

On peut alors aborder la dernière partie de la preuve. Puisque ζ appartient à $m_\nu(z', b, t)$, le principe du maximum permet d'affirmer :

$$\left|\frac{\partial^k f \circ \Phi_{z'}}{\partial \zeta_2^k}(\zeta)\right| \le \sup_{|\omega_1| = (bt)^{1/\nu(z')}} \left|\frac{\partial^k f \circ \Phi_{z'}}{\partial \zeta_2^k}(\omega_1, \zeta_2)\right|. \tag{3.3.6}$$

On applique alors (3.3.5) aux points (ω_1, ζ_2) avec $|\omega_1| = (bt)^{1/\nu(z')}$. On obtient :

$$\left|\frac{\partial^k f \circ \Phi_{z'}}{\partial \zeta_2^k}(\omega_1, \zeta_2)\right| \le C^{k+1} t^{-k(1-2/\nu(z'))} k!\, M\Big[\frac{2k}{\nu(z')}\Big].$$

D'après (3.3.6) et (3.3.1), on en déduit enfin :

$$\left|\frac{\partial^k f \circ \Phi_{z'}}{\partial \zeta_2^k}(\zeta)\right| \le C^{k+1} \left|r(z)\right|^{-k(1-2/\nu(z'))} k!\, M\Big[\frac{2k}{\nu(z')}\Big].$$

En remarquant que l'on a

$$\frac{\partial^k f \circ \Phi_{z'}}{\partial \zeta_2^k}(\zeta) = d_0(z)^k \frac{\partial^k f}{\partial z_2^k}(z)$$

avec $d_0(z') \approx 1$, il en résulte que f satisfait les hypothèses de la Proposition 3.2, d'où le résultat annoncé. □

3.4. Un cas particulier. — La remarque (2.3) et la définition des champs $Y_{z'}$ en (3.3) incitent à étudier le cas particulier où on a

$$\Omega = \{z\,;\ \operatorname{Re} z_2 + |z_1|^m < 0\}$$

(m entier pair) et où ν est le type θ.

• Pour $m = 2$, il est facile de voir que l'on a :

$$[L_1, \bar{L}_1] = [Y_{z'}, \overline{Y}_{z'}] = \frac{2}{i}\frac{\partial}{\partial y_2}\cdot$$

Il en résulte que l'on peut choisir, dans ce cas particulier, $Y_{z'} = L_1$ indépendamment de z', dans les estimations réciproques aussi bien que dans les estimations directes.

• Dans le cas général $m > 2$, les points z' avec $z_1' \neq 0$ sont de type 2. L'estimation directe s'écrit alors, d'après (2.3), sous la forme

$$\big|L_1^{(j_1,\dots,j_p)} f(z)\big| \le C^{p+1} p\,!\, M\Big[\frac{p}{2}\Big]\cdot \tag{3.4.1}$$

Réciproquement, puisque l'on a

$$[L_1, \bar{L}_1] = \frac{m^2}{2i}|z_1|^{m-2}\frac{\partial}{\partial y_2},$$

la condition (3.4.1) implique, pour $z \in \mathcal{M}_\nu(z', b)$,

$$|z_1|^{k(m-2)}\Big|\frac{\partial^k f}{\partial z_2^k}(z)\Big| \le C^{k+1} k\,!\, M_k.$$

Le terme $|z_1|^{m-2}$ étant arbitrairement petit, cette dernière estimation apparaît insuffisante pour établir l'appartenance de f à $C_M(\Omega \cap U)$. En utilisant le fait que l'on a, pour une constante $C(m)$ convenable,

$$\frac{\partial}{\partial y_2} = C(m)\,\underbrace{[L_1, [\bar{L}_1, [L_1, \dots, [L_1, \bar{L}_1]\cdots]]}_{\text{ordre } m}$$

et donc, d'après [DH],

$$\frac{1}{k\,!}\frac{\partial^k}{\partial y_2^k} = \sum_{k_1+\cdots+k_N = mk} \frac{\mu_1^{k_1}\cdots\mu_N^{k_N}}{k_1\,!\cdots k_N\,!}\, L_1^{(\ell_1 k_1,\dots,\ell_N k_N)},$$

pour des scalaires $\mu_1, \ldots, \mu_N$ et des indices $\ell_1, \ldots, \ell_N$ dans $\{-1, 1\}$ convenables, on peut seulement déduire de (3.4.1) que f appartient à $C_{M'}(\Omega \cap U)$ avec $M'_p = M_{pm/2}$.

Cependant, pour un point z' de type m (c'est-à-dire avec $z'_1 = 0$), on peut améliorer l'estimation directe, en remplaçant la région $\mathcal{M}_\nu(z', b)$ par des sous-domaines Ω_δ de Ω décrits ci-après. On pose

$$\Omega_\delta = \big\{z\,;\ \operatorname{Re} z_2 + (1+\delta)|z_1|^m < 0\big\}$$

pour δ réel strictement positif. On a alors :

$$\lim_{\delta \to 0} \uparrow \Omega_\delta = \Omega \quad \text{et} \quad \partial\Omega_\delta \cap \partial\Omega = \big\{(0, it)\,;\ t \in \mathbb{R}\big\}.$$

Par des méthodes analogues à celles des paragraphes précédents, on obtient l'énoncé suivant :

Pour f holomorphe dans $\Omega \cap U$, sous l'hypothèse $f \in C_M(\Omega \cap U)$, on a

$$\big|L_1^{(j_1,\ldots,j_p)} f(z)\big| \le C\Big(\frac{C}{\delta}\Big)^p p!\, M\Big[\frac{p}{m}\Big], \tag{3.4.2}$$

pour tout p de $\mathbb{N}$, tout $\delta > 0$ et tout z de $\Omega_\delta \cap U$.

Réciproquement si f satisfait (3.4.2), *alors f appartient à $C_M(\Omega_\delta \cap U)$ pour tout $\delta > 0$.* □

BIBLIOGRAPHIE

[BG] Bloom (T.) and Graham (I.). — *A geometric characterization of points of type m on real submanifolds of $\mathbb{C}^n$*, J. Diff. Geom., t. **12**, 1977, p. 171–182.

[Ca] Catlin (D.). — *Estimates of invariant metrics on weakly pseudoconvex domains of dimension two*, Math. Z., t. **200**, 1989, p. 429–466.

[CC] Chaumat (J.) and Chollet (A.M.). — *Classes de Gevrey non isotropes et application à l'interpolation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (IV), t. **15**, 1988, p. 615–676.

[DH] Damlakhi (M.) et Helffer (B.). — *Analyticité et itérés d'un système de champs non elliptique*, Ann. Scient. École Normale Supérieure, t. **13**, 1980, p. 397–403.

[DZ1] DERRIDJ (M.) et ZUILY (C.). — *Régularité des vecteurs de Gevrey d'une famille de champs de vecteurs*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **27**, 1970, p. 510–511.

[DZ2] DERRIDJ (M.) et ZUILY (C.). — *Sur la régularité Gevrey des opérateurs de Hörmander*, J. Math. Pures et Appl., t. **52**, 1973, p. 309–336.

[K] KOHN (J.J.). — *Boundary behavior of $\bar{\partial}$ on weakly pseudoconvex manifolds of dimension two*, J. Diff. Geom., t. **6**, 1972, p. 523–542.

[S] STEIN (E.M.). — *Singular integrals and estimates for the Cauchy-Rieman equations*, Bull. Amer. Math. Soc., t. **79**, 1973, p. 440–445.

[T] THILLIEZ (V.). — *Classes de Gevrey non isotropes dans les domaines de type fini de* $\mathbb{C}^2$, J. Analyse Math., volume spécial en hommage à S. Mandelbrojt, t. **60**, 1993, p. 259–305.