

# BULLETIN DE LA S. M. F.

THIERRY RAMOND

## **Intervalles d'instabilité pour une équation de Hill à potentiel méromorphe**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 121, n° 3 (1993), p. 403-444

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1993\\_\\_121\\_3\\_403\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1993__121_3_403_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INTERVALLES D'INSTABILITÉ POUR  
UNE ÉQUATION DE HILL A  
POTENTIEL MÉROMORPHE

PAR

THIERRY RAMOND (\*)

---

RÉSUMÉ. — Le spectre d'un opérateur de Schrödinger périodique  $-\Delta + V$  en dimension 1 est constitué de bandes qui ne peuvent se recouvrir qu'en leurs extrémités. On appelle gaps ou intervalles d'instabilité les intervalles qui séparent ces bandes. Nous supposons ici que le potentiel  $V$  est réel-analytique et s'étend dans une bande du plan complexe en une fonction méromorphe à pôles simples. En utilisant la méthode WKB complexe exacte puis des techniques d'analyse microlocale semi-classique, nous obtenons le développement asymptotique pour  $n$  grand de la largeur du  $n$ -ième gap. Notre résultat montre en particulier qu'il y a une infinité de gaps ouverts pour ce type de potentiels.

ABSTRACT. — The spectrum of a 1-dimensional periodic Schrödinger operator  $-\Delta + V$  is made of bands which cannot overlap but at their endpoints. The intervals separating these bands are called gaps or instability intervals. We make here the assumption that the potential  $V$  is real-analytic and extends into a strip of the complex plane as a meromorphic function with simple poles. Using the exact complex WKB method and semiclassical microlocal analysis techniques, we obtain the asymptotic expansion of the width of the  $n$ th gap for large  $n$ . In particular our result shows that there are infinitely many gaps for this kind of potentials.

### 0. Introduction

Cet article est consacré à l'étude de l'équation de Hill

$$(0.1) \quad -u''(x) + (V(x) - E)u(x) = 0,$$

où  $E$  est un paramètre réel et où la fonction  $V(x)$  est réelle analytique, périodique pour la période  $\pi$ . On appelle *valeur propre* de l'équation de

---

(\*) Texte reçu le 13 février 1992, révisé le 17 septembre 1992.

T. RAMOND, Département de Mathématiques, Université de Paris-Nord, 93 430 Villeneuve.

Classification AMS : primaire 34E20, 81Q20; secondaire 34A20, 35J10, 35C20, 34L20.

Hill les valeurs du paramètre  $E$  pour lesquelles il existe une solution non-nulle qui soit  $2\pi$ -périodique (elle est alors périodique ou antipériodique pour la période  $\pi$ ). Si l'on s'intéresse aux grandes valeurs de  $E$ , on voit qu'il y a deux valeurs propres proches de  $n^2$ , distinctes ou non, que l'on notera  $E_n^\pm$ , et qui correspondent à des fonctions propres proches de  $\sin(nx)$  et  $\cos(nx)$ . Pour  $E \in ]E_n^-, E_n^+[$ , on peut voir que les solutions de (0.1) ne sont pas bornées, et cet intervalle est appelé  *$n$ -ième intervalle d'instabilité* ou  *$n$ -ième gap* pour l'équation de Hill. Nous renvoyons le lecteur à [MA-WI] par exemple pour ces considérations maintenant très classiques, et à [RE-SI], [BR],... pour des interprétations physiques.

Le but de ce travail est d'établir un équivalent quand  $n \rightarrow \infty$  de la largeur  $\gamma_n$  du  $n$ -ième gap. De très nombreux travaux ont été consacrés à ce genre de problèmes, en particulier dans le cas de l'équation de Mathieu pour laquelle  $V(x) = 2\vartheta \cos(2x)$ , mais ce n'est qu'assez récemment que quelques résultats précis ont été obtenus. On peut citer pour l'équation de Mathieu les travaux de J. AVRON et B. SIMON (voir [AV], [SI]), puis pour des potentiels polynômes trigonométriques ceux de A. GRIGIS (voir [GR]). Il est par contre bien connu que la largeur des gaps est très liée à la régularité du potentiel  $V(x)$  (cf. [HO], [TR],...). Si  $V$  est  $C^\infty$  alors  $\gamma_n = O(n^{-\infty})$ , et pour  $V$  réel-analytique on a le résultat suivant (voir par exemple [GR]) :

THÉORÈME. — Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0(\varepsilon) > 0$  tel que si  $n > n_0(\varepsilon)$ ,

$$(0.2) \quad \gamma_n \leq \exp(-2(A - \varepsilon)n)$$

où  $\gamma_n$  désigne la largeur du  $n$ -ième intervalle d'instabilité et  $A$  la demi-largeur de la plus grande bande dans laquelle  $V$  s'étend holomorphiquement.

Nous faisons ici l'hypothèse supplémentaire

(H)  $\left\{ \begin{array}{l} V \text{ s'étend dans la bande } \mathcal{B} = \mathbb{R} + i[-(A + \eta); (A + \eta)], (\eta > 0) \\ \text{en une fonction méromorphe dont les seules singularités sont} \\ \text{des pôles simples en } x = \pm iA + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$

et nous montrons le :

THÉORÈME. — Soit  $\nu$  le résidu du potentiel  $V(x)$  en chacun de ses pôles de la demi-bande supérieure. Pour  $\nu$  non-nul, il existe deux symboles analytiques classiques  $\alpha_1, \alpha_2$  de symbole principal 1 (voir la définition 5.2), un réel  $\varepsilon > 0$  et un entier  $N$  tel que, pour tout  $n > N$  on a :

$$(0.3) \quad \gamma_n = 4|\nu| \alpha_1\left(\frac{1}{n}\right) \exp\left\{-2An - \operatorname{Im} \nu \frac{\log n}{n} \alpha_2\left(\frac{1}{n}\right)\right\} + O(e^{-(2A+\varepsilon)n}).$$

On obtient donc un nouvel exemple après celui de l'équation de Mathieu pour lequel le nombre de gaps ouverts n'est pas fini. D'ailleurs dans le cas du potentiel

$$(0.4) \quad V(x) = \frac{b}{a - \cos(2x)} \quad a, b \in \mathbb{R}, a > 1,$$

qui vérifie les hypothèses de notre théorème avec

$$(0.5) \quad A = \frac{1}{2} \operatorname{Argch}(a) \quad \text{et} \quad \nu = \frac{b}{2 \sin A},$$

on peut même reprendre la démonstration de Ince pour l'équation de Mathieu (voir par exemple [RE-SI], p. 298) et montrer que tous les gaps sont ouverts.

Nous nous appuyons dans cet article sur deux types de techniques dont la conjugaison se révèle intéressante. Nous commençons (comme dans [GR]) en construisant des solutions de l'équation grâce à la méthode WKB complexe exacte due à A. VOROS (cf. [VO1], [VO2]) et J. ÉCALLE (cf. [EC]). Cependant, le fait que les points tournants (les zéros de  $V(x) - E$ ) tombent sur les pôles de  $V(x)$  quand  $E$  devient grand, interdit l'étude directe du raccordement des solutions au voisinage de ces points. Nous menons cette étude en utilisant des méthodes d'analyse microlocale semiclassique développées par J. SJÖSTRAND et B. HELFFER dans [SJ] et [HE-SJ]; c'est la raison pour laquelle nous préférons poser  $E = 1/h^2$  et écrire (0.1) sous la forme :

$$(0.6) \quad \begin{cases} P(x, hD, h) u(x, h) = 0, \text{ où} \\ P(x, hD, h) = (h^2 D^2 - 1) + h^2 V(x) \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}. \end{cases}$$

Dans la première partie, nous rappelons rapidement la théorie de Floquet pour l'équation de Hill. Nous préférons à l'exposé classique (voir [MA-WI]) le point de vue qui consiste à regarder (0.1) comme un problème spectral pour l'opérateur de Schrödinger périodique en dimension 1,  $P = -\Delta + V(x)$  sur  $L^2(\mathbb{R})$ . Nous montrons que le spectre de cet opérateur est une réunion d'intervalles ou bandes qui ne se recouvrent pas, sauf peut-être en leurs extrémités. Les intervalles séparant ces bandes correspondent bien entendu aux intervalles d'instabilité. Nous montrons ensuite que la largeur des gaps est entièrement déterminée par la matrice de l'opérateur de translation  $\tau_\pi$  dans une base convenable de l'espace des solutions.

Dans la deuxième partie, nous construisons des solutions par la méthode WKB complexe exacte tout comme dans [GR] ou [GE-GR]. Le

fait essentiel est que cette construction fournit également les développements asymptotiques des solutions dans des domaines convenables de la bande  $\mathcal{B}$ . Nous obtenons alors les termes diagonaux de la matrice de  $\tau_\pi$  à une erreur exponentiellement petite près. Nous montrons dans la troisième partie l'avantage que l'on peut tirer d'une étude près de  $x_0 = iA$  de l'équation suivante (obtenue à partir de (0.6) par le changement de variable  $x \mapsto x + iA$ ) :

$$(0.7) \quad \begin{cases} \frac{x}{\nu\Psi(x)}(h^2D^2 - 1)u(x) + h^2u(x) = 0, \text{ où} \\ \Psi(x) = \frac{x}{\nu}V(x + iA) = 1 + \nu_1x + \dots \end{cases}$$

La quatrième partie est consacrée à l'étude du caractère analytique des solutions de cette équation (théorie de Fuchs). Nous développons ensuite notre étude microlocale de l'équation (0.7); nous signalons d'ailleurs au lecteur l'article de F. PHAM [PH] dans lequel une étude microlocale d'un opérateur de ce type à également été faite. Nous décrivons dans la cinquième partie l'essentiel des notions d'analyse microlocale semi-classique que nous utiliserons (transformations de FBI, distributions définies microlocalement, microsupport, ...). Dans la sixième partie nous utilisons un théorème de HELFFER et SJÖSTRAND pour nous ramener à l'étude microlocale d'un double problème de branchement en  $(x, \xi) = (0, 1)$  et  $(x, \xi) = (0, -1)$ . Nous traitons dans la septième partie le modèle de branchement, ce qui nous permet dans la huitième partie de retrouver des solutions microlocales de l'équation dont le microsupport est parfaitement connu. Nous considérons dans la neuvième partie les distributions solutions de l'équation (0.7) obtenues comme valeur au bord de fonctions analytiques dans certains ouverts du demi-plan inférieur, construites à partir des solutions de l'équation (0.6) de la deuxième partie. Nous ramenons ensuite ces distributions dans le cadre microlocal, puis nous les recollons avec les solutions microlocales construites à partir du modèle de branchement. Pour ce faire, nous nous appuyons sur une connaissance précise des microsupports respectifs de ces distributions qui découle en particulier de l'étude faite au quatrième paragraphe. La preuve de notre théorème est alors une conséquence quasi algébrique des résultats obtenus pour le modèle de branchement.

REMERCIEMENTS. — L'auteur tient à remercier vivement Alain GRIGIS de lui avoir proposé cette étude et d'avoir suivi avec tant d'attention ses progrès. Beaucoup des idées qui sont nées au cours des nombreuses discussions qu'il nous a accordées se trouvent ici et ont été essentielles à l'aboutissement de ce travail.

### 1. Spectre de l'équation de Hill

Nous rappelons ici brièvement la théorie de Floquet pour notre équation

$$(1.01) \quad \begin{cases} P(x, D, E)u(x, E) = 0, & \text{où} \\ P(x, D, E) = D^2 + (V(x) - E) & \text{et} \quad D = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}. \end{cases}$$

$P$  est considéré comme agissant dans  $L^2(\mathbb{R})$ , et puisque  $V(x)$  est réel quand  $x$  est réel,  $P$  est essentiellement autoadjoint sur  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  et le domaine de son extension de Friedrichs est  $H^2(\mathbb{R})$ . La périodicité de  $V(x)$  permet de décomposer  $P$  en intégrale hilbertienne. Plus précisément, si on note  $B$  l'opérateur de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{H}$ , où

$$(1.02) \quad \begin{cases} \mathcal{H} = \int_{[0,1]}^\oplus \mathcal{H}_\theta \, d\theta, \\ \mathcal{H}_\theta = \{u \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}); u(x - \pi) = e^{2i\pi\theta}u(x)\}, \end{cases}$$

défini par

$$(1.03) \quad Bf_\theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2i\pi n\theta} f(x - n\pi),$$

on voit que  $B$  s'étend en un isomorphisme unitaire de  $L^2(\mathbb{R})$  sur  $\mathcal{H}$  qui diagonalise  $P$  puisque  $B$  diagonalise l'opérateur de translation  $\tau_\pi$  de  $L^2(\mathbb{R})$  et que  $P$  et  $\tau_\pi$  commutent. Nous avons donc

$$(1.04) \quad BPB^{-1} = \int_{[0,1]}^\oplus P_\theta \, d\theta,$$

où  $P_\theta$  est l'opérateur agissant dans  $\mathcal{H}_\theta$  comme  $P$ , de domaine :

$$\mathcal{H}_\theta^2 = \{u \in \mathcal{H}_\theta; u', u'' \in \mathcal{H}_\theta\}.$$

Chaque  $P_\theta$  est elliptique sur  $[0, \pi]$ , et son spectre est purement ponctuel, borné inférieurement puisque  $V$  est borné, de la forme  $\{E_1(\theta), E_2(\theta), \dots\}$ , avec :

$$(1.05) \quad \begin{cases} E_j(\theta) \leq E_{j+1}(\theta) \text{ pour tout } \theta \in [0, 1] \text{ et tout } j \geq 1, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} E_j(\theta) = +\infty. \end{cases}$$

On a alors la proposition suivante (voir [MA-WI], [SK], [RE-SI]...):

PROPOSITION 1.1.

(i) Chaque  $E_j(\theta)$  est continue sur  $[0, 1]$  (et même analytique sur  $]0, 1[$ ) et  $B_j = \{E_j(\theta); \theta \in [0, 1]\}$  est un intervalle fermé non-vide.

(ii)  $\overset{\circ}{B}_j \cap \overset{\circ}{B}_k = \emptyset$  pour tous  $j, k$  distincts.

(iii) Si  $j$  est pair (resp. impair),  $E_j(\theta)$  est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur  $[0, 1]$ . On a donc :

$$B_{2j+1} = [E_{2j+1}(0), E_{2j+1}(1)] \quad \text{et} \quad B_{2j} = [E_{2j}(1), E_{2j}(0)].$$

iv) Le spectre  $\sigma(P)$  de  $P$  est purement absolument continu et on a :

$$\sigma(P) = \bigcup_{j \geq 1} B_j.$$

Avec les notations de la proposition, on voit que le  $j$ -ième gap est un intervalle (éventuellement vide) de la forme  $]E_j(1), E_{j+1}(1)[$  si  $j$  est impair, ou  $]E_j(0), E_{j+1}(0)[$  si  $j$  est pair. Il nous suffira donc d'étudier les valeurs propres des opérateurs  $P_0$  et  $P_1$ , ou de manière équivalente, l'existence de solutions  $\pi$ -périodiques ou  $\pi$ -antipériodiques pour l'équation (1.01). Pour simplifier les notations, nous noterons désormais  $E_n^-$  et  $E_n^+$  (pour  $n \geq 1$ ) les bornes du  $n$ -ième intervalle d'instabilité, et  $E_0 = E_1(0)$  la borne inférieure du spectre de  $P$ .

Nous montrons maintenant comment retrouver la largeur des gaps à partir de la matrice de l'opérateur de translation  $\tau$  défini par :

$$(1.06) \quad \tau u(x) = u(x - \pi).$$

Le potentiel  $V(x)$  est réel pour  $x$  réel. Si  $u$  est solution de (1.01), alors  $\bar{u}$  l'est aussi, où  $\bar{u}(x) = \overline{u(\bar{x})}$ , et  $(u, \bar{u})$  est une base de l'espace  $\mathcal{S}(E)$  des solutions lorsque  $u$  et  $\bar{u}$  sont indépendantes.  $\mathcal{S}(E)$  est stable par  $\tau$  et on voit immédiatement que la matrice  $T(E)$  de  $\tau$  dans la base  $(u, \bar{u})$  est de la forme :

$$(1.07) \quad T(E) = \begin{pmatrix} a(E) & b(E) \\ \bar{b}(E) & \bar{a}(E) \end{pmatrix}.$$

On peut montrer que  $\tau$  est de déterminant 1. On a donc

$$(1.08) \quad \chi(E, \lambda) = \lambda^2 - \Delta(E)\lambda + 1,$$

où  $\chi(E, \lambda)$  est le polynôme caractéristique de  $T(E)$  et  $\Delta(E)$  la trace de  $T(E)$ . On appelle souvent  $\Delta(E)$  le *discriminant* de l'équation de Hill, et la courbe représentative de  $E \mapsto \Delta(E)$  est de la forme suivante (voir [RE-SI], [MA-WI]) :

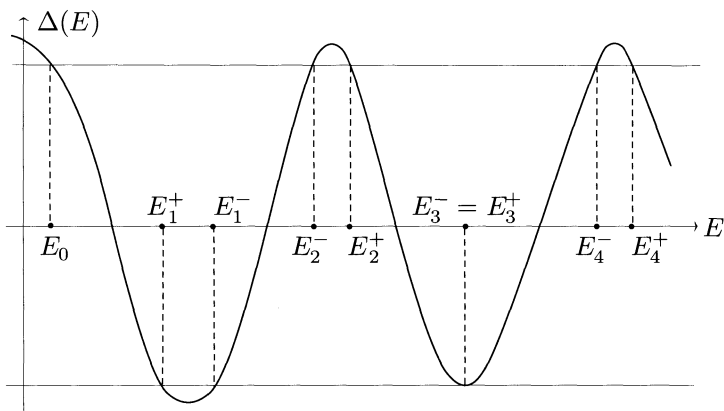


Figure 1. Discriminant

Il existe des solutions  $2\pi$ -périodiques de (1.01) si et seulement si  $\pm 1$  est valeur propre de  $T(E)$ . Autrement dit les bornes du  $n$ -ième gap  $E_n^\pm$  vérifient

$$(1.09) \quad \Delta(E_n^\pm) = 2(-1)^n$$

et les seules solutions de l'équation  $\Delta(E) = \pm 2$  sont  $E_0$  et  $E_n^\pm$ . On remarque alors que :

$$(1.10) \quad \Delta(E) = 2\operatorname{Re}(a(E)), \quad |a(E)| = \sqrt{1 + |b(E)|^2}.$$

Notant  $S(E)$  l'argument de  $a(E)$  on obtient aisément le :

LEMME 1.2. —  $E$  est une des bornes d'un intervalle d'instabilité si et seulement si :

$$(1.11) \quad S(E) = \pm \arcsin \frac{|b(E)|}{\sqrt{1 + |b(E)|^2}}.$$

Nous verrons dans la suite que  $S(E)$  est décroissante (voir (2.47)), et donc que  $E_n^\pm$  est la solution de (1.09) proche de  $n^2$  correspondant au



signe  $\mp$ . On note alors  $\gamma_n = E_n^+ - E_n^-$  la largeur du  $n$ -ième gap, et (avec (2.50)) puisque  $b(E) = O(e^{-\varepsilon\sqrt{\varepsilon}})$ , on obtiendra

$$(1.12) \quad \gamma_n \simeq \frac{2|b(E_n)|}{S'(E_n)}$$

où  $E_n$  est une valeur quelconque de  $[E_n^-, E_n^+]$ .

## 2. Construction de solutions. Méthode WKB complexe

Nous allons construire des solutions de l'équation de Hill, que l'on écrit maintenant (voir (0.6)) :

$$(2.01) \quad ((h^2 D^2 - 1) + h^2 V(x)) u(x, h) = 0.$$

Remarquons d'abord que si l'on considère un domaine dans lequel  $V$  est borné, on peut écrire l'équation sous la forme

$$(2.02) \quad h^2 u'' + u = h^2 V u$$

et considérer le second membre comme une perturbation. En particulier, on voit que l'on doit s'attendre sur  $\mathbb{R}$  à des solutions du type

$$(2.03) \quad u_{\pm}(x, h) = e^{\pm ix/h} a_{\pm}(x, h),$$

où  $\bar{a}_+ = a_-$  et où  $a_{\pm}(x, h)$  admet un développement asymptotique quand  $h \rightarrow 0$  :

$$(2.04) \quad a_{\pm}(x, h) = a_0^{\pm}(x) + a_1^{\pm}(x)h + a_2^{\pm}(x)h^2 + \dots$$

Si l'on s'intéresse maintenant aux fonctions  $\tau u_{\pm}(x, h)$  définies par

$$(2.05) \quad \tau u_{\pm}(x, h) = u_{\pm}(x - \pi, h),$$

on obtient avec l'expression (2.03) :

$$(2.06) \quad \tau u_{\pm}(x, h) = e^{\mp i\pi/h} e^{\pm ix/h} a_{\pm}(x - \pi, h).$$

En substituant le développement asymptotique (2.04) dans (2.01), on voit facilement que

$$(2.07) \quad a_{\pm}(x - \pi, h) = C^{\pm}(h) a^{\pm}(x, h)$$

où  $C^\pm(h) = 1 + C_1 h + \dots$  et  $|C^\pm(h)| = 1$ . Nous obtenons donc :

$$(2.08) \quad \begin{cases} \tau u^+(x, h) = e^{-i\pi/h} C^+(h) u^+(x, h), \\ \tau u^-(x, h) = e^{i\pi/h} C^-(h) u^-(x, h). \end{cases}$$

Nous allons montrer que toutes ces considérations sont correctes, en particulier qu'il existe des solutions dont le développement asymptotique est de la forme (2.03)–(2.04) pour  $x$  dans tout compact de  $\mathbb{R}$ . Nous obtiendrons de cette manière une matrice approchée pour la translation  $\tau$  de la forme :

$$(2.09) \quad T(h) = \begin{pmatrix} e^{-i\pi/h} C_+(h) & 0 \\ 0 & e^{i\pi/h} C_-(h) \end{pmatrix} (1 + O(h^\infty)).$$

On voit néanmoins sur l'expression (2.09) que l'on ne pourra se contenter d'une telle construction, qui ne donne qu'une majoration des termes non-diagonaux de  $T(E)$ . Nous allons donc — dans un premier temps — construire des solutions  $w_\pm$  de (2.01) pour  $x$  dans des domaines aussi grands que possible de la bande  $\mathcal{B}$  (et pas seulement sur  $\mathbb{R}$ ) en utilisant la méthode WKB complexe exacte comme dans [GR] ou [GE-GR].

On choisit d'abord un ouvert  $\Omega$  simplement connexe, indépendant de  $h$ , dont l'adhérence  $\bar{\Omega}$  ne contient ni pôle ni point tournant, que l'on prendra symétrique par rapport à l'axe réel et invariant sous l'action de  $\tau$ . On effectue alors le changement de variable

$$(2.10) \quad x \mapsto z(x, h) = \frac{h}{i} \int_\gamma (V(t) - 1/h^2)^{1/2} dt,$$

où  $\gamma$  est un chemin dans  $\Omega$  d'extrémités 0 et  $x$ . Bien entendu, l'expression ci-dessus ne dépend pas de  $\gamma$  puisque l'intégrande est holomorphe dans  $\Omega$ . Notons également que si l'on choisit la détermination de  $t \mapsto (1 - h^2 V(t))^{1/4}$  qui est réelle positive pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $h$  assez petit, on a

$$(2.11) \quad z(x, h) = \int_\gamma (1 - h^2 V(t))^{1/2} dt = x + h^2 \sum_{j \geq 0} \alpha_j(x) h^{2j}$$

avec  $\alpha_j = \frac{1}{i} \beta_{j+1} \int_\gamma V(t)^{j+1} dt$  et  $\beta_j = \frac{(2j-2)!}{2^{2j-1} j! (j-1)!}$ .

On cherche maintenant des solutions de (2.01) sous la forme

$$(2.12) \quad u(x, h) = (1 - h^2 V(x))^{-1/4} f(z(x, h)),$$

ce qui donne l'équation (où ' désigne la dérivée par rapport à  $z$ ) :

$$(2.13) \quad -f'' + (H^2 - H' - \frac{1}{h^2})f = 0, \quad \text{où}$$

$$(2.14) \quad H(z(x, h)) = \frac{h^2}{4} \frac{V'(x)}{(1 - h^2 V'(x))^{3/2}}.$$

On pose enfin  $f_{\pm}(z) = e^{\pm iz/h} W_{\pm}(z)$  et (2.13) devient :

$$(2.15) \quad (H^2 - H')W_{\pm} = \pm \frac{2i}{h} W'_{\pm} + W''_{\pm}.$$

On définit alors deux suites  $(W_n^{\pm})_n$  par les équations

$$(2.16) \quad \begin{cases} W_0^{\pm} = 1, \\ \left(\partial_z \pm \frac{2i}{h}\right) W_{2n+1}^{\pm} = -H W_{2n}^{\pm} & \text{pour } n \geq 0, \\ \partial_z W_{2n}^{\pm} = -H W_{2n-1}^{\pm} & \text{pour } n \geq 1, \end{cases}$$

et l'on montre facilement que les expressions

$$(2.17) \quad W^{\pm} = \sum_{n \geq 0} W_n^{\pm}$$

vérifient formellement l'équation (2.15). Il reste à construire de vraies fonctions satisfaisant ces équations. Puisque  $\Omega$  est simplement connexe, la fonction  $W_n^{\pm}$  est déterminée par (2.15), à une constante près, dès que l'on se donne  $W_{n-1}^{\pm}$ . Nous choisissons donc deux points bases  $x_{\pm}$  dans  $\Omega$  et l'on fixe les constantes d'intégration en imposant, pour tout  $n \geq 1$  :

$$(2.18) \quad W_n^{\pm}(x_{\pm}) = 0.$$

Nous obtenons alors des solutions de (2.16) en prenant

$$(2.19) \quad W_{2n}^{\pm}(z, h, z_{\pm}) = \int_{\Gamma_{2n}(z_{\pm}, z)} e^{\pm(2i/h)(\zeta_1 - \zeta_2 + \dots + \zeta_{2n})} H(\zeta_1) \dots H(\zeta_{2n}) d\zeta_1 \dots d\zeta_{2n},$$

$$(2.20) \quad W_{2n+1}^{\pm}(z, h, z_{\pm}) = \int_{\Gamma_{2n+1}(z_{\pm}, z)} e^{\pm(2i/h)(\zeta_1 - \zeta_2 + \dots + \zeta_{2n+1} - z)} H(\zeta_1) \dots H(\zeta_{2n+1}) d\zeta_1 \dots d\zeta_{2n+1},$$

où  $\Gamma_n^\pm(z_\pm, z)$  désigne l'ensemble des  $n$ -uplets  $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ , pris dans cet ordre sur un chemin  $\Gamma^\pm$  d'extrémités  $z_\pm = z(x_\pm)$  et  $z$ , image par  $x \mapsto z(x, h)$  d'un chemin  $\gamma^\pm$  de  $\Omega$  d'extrémités  $x_\pm$  et  $x$ . On note alors :

$$(2.21) \quad \mathcal{V}_n(\gamma^\pm, h) = \sup \left\{ \mp \operatorname{Im}(z(t_1) - z(t_2) + \dots + (-1)^{n+1} z(t_n)) ; \right. \\ \left. t_j \in \gamma^\pm, t_1 < \dots < t_n \right\}.$$

Si l'on peut prendre  $\gamma^\pm$  de sorte que  $\Gamma^\pm$  soit de longueur finie  $L$ , et le long duquel on ait

$$(2.22) \quad \begin{cases} A^\pm(h) = \sup \{ |H(\zeta)| ; \zeta \in \Gamma^\pm \} < +\infty, \\ \mathcal{V}^\pm(h) = \sup \{ \mathcal{V}_n(\gamma^\pm, h) ; n \in \mathbb{N} \} < +\infty, \end{cases}$$

on obtient :

$$(2.23) \quad |W_n^\pm(z)| \leq e^{\mathcal{V}^\pm(h)/h} \frac{(A^\pm(h)L)^n}{n!}.$$

Sous les hypothèses précédentes les séries (2.17) convergent donc uniformément sur tout compact de  $\Omega$ , et nous obtenons de cette manière des solutions  $w_\pm$  de (2.01) pour  $h$  fixé :

$$(2.24)_\pm \quad w_\pm(x, h, x_\pm) \\ = (1 - h^2 V(x))^{-1/4} e^{\pm iz(x, h)/h} \sum_{n \geq 0} W_n^\pm(z(x), h, z_\pm).$$

Nous avons alors la :

PROPOSITION 2.1. —  $w_\pm(\cdot, h, x_\pm)$  est la solution de (2.01) qui vérifie les conditions de Cauchy :

$$(2.25)_\pm \quad \begin{cases} w_\pm(x_\pm, h, x_\pm) = (1 - h^2 V(x_\pm))^{-1/4} e^{\pm iz(x_\pm, h)/h}, \\ \frac{\partial}{\partial x} w_\pm(x_\pm, h, x_\pm) = \pm \frac{i}{h} (1 - h^2 V(x_\pm))^{1/4} e^{\pm iz(x_\pm, h)/h}. \end{cases}$$

*Preuve.* — Nous nous contenterons d'écrire les calculs pour  $w_+$ . Pour simplifier les écritures on note :

$$(2.26) \quad \begin{cases} \varphi^{+-}(x) = \sum_{n \geq 0} W_{2n}^+(z(x), h, z_+), \\ \varphi^+(x) = \sum_{n \geq 0} W_{2n+1}^+(z(x), h, z_+). \end{cases}$$

Avec (2.16) on a

$$(2.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_x \varphi^+ = (1 - h^2 V(x))^{1/2} \partial_z \varphi^+ \\ \quad \quad \quad = (1 - h^2 V(x))^{1/2} \left( -H \varphi^{+-} - \frac{2i}{h} \varphi^+ \right), \\ \partial_x \varphi^{+-} = (1 - h^2 V(x))^{1/2} \partial_z \varphi^{+-} \\ \quad \quad \quad = (1 - h^2 V(x))^{1/2} (-H \varphi^+), \end{array} \right.$$

et donc, en dérivant logarithmiquement

$$(2.28) \quad \frac{\partial_x w^+}{w_+} = \frac{i}{h} (1 - h^2 V)^{1/2} \frac{\varphi^{+-} - \varphi^+}{\varphi^{+-} + \varphi^+},$$

d'où l'on tire

$$(2.29) \quad \partial_x w_+(x, h) = \frac{i}{h} (1 - h^2 V(x))^{1/4} e^{iz(x, h)/h} (\varphi^{+-}(x, h) - \varphi^+(x, h))$$

et la proposition découle de (2.18).  $\square$

Nous cherchons maintenant à préciser les domaines  $\Omega^\pm$  dans lesquels les conditions précédentes sont satisfaites uniformément en  $h$ , et donc pour lesquels les expressions (2.24) $_{\pm}$  définissent des solutions de (2.01) dont nous pouvons espérer connaître le développement asymptotique quand  $h \rightarrow 0$ . Avec (2.14) on voit que  $H(z(x, h)) = O(h^2)$  uniformément en  $x$  sur tout compact de  $\Omega$  (et donc  $A(h) = O(h^2)$  dans (2.23)). Maintenant, avec (2.19) et (2.20), on obtient

$$(2.30) \quad W_n^\pm(z(x), h, z_\pm) = O(h^{2n})$$

à condition que :

$$(2.31) \quad \mathcal{V}^\pm(h) \leq 0.$$

La condition (2.31) est cruciale et peut être traduite par la :

**PROPOSITION 2.2.** — *S'il existe un chemin  $\gamma^+$  (resp.  $\gamma^-$ ) dans  $\Omega$  d'extrémités  $x_+$  et  $x$  (resp.  $x_-$  et  $x$ ) le long duquel  $\text{Im}(z(t))$  est strictement décroissante (resp. strictement croissante), et dont l'image  $\Gamma^+$  (resp.  $\Gamma^-$ ) par  $t \mapsto z(t, h)$  est de longueur finie, alors l'expression (2.24) $_+$  (resp. (2.24) $_-$ ) est le développement asymptotique au point  $x$  de la solution de (2.01) vérifiant la condition de Cauchy (2.25) $_+$  (resp. (2.25) $_-$ ).*

*Preuve.* — Elle est immédiate puisque dans ces conditions  $\mathcal{V}^\pm(h)$  est négative. La relation (2.23) devient alors :

$$(2.32) \quad |W_n^\pm(z, h, z_\pm)| \leq \frac{(A^\pm(h)L)^n}{n!}. \quad \square$$

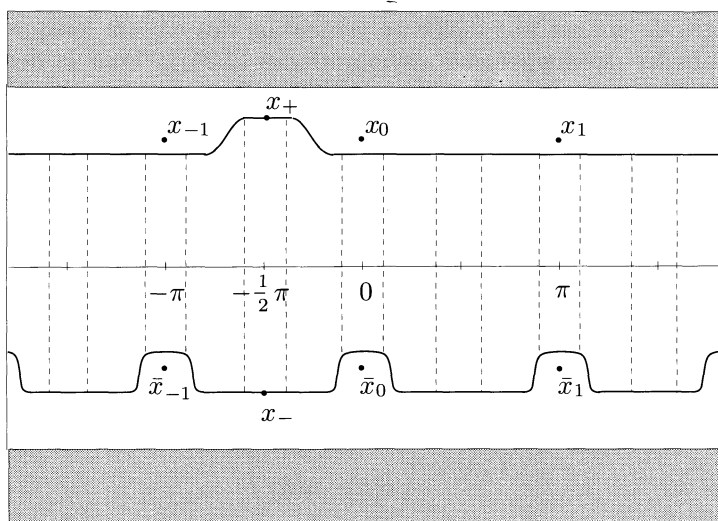


Figure 2. Le domaine  $\Omega_+$

Pour décrire les domaines  $\Omega_\pm$  pour tout  $x$  desquels les conditions de la PROPOSITION 2.2 sont vérifiées, on introduit les notions de *lignes et antilignes de Stokes* : ce sont les courbes de niveau de  $x \mapsto \operatorname{Re}z(x, h)$  et de  $x \mapsto \operatorname{Im}z(x, h)$  respectivement. Avec (2.10), on voit que si l'on se restreint à  $x$  dans  $\Omega$  et à condition de prendre  $h$  assez petit, les lignes de Stokes sont très proches des droites horizontales  $\operatorname{Im}(x) = C^{\text{te}}$ , alors que les antilignes de Stokes sont très proches des droites verticales  $\operatorname{Re}(x) = C^{\text{te}}$ . La PROPOSITION 2.2 signifie donc que l'on connaît le développement asymptotique de  $w_+(x, h, x_+)$  uniquement dans une région  $\Omega^+$  pour tout  $x$  de laquelle il existe un chemin  $\gamma(x_+, x)$  sur lequel on a toujours  $t \mapsto \operatorname{Im}(t)$  décroissante, alors que celui de  $w_-(x, h, x_-)$  n'est lui connu que dans la région  $\Omega^-$  pour tout  $x$  de laquelle il existe un chemin  $\gamma(x_-, x)$  sur lequel on a toujours  $t \mapsto \operatorname{Im}(t)$  croissante. On rend donc ces domaines aussi grands que possible en prenant comme points bases :

$$(2.33) \quad \begin{cases} x_+ = -\frac{1}{2}\pi + i\left(A + \frac{1}{2}\eta\right), \\ x_- = -\frac{1}{2}\pi - i\left(A + \frac{1}{2}\eta\right). \end{cases}$$

Sur le schéma ci-dessus on a représenté la bande  $\mathcal{B}$ , notre choix de points bases et le domaine de validité  $\Omega^+$  du développement asymptotique  $(2.24)_+$  avec ce choix de  $x_+$ . Puisque l'on a pris  $x_- = \bar{x}_+$ , le domaine de validité  $\Omega^-$  du développement asymptotique  $(2.24)_-$  est le symétrique de  $\Omega^+$  par rapport à l'axe réel.

Nous terminons cette discussion par la proposition suivante qui nous permettra de donner une meilleure estimation des erreurs lorsque nous utiliserons les développements asymptotiques  $(2.24)_\pm$ . Pour la démonstration, nous renvoyons le lecteur à [GE-GR, prop. 1.2] (voir aussi [SJ, th. 9.3]).

**PROPOSITION 2.3.** — *Les équations de transport (2.16) admettent une solution dans la classe des symboles analytiques classiques, et nos  $W_n^\pm$  admettent ces SAC comme développement asymptotique. De plus les séries dans  $(2.24)_\pm$  sont aussi des symboles analytiques classiques.*

Nous cherchons maintenant la matrice  $T(h)$  de l'opérateur de translation  $\tau$  dans la base  $(w_+, \bar{w}_+)$ . On écrit cette matrice sous la forme (voir (1.07)) :

$$(2.34) \quad T(h) = \begin{pmatrix} a(h) & b(h) \\ \bar{b}(h) & \bar{a}(h) \end{pmatrix}.$$

La solution  $w_+$  est définie dans  $\Omega^+$ ,  $\bar{w}_+$  est définie dans  $\Omega^-$  (voir la remarque après (2.33)),  $\tau w_+$  est définie dans  $\tau\Omega^+ = \{z \in \mathbb{C}; z - \pi \in \Omega^+\}$  et enfin  $\tau \bar{w}_+$  dans  $\tau\Omega^-$ . Avec ces notations nous avons la :

**PROPOSITION 2.4.**

$$(2.35) \quad \begin{cases} \bar{w}_+(x, h, x_+) = w_-(x, h, x_-) & \text{pour } x \in \Omega^+ \cap \Omega^-, \\ \tau w_+(x, h, x_+) = e^{-iz(\pi, h)/h} w_+(x, h, x_+ + \pi), & \text{pour } x \in \Omega^+ \cap \tau\Omega^+, \\ \tau \bar{w}_+(x, h, x_+) = e^{iz(\pi, h)/h} w_-(x, h, x_- + \pi) & \text{pour } x \in \Omega^+ \cap \tau\Omega^-. \end{cases}$$

*Preuve.* — Grâce à la périodicité de  $V$  et au principe de symétrie de Schwarz ( $\bar{V} = V$ ), les fonctions des membres de gauches des égalités (2.35) sont des solutions de (2.01). Pour prouver la proposition il suffit donc de calculer les valeurs de chacune de ces fonctions et de leur dérivée en respectivement  $\bar{x}_+$ ,  $x_+ + \pi$  et  $\bar{x}_+ + \pi$ , et de montrer ainsi qu'elles vérifient les mêmes conditions de Cauchy que les fonctions des membres de droite

de (2.35). Avec notre choix de détermination pour  $t \mapsto (1 - h^2 V(t))^{1/4}$  et avec (2.33), on voit facilement que :

$$(2.36) \quad \overline{z(x_+, h)} = z(\bar{x}_+, h) = z(x_-, h).$$

On obtient donc :

$$(2.37) \quad \begin{aligned} \bar{w}_+(\bar{x}_+, h, x_+) &= \overline{w_+(x_+, h, x_+)} \\ &= (1 - h^2 V(\bar{x}_+))^{-1/4} e^{-iz(\bar{x}_+, h)/h} \\ &= w_-(x_-, h, x_-). \end{aligned}$$

Pour la dérivée on utilise les notations de la preuve de la PROPOSITION 2.1 :

$$(2.38) \quad \begin{aligned} \partial_x \bar{w}_+(\bar{x}_+, h, x_+) &= \overline{\partial_x w_+(x_+, h, x_+)} \\ &= -\frac{i}{h} (1 - h^2 V(x_-))^{1/4} e^{-iz(\bar{x}_+, h)/h} (\overline{\varphi^{+-}(x_+) - \varphi^+(x_+)}) \\ &= -\frac{i}{h} (1 - h^2 V(x_-))^{1/4} e^{-iz(\bar{x}_+, h)/h} \\ &= \partial_x w_-(x_-, h, x_-) \end{aligned}$$

On prouve les deux autres égalités de la même façon.  $\square$

Nous pouvons maintenant évaluer les termes diagonaux de la matrice  $T(h)$  dans la base  $(w_+, \bar{w}_+)$  en utilisant les wronskiens de ces quatre solutions :

PROPOSITION 2.5.

$$(2.39) \quad \begin{cases} a(h) = e^{-iz(\pi, h)/h} \frac{\varphi^{+-}(x_-, h, x_+ + \pi)}{\varphi^{+-}(x_-, h, x_+)} & \text{avec} \\ \varphi^{+-}(x, h, \tilde{x}) = \sum_{n \geq 0} W_{2n}^+(z(x), h, z(\tilde{x})). \end{cases}$$

*Preuve.* — Avec les notations de (2.34) on a, pour  $x$  dans  $\Omega^+ \cap \Omega^- \cap \tau\Omega^+$  :

$$(2.40) \quad \tau w_+(x, h, x_+) = a(h)w_+(x, h, x_+) + b(h)\bar{w}_+(x, h, x_+).$$

En utilisant la bilinéarité du wronskien on obtient donc

$$(2.41) \quad a(h) = \frac{\mathcal{W}(\tau w_+; \bar{w}_+)(x)}{\mathcal{W}(w_+; \bar{w}_+)(x)}$$

puis avec (2.35) :

$$(2.42) \quad a(h) = e^{-iz(\pi, h)/h} \frac{\mathcal{W}(w_+(\cdot, h, x_+ + \pi); w_-(\cdot, h, x_-))(x)}{\mathcal{W}(w_+(\cdot, h, x_+); w_-(\cdot, h, x_-))(x)}.$$



Puisque le wronskien de deux solutions de (2.01) est constant, on peut évaluer cette dernière expression en  $x_-$  (qui appartient bien à  $\Omega^+ \cap \Omega^- \cap \tau\Omega^+$ ). Comme dans la preuve de la PROPOSITION 2.1, nous introduisons les notations suivantes :

$$(2.43) \quad \begin{cases} \varphi^{+-}(x, h, \tilde{x}) = \sum_{n \geq 0} W_{2n}^+(z(x), h, z(\tilde{x})), \\ \varphi^+(x, h, \tilde{x}) = \sum_{n \geq 0} W_{2n+1}^+(z(x), h, z(\tilde{x})). \end{cases}$$

On rappelle aussi (2.30)

$$(2.44) \quad \partial_x w_+(x, h) = \frac{i}{h} (1 - h^2 V(x))^{1/4} e^{iz(x, h)/h} (\varphi^{+-}(x, h) - \varphi^+(x, h))$$

et l'on a, en utilisant également la PROPOSITION 2.1 :

$$(2.45) \quad \begin{aligned} \mathcal{W}(w_+(\cdot, h, x_+ + \pi); w_-(\cdot, h, x_-))(x_-) &= \partial_x w_+(x_-, h, x_+ + \pi) w_-(x_-, h, x_-) \\ &\quad - w_+(x_-, h, x_+ + \pi) \partial_x w_-(x_-, h, x_-) \\ &= \frac{2i}{h} \varphi^{+-}(x_-, h, x_+ + \pi). \end{aligned}$$

On prouve de la même manière que :

$$(2.46) \quad \mathcal{W}(w_+(\cdot, h, x_+); w_-(\cdot, h, x_-))(x_-) = \frac{2i}{h} \varphi^{+-}(x_-, h, x_+)$$

La proposition en découle facilement.  $\square$

En particulier la PROPOSITION 2.5 donne le développement asymptotique de  $a(h)$  quand  $h \rightarrow 0$

$$(2.47) \quad a(h) = e^{-i\pi/h} \alpha(h),$$

où  $\alpha$  est un symbole analytique classique (voir la PROPOSITION 2.3) de symbole principal 1, ce qui est tout a fait conforme à ce que nous attendions (voir 2.09).

On s'intéresse maintenant aux termes non-diagonaux de  $T(h)$ . On peut écrire, avec (2.40),

$$(2.48) \quad b(h) = \frac{\mathcal{W}(\tau w_+; w_+)(x)}{\mathcal{W}(\bar{w}_+; w_+)(x)}$$

où  $x$  appartient à  $\Omega^+ \cap \Omega^- \cap \tau\Omega^+$ . Ensuite grâce à la PROPOSITION 2.3, on obtient :

$$(2.49) \quad b(h) = e^{-iz(\pi, h)/h} \frac{\mathcal{W}(w_+(\cdot, h, x_+ + \pi); w_+(\cdot, h, x_+))(x)}{\mathcal{W}(w_-(\cdot, h, x_-); w_+(\cdot, h, x_+))(x)}.$$

Cette fois, la valeur de  $x$  pour laquelle ces wronskiens sont particulièrement simples à calculer est  $x = x_+$ . Malheureusement  $x_+$  n'appartient pas à  $\Omega^+ \cap \Omega^- \cap \tau\Omega^+$  et (2.46) ne donnera pas le développement asymptotique de  $b(h)$ . En calculant ces wronskiens pour une valeur bien choisie de  $x$ , on peut cependant prouver aussi la :

PROPOSITION 2.6. — *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a :*

$$(2.50) \quad b(h) = O(e^{-2(A-\varepsilon)/h}).$$

*Preuve.* — Un calcul simple donne

$$(2.51) \quad b(h) = -e^{-iz(\pi, h)/h} e^{2iz(x, h)/h} \times \frac{\varphi^{+-}(x, x_+ + \pi)\varphi^{+-}(x, x_+) - \varphi^+(x, x_+ + \pi)\varphi^+(x, x_+)}{\varphi^{-+}(x, x_-)\varphi^{+-}(x, x_+) - \varphi^+(x, x_+)\varphi^-(x, x_-)}$$

et l'on obtient (2.50) en choisissant  $x$  dans  $\Omega^+ \cap \Omega^- \cap \tau\Omega^+$  de sorte que :

$$(2.52) \quad \text{Im}(z(x, h)) = A - \varepsilon. \quad \square$$

### 3. Translation dans le domaine complexe

Nous venons de voir que  $b(h) = O(e^{-2(A-\varepsilon)/h})$ . Pour retrouver une information plus précise sur ce terme nous allons étudier le problème du raccordement des solutions au voisinage des pôles (et donc des points tournants). Étant donné les symétries du problème, il est d'ailleurs clair qu'une étude au voisinage de  $x_0 = iA$  devra suffire.

Sous l'hypothèse (H), le potentiel  $V(x)$  admet dans un voisinage de  $x_0$  que l'on peut supposer être  $D(x_0, \eta) = \{x \in \mathbb{C} : |x - x_0| < \eta\}$  un développement en série de Laurent qu'on écrit (en notant  $\nu$  le résidu de  $V$  en  $x_0$ ) :

$$(3.01) \quad V(x) = \frac{\nu}{x - iA} \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \nu_k (x - iA)^k \right).$$

Il semble bien sûr naturel de se ramener au cas  $x_0 = 0$ . On considère donc l'opérateur  $P_0$ , défini pour  $x$  dans  $D(0, \eta)$  par :

$$(3.02) \quad \begin{cases} P_0 = (h^2 D^2 - 1) + h^2 V_0(x), & \text{où} \\ V_0(x) = \frac{\nu}{x} \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \nu_k x^k \right). \end{cases}$$

Nous notons aussi  $\tau_{-iA}$  l'opérateur de translation défini par

$$(3.03) \quad \tau_{-iA} u(x) = u(x + iA)$$

et pour tout ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  :

$$(3.04) \quad \tau_{-iA} \Omega = \{x \in \mathbb{C}; x + iA \in \Omega\}.$$

Nous avons alors immédiatement le :

LEMME 3.1. — *La fonction  $w$  est une solution de l'équation  $Pw = 0$  (où  $P = (h^2 D^2 - 1) + h^2 V$ , voir (2.01)) définie dans un ouvert  $\Omega \subset D(x_0, \eta)$  si et seulement si  $w_0 = \tau_{-iA} w$  est une solution de  $P_0 w = 0$  définie dans l'ouvert  $\Omega_0 = \tau_{-iA} \Omega$  de  $D(0, \eta)$ .*

On peut supposer que l'on a choisi  $\Omega^\pm$  de sorte que  $\Omega^\pm \cap D(x_0, \eta) \neq \emptyset$ . Les solutions  $w^\pm$  construites dans la deuxième partie donnent donc deux solutions  $w_0^\pm = \tau_{-iA} w^\pm$  de l'équation  $P_0 w = 0$  qui sont définies respectivement dans les ouverts (voir la figure 3) :

$$(3.05) \quad \Omega_0^\pm = \tau_{-iA} \Omega^\pm \cap D(0, \eta).$$

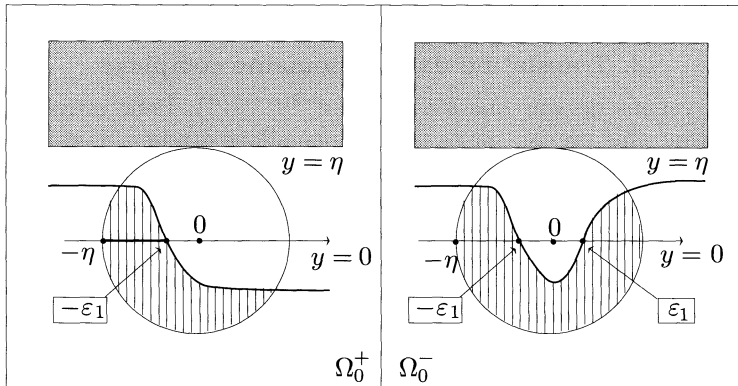


Figure 3. Les ouverts  $\Omega_0^\pm$

En utilisant les expressions (2.24)<sub>±</sub> on obtient :

$$(3.06) \quad w_0^\pm(x, h) = (1 - h^2 V(x + iA))^{-1/4} \\ \times e^{\pm iz(x+iA, h)/h} \sum_{n \geq 0} W_n^\pm(z(x + iA), h, z_\pm).$$

Tout l'intérêt de ce décalage apparaît maintenant. Pour  $x$  dans  $\Omega_0^\pm$ , en particulier pour  $x$  réel dans  $\Omega_0^+ \cap \mathbb{R} = ]-\eta; -\varepsilon_1[$  où  $\eta > \varepsilon_1 > 0$ , on a  $x + iA$  dans  $\Omega^\pm$  et l'expression (3.06) est le développement asymptotique de la solution de (3.02) vérifiant les conditions initiales (2.25)<sub>±</sub>. Mais, puisque  $z(x + iA, h) = z(x, h) + iA + O(h^2)$  (voir (2.11)), nous connaissons aussi les développements asymptotiques des solutions :

$$(3.07) \quad u_0^\pm = e^{\pm A/h} w_0^\pm.$$

Or si nous notons  $T_0(h)$  la matrice de l'opérateur de translation  $\tau$  dans la base  $(u_0^+, u_0^-)$ , nous avons :

$$(3.08) \quad T_0(h) = \begin{pmatrix} e^{A/h} & 0 \\ 0 & e^{-A/h} \end{pmatrix} T(h) = \begin{pmatrix} e^{-A/h} & 0 \\ 0 & e^{A/h} \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$(3.09) \quad T_0(h) = \begin{pmatrix} a(h) & c(h) \\ r(h) & \bar{a}(h) \end{pmatrix}$$

avec

$$(3.10) \quad c(h) = e^{2A/h} b(h) \quad \text{et} \quad r(h) = e^{-2A/h} \bar{b}(h).$$

Sur cette dernière expression on comprend tout le parti que l'on pourra tirer d'une étude locale près de  $x_0 = 0$  et de la connaissance de la matrice  $T_0(h)$  même modulo  $O(e^{-\varepsilon/h})$ , puisque le terme non-diagonal  $b(h)$  s'y trouve multiplié par un facteur exponentiellement grand. On peut donc espérer trouver dans cette base une matrice triangulaire permettant d'obtenir  $b(h)$ . Cette étude locale est l'objet de la suite de ce travail.

#### 4. Structure de l'espace des solutions

Nous commençons par l'étude de l'analyticité des solutions de (3.02) définies dans  $D(0, \eta)$ . Nous utilisons quelques rudiments de théorie fuchsienne (voir par exemple [OL]) et nous écrivons pour ce faire l'équation

$$(4.01) \quad (h^2 D^2 - 1)u(x) + h^2 V_0(x)u(x) = 0$$

sous la forme

$$(4.02) \quad -u'' + \frac{g(x, h)}{x^2}u = 0$$

où  $g(x, h)$  est une fonction analytique de  $x$  dans  $D(0, \eta)$  :

$$(4.03) \quad \begin{cases} g(x, h) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(h)x^n & \text{avec} \\ g_0(h) = 0, \quad g_1(h) = \nu, \quad g_2(h) = \nu\nu_1 - 1/h^2, \\ g_k(h) = \nu\nu_{k-1} & \text{pour } k \geq 3. \end{cases}$$

Nous avons la :

PROPOSITION 4.1. — *Il existe une solution non-triviale de (4.01) qui est analytique dans  $D(0, \eta)$ .*

*Preuve.* — En cherchant une solution du type  $u(x) = x^\alpha$  de l'équation

$$(4.04) \quad -u'' + \frac{g_0(x, h)}{x^2}u = 0,$$

on obtient l'équation indicielle

$$(4.05) \quad \alpha(\alpha - 1) = 0$$

qui admet deux solutions  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_0 = 0$  qui diffèrent d'un entier. On pose alors

$$(4.06) \quad u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(h)x^n$$

et en reportant (4.06) dans (4.04), on trouve :

$$(4.07) \quad \begin{cases} a_0 = 0, \quad a_1 \text{ quelconque,} \\ a_{n+1}(h) = \frac{1}{(n+1)n} \sum_{k=0}^n g_{n+1-k}(h)a_k(h) & \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

On termine la preuve de la proposition en utilisant le :

LEMME 4.2. — La série (4.06) où les  $a(h)$  sont donnés par (4.07) a un rayon de convergence non-nul, supérieur ou égal à  $\eta$ .

Preuve. — La fonction  $g(x, h)$  est analytique dans  $D(0, \eta)$ . Soient  $\rho \in ]0, \eta[$  et

$$(4.08) \quad K = \sup\{|g(x, h)|; |x| = \rho\}.$$

Par les inégalités de Cauchy on a :

$$(4.09) \quad |g_n(h)| \leq K\rho^{-n}.$$

On définit alors la suite  $(b_n)$  par :

$$(4.10) \quad \begin{cases} b_0 = 0, & b_1 = |a_1|, \\ b_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=0}^n b_j \rho^{j-n} & \text{pour } n \geq 2 \end{cases}$$

On montre alors — en utilisant (4.09) et (4.10) et par une récurrence très simple — que pour tout  $n \geq 0$  :

$$(4.11) \quad |a_n| \leq b_n.$$

On cherche maintenant le rayon de convergence de la série entière dont les coefficients sont les  $b_n$ . Pour cela on écrit (4.10) pour  $n = p$  et pour  $n = p - 1$ , puis on retranche la seconde égalité à la première. On obtient ainsi la relation de récurrence pour  $(b_n)$  :

$$(4.12) \quad \rho p(p-1)b_p = [(p-1)(p-2) - K]b_{p-1}.$$

De (4.12), on tire aisément que le rayon de convergence de la série entière à coefficients  $b_n$  est  $\rho$ , et par (4.11) que le rayon de convergence de  $u_0$  est supérieur ou égal à  $\rho$ , d'où le résultat puisque  $\rho$  est aussi proche que l'on veut de  $\eta$ .  $\square$

Nous cherchons maintenant une autre solution  $u_1$  de l'équation (4.01). Cette fois, le fait que les zéros de l'équation indicelle diffèrent d'un entier va entraîner qu'il n'y aura pas d'autre solution analytique indépendante de  $u_0$ . On fixe un choix de  $u_0$  en prenant  $a_1 = 1$  dans (4.06) et l'on cherche  $u_1$  sous la forme :

$$(4.13) \quad u_1(x) = u_0(x)v(x).$$

En reportant (4.13) dans l'équation (4.03), on trouve :

$$(4.14) \quad v(x) = \int^x \frac{dt}{(u_0(t))^2}.$$

Or, utilisant (4.06), on trouve :

$$(4.15) \quad \frac{1}{(u_0(t))^2} = a_1^{-2}t^{-2} - 2a_2a_1^{-3}t^{-1} + \dots.$$

Puisque  $a_0(h) = 0$  et  $a_1(h) = 1$ , on trouve  $a_2(h) = \frac{1}{2}\nu$  et

$$(4.16) \quad v(x) = -\frac{1}{x} + \nu \log(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n;$$

donc enfin

$$(4.17) \quad u_1(x) = \nu \log(x)u_0(x) + v_0(x)$$

où  $v_0$  est une fonction analytique dans  $D(0, \eta)$ . Nous avons donc obtenu la :

PROPOSITION 4.3. — *Les solutions de (4.01) sont de deux types :*

- *ou bien elles sont analytiques dans  $D(0, \eta)$  ;*
- *ou bien elles possèdent un point de ramification logarithmique à l'origine.*

COROLLAIRE 4.4. — *L'espace des solutions distributions de l'équation (4.01) est de dimension 3.*

*Preuve.* — Les distributions définies par la solution analytique d'une part, la valeur au bord de la solution ramifiée considérée comme fonction analytique du demi-plan supérieur d'autre part, et enfin la valeur au bord de la solution ramifiée considérée comme fonction analytique du demi-plan inférieur, sont indépendantes et forment une base de cet espace.  $\square$

## 5. Éléments d'analyse microlocale semiclassique

Ayant en vue une étude microlocale de l'équation (3.02), nous regroupons ici les quelques notions que nous utiliserons par la suite. Pour l'essentiel, ce qui suit est tiré de [SJ] et [HE-SJ] (voir aussi [MZ]). Nous nous limiterons au cadre de la dimension 1 (le seul dont nous ayons besoin), renvoyant le lecteur aux articles précités pour un exposé plus général.

a) *Symboles. Espaces de Sjöstrand.*

DÉFINITION 5.1. — Soit  $Z$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $\Phi$  une fonction continue à valeurs réelles, définie sur  $Z$ . On désigne par  $H_{\Phi}^{\text{loc}}(Z)$  l'ensemble des fonctions  $f(z, h)$ , définies dans  $Z \times ]0, h_0]$  (où  $h_0$  est un réel assez petit) telles que :

- (i)  $u$  est analytique en  $z$  pour tout  $h$  de  $]0, h_0]$ ;
- (ii)  $\forall K \subset\subset Z, \forall \varepsilon > 0, \exists C > 0, \forall (z, h) \in K \times ]0, h_0]$ ,

$$(5.01) \quad |f(z, h)| \leq C e^{(\Phi(z) + \varepsilon)/h}.$$

Pour  $\Phi = 0$  on parle de *symboles analytiques*.

On notera aussi  $H_{\Phi}(Z)$  l'ensemble des fonctions  $f(z, h)$  définies sur  $Z \times ]0, h_0]$  qui sont analytiques en  $z$  pour tout  $h$  et qui appartiennent à  $L^2(Z, e^{-2\Phi(z)/h} L(dz))$ .

DÉFINITION 5.2. — Soit  $(\alpha_j)$  une suite de fonctions holomorphes dans un même ouvert  $Z$  de  $\mathbb{C}$ , et telles que, pour tout compact  $K \subset Z$ , il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $z$  dans  $K$  et tout  $j \in \mathbb{N}$  on ait :

$$(5.02) \quad |\alpha_j(z)| \leq C^{j+1} j^j.$$

On dit alors que l'expression

$$(5.03) \quad \alpha(z, h) = \sum_{j \geq 0} \alpha_j(z) h^j$$

est un *symbole analytique classique* (SAC) formel (d'ordre 0 si  $\alpha_0 \neq 0$ ). On dit que  $\alpha(z, h)$  est *elliptique* lorsque le symbole principal  $\alpha_0$  ne s'annule pas sur  $Z$ .

LEMME 5.1. — Si  $\alpha(z, h)$  est un SAC formel d'ordre 0, alors pour tout ouvert  $\tilde{Z}$  relativement compact de  $Z$  on peut définir une réalisation  $\tilde{\alpha} \in H_0^{\text{loc}}(\tilde{Z})$  de  $\alpha$ , définie modulo  $O(e^{-\varepsilon/h})$  pour un  $\varepsilon > 0$ .

*Preuve.* — Il suffit de prendre

$$(5.04) \quad \tilde{\alpha}(z, h) = \sum_{0 \leq j \leq 1/Ch} \alpha_j(z) h^j$$

où  $C$  est défini pour  $\tilde{Z}$  comme dans (5.02).  $\square$



DÉFINITION 5.3. — Soit  $f \in H_{\Phi}^{\text{loc}}(Z)$ , et soit  $\tilde{Z}$  un ouvert de  $Z$ . On dit que  $f$  est *nulle* dans  $H_{\Phi}^{\text{loc}}(\tilde{Z})$  et on note  $f \equiv 0$ , si pour tout compact  $K$  de  $\tilde{Z}$ , il existe  $C > 0$  et  $\varepsilon > 0$  tels que, pour tout  $z$  dans  $K$  :

$$(5.05) \quad |f(z, h)| \leq C e^{(\Phi(z) - \varepsilon)/h}.$$

On notera  $MS(f)$  le complémentaire du plus grand ouvert  $\tilde{Z}$  de  $Z$  pour lequel  $f \equiv 0$  dans  $H_{\Phi}^{\text{loc}}(\tilde{Z})$ . On notera également  $f \equiv g$  pour deux éléments de  $H_{\Phi}^{\text{loc}}(Z)$  lorsque  $f - g \equiv 0$  dans  $H_{\Phi}^{\text{loc}}(Z)$ , i.e.  $MS(f - g) = \emptyset$ , et l'on parlera de la *classe* de  $f$  dans  $H_{\Phi}^{\text{loc}}(Z)$ .

b) *Transformations de FBI locales.* — Nous introduisons d'abord la classe adéquate de (familles de) distributions dépendant de  $h$  :

DÉFINITION 5.4. — Soit  $u = (u_h)$  une famille de distributions de  $\mathcal{D}'(Y)$  où  $Y$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  et où  $h$  varie dans  $]0, h_0]$  avec  $h_0$  assez petit. On dira que  $u$  est une (*famille de*) *distribution(s) semi-classique(s)* et l'on notera  $u \in \mathcal{W}(Y)$  si, pour tout  $\chi$  de  $C_0^{\infty}(Y)$ , il existe un entier positif  $N$  tel que

$$(i) \quad \chi u_h \in W^{-N}(\mathbb{R}) \text{ pour tout } h \text{ dans } ]0, h_0];$$

$$(ii) \quad \|\chi u_h\|_{W^{-N}} = O(h^{-N}) \text{ quand } h \rightarrow 0,$$

où l'on a noté  $W^{-N}(\mathbb{R})$  l'espace de Sobolev habituel.

On a alors le :

LEMME 5.2. — Soit  $(z, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  et soit  $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe dans un voisinage  $Z \times Y$  de  $(z_0, y_0)$ , vérifiant :

$$(i) \quad \partial_y \varphi(z_0, y_0) = -\theta_0 \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \quad \text{Im} \partial_{yy}^2 \varphi(z_0, y_0) > 0,$$

$$(iii) \quad \partial_{xy}^2 \varphi(z_0, y_0) \neq 0.$$

Soit aussi  $t(z, y, h)$  la réalisation dans  $Z \times Y$  d'un SAC elliptique et  $\chi \in C_0^{\infty}(Y)$  telle que  $0 \leq \chi \leq 1$  et  $\chi = 1$  dans un voisinage de  $y_0$ . Alors pour tout  $u \in \mathcal{W}(Y)$ , on définit un élément  $Tu$  de  $H_{\Phi}^{\text{loc}}(Z)$ , en posant

$$(5.06) \quad Tu(z, h) = \int e^{i\varphi(z, y)/h} t(z, y, h) \chi(y) u(y, h) dy$$

où

$$(5.07) \quad \Phi(z) = \sup \{ -\text{Im} \varphi(z, y) ; y \in Y \}.$$

On dit que  $Tu$  est la transformée de Fourier-Bros-Iagolnitzer (*FBI*) de  $u$ ; la classe de  $Tu$  dans  $H_{\Phi}^{\text{loc}}$  (modulo  $\equiv$ , cf. la définition 5.3) ne dépend pas du choix de  $\chi$ .

Comme à un opérateur intégral de Fourier (OIF), on associe à  $T$ , transformation de FBI, la transformation canonique  $\kappa_T : (y, \theta) \mapsto (z, \zeta)$ , d'un voisinage complexe de  $(y_0, \theta_0)$  dans un voisinage complexe de  $(z_0, \zeta_0)$ , où  $\zeta_0 = -2i\partial_z\Phi(z_0)$ .

c) *Distributions définies microlocalement.* — La connaissance de  $Tu$  dans un voisinage de  $z_0 = y_0 - i\theta_0$  ne renseigne que sur le comportement de  $u$  microlocalement près de  $(y_0, \theta_0)$ ; il ne faut donc pas espérer retrouver  $u$  à partir de cette seule information. Cependant, en considérant  $T$  comme un OIF elliptique, on voit que l'on peut définir un «pseudo-inverse»  $S$  tel que  $TS$  soit l'identité de  $H_{\Phi}^{\text{loc}}(Z)$  modulo des termes exponentiellement petits dans  $H_{\Phi}^{\text{loc}}(Z)$  (i.e.  $TSf \equiv f$  dans  $H_{\Phi}^{\text{loc}}(Z)$ ). Nous pouvons donc introduire sans ambiguïté la notion de distribution définie microlocalement :

DÉFINITION 5.5. — Soit  $(y_0, \theta_0) \in T^*(\mathbb{R})$ . Une distribution définie microlocalement près de  $(y_0, \theta_0)$  est la donnée pour toute transformation  $T$  de FBI d'un élément  $f_T(z, h)$  de  $H_{\Phi}^{\text{loc}}(Z)$ , où  $Z$  est la projection de l'image par  $\kappa_T$  d'un voisinage de  $(y_0, \theta_0)$ , de sorte que si  $T_1$  et  $T_2$  sont deux transformations de FBI et  $S_2$  l'inverse de  $T_2$ , on ait :

$$(5.08) \quad f_{T_1} \equiv (T_1 S_2) f_{T_2} \quad \text{dans} \quad H_{\Phi_1}^{\text{loc}}(Z_1).$$

La condition (5.08) de compatibilité entre les différents représentants est indispensable. En effet si  $u \in \mathcal{W}(Y)$  et si  $T_1$  et  $T_2$  sont deux transformations de FBI, données par  $(\varphi_1, a_1)$  et  $(\varphi_2, a_2)$ , définies près de  $(y_0, \theta_0)$ , et que l'on note pour  $i = 1, 2$

$$(5.09) \quad (z_i, \zeta_i) = \kappa_{T_i}(y_0, \theta_0),$$

alors on a

$$(5.10) \quad T_1 u \equiv (T_1 S_2) T_2 u \quad \text{dans} \quad H_{\Phi_1}^{\text{loc}}(Z_1)$$

où  $T_1 S_2$  est un OIF agissant de  $H_{\Phi_2}^{\text{loc}}(Z_2)$  dans  $H_{\Phi_1}^{\text{loc}}(Z_1)$  (voir [HE-SJ], appendice A1).

Si  $u$  est une distribution définie microlocalement près de  $(y_0, \theta_0)$ , on peut définir l'action sur  $u$  d'un OIF associé à une transformation canonique réelle  $\kappa$  et à un symbole analytique classique définis dans un voisinage de  $(y_0, \theta_0)$ , en remarquant que si  $T$  est une transformation de FBI comme ci-dessus et  $S$  son pseudo-inverse,  $TAS$  est encore un OIF dont la transformation canonique  $\kappa'$  associée est donnée par  $\kappa' = \kappa_T \circ \kappa \circ \kappa_T^{-1}$ .

d) *Transformation de FBI globale. Microsupports.* — Si dans le LEMME 5.2 on prend

$$(5.11) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2}i(z - y)^2,$$

on voit que les conditions (i) à (iii) sont remplies pour tout  $(z_0, y_0)$  de  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ . Pour cette raison on parle alors de *transformation de FBI globale*. La transformation canonique associée est alors :

$$(5.12) \quad \kappa_T(y, \theta) = (y - i\theta, \theta).$$

Si de plus on prend comme symbole

$$(5.13) \quad t(h) = Ch^{-3/4}$$

et en choisissant la constante  $C$  convenablement, on peut montrer que  $T$  est un opérateur unitaire de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $H_\Phi(\mathbb{C})$ , où la fonction  $\Phi$  est cette fois :

$$(5.14) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2}(\operatorname{Im} z)^2.$$

Grâce à cette transformation de FBI globale, nous pouvons maintenant introduire une notion naturelle de microsupport pour les distributions semi-classiques :

DÉFINITION 5.6. — Soit  $u \in \mathcal{W}(Y)$ . On dira que  $(y, \theta) \in Y \times \mathbb{R}$  n'appartient pas au microsupport de  $u$  s'il existe un voisinage  $\Omega$  de  $(y, \theta)$  dans  $Y \times \mathbb{R}$  tel que  $Tu \equiv 0$  dans  $H_\Phi^{\text{loc}}(Z)$ , où  $Z = \Pi_z(\kappa_T(\Omega))$ . On notera  $MS(u)$  le microsupport de  $u$ .

On peut éclairer cette notion en remarquant que si  $u$  est une distribution de  $W_{\text{loc}}^{-N}(Y)$  (i.e. une distribution semi-classique qui ne dépend pas de  $h$ ), alors on a immédiatement

$$(5.15) \quad MS(u) = (\operatorname{supp}(u) \times \{0\}) \cup WF_a(u),$$

où  $WF_a(u)$  est le front d'onde analytique de  $u$  (voir [SJ, chap. 6]).

On dispose aussi de la notion de microsupport pour les distributions définies microlocalement. En effet si  $f_{T_1}$  et  $f_{T_2}$  sont deux représentants d'une même distribution définie microlocalement, alors on a grâce à (5.08)

$$MS(f_{T_1}) = MS'(T_1 S_2)(MS(f_{T_2})),$$

où l'on a noté  $MS'(A)$  l'ensemble des  $(z_1, z_2)$  tels que  $(z_1, \bar{z}_2)$  appartienne au microsupport de l'OIF  $A$  (voir [HE-SJ], appendice d1).

Pour une distribution définie microlocalement  $u$ , on choisit le représentant  $f$  de  $u$  associé à la transformée de FBI globale  $T$  et on donne la :

DÉFINITION 5.7. — On dit que  $(y, \theta)$  appartient au microsupport de  $u$ , qu'on note encore  $MS(u)$ , si  $y - i\theta = \prod_z (\kappa_T(y, \theta))$  appartient à  $MS(f)$ .

Nous avons pour finir la proposition suivante, dont la démonstration peut être calquée sur celle du théorème 6.4 de [SJ] :

PROPOSITION 5.3. — Si  $P$  est un  $h$ -opérateur différentiel à coefficients analytiques et  $u$  une distribution semi-classique telle que :

$$(5.16) \quad Pu = O(e^{-\varepsilon/h}).$$

Alors :

$$(5.17) \quad MS(u) \subset \{(x, \xi) ; p(x, \xi) = 0\}.$$

## 6. Réduction microlocale à $Q_0(x, hD) = xhD$

Nous allons maintenant étudier l'équation (3.02) d'un point de vue microlocal en utilisant les outils décrits dans la section précédente. On pose d'abord :

$$(6.01) \quad \Psi(x) = \frac{x}{\nu} V_0(x).$$

La fonction  $\Psi(x)$  est analytique dans  $D(0, \eta)$ , et l'on peut supposer que  $\Psi(x)$  ne s'annule pas dans cet ouvert, quitte à prendre  $\eta$  (et donc  $\varepsilon_1$ ) assez petit. Pour  $x$  dans  $D(0, \eta)$ , nous écrivons l'équation (3.02) sous la forme équivalente (pour  $x \neq 0$ ) :

$$(6.02) \quad \begin{cases} Q(x, hD, h)u(x, h) + h^2u(x, h) = 0 & \text{où} \\ Q(x, hD, h) = \frac{x}{\nu\Psi(x)}(h^2D^2 - 1). \end{cases}$$

$Q$  est un  $h$ -opérateur différentiel, de symbole :

$$(6.03) \quad q(x, \xi) = \frac{x}{\nu\Psi(x)}(\xi^2 - 1).$$

Les caractéristiques de l'opérateur  $Q$  sont donc :

$$\{\xi = 1\}U\{\xi = -1\}U\{x = 0\}.$$

Elles sont simples en dehors de  $(x, \xi) = (0, 1)$  et  $(x, \xi) = (0, -1)$ . On concentre donc l'étude au voisinage de ces deux points. Pour  $(x, \xi)$  près de  $(0, 1)$  on a :

$$(6.04)_+ \quad \begin{cases} q(x, \xi) = \frac{1}{\nu\Psi(x)}(\theta + 2)x\theta = \frac{2}{\nu}x\theta + o((x, \theta)^2) & \text{où} \\ \theta = \xi - 1. \end{cases}$$

De même pour  $(x, \xi)$  proche de  $(0, -1)$  :

$$(6.04)_- \quad \begin{cases} q(x, \xi) = \frac{1}{\nu\Psi(x)}(\theta - 2)x\theta = -\frac{2}{\nu}x\theta + o((x, \theta)^2) & \text{où} \\ \theta = \xi + 1. \end{cases}$$

Nous allons donc nous ramener microlocalement à l'opérateur

$$Q_0(x, hD) = xhD$$

grâce à un théorème dû à HELFFER et SJÖSTRAND (voir [HE-SJ], appendice b, th. b1), encore valable ici bien que notre opérateur ne soit pas autoadjoint.

PROPOSITION 6.1. — *Il existe un OIF  $U_+$  (resp :  $U_-$ ), pas nécessairement unitaire, et un symbole analytique classique  $F_+(t, h)$  (resp :  $F_-(t, h)$ ) d'ordre 0 tels que*

$$(6.05)_+ \quad U_+^{-1}T_+^{-1}F_+(Q, h)T_+U_+ = Q_0,$$

$$(6.05)_- \quad (\text{resp : } U_-^{-1}T_-^{-1}F_-(Q, h)T_-U_- = Q_0), \quad \text{où}$$

$$(6.06) \quad Q_0(x, hD) = xhD, \quad T_+u(x, h) = e^{ix/h}u(x, h), \quad T_- = T_+^{-1},$$

l'égalité (6.05) $_{\pm}$  s'entendant au sens des opérateurs agissant sur des distributions définies microlocalement près de  $(0, 0)$ . On a aussi

$$(6.07)_{\pm} \quad f_0^+(t) = \frac{1}{2}\nu t + O(t^2), \quad f_0^-(t) = -\frac{1}{2}\nu t + O(t^2),$$

$$(6.08)_{\pm} \quad \kappa_{\pm}(x, \xi) = (x, \xi) + O((x, \xi)^2)$$

où  $f_0^\pm(t)$  est le symbole principal de  $F_\pm(t, h)$  et  $\kappa_\pm(x, \xi)$  est la transformation canonique associée à l'OIF  $U_\pm$  qu'on peut écrire :

$$(6.09) \quad \begin{cases} U_\pm u(x, h) = \int e^{i\psi_\pm(x, y, \theta)/h} \alpha_\pm(x, y, \theta, h) u(y, h) dy \frac{d\theta}{2\pi h} & \text{où} \\ \psi_\pm(x, y, \theta) = (x - y)\theta + O((x, y, \theta)^3) & \text{et} \\ \alpha(x, y, \theta, h) & \text{est un SAC de symbole principal 1} \end{cases}$$

Nous avons alors l'équivalence suivante :  $u$  est une solution définie microlocalement près de  $(0, 0)$  de l'équation

$$(6.10) \quad Q_0 u - \mu u = 0$$

si et seulement si  $T_+ U_+ u$  (resp.  $T_- U_- u$ ) est une solution définie microlocalement près de  $(0, 1)$  (resp. près de  $(0, -1)$ ) de l'équation

$$(6.11) \quad Qu + h^2 u = 0 \quad \text{avec}$$

$$(6.12)_+ \quad \mu = F_+(-h^2) = -\frac{1}{2}\nu h^2 + O(h^3)$$

$$(6.12)_- \quad (\text{resp. } \mu = F_-(-h^2) = \frac{1}{2}\nu h^2 + O(h^3)).$$

## 7. Le modèle de branchement

Nous étudions ici les solutions distributions de l'équation (6.10) :

$$(7.01) \quad \begin{cases} Q_0 u - \mu u = 0 & \text{avec} \\ \mu = \pm \frac{1}{2}\nu h^2 + O(h^3). \end{cases}$$

Notant  $H$  la fonction de Heaviside, on trouve deux solutions qui sont dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  puisque l'on a  $\text{Re}(i\mu/h) = O(h)$  (et donc  $\text{Re}(i\mu/h) > -1$ ) :

$$(7.02) \quad u^\pm(x, h, \mu) = |x|^{i\mu/h} H(\pm x).$$

Pour trouver d'autres solutions, on utilise la symétrie de l'opérateur  $Q_0$  en  $x$  et  $D$ . Plus précisément on a

$$(7.03) \quad Q_0 \mathcal{F}^{-1} = -\mathcal{F}^{-1}(Q_0 + h/i),$$

où  $\mathcal{F}^{-1}$  désigne la  $h$ -transformation de Fourier inverse :

$$(7.04) \quad \mathcal{F}^{-1} u(\xi) = \frac{1}{2\pi h} \int e^{ix\xi/h} u(x) dx.$$

Nous disposons donc de deux autres solutions  $v^\pm(x, h, \mu)$  dans  $\mathcal{S}'$  de (7.01) :

$$(7.05)_\pm \quad v^\pm(x, h, \mu) = \mathcal{F}^{-1}u^\pm(\cdot, h, \mu')(x) \quad \text{où} \quad \mu' = -(\mu + h/i).$$

On doit signaler ici que les distributions homogènes  $u^\pm(\cdot, h, \mu')$  sont définies par (voir par exemple [HÖ, chap. III]) :

$$(7.06)_+ \quad \langle u^+(\cdot, h, -(\mu + h/i)), \varphi \rangle = \frac{h}{i\mu} \int_0^{+\infty} x^{-i\mu/h} \varphi'(x) dx,$$

$$(7.06)_- \quad \langle u^-(\cdot, h, -(\mu + h/i)), \varphi \rangle = \frac{h}{i\mu} \int_{-\infty}^0 |x|^{-i\mu/h} \varphi'(x) dx.$$

Nous allons expliciter (7.05) $\pm$ . Pour ce faire, il suffit de remarquer que  $v^+$  (resp.  $v^-$ ) est valeur au bord d'une fonction analytique du demi-plan supérieur (respectivement du demi-plan inférieur) :

$$(7.07) \quad v^\pm(x, h, \mu) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \int e^{i(x \pm iy)\xi/h} |\xi|^{-1-i\mu/h} H(\pm\xi) \frac{d\xi}{2\pi h}.$$

Nous pouvons alors montrer le :

LEMME 7.1.

$$(7.08)_+ \quad v^+(x, h, \mu) = \frac{h^{-1-i\mu/h}}{2\pi} \Gamma(-i\mu/h) \left\{ e^{\mu\pi/2h} u^+(x, h, \mu) + e^{-\mu\pi/2h} u^-(x, h, \mu) \right\},$$

$$(7.08)_- \quad v^-(x, h, \mu) = \frac{h^{-1-i\mu/h}}{2\pi} \Gamma(-i\mu/h) \left\{ e^{-\mu\pi/2h} u^+(x, h, \mu) + e^{\mu\pi/2h} u^-(x, h, \mu) \right\}.$$

*Preuve.* — On effectue le changement de variable :

$$(7.09) \quad z = (y \mp ix)\xi/h.$$

On est alors ramené à

$$(7.10) \quad I_y^\pm(x) = \frac{1}{2\pi h} \left( \frac{h}{y \mp ix} \right)^{i\mu/h} \int_\gamma e^{-z} z^{-1-i\mu/h} dz,$$

où  $\gamma$  est l'image de  $\mathbb{R}^+$  par  $t \mapsto (y \mp ix)t/h$ . Par un changement de contour, on montre que

$$(7.11) \quad \int_\gamma e^{-z} z^{-1-i\mu/h} dz = \Gamma(-i\mu/h)$$

et l'on déduit le résultat de (7.02).  $\square$

Soit maintenant  $u$  une solution distribution de (7.01). Puisque  $(u^+, u^-)$  de même que  $(v^+, v^-)$  est une base de l'espace des solutions, il existe  $(\alpha_+, \alpha_-)$  et  $(\beta_+, \beta_-)$  dans  $\mathbb{C}^2$  tels que :

$$(7.12) \quad u = \alpha_+ u^+ + \alpha_- u^- = \beta_+ v^+ + \beta_- v^-.$$

Avec le LEMME 7.1, on obtient alors

$$(7.13) \quad \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \alpha_- \end{pmatrix} = B_\mu \begin{pmatrix} \beta_+ \\ \beta_- \end{pmatrix}$$

où

$$(7.14) \quad B_\mu = \frac{h^{-1-i\mu/h}}{2\pi} \Gamma(-i\mu/h) \begin{pmatrix} e^{\mu\pi/2h} & e^{-\mu\pi/2h} \\ e^{-\mu\pi/2h} & e^{\mu\pi/2h} \end{pmatrix}.$$

### 8. Solutions Microlocales

On peut voir (avec (7.02) et (7.07)) que nos quatre distributions  $u^\pm$  et  $v^\pm$  sont des distributions semi-classiques. Nous les considérerons donc désormais comme des distributions définies microlocalement dans l'ouvert  $B((0,0), \eta)$ , solutions microlocales de l'équation (7.01), obtenues après action de la transformation de FBI globale. Nous nous intéressons d'abord à leur microsupport.

PROPOSITION 8.1.

$$(8.01)_\pm \quad MS(u^\pm) = \{(y, \theta); (\pm y > 0 \text{ et } \theta = 0) \text{ ou } (y = 0)\},$$

$$(8.02)_\pm \quad MS(v^\pm) = \{(y, \theta); (\pm \theta > 0 \text{ et } y = 0) \text{ ou } (\theta = 0)\}.$$

*Preuve.* — On se contente de démontrer le lemme pour  $u^+$ . Par définition, nous avons l'équivalence

$$(8.03) \quad (y_0, \theta_0) \in MS(u^+) \iff (y_0 - i\theta_0) \in MS(Tu^+),$$

où

$$(8.04) \quad Tu^+(z, h) = \int e^{-(z-y)^2/2h} \chi(y) u^+(y, h) dy.$$

• Si  $\text{Re}(z) < 0$ , on montre facilement que  $z \notin MS(Tu)$  en prenant  $\chi$  telle que  $\text{supp}(\chi) \subset \mathbb{R}^{*+}$ .



• Si  $\text{Re}(z) > 0$  et  $\text{Im}z \neq 0$ , on effectue une déformation du contour dans (8.04) du type  $y \mapsto \tilde{y} = y - i\varepsilon\chi_1(y)$  où  $\chi_1 \in C_0^\infty(Y)$ , avec  $Y$  voisinage de  $y_0$  et  $\chi_1 = 1$  près de  $y_0$ . La décroissance exponentielle en découle facilement.  $\square$

Grâce au théorème de réduction (PROPOSITION 6.1), nous disposons de huit solutions de (6.11) :

$$(8.05) \quad \begin{cases} Q(x, hD, h)u(x, h) + h^2u(x, h) = 0 & \text{où} \\ Q(x, hD, h) = \frac{x}{\nu\Psi(x)}(h^2D^2 - 1), \end{cases}$$

les unes définies microlocalement dans  $B((0, 1), \varepsilon_2)$ , les autres dans  $B((0, -1), \varepsilon_2)$ . On les note :

$$(8.06) \quad \begin{cases} u_{++}(x, h) = T_+U_+u_+(x, h, \mu^+), \\ u_{+-}(x, h) = T_+U_+u_-(x, h, \mu^+), \\ v_{++}(x, h) = T_+U_+v_+(x, h, \mu^+), \\ v_{+-}(x, h) = T_+U_+v_-(x, h, \mu^+), \\ u_{-+}(x, h) = T_-U_-u_+(x, h, \mu^-), \\ u_{--}(x, h) = T_-U_-u_-(x, h, \mu^-), \\ v_{-+}(x, h) = T_-U_-v_+(x, h, \mu^-), \\ v_{--}(x, h) = T_-U_-v_-(x, h, \mu^-), \end{cases}$$

où

$$(8.07) \quad \mu^+ = F_+(-h^2, h) \quad \text{et} \quad \mu^- = F_-(-h^2, h).$$

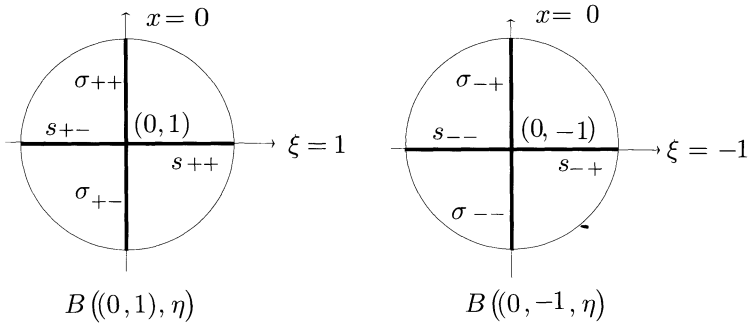


Figure 4. Segments caractéristiques

Pour décrire le microsupport de ces distributions définies microlocalement, nous introduisons les notations suivantes pour les segments caractéristiques (voir la figure 4) :

$$(8.08)' \quad \begin{cases} s_{++} = \{\xi = 1; 0 < x < \eta\}, \\ s_{+-} = \{\xi = 1; -\eta < x < 0\}, \\ s_{-+} = \{\xi = -1; 0 < x < \eta\}, \\ s_{--} = \{\xi = -1; -\eta < x < 0\}, \end{cases}$$

$$(8.08)'' \quad \begin{cases} \sigma_{++} = \{x = 0; 1 < \xi < 1 + \eta\}, \\ \sigma_{+-} = \{x = 0; 1 - \eta < \xi < 1\}, \\ \sigma_{-+} = \{x = 0; -1 < \xi < -1 + \eta\}, \\ \sigma_{--} = \{x = 0; -1 - \eta < \xi < -1\}. \end{cases}$$

Avec ces notations, nous avons la :

PROPOSITION 8.2.

a) *Les microsupports des distributions définies microlocalement dans  $B((0, 1), \eta)$  sont contenus dans l'adhérence de respectivement :*

$$\begin{aligned} s_{++} \cup \sigma_{++} \cup \sigma_{+-} & \text{ pour } u_{++}, \\ s_{+-} \cup \sigma_{++} \cup \sigma_{+-} & \text{ pour } u_{+-}, \\ s_{++} \cup \sigma_{++} \cup s_{+-} & \text{ pour } v_{++}, \\ s_{++} \cup \sigma_{+-} \cup s_{+-} & \text{ pour } v_{+-}. \end{aligned}$$

b) *De même, les microsupports des distributions définies microlocalement dans  $B((0, -1), \eta)$  sont contenus dans l'adhérence de respectivement :*

$$\begin{aligned} s_{-+} \cup \sigma_{--} \cup \sigma_{-+} & \text{ pour } u_{-+}, \\ s_{--} \cup \sigma_{--} \cup \sigma_{-+} & \text{ pour } u_{--}, \\ s_{--} \cup \sigma_{-+} \cup s_{-+} & \text{ pour } v_{-+}, \\ s_{--} \cup \sigma_{--} \cup s_{-+} & \text{ pour } v_{--}. \end{aligned}$$

*Preuve.* — On utilise le fait que  $\kappa_{\pm}(x, \xi) = (x, \xi) + O((x, \xi)^2)$  et que, si  $A$  est un OIF agissant sur des distributions définies microlocalement en  $(0, 0)$ , alors

$$MS(Au) \subset MS'(A)(MS(u))$$

(voir [HE-SJ], appendice d1).  $\square$

Nous terminons cette partie en remarquant que l'on peut étendre de manière unique les solutions  $v_{+-}$  et  $v_{-+}$ , définies microlocalement respectivement dans  $B((0, 1), \eta)$  et  $B((0, -1), \eta)$ , le long du segment caractéristique simple

$$(8.09) \quad \sigma = \{x = 0; -1 < \xi < 1\}.$$

Il suffit en effet de remarquer que ce sont des solutions de type WKB de l'équation (8.05) (cf. (8.06) et (6.09)). La première équation de transport étant

$$(8.10) \quad \frac{d}{dx} a_0(x) = 0,$$

le symbole principal de ces solutions est constant et nous avons choisi la même normalisation pour ces deux solutions. Notant toujours  $v_{+-}$  et  $v_{-+}$  leur extension nous avons donc la :

PROPOSITION 8.3. — *Il existe un symbole analytique classique d'ordre 0 et de symbole principal 1 tel que, sur  $\sigma$ , on ait :*

$$(8.11) \quad v_{+-} = M(h)v_{-+}.$$

### 9. Microsupport des solutions exactes

Revenons maintenant aux quatre solutions exactes  $u_0^+$  et  $u_0^-$ ,  $\tau u_0^+$  et  $\tau u_0^-$ , définies les unes dans  $\Omega_0^+$  et  $\Omega_0^-$ , les autres dans  $\tau\Omega_0^+$  et  $\tau\Omega_0^-$

On rappelle que (cf. figure 3) :

$$(9.01) \quad \begin{cases} ] - \eta; -\varepsilon_1[ \subset \Omega_0^+ \cap \mathbb{R}, & ] - \eta; -\varepsilon_1[ \cup ]\varepsilon_1; \eta[ \subset \Omega_0^- \cap \mathbb{R}, \\ ]\varepsilon_1; \eta[ \subset \tau\Omega_0^+ \cap \mathbb{R}, & ] - \eta; -\varepsilon_1[ \cup ]\varepsilon_1; \eta[ \subset \tau\Omega_0^- \cap \mathbb{R}. \end{cases}$$

D'après l'étude précédente, ces quatre solutions se prolongent analytiquement dans un ouvert du demi-plan inférieur. Nous considérons donc désormais  $u_0^\pm$  et  $\tau u_0^\pm$  comme des distributions de  $\mathcal{D}'(] - \eta, \eta[)$ , obtenues comme valeur au bord par le demi-plan inférieur des fonctions précédentes, solutions de l'équation :

$$(9.02) \quad \begin{cases} Q(x, hD, h)u(x, h) + h^2u(x, h) = 0 & \text{où} \\ Q(x, hD, h) = \frac{x}{\nu\Psi(x)}(h^2D^2 - 1). \end{cases}$$

Bien que l'espace des solutions distributions de cette équation soit de dimension 3 (voir le COROLLAIRE 4.4), trois quelconques parmi  $u_0^\pm$  et  $\tau u_0^\pm$  ne sont pas indépendantes. En effet ces quatre distributions sont par construction valeur au bord de solutions holomorphes dans un ouvert du demi-plan inférieur et engendrent donc un espace de dimension 2. Puisque  $u_0^+$  et  $u_0^-$  sont indépendantes, nous retrouvons les relations de la troisième partie :

$$(9.03) \quad \begin{cases} \tau u_0^+ = a(h)u_0^+ + c(h)u_0^-, \\ \tau u_0^- = r(h)u_0^+ + d(h)u_0^-. \end{cases}$$

Le reste de ce travail va consister à retrouver ces coefficients à une erreur exponentiellement petite près en « microlocalisant » ces quatre distributions et en utilisant les solutions microlocales de la huitième partie. Nous donnons dans la proposition suivante les renseignements sur le microsupport de  $u_0^\pm$  et  $\tau u_0^\pm$  qui découlent des expressions (2.24) $_{\pm}$  et de la PROPOSITION 5.3 :

PROPOSITION 9.1. —  $u_0^\pm$  et  $\tau u_0^\pm$  sont des distributions semi-classiques et avec les notations de (6.03) et (8.08) on a :

$$(9.04) \quad \begin{cases} MS(u_0^+) \subset q^{-1}(0) \setminus s_{--}, & MS(u_0^-) \subset q^{-1}(0) \setminus s_{+-}, \\ MS(\tau u_0^-) \subset q^{-1}(0) \setminus s_{++}, & MS(\tau u_0^+) \subset q^{-1}(0) \setminus s_{-+}. \end{cases}$$

Nous pouvons être encore plus précis sur le microsupport de ces solutions, en utilisant le fait qu'elles sont valeurs au bord de fonctions analytiques dans un ouvert du demi-plan inférieur. Nous avons en effet la proposition suivante (voir aussi [MR, chap. 5]) :

PROPOSITION 9.2. — Soit  $(u_h) \in \mathcal{W}(\mathbb{R})$ . S'il existe une famille de fonctions  $(f_h)$  de  $H_{C_0|\text{Im}z}^{\text{loc}}(\Omega)$  où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$  de la forme

$$(9.05) \quad \Omega = \{z \in \mathbb{C}; \text{Re}z \in Y \text{ et } -\alpha < \text{Im}z < 0\}$$

telle que pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$

$$(9.06) \quad \langle u_h, \varphi \rangle = \lim_{y \rightarrow 0^+} \int f(x - iy, h) \varphi(x) dx$$

alors :

$$(9.07) \quad MS(u) \cap \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2; \eta > C_0\} = \emptyset.$$

*Preuve.* — Soit  $(\xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R}^2$ , tel que  $\eta_0 > C_0$ . On doit montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$(9.08) \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} \int e^{-(z-x)^2/2h} \chi(x) f(x-iy, h) dx = O(e^{(\operatorname{Im} z)^2/2h - \varepsilon/h})$$

uniformément pour tout  $z$  dans un voisinage complexe de  $z_0 = \xi_0 - i\eta_0$ . On note  $I_y(z)$  l'intégrale du premier membre de (9.08). Puisque  $f$  est analytique dans  $\Omega$ , on peut changer de contour dans cette intégrale et prendre  $x \mapsto \tilde{x} = x - i\alpha_0\chi_1(x)$ , où  $\chi_1 \in C_0^\infty(X)$  ( $X$  est un voisinage de  $\xi_0$  et  $0 \leq \chi_1 \leq 1$  avec  $\chi_1 = 1$  près de  $x_0$ ), en prenant  $y$  et  $\alpha_0$  assez petits. Le résultat en découle alors facilement.  $\square$

On peut montrer que nos distributions vérifient les conditions de la proposition précédente avec  $C_0 = 1$ . On obtient donc :

PROPOSITION 9.3 (voir figure 5).

$$MS(u_0^+) \subset q^{-1}(0) \setminus (s_{--} \cup \sigma_{++}), \quad MS(u_0^-) \subset q^{-1}(0) \setminus (s_{+-} \cup \sigma_{++}),$$

$$MS(\tau u_0^+) \subset q^{-1}(0) \setminus (s_{-+} \cup \sigma_{++}), \quad MS(\tau u_0^-) \subset q^{-1}(0) \setminus (s_{++} \cup \sigma_{++}).$$

En fait nous verrons que le problème de branchement avec la PROPOSITION 9.3 entraîne que les microsupports de  $u_0^-$  et  $\tau u_0^-$  sont contenus dans  $s_{--} \cup \sigma_{--} \cup s_{-+}$ , et donc que ces deux distributions sont proportionnelles. On va donc trouver une matrice de passage triangulaire, ce qui correspond bien à ce que nous attendions après l'étude de la troisième partie.

## 10. La matrice de translation

Puisque nos quatre solutions  $u_0^\pm$  et  $\tau u_0^\pm$  sont des distributions semi-classiques, on peut les considérer comme des distributions définies microlocalement dans  $] -\eta, \eta[ \times \mathbb{R}$ , solutions microlocales de (9.02) (voir aussi la remarque avant (8.05)), et c'est ce point de vue que nous adoptons dans toute la suite. Nous allons maintenant recoller ces solutions microlocales avec celles de la huitième partie. Nous avons d'abord la :

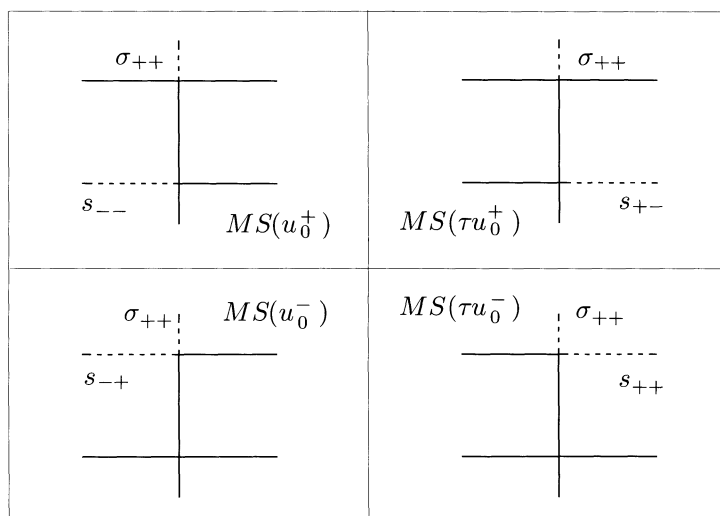


Figure 5. Microsupports

PROPOSITION 10.1.

(i) Il existe deux symboles analytiques classiques d'ordre 0,  $d^\pm(h)$  de symbole principal 1 tels que :

$$\begin{cases} \tau u_0^+(x, h) = e^{-i\pi/2h} d^+(h) u_{++}(x, h) & \text{près de } s_{++}, \\ \tau u_0^-(x, h) = e^{i\pi/2h} d^-(h) u_{-+}(x, h) & \text{près de } s_{-+}. \end{cases}$$

(ii) Il existe deux symboles analytiques classiques d'ordre 0,  $g^\pm(h)$  de symbole principal 1 tels que :

$$\begin{cases} u_0^+(x, h) = e^{i\pi/2h} g^+(h) u_{+-}(x, h) & \text{près de } s_{+-}, \\ u_0^-(x, h) = e^{-i\pi/2h} g^-(h) u_{--}(x, h) & \text{près de } s_{--}. \end{cases}$$

*Preuve.* — La proposition résulte d'une part de la propagation des singularités pour un opérateur à caractéristiques simples, et d'autre part du fait que toutes les solutions écrites ci-dessus sont du type WKB avec pour symbole principal 1, ce qu'on peut voir aisément en reprenant les définitions (6.09) et (8.06).  $\square$

Nous allons maintenant exprimer les deux solutions distributions  $\tau u_0^+$  et  $\tau u_0^-$  près de  $(0,1)$  dans la base de solutions microlocales  $(v_{++}, v_{+-})$ .

On écrit donc :

$$(10.01) \quad \tau u_0^+ = \lambda_+ v_{++} + \lambda_{+-} v_{+-},$$

$$(10.02) \quad \tau u_0^- = \gamma_+ v_{++} + \gamma_{+-} v_{+-}.$$

Au vu des PROPOSITIONS 8.2 et 9.3 on doit avoir  $\lambda_+ = \gamma_+ = 0$ , puisque  $\tau u_0^+$  et  $\tau u_0^-$  n'ont pas de microsupport sur  $s_{++}$ . Nous considérons d'abord (10.01). On a :

$$(10.03) \quad \tau u_0^+ = 0v_{++} + \lambda_{+-} v_{+-};$$

donc avec le modèle de branchement près de (0,1) (voir (7.14))

$$(10.04) \quad \tau u_0^+ = \alpha_{++} u_{++} + \alpha_{+-} u_{+-}$$

où  $\alpha_{++}$  et  $\alpha_{+-}$  sont donnés par

$$(10.05) \quad \begin{pmatrix} \alpha_{++} \\ \alpha_{+-} \end{pmatrix} = B_{\mu_+} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{+-} \end{pmatrix}$$

avec

$$(10.06) \quad B_{\mu_+} = R_+ \begin{pmatrix} E_+ & 1/E_+ \\ 1/E_+ & E_+ \end{pmatrix}$$

et

$$(10.07) \quad R_+ = \frac{h^{-1-i\mu_+/h}}{2\pi} \Gamma(-i\mu_+/h), \quad E_+ = e^{\mu_+\pi/2h}.$$

Or sur  $\{(x, \xi); \xi = 1, \varepsilon_1 < x < \eta\}$ , nous savons que (voir la PROPOSITION 10.1) :

$$\tau u_0^+ = e^{-i\pi/2h} d^+(h) u_{++}.$$

Donc, en comparant avec (10.04), on obtient :

$$(10.08) \quad \alpha_{++} = e^{-i\pi/2h} d_+.$$

Nous avons finalement le :

LEMME 10.2.

$$10.09 \quad \begin{cases} \alpha_{+-} = e^{-i\pi/2h} d_+(h) e^{\mu_+\pi/h} \\ \lambda_{+-} = 2\pi h^{1+i\mu_+/h} \frac{1}{\Gamma(-i\mu_+/h)} e^{\mu_+\pi/2h} e^{-i\pi/2h} d_+(h) \end{cases}$$

*Preuve.* — Avec les notations ci-dessus, on obtient l'équivalence :

$$(R_+/E_+)\lambda_{+-} = e^{-i\pi/2h}d_+(h), \quad R_+E_+\lambda_{+-} = \alpha_{+-}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_{+-} = e^{-i\pi/2h}(E_+/R_+)d_+(h), \quad \alpha_{+-} = E_+^2 e^{-i\pi/2h}d_+(h). \quad \square$$

En utilisant à nouveau la PROPOSITION 10.1 et avec les notations de (9.04)

$$(10.10) \quad \begin{cases} \tau u_0^+ = a(h)u_0^+ + c(h)u_0^-, \\ \tau u_0^- = r(h)u_0^+ + d(h)u_0^-, \end{cases}$$

nous obtenons en particulier la :

PROPOSITION 10.3.

$$(10.11) \quad a(h) = e^{-i\pi/h} \frac{d_+(h)}{g_+(h)} e^{\mu+\pi/h}.$$

On étudie maintenant  $\tau u_0^+$  près de  $(0, -1)$ . De la même manière qu'auparavant nous avons :

$$(10.12) \quad \tau u_0^+ = \lambda_{-+}v_{-+} + \lambda_{--}v_{--}.$$

En utilisant cette fois le modèle de branchement près de  $(0, -1)$ , nous pouvons écrire

$$(10.13) \quad \tau u_0^+ = \alpha_{-+}u_{-+} + \alpha_{--}u_{--}$$

où  $\alpha_{-+}$  et  $\alpha_{--}$  sont donnés par

$$(10.14) \quad \begin{pmatrix} \alpha_{-+} \\ \alpha_{--} \end{pmatrix} = B_{\mu_-} \begin{pmatrix} \lambda_{-+} \\ \lambda_{--} \end{pmatrix}$$

avec

$$(10.15) \quad B_{\mu_-} = R_- \begin{pmatrix} E_- & 1/E_- \\ 1/E_- & E_- \end{pmatrix}$$

et

$$(10.16) \quad R_- = \frac{h^{-1-i\mu_-/h}}{2\pi} \Gamma(-i\mu_-/h), \quad E_- = e^{\mu-\pi/2h}.$$

Or nous avons le :



LEMME 10.4.

- (i)  $\alpha_{-+} = 0$ ;
- (ii)  $\lambda_{-+} = M(h)\lambda_{+-}$ ,

où  $M(h)$  est le SAC de symbole principal 1 défini dans la PROPOSITION 8.3.

*Preuve.*

La partie (i) résulte des PROPOSITIONS 9.3 et 8.2 concernant les microsupports de  $\tau u_0^+$  et  $u_{-+}$ .

La partie (ii) est une conséquence de la PROPOSITION 8.3.  $\square$

En reportant ces renseignements dans (10.14) on obtient la :

PROPOSITION 10.5.

$$(10.17) \quad \begin{cases} \lambda_{--} = -E_-^2 \lambda_{-+}, \\ \alpha_{--} = M(h)(R_-/R_+)E_+E_-d_+(h)(E_-^{-2} - E_-^2). \end{cases}$$

Enfin avec la PROPOSITION 10.1 nous obtenons :

PROPOSITION 10.6.

$$(10.18) \quad c(h) = \frac{d^+(h)}{g^-(h)} M(h) h^{i(\mu^+ - \mu^-)/h} \times e^{(\mu^+ + \mu^-)\pi/2h} \frac{\Gamma(-i\mu^-/h)}{\Gamma(-i\mu^+/h)} 2sh(-\mu^- \pi/h)$$

Nous pourrions prouver de la même manière la proposition suivante en étudiant l'expression (10.02) et l'analogie pour  $\tau u_0^-$  de (10.12) :

PROPOSITION 10.7.

- (i)  $r(h) = 0$ ;
- (ii)  $d(h) = e^{i\pi/h} \frac{d_-(h)}{g_-(h)} e^{\mu^- \pi/h}$ .

Ce qui est tout à fait conforme à ce que nous attendions (voir (3.09)). La proposition suivante n'est qu'une réécriture des PROPOSITIONS 10.3 et 10.6 avec les notations de (3.10) et après prise en compte des erreurs exponentiellement petites négligées dans notre raisonnement microlocal.

PROPOSITION 10.8.

- (i)  $a(h) = e^{-i\pi/h} \beta_1(h)(1 + O(e^{-\varepsilon/h}))$ ;
- (ii)  $b(h) = e^{-2A/h} h^{-i\nu h \beta_2(h)/2} \nu h \pi \beta_3(h)(1 + O(e^{-\varepsilon/h}))$ ,

où  $\beta_1(h), \beta_2(h)$  et  $\beta_3(h)$  sont des symboles analytiques classiques de symbole principal 1.

On utilise maintenant les notations du LEMME 1.2. et on obtient le :

THÉORÈME.

(i) *Il existe trois symboles analytiques classiques  $\tilde{\alpha}_1$ ,  $\tilde{\alpha}_2$  et  $\tilde{\alpha}_3$  de symbole principal 1 tels que :*

$$(10.19) \quad \begin{cases} S(E) = \pi E^{1/2} \tilde{\alpha}_1(E^{-1/2}), \\ b(E) = \nu \pi E^{-1/2} e^{-2AE^{1/2}} E^{-\frac{1}{2}(i\nu E^{-1/2} \tilde{\alpha}_2(E^{-1/2}))} \tilde{\alpha}_3(E^{-1/2}). \end{cases}$$

(ii) *Il existe deux symboles analytiques classiques  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  de symbole principal 1, un réel  $\varepsilon > 0$ , et un entier  $n_0(\varepsilon) > 0$  tel que, pour tout  $n > n_0(\varepsilon)$  on a :*

$$(10.20) \quad \gamma_n = 4|\nu| \alpha_1\left(\frac{1}{n}\right) e^{-2An} n^{-(\operatorname{Im} \nu/n) \alpha_2(1/n)} + O(e^{-(2A+\varepsilon)n}).$$

Ce qui est bien le résultat annoncé.

Le problème qui se pose maintenant naturellement est de savoir si une telle étude est possible dans le cas d'un potentiel à pôles doubles. Nous devons admettre que celle-ci ne semble pas devoir relever des techniques employées ici, qui utilisent de manière essentielle le fait que l'opérateur correspondant est à caractéristiques simples. Quoiqu'il en soit, il ne faut pas espérer obtenir pour les pôles doubles un résultat du type de (10.20), puisqu'il est bien connu des spécialistes des problèmes inverses pour l'équation de Hill que certains potentiels à pôles doubles ne donnent qu'un nombre fini de gaps ouverts.

## BIBLIOGRAPHIE

- [AV-SI] AVRON (J.) and SIMON (B.). — *The Asymptotics of the Gap in the Mathieu Equation*, Ann. Physics, t. **134**, 1981, p. 76–84.
- [BR] BRILLOUIN (L.). — *The BKW Approximation and Hill's Equation, II*, Quart. Appl. Math., t. **VII**, 4, 1949, p. 363–380.
- [EC] ÉCALLE (J.). — *Les fonctions réurgentes (en trois parties)*. — Pub. Mathématiques d'Orsay, 81-05, 1981.
- [GE-GR] GÉRARD (C.) and GRIGIS (A.). — *Precise Estimates of Tunneling and Eigenvalues near a Potential Barrier*, J. Differential Equations, t. **72**, 1988, p. 149–177.

- [GR] GRIGIS (A.). — *Estimations asymptotiques des intervalles d'instabilité pour l'équation de Hill*, Ann. Sci. École Norm. Sup.(4), t. **20**, 1987, p. 641–672.
- [HE-SJ] HELFFER (B.) and SJÖSTRAND (J.). — *Semiclassical Analysis for Harper's Equation, III*, Mémoire n° 39, Bull. Soc. Math. France, 1989.
- [HO] HOCHSTADT (H.). — *Asymptotic Estimates for the Sturm-Liouville Spectrum*, Comm. Pure Appl. Math., t. **XIV**, 1961, p. 749–764.
- [HÖ] HÖRMANDER (L.). — *The Analysis of Linear Partial Differential Equations, I*. — Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 256, Springer, 1983.
- MA-WI] MAGNUS (W.) and WINKLER (S.). — *Hill's Equation*. — Interscience Publishers, John Wiley, 1969.
- [MR] MARTINEZ (A.). — *Estimations de l'effet tunnel pour le double puits II, états hautement excités*, Bull. Soc. Math. France, t. **116**, 1988, p. 199–229.
- [MZ] MÄRZ (C.). — *Spectral Asymptotics near the Potential Maximum for Hill's Equation*, Thèse, Pub. Université Paris-Sud, 1990.
- [OL] OLVER (F.W.J.). — *Asymptotics and Special Functions*. — Academic Press, 1974.
- [PH] PHAM (F.). — in *Algebraic Analysis, vol. II*, vol. dedicated to Prof. Sato. — Academic Press, 1988, p. 699–726.
- [RE-SI] REED (M.) and SIMON (B.). — *Methods of Modern Mathematical Physics IV*. — Academic Press, 1978.
- [SJ] SJÖSTRAND (J.). — *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque n° 95, 1982.
- [SK] SKRIGANOV (M.M.). — *Geometric and Arithmetic Methods in the Spectral Theory of Multidimensional Periodic Operators*, Proc. Steklov Inst. Math., t. **171**, 1987.
- [TR] TRUBOWITZ (E.). — *The Inverse Problem for Periodic Potentials*, Comm. Pure Appl. Math., t. **XXX**, 1977, p. 321–337.
- [VO1] VOROS (A.). — *Spectre de l'équation de Schrödinger et méthode BKW*, Pub. Mathématiques d'Orsay 81–09, 1981.
- [VO2] VOROS (A.). — *The Return of the Quartic Oscillator. The Complex WKB Method*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., t. **39**, **3**, 1983, p. 231–338.