BULLETIN DE LA S. M. F.

C. LE PAIGE

Sur la règle de multiplication des déterminants

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 67-69

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__67_1>

Sur la règle de multiplication des déterminants;
par M. C. LE PAIGE.

(Séance du 4 février 1881.)

Soient les trois déterminants

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

où

$$(1) \qquad c_{ik} = a_{i1} b_{k1} + a_{i2} b_{k2} + \dots + a_{in} b_{kn} = a_{i1} b_{k1} + d_{ik}.$$

Nous représentons par A_{pq}, B_{pq} les mineurs de a_{pq}, b_{pq} dans les déterminants A et B.

Cela posé, si nous multiplions le déterminant C par A_{11}, en multipliant par A_{11} les éléments de la première rangée, et que nous ajoutions à cette première rangée les $n-1$ dernières, respectivement multipliées par A_{21}, A_{31}, ..., A_{n1}, nous aurons, en ayant égard aux relations (1) et aux identités

$$a_{1r}A_{11} + a_{2r}A_{21} + \ldots + a_{nr}A_{n1} = \frac{A}{0},$$

suivant que r est égal à 1 ou est différent de 1,

$$CA_{11} = A \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{n1} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} \text{ (1)}.$$

Multiplions les deux membres de cette identité par B_{11}, et ajoutons à la première colonne du déterminant qui figure dans le second membre les $(n-1)$ dernières, respectivement multipliées par B_{21}, B_{31}, ..., B_{n1}; nous aurons

$$CA_{11}B_{11} = AB \begin{vmatrix} 1 & b_{21} & \ldots & b_{n1} \\ a_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Or, en retranchant des $(n-1)$ dernières colonnes de ce déterminant la première, successivement multipliée par b_{21}, b_{31}, ..., b_{n1}, nous trouvons, à cause de (1),

$$CA_{11}B_{11} = AB \begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} & \ldots & d_{2n} \\ d_{32} & d_{33} & \ldots & d_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n2} & d_{n3} & \ldots & d_{nn} \end{vmatrix} = AB.D.$$

Il est visible que D est formé à l'aide de A_{11}, B_{11}, comme C au

(1) Cette formule se trouve également dans une petite Notice de M. Édouard Weyr (*Sitzb. der kön. böhm. Gesellschaft der Wiss.* Prague, 1880) et dans notre Mémoire *Sur quelques points de la théorie des formes algébriques* (*Mém. de la Soc. royale des Sciences de Liège*. 1880).

moyen de A et B. En conséquence, si la règle de multiplication est vraie pour deux déterminants d'ordre $n - 1$, elle est vraie pour deux déterminants d'ordre n.

Puisqu'elle est évidente pour $n = 2$, elle est générale.