BULLETIN DE LA S. M. F.

MARIUS VAN DER PUT
MARC REVERSAT

Construction analytique rigide de variétés abéliennes

Bulletin de la S. M. F., tome 117, nº 4 (1989), p. 415-444
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_4_415_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 415–444.

CONSTRUCTION ANALYTIQUE RIGIDE DE VARIÉTÉS ABÉLIENNES

PAR

MARIUS VAN DER PUT et MARC REVERSAT (*)

RÉSUMÉ. — Soient R un anneau de valuation (non nécessairement discrète), K son corps des fractions, $0 \to T \to G \to A \to 0$ une extension d'un R-schéma abélien A par une tore T sur R déployé et $\Lambda \subset G \otimes_R K$ un sous-groupe libre de rang le rang de T. Si Λ est un réseau de $G \otimes_R K$ (*cf.* (1.6)), alors $(G \otimes_R K)/\Lambda$ est canoniquement muni d'une structure de groupe analytique propre sur K. La partie principale de ce travail consiste à donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que $(G \otimes_R K)/\Lambda$ soit une variété abélienne.

ABSTRACT. — Let R be a complete valuation ring (may be not discrete) and K its field of fraction. Let $0 \to T \to G \to A \to 0$ be an extension of an abelian R-scheme A by a split R-torus and let $\Lambda \subset G \otimes_R K$ be a free subgroup of rand $= rk(T)$. If Λ satisfies some other natural conditions (we say that Λ is a lattice in $G \otimes_R K$), then $(G \otimes_R K)/\Lambda$ is canonically a proper rigid analytic group over K. The main part of this work is to give necessary and sufficient condition for $(G \otimes_R K)/\Lambda$ to be an abelian variety.

Introduction

Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}^g$, alors le tore analytique $\mathbb{C}^g/\Lambda$ est une variété abélienne si et seulement si il existe une forme hermitienne $H : \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$ définie positive telle que $(\operatorname{im} H)(\Lambda \times \Lambda)$ soit inclus dans $\mathbb{Z}$ (*cf.* [M1, p. 35]).

Cette construction de variétés abéliennes se généralise à la situation où le corps de base K est complet pour une valeur absolue non archimédienne. Plusieurs résultats ont été obtenus, selon au moins deux points de vue :

(1) Soit Λ un réseau multiplicatif du tore algébrique $T = (K^*)^g$. Le tore analytique rigide T/Λ est une variété abélienne si et seulement si il

(*) Texte reçu le 19 septembre 1988, révisé le 12 mai 1989.

M. VAN DER PUT, Mathematick Instituut, Rijksuniversiteit, Postbus 800, 9700 Av. Groningen, Pays-Bas.
M. REVERSAT, Univ. Paul Sabatier, Mathématiques, Bât. 1R2, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France.

existe un homomorphisme $\varphi : \Lambda \to X(T)$, où $X(T)$ désigne le groupe des caractères de T, tel que la forme $H : \Lambda \times \Lambda \to K^*$, $H(\lambda_1, \lambda_2) = \varphi(\lambda_1)(\lambda_2)$, soit symétrique et que la forme $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda \times \Lambda \to -\log|H(\lambda_1, \lambda_2)| \in \mathbb{R}$ soit définie positive (*cf.* [G1] et [F–vdP1, p. 198]).

(2) Soit R un anneau nœthérien, intègre, complet pour la topologie I-adique, où $I \neq (0)$ est un idéal de R. Soient K le corps des fractions de R, T un tore algébrique déployé sur R de rang g et $\Lambda \subset T(K)$ un sous-groupe libre de rang g. On suppose qu'il existe un homomorphisme $\varphi : \Lambda \to X(T)$ ($X(T)$ désigne le groupe des caractères de T) tel que la forme $H : \Lambda \times \Lambda \to K^*$, $H(\lambda_1, \lambda_2) = \varphi(\lambda_1)(\lambda_2)$, soit symétrique et que $H(\lambda, \lambda) \in I$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Dans [M2], D. MUMFORD a construit un schéma en groupes surR, qu'on notera (abusivement) "T/Λ", tel que sa fibre générique ("T/Λ") $\otimes_R K$ soit une variété abélienne.

La construction (2) peut se résumer (en simplifiant) de la manière suivante. On construit à partir du tore algébrique T sur R un schéma formel $\mathcal{C}$ sur R muni d'une action discrète de Λ. Le schéma formel $\mathcal{C}/\Lambda$ est algébrisable et donne le schéma en groupe "T/Λ". Lorsque R est un anneau de valuation discrète complet, le lien entre (1) et (2) est le suivant : l'espace analytique rigide $\mathcal{C} \otimes_R K$ sur K, associé au schéma formel $\mathcal{C}$ est en fait l'espace analytique rigide T^{an} obtenu par analytification du tore algébrique $T \otimes_R K$ sur K et l'espace analytique $(\mathcal{C}/\Lambda) \otimes_R K$ s'identifie à T^{an}/Λ, le quotient dans la catégorie des espaces analytiques de T^{an} par le sous-groupe discret Λ. On voit que le point de vue (1) est plus restrictif que (2), puisqu'on se limite au cas où R est un anneau de valuation et que l'on ne construit que la fibre générique ("T/Λ") $\otimes_R K$. Cependant (1) a l'avantage d'être élémentaire, à condition d'admettre quelques propriétés des espaces analytiques, et sa démonstration est proche du cas complexe ; en particulier la construction de l'espace analytique T^{an}/Λ est évidente et il n'y a pas à faire le choix d'un schéma formel $\mathcal{C}$.

La construction suivante généralise (2).

(3) Soient R et K vérifiant les hypothèses de (2). Soit A un schéma abélien sur R et G une extension de A par un tore déployé T sur R. On a donc une suite exacte de schémas en groupes sur R

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Soit $\Lambda \subset G(K)$ un sous-groupe libre de rang le rang de T. C.-L. CHAI ([C, chapitre 2]) et G. FALTINGS ([F]) ont donné un ensemble de conditions portant sur Λ et G permettant de construire un schéma en groupes "G/Λ" sur R, tel que sa fibre générique "(G/Λ") $\otimes_R K$ soit une variété abélienne sur K.

Le but de notre article est de donner la construction (3), lorsque le corps K est valué complet non-archimédien, en termes d'espaces analytiques rigides, c'est-à-dire à la manière de (1). Nous avons voulu simplifier les conditions sur Λ et G, donner des démonstrations élémentaires, proches de celles de [M1, p. 35], [G1], et [F–vdP1, p. 198]. Signalons que des énoncés et des idées allant dans le sens de ce travail se trouvent depuis longtemps dans [R].

On peut décrire nos résultats principaux de la manière suivante. Soient R un anneau de valuation (non nécessairement discrète) complet, K son corps des fractions, A un schéma abélien sur R, G une extension de A par un tore algébrique T sur R (on a donc une suite exacte $0 \to T \to G \xrightarrow{\pi} A \to 0$), $X(T)$ le groupe de caractères de T, $\tau : X(T) \to \mathrm{Pic}^0(A)(R)$ l'homomorphisme de groupes associé à G et Λ un sous-groupe de $G(K)$. On a $A(K) = A(R)$, d'où (la dernière flèche provient de $-\log|\cdot|$).

$$\ell : G(K) \longrightarrow \frac{G(K)}{G(R)} \xrightarrow{\sim} \frac{T(K)}{T(R)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om(X(T), K^*/R^*) \longrightarrow \mathcal{H}om(X(T), \mathbb{R}).$$

On dit que le sous-groupe Λ de $G(K)$ est un réseau si ℓ est injectif sur Λ et si $\ell(\Lambda)$ est un réseau de $\mathcal{H}om(X(T), \mathbb{R})$. Si Λ est un réseau de $G(K)$, $(G \otimes_R K)/\Lambda$ est canoniquement muni d'une structure de groupe analytique propre sur K (*cf.* (1.6.3)). Le THÉORÈME (2.1) affirme que $(G \otimes_R K)/\Lambda$ est une variété abélienne si et seulement si il existe φ et D possédant les propriétés suivantes :

(i) $\varphi : \Lambda \to X(T)$ est un homomorphisme de groupe tel que la forme sur $\Lambda \times \Lambda$, $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \ell(\lambda_1)(\varphi(\lambda_2))$, soit symétrique définie et positive;

(ii) D est un diviseur ample sur A tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$ on ait $\tau(\varphi(\lambda)) = [\pi(\lambda)^* D - D] \in \mathrm{Pic}^0(A)$;

(iii) pour tout $\lambda \in \Lambda$ soit $h(\lambda)$ la fonction rationnelle sur G qui est déterminée à une constante multiplicative près par les deux conditions suivantes :

- le diviseur de $h(\lambda)$ est $\lambda^* \pi^* D - \pi^* D$;
- $h(\lambda)(tg) = \varphi(\lambda)(t) \cdot h(\lambda)(g)$ pour tout $t \in T$ et $g \in G$;

alors, pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ et tout $g \in G$

$$h(\lambda_1)(\lambda_2 g) \cdot [h(\lambda_1)(g)]^{-1} = h(\lambda_2)(\lambda_1 g) \cdot [h(\lambda_2)(g)]^{-1}.$$

Il apparaît clairement à la suite de notre énoncé que la variété abélienne $(G \otimes_R K)/\Lambda$ ne dépend pas des choix de φ et D ainsi que du choix des nombreux isomorphismes de faisceaux inversibles figurant dans [C] et [F] puisque nous les avons supprimés.

On peut formuler d'autres versions des assertions (i), (ii) et (iii), par exemple : $(G \otimes_R K)/\Lambda$ est une variété abélienne si et seulement si il existe un diviseur D sur A tel que :

(iv) D est ample et $\pi(\Lambda) \cap \mathrm{Support}(D) = \emptyset$;

(v) pour tout $\lambda \in \Lambda$ il existe une fonction $h(\lambda)$ rationnelle sur G, de diviseur $\lambda^{-1}\pi^*D - \pi^*D$, telle que $h(\lambda)(1) = 1$;

(vi) la forme $H : \Lambda \times \Lambda \to K^*$, $H(\lambda_1, \lambda_2) = h(\lambda_1)(\lambda_2)$ est bilinéaire et symétrique. Composée avec $-\log|\cdot|$, elle donne une forme définie positive.

Les outils analytiques utilisés dans la démonstration de notre théorème principal (THÉORÈME (2.1)) figurent essentiellement dans les paragraphes (1.4) — quelques résultats sur le groupe de Picard d'un espace analytique — et (1.7) — une décomposition de l'espace $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})$ suivant le groupe des caractères $X(T)$ de T. Notre méthode nous permet également d'obtenir diverses autres propriétés de G/Λ ou de A (paragraphe 3), ou encore de donner une démonstration d'un résultat, inverse du problème précédent, énoncé par M. RAYNAUD ([R, théorème 2]) selon lequel si $(G \otimes_R K)\Lambda$ est une variété abélienne et si $A \otimes_R K$ est un groupe analytique propre (une variété abéloïde) avec bonne réduction, alors $A \otimes_R K$ est une variété abélienne (THÉORÈME (3.5)).

Dans la suite de cet article, les lettres A, G, T changent de sens, elles désignent les objets précédents *définis sur* K. Pour les notions fondamentales de géométrie analytique rigide, nous renvoyons à [B–G–R], [G–vdP] et [F–vdP1].

1. Analyse rigide sur une extension d'une variété abélienne par un tore

(1.1) Notations. — Soient K un corps quelconque, A/K une variété abélienne, $\mathrm{Pic}^0(A) = \mathrm{Pic}^0(A)(K)$ le groupe des classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ sur A tels que :

(i) $\mathcal{L}$ est défini sur K;

(ii) $a^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}$ pour tout point a de A.

Soient T/K un tore algébrique déployé, $X(T)$ son groupe de caractères et $\tau : X(T) \to \mathrm{Pic}^0(A)$ un homomorphisme de groupes.

A l'homomorphisme τ on associe une extension de A par T. C'est une suite exacte de groupes algébriques commutatifs :

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

On sait que l'ensemble des classes d'isomorphismes des extensions G de A par T définies sur K, est isomorphe à $\mathcal{H}om\big(X(T), \mathrm{Pic}^0(A)\big)$. Dans le numéro suivant on rappelle la construction de G à partir de l'homomorphisme τ.

(1.2) Construction de l'extension G (Rappels). — Pour tout $x \in X(T)$, on choisit un faisceau inversible $\mathcal{O}_x$ sur A tel que :

(i) $\tau(x)$ est la classe d'isomorphisme de $\mathcal{O}_x$;

(ii) $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_A$;

(iii) $\mathcal{O}_x \otimes_{\mathcal{O}_A} \mathcal{O}_y = \mathcal{O}_{x+y}$ pour tout $x, y \in X(T)$.

Alors $\bigoplus_{x \in X(T)} \mathcal{O}_x$ est une algèbre quasi-cohérente et commutative sur A. On définit la variété G par $G = \mathbf{Spec}(\bigoplus \mathcal{O}_x)$ (*cf.* [H, p. 128, ex. 5–17]). Soit $\pi : G \to A$ le morphisme canonique. La fibre $\pi^{-1}(\{1_A\})$ de l'élément neutre 1_A de A est égale à $\mathbf{Spec}\big(\bigoplus \mathcal{O}_x(1_A)\big)$, où l'on a écrit $\mathcal{O}_x(1_A) = \mathcal{O}_{x,1_A}/\mathfrak{m}\mathcal{O}_{x,1_A}$, $\mathfrak{m}$ étant l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{A,1_A}$. Dans la fibre $\pi^{-1}(\{1_A\})$ on choisit un point, noté 1_G. Ce point correspond à un homomorphisme de K-algèbres $1_G^* : \bigoplus \mathcal{O}_x(1_A) \to K$.

On écrit $e_x \in \mathcal{O}_x(1_A)$ pour l'élément unique tel que $1_G^*(e_x) = 1$. Alors $\bigoplus \mathcal{O}_x(1_A) = \bigoplus_X K e_x$ s'identifie à l'algèbre affine $\mathcal{O}(T)$ de T et en particulier e_x s'identifie au caractère $x \in X(T)$.

Soit m_A la multiplication de A. Il faut maintenant construire une multiplication $m : G \times G \to G$ telle que :

(i) le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\pi \times \pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ A \times A \arrow[r, "m_A"] & A ; \end{tikzcd}$$

(ii) 1_G est l'élément neutre de G ;

(iii) la restriction de m à la fibre $\pi^{-1}(\{1_A\})$ est la loi de groupe de T.

De plus, il faut montrer que m est complètement déterminé par (i), (ii) et (iii).

On observe que le produit fibré $G \times_A (A \times A)$ est égal à $\mathbf{Spec}(\bigoplus m_A^* \mathcal{O}_x)$ et que $G \times G$ est égal à $\mathbf{Spec}\big((\bigoplus_x p_1^* \mathcal{O}_x) \otimes (\bigoplus_y p_2^* \mathcal{O}_y)\big)$ où p_1, p_2 $A \times A \to A$ sont les deux projections.

Le morphisme m est alors donné par un morphisme d'algèbres quasi-cohérentes sur $A \times A$,

$$m^* : \bigoplus_x m_A^* \mathcal{O}_x \longrightarrow \bigoplus_{x,y} \big(p_1^* \mathcal{O}_x \otimes p_2^* \mathcal{O}_y\big).$$

Comme la classe de $\mathcal{O}_x$ appartient à $\mathrm{Pic}^0(A)$ on sait ([M1, p. 74]) qu'il existe un isomorphisme

$$u_x : m_A^* \mathcal{O}_x \xrightarrow{\sim} p_1^* \mathcal{O}_x \otimes p_2^* \mathcal{O}_x.$$

L'isomorphisme u_x est unique à une constante (de K^*) près. On normalise u_x par

$$u_x(1_A \times 1_A) : \mathcal{O}_x(1_A) \longrightarrow \mathcal{O}_x(1_A) \otimes \mathcal{O}_x(1_A)$$

envoie e_x sur $e_x \otimes e_x$.

On définit maintenant $m^* = \bigoplus u_x$. Une vérification simple montre que m est une loi de groupe et que (i), (ii), (iii) sont vrais. De plus on voit aisément que m est déterminé par (i), (ii), (iii).

(1.3) Les variétés analytiques A et G. — Désormais on suppose que le *corps K est complet pour une valuation non-archimédienne.* On suppose de plus que la valuation de K est discrète ou que K est algébriquement clos (une condition plus faible, à savoir que la valuation de K soit discrète ou que K soit stable (*cf.* [G–vdP, p. 98]) serait suffisante).

On écrit K^0 et $\overline{K}$ pour l'anneau de valuation de K et le corps des restes de K. On désigne maintenant par A, G, T les espaces analytiques sur K et on écrit $\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_G$, *etc* pour les faisceaux structuraux analytiques. Les faisceaux algébriques seront notés par $\mathcal{O}_A^{\mathrm{alg}}$, $\mathcal{O}_G^{\mathrm{alg}}$, *etc.*

Remarquons que le théorème GAGA affirme que des objets analytiques de A (diviseurs, faisceaux cohérents, morphismes,...) correspondent biunivoquement avec des objets algébriques de A ([Kö]).

Pour toute la suite on fait l'hypothèse suivante sur A :

(1.3.1) *Hypothèse.* — Il existe une réduction analytique $r : A \to \overline{A}$ telle que $\overline{A}$ soit non-singulière.

(1.3.2) *Remarque.* — Par définition ([G–vdP, p. 116]) cela veut dire qu'il existe un recouvrement pur affinoïde admissible $\{U_i\}$ de A, tel que $\overline{A}$, le recollement des réductions canoniques $\overline{U}_i$ des U_i, soit non-singulier.

Supposons que la valuation de K soit discrète et que le modèle minimal de Néron $\mathcal{A}/K^0$ de A soit projectif. Soit $\mathcal{A}_f$ le schéma formel sur K^0

obtenu en complétant $\mathcal{A}$ le long de sa fibre spéciale $\mathcal{A} \otimes \overline{K}$. Alors la fibre spéciale $\mathcal{A}_f \otimes \overline{K}$ de $\mathcal{A}_f$ est égale à $\mathcal{A} \otimes \overline{K}$ et la fibre générique $\mathcal{A}_f \otimes K$ s'identifie à l'espace analytique A. Dans ce cas $\mathcal{A}_f \otimes \overline{K}$ est une réduction analytique de A et l'hypothèse (1.3.1) est satisfaite.

On peut montrer (la démonstration est assez technique) que l'hypothèse sur A implique l'existence d'un schéma abélien $\mathcal{A}/K^0$ avec $\mathcal{A} \otimes K = A$. Par conséquent, dans le cas d'une valuation discrète, notre hypothèse est équivalente à : le modèle minimal de Néron de A est projectif.

(1.3.3) *Notations.* — Un *ouvert formel* de A est un sous-ensemble affinoïde de A de la forme $r^{-1}(V)$ où $V \subset \bar{A}$ est un ouvert affine. Un *recouvrement formel* de A est un recouvrement admissible de A par des ouverts formels.

Pour une algèbre affinoïde réduite B sur K on écrit $B^0 = \{f \in B\,;\ \|f\| \leq 1\}$ et $\overline{B} = B^0 \otimes \overline{K}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme spectrale de B ; B^*, B^{0*} et $\overline{B}^*$ désignent des éléments inversibles de B, B^0 et $\overline{B}$. On utilisera les mêmes notations pour les faisceaux, par exemple $\mathcal{O}_A^0$, $\mathcal{O}_A^*$, $\mathcal{O}_A^{0*}, \ldots$

(1.4) Quelques résultats sur le groupe de Picard. — On écrit $\mathrm{Pic}(X)$ pour le groupe des classes d'isomorphismes des faisceaux inversibles (analytiques si X est un espace analytique ou bien algébriques si X est une variété algébrique). Pour un anneau B, $\mathrm{Pic}(B)$ est le groupe des classes d'isomorphismes des B-modules projectifs de rang 1. Remarquons que si X est un espace affinoïde, on a $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}\big(\mathcal{O}(X)\big)$ où $\mathcal{O}(X)$ est l'algèbre des fonctions holomorphes sur X ([F–vdP1], p. 124).

PROPOSITION. — *Soit Z/K un espace affinoïde, connexe, réduit, tel que sa réduction canonique $r : Z \to \bar{Z}$ soit non-singulière. Soit T/K un tore algébrique analytifié. Alors*

$$\mathrm{Pic}(Z) \cong \mathrm{Pic}(\bar{Z})\,; \tag{1.4.1}$$

$$\mathrm{Pic}(Z \times T) \cong \mathrm{Pic}(Z). \tag{1.4.2}$$

Démonstration de (1.4.1). — Soit $B = \mathcal{O}(Z)$ et alors $\overline{B} = \mathcal{O}(\bar{Z})$. On a deux flèches naturelles,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(B^0) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(B) = \mathrm{Pic}(Z) \\ \downarrow & & \\ \mathrm{Pic}(\overline{B}) = \mathrm{Pic}(\bar{Z}) & & \end{array}$$

définies par $M \to M \otimes B$ et $M \to M \otimes \bar{B}$. Dans [H–vdP], on montre que les deux flèches sont des isomorphismes. Des démonstrations moins élémentaires se trouvent dans [B–L, F–vdP2].

Démonstration de (1.4.2). — Soit $X(T)$ le groupe des caractères de T. Alors chaque fonction $f \in \mathcal{O}(Z \times T)$ s'écrit de façon unique comme

$$f = \sum f_x \cdot x$$

où $f_x \in \mathcal{O}(Z)$ pour $x \in X(T)$ et tel que, pour tout $t \in T$, $\lim_x \|f_x\| |x(t)| = 0$. Les éléments inversibles sont de la forme $g \cdot x$ avec $g \in \mathcal{O}(Z)^*$ et $x \in X(T)$.

Pour l'espace affinoïde $Z \times \{t \in K\,;\ 0 < R_1 \leq |t| \leq R_2\}$ on a des résultats comparables : les fonctions holomorphes sont de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n t^n$ avec $f_n \in \mathcal{O}(Z)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\lim \|f_n\| R^n = 0$ pour tout R, $R_1 \leq R \leq R_2$. Les fonctions holomorphes inversibles ont la forme $g \cdot t^n(1+h)$ où $g \in \mathcal{O}(Z)^*, n \in \mathbb{Z}$ et $h \in \mathcal{O}(Z \times \{t \in K\,;\ 0 < R_1 \leq |t| \leq R_2\})$ satisfaisant $\|h\| < 1$. Pour l'espace affinoïde $Z \times \{t \in K\,;\ |t| \leq R\}$, les fonctions inversibles sont de la forme $g(1 + th)$ où $g \in \mathcal{O}(Z)^*$ et $\|th\| < 1$. La démonstration de ces propriétés se ramène aisément au cas connu où Z est un seul point.

Remarquons que, lorsque Z est un polydisque, (1.4.2) peut se déduire de [Gr] (en particulier proposition 2, paragraphe v-3), voir aussi [G2] et [vdP1]. Nous montrons (1.4.2) par récurrence sur h, le rang de T.

Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur $Z \times T$ où $T = K^*$, donc $h = 1$. On pose $T^0 = \{t \in K^*\,;\ |t| = 1\}$. Alors

$$\operatorname{Pic}(Z \times T^0) \cong \operatorname{Pic}(Z \times T^0) = \operatorname{Pic}(\bar{Z} \times \mathbb{G}_{1,k}) \cong \operatorname{Pic}(\bar{Z}) = \operatorname{Pic}(Z).$$

On peut donc supposer que $\mathcal{L}|Z \times T^0$ est trivial, il faut en déduire que $\mathcal{L}$ est trivial.

Sur $Z \times K$ on définit un faisceau inversible $\mathcal{L}'$ par :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}'|Z \times \{t \in K; |t| \leq 1\} = \mathcal{O}\,;\\
&\mathcal{L}'|Z \times \{t \in K; |t| \geq 1\} = \mathcal{L}|Z \times \{t \in K; |t| \geq 1\}.
\end{aligned}$$

Pour tout $R \in |K^*|$ et $R > 1$, on peut appliquer (1.4.1) à $\mathcal{L}'|Z \times \{t \in K;$ $|t| \leq R\}$. Cela montre que $\mathcal{L}'|Z \times \{t \in K; |t| \leq R\}$ est libre pour tout R.

Afin de montrer que $\mathcal{L}'$ est libre on prend une suite $1 < R_1 < R_2 < \cdots$ d'éléments de $|K^*|$ avec une limite infinie. Posons $D_n = \{t \in K\,;\ |t| \leq R_n\}$. La restriction de $\mathcal{L}'$ à $Z \times D_n$ est engendrée par un élément e_n.

Alors $e_{n+1} = u_n e_n$ pour certains éléments $u_n \in \mathcal{O}(Z \times D_n)^*$. Si on trouve une suite d'éléments $v_n \in \mathcal{O}(Z \times D_n)^*$ telle que $u_n = v_{n+1}^{-1} v_n$

pour tout n, les éléments $v_n e_n$ se recolleront en une section globale de $\mathcal{L}'$ engendrant $\mathcal{L}'$.

Chaque $u_n \in \mathcal{O}(Z \times D_n)^*$ se décompose sous la forme $u_n = a_n(1 + tb_n)$ où $a_n \in \mathcal{O}(Z)^*$ et $b_n \in \mathcal{O}(Z \times D_n)$ avec $\|tb_n\| < 1$.

On pose maintenant

$$v_n = \Big(\prod_{i=1}^{n-1} a_i^{-1}\Big)\Big(\prod_{k=n}^{\infty}(1 + tb_k)\Big)$$

et on constate facilement que le produit infini converge sur $Z \times D_n$. Alors $u_n = v_{n+1}^{-1} v_n$ pour tout $n \geq 1$ montre que $\mathcal{L}'$ est trivial.

Cela implique que $\mathcal{L}|Z \times \{t \in K^*; |t| \geq 1\}$ est trivial. De la même façon on voit que $\mathcal{L}|Z \times \{t \in K^*; |t| \leq 1\}$ est trivial. La surjectivité de l'application α de

$$\mathcal{O}^*\big(Z \times \{t \in K^* \,;\; |t| \leq 1\}\big) \times \mathcal{O}^*\big(Z \times \{t \in K^* \,;\; |t| \geq 1\}\big)$$

dans $\mathcal{O}^*\big(Z \times \{t \in K^* \,;\; |t| = 1\}\big)$, donnée par $(a, b) \mapsto ab$, montrera que $\mathcal{L}$ est trivial.

Pour montrer que α est surjective on décompose tout élément f de $\mathcal{O}^*(Z \times \{t \in K^* \,;\; |t| = 1\}) : f = at^n(1 + h)$ où $a \in \mathcal{O}^*(Z)$, $n \in \mathbb{Z}$, $h = \Sigma a_n t^n$ est un élément de $\mathcal{O}(Z \times \{t \in K^* \,;\; |t| = 1\}$ vérifiant $\|h\| = \max(\|a_n\|) = |\pi| < 1$.

La partie at^n se trouve dans l'image de α. On écrit

$$(1 + h) = \Big(1 + \sum_{m \geq 0} a_m t^m\Big)\Big(1 + \sum_{m < 0} a_m t^m\Big)(1 + h_1).$$

Les deux premiers termes se trouvent dans

$$\mathcal{O}^*\big(Z \times \{t \in K^* \,;\; |t| \leq 1\}\big) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}^*\big(Z \times \{t \in K^* \,;\; |t| \geq 1\}\big).$$

Le dernier terme satisfait $\|h_1\| \leq |\pi|^2$. On applique le même procédé à $(1 + h_1)$, donc

$$(1 + h_1) = \Big(1 + \sum_{m \geq 0} a_m t^m\Big)\Big(1 + \sum_{m < 0} a'_m t^m\Big)(1 + h_2)$$

avec $\|h_2\| \leq |\pi|^3$. On continue avec $(1 + h_2)$, *etc.* Par passage à la limite on trouve que $(1 + h)$ est dans l'image de α. Cela achève la démonstration pour $h = 1$.

Supposons maintenant que $h > 1$. On pose $T = T_{h-1} \times K^*$. Comme $Z \times \{t \in K^* ; |t| = 1\}$ est un affinoïde connexe avec une réduction non-singulière, on peut supposer d'après l'hypothèse de récurrence que la restriction de $\mathcal{L}$ à $Z \times T_{h-1} \times \{t \in K^* ; |t| = 1\}$ est triviale.

Il faut de nouveau montrer que cela implique que $\mathcal{L}$ est trivial. On définit $\mathcal{L}'$ sur $Z \times T_{h-1} \times K$ par le recollement de $\mathcal{L}$ sur $Z \times T_{h-1} \times \{t \in K ; |t| \geq 1\}$ et $\mathcal{O}$ sur $Z \times T_{h-1} \times \{t \in K ; |t| \leq 1\}$. L'hypothèse de récurrence montre que $\mathcal{L}'$ est trivial sur chaque $Z \times T_{h-1} \times \{t \in K ; |t| \leq R\}$ avec $R \in |K^*|$.

Comme dans le cas $h = 1$ on montre que $\mathcal{L}'$ est trivial. Il s'ensuit que $\mathcal{L}$ est trivial sur $Z \times T_{h-1} \times \{t \in K^* ; |t| \leq 1\}$ et sur $Z \times T_{h-1} \times \{t \in K^* ; |t| \geq 1\}$.

En remarquant que

$$\mathcal{O}^*\big(Z \times T_{h-1} \times \{t \in K^* ; |t| = 1\}\big) = \mathcal{O}^*\big(Z \times \{t \in K^* ; |t| = 1\}\big) \cdot X(T)$$

on en conclut, comme dans le cas $h = 1$, que $\mathcal{L}$ est trivial sur $Z \times T$. Ceci achève la démonstration de (1.4.2).

(1.5) Faisceaux inversibles sur A et G. — Pour formuler des conséquences de (1.4) nous avons besoin de quelques notations.

D'abord $T^0 = \{t \in T ; |x(t)| = 1 \text{ pour tout } x \in X(T)\}$ est un sous-groupe affinoïde de T. Pour un groupe analytique H on écrit $\operatorname{Pic}^0(H) = \{[\mathcal{L}] \in \operatorname{Pic}(H) ; [h^*\mathcal{L}] = [\mathcal{L}] \text{ pour tout } h \in H\}$.

DES COROLLAIRES DE (1.4).

(1.5.1) *Chaque faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur A se trivialise sur un recouvrement formel $\{r^{-1}V_i\}$ de A. De plus le 1-cocycle correspondant à $\mathcal{L}$ peut être choisi à coefficients dans $\mathcal{O}_A^{0*}$. En d'autres termes* $\operatorname{Pic}(A) = H^1(\bar{A}, r_*\mathcal{O}_A^*) = H^1(\bar{A}, r_*\mathcal{O}_A^{0*})$.

(1.5.2) *Le morphisme analytique $\pi : G \to A$ se trivialise sur un recouvrement formel $\{r^{-1}V_i\}$ de A. Plus précisément, il existe des isomorphismes $\theta_i : \pi^{-1}r^{-1}V_i \xrightarrow{\sim} (r^{-1}V_i) \times T$ tels que :*

(i) *les diagrammes suivants sont commutatifs*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}r^{-1}V_i \arrow[r, "\theta_i"'] \arrow[d, "\pi"] & (r^{-1}V_i) \times T \arrow[dl, "pr_1"] \\ r^{-1}V_i ; & \end{tikzcd}$$

(ii) θ_i *commute avec l'action de* T *;*

(iii) $\theta_j 0 \theta_i^{-1} : (r^{-1}V_{ij}) \times T \to (r^{-1}V_{ij}) \times T$ *est de la forme* $(z,t) \to \big(z, f_{ij}(z)t\big)$ *où* $f_{ij} : r^{-1}V_{ij} \to T^0$ *est un morphisme analytique ;*

(iv) $\theta_i(1_G) = (1_A, 1_T)$ *si* i *est tel que* $1_A \in r^{-1}V_i$.

(1.5.3) *Chaque faisceau inversible sur* G *se trivialise sur un recouvrement* $\{\pi^{-1}r^{-1}V_i\}$ *où* $\{r^{-1}V_i\}$ *est un recouvrement formel de* A*. En d'autres termes :*

$$\mathrm{Pic}(G) = H^1\big(\bar{A}, r_*\pi_*\mathcal{O}_G^*\big).$$

(1.5.4) *Il existe une suite exacte*

$$0 \longrightarrow K^* \longrightarrow \mathcal{O}(G)^* \longrightarrow X(T) \xrightarrow{\tau} \mathrm{Pic}(A) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Pic}(G) \longrightarrow 0.$$

(1.5.4)′ *Remarque* : Si $x \in \ker \tau$, on notera encore x l'élément de $\mathcal{O}(G)^*$ antécédant de x qui restreint à T redonne x. On a alors $x(g_1g_2) = x(g_1)x(g_2)$ pour tout g_1, g_2 dans G.

(1.5.5) *Il existe une suite exacte*

$$0 \longrightarrow K^* \longrightarrow \mathcal{O}(G)^* \longrightarrow X(T) \xrightarrow{\tau} \mathrm{Pic}^0(A) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Pic}^0(G) \longrightarrow 0.$$

Démonstrations.

(1.5.1). — Soit $\{r^{-1}W_j\}$ un recouvrement formel de A. On applique (1.4.1) à chaque $\mathcal{L}|r^{-1}W_j$ et on obtient ainsi un recouvrement formel $\{r^{-1}V_i\}$ plus fin, tel que chaque $\mathcal{L}|r^{-1}V_i$ soit trivial. Le 1-cocycle $\{\xi_{ij}\}$ de $\mathcal{L}$ par rapport à $\{r^{-1}V_i\}$ peut s'écrire $\xi_{ij} = \lambda_{ij}\eta_{ij}$ où $\{\lambda_{ij}\}$ est un 1-cocycle à coefficients dans K^* et où $\eta_{ij} \in \mathcal{O}_A^{0*}(r^{-1}V_{ij})$ pour tout i, j.

Comme le 1-cocycle $\{\lambda_{ij}\}$ est trivial on trouve un 1-cocycle $\{\eta_{ij}\}$ pour $\mathcal{L}$ à coefficients dans $r_*\mathcal{O}_A^{0*}$.

(1.5.2). — Il existe un recouvrement de A par des ouverts de Zariski trivialisant le morphisme de groupes algébriques $\pi : G \to A$ et ayant les propriétés (i) et (ii) de l'énoncé. Soit $\{U_i\}$ un recouvrement affinoïde admissible de A, plus fin que ce recouvrement de Zariski. Alors on a des isomorphismes analytiques $H_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times T$ tels que $H_i(z) = \big(\pi(z), h_i(z)\big)$ et $h_i(tz) = t \cdot h_i(z)$ pour tout $t \in T$ et $z \in \pi^{-1}U_i$. En plus $H_j 0 H_i^{-1}$ s'écrit explicitement comme $(u,t) \to \big(u, f_{ij}(u) \cdot t\big)$ où $f_{ij} : U_{ij} \to T$ sont des fonctions holomorphes et où $\{f_{ij}\}$ est un 1-cocycle. Pour $x \in X(T)$, le 1-cocycle $\{x \circ f_{ij}\}$ décrit le faisceau $\mathcal{O}_x$.

Soit $r^{-1}V$ un ouvert formel de A tel que chaque $\mathcal{O}_x|r^{-1}V$ soit trivial. La restriction de $\{f_{ij}\}$ à $r^{-1}V$ est donc triviale et peut s'écrire $f_{ij} = a_i^{-1}a_j$ où les fonctions $a_i : U_i \cap r^{-1}V \to T$ sont holomorphes.

Soit $K_i : \pi^{-1}(U_i \cap r^{-1}V) \xrightarrow{\sim} (U_i \cap r^{-1}V) \times T$ donné par $K_i(z) = \big(\pi(z), a_i(\pi z) \cdot h_i(z)\big)$. Les isomorphismes K_i se recollent en un isomorphisme $K : \pi^{-1}(r^{-1}V) \xrightarrow{\sim} (r^{-1}V) \times T$ ayant la propriété $K(z) = \big(\pi(z), k(z)\big)$ et $k(zt) = t \cdot k(z)$ pour $t \in T$. On applique (1.5.1) à $\mathcal{O}_x$ où x parcourt une base de $X(T)$. Cela donne un recouvrement formel de A avec les propriétés (i), (ii) et (iii). On peut normaliser tel que (iv) soit vrai.

(1.5.3). — Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur G. On prend d'abord un recouvrement formel $\{r^{-1}W_j\}$ de A satisfaisant à (1.5.2). On applique (1.4.2) et (1.4.1) à chaque $\mathcal{L}|\pi^{-1}r^{-1}W_j$ et on obtient un recouvrement formel plus fin $\{r^{-1}V_i\}$ tel que chaque $\mathcal{L}|\pi^{-1}r^{-1}V_i$ soit trivial.

(1.5.4). — Sur $\bar{A}$ on a une suite exacte de faisceaux $0 \to r_*\mathcal{O}_A^* \to r_*\pi_*\mathcal{O}_G^* \to X(T) \to 0$ où $X(T)$ est le faisceau constant sur $\bar{A}$ de fibre $X(T)$. D'après (1.5.1) et (1.5.3) on trouve une suite exacte

$$0 \longrightarrow K^* \longrightarrow G^*(G) \longrightarrow X(T) \longrightarrow \mathrm{Pic}(A) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Pic}(G) \longrightarrow 0 = H^1\big(\bar{A}, X(T)\big).$$

On vérifie sans difficultés que l'application $X(T) \to \mathrm{Pic}(A)$ n'est autre que $X(T) \xrightarrow{\tau} \mathrm{Pic}^0(A) \subset \mathrm{Pic}(A)$.

(1.5.5). — Il suffit de remarquer que $\pi^* : \mathrm{Pic}^0(A) \to \mathrm{Pic}^0(G)$ est également surjectif.

(1.5.6) *Remarque.* — La suite (1.5.4) est l'analogue analytique de la suite algébrique

$$0 \longrightarrow K^* \longrightarrow \mathcal{O}^*(G)^{\mathrm{alg}} \longrightarrow X(T) \longrightarrow \mathrm{Pic}(A)^{\mathrm{alg}} \longrightarrow \mathrm{Pic}(G)^{\mathrm{alg}} \longrightarrow 0$$

(*cf.* [C, p. 76]). Comme A est une variété projective $\mathrm{Pic}(A) = \mathrm{Pic}(A^{\mathrm{alg}})$ et (1.5.4) s'identifie terme par terme avec la suite du cas algébrique.

(1.6) G^0 et les réseaux de G.

(1.6.1) *Définition de G^0.* — On reprend la notation $T^0 = \{t \in T\,;\ |x(t)| = 1$ pour tout $x \in X(T)\}$. Soit $\{r^{-1}V_i\}$ un recouvrement formel de A avec les propriétés de (1.5.2). Alors $G^0 := \bigcup_i \theta_i^{-1}(r^{-1}V_i) \times T^0)$ est un ouvert analytique quasi-compact de G. Une vérification triviale montre que G^0 est un sous-groupe de G et que G^0 ne dépend pas des choix de $\{r^{-1}V_i\}$ et $\{\theta_i\}$.

(1.6.2). — Soient $G(K)$, $G^0(K)$, $T(K)$, $T^0(K)$ les points de G, G^0, T, T^0 à valeurs dans K. D'après la définition de G^0 on a un isomorphisme de groupes

$$T(K)/T^0(K) \longrightarrow G(K)/G^0(K).$$

Considérons l'homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \ell : G(K) \longrightarrow G(K)/G(K)^0 \xrightarrow{\sim} T(K)/T^0(K) \xrightarrow{\sim} \\ \mathcal{H}om\bigl(X(T), K^*/K^{0*}\bigr) = \mathcal{H}om\bigl(X(T), |K^*|\bigr) \longrightarrow \mathcal{H}om\bigl(X(T), \mathbb{R}\bigr) \end{aligned}$$

où la dernière flèche provient de "$-\log|\ \ |$".

Un sous-groupe Λ de $G(K)$ est appellé un *réseau* si $\ell : \Lambda \to \mathcal{H}om\bigl(X(T), \mathbb{R}\bigr)$ est injectif et si $\ell(\Lambda)$ est un réseau de l'espace vectoriel réel $\mathcal{H}om\bigl(X, (T), \mathbb{R}\bigr)$.

(1.6.3) Proposition. — *Pour tout réseau Λ de $G(K)$, le quotient G/Λ a une structure de groupe analytique propre sur K, telle que $q : G \to G/\Lambda$ soit un isomorphisme local.*

Démonstration. — Elle est très voisine de celles de [F–vdP1, p. 19] et [G, paragraphe 1–3].

Soit $X_1, \dots, X_h$ une base de $X(T)$ et $\varepsilon > 0$ avec $e^\varepsilon \in |K^*|$, tel que le réseau $\ell(\Lambda)$ rencontre $\{a \in \mathcal{H}om(X(T), \mathbb{R})\,;\ |a(x_i)| \leq \varepsilon \text{ pour } i = 1, \dots, h\}$ en $\{0\}$. Soit $\{r^{-1}V_i\}_i$ un recouvrement formel de A ayant les propriétés de (1.5.2). Avec les notations de (1.5.2) on définit

$$G^\varepsilon = \bigcup_i \theta_i^{-1}\Bigl((r^{-1}V_i) \times \bigl\{t \in T\,;\ e^{-\varepsilon} \leq |x_j(t)| \leq e^\varepsilon \text{ pour tout } j\bigr\}\Bigr).$$

Alors G^ε est un ouvert quasi-compact de G. Soit δ vérifiant $e^\varepsilon \in |K^*|$ et $0 < \delta < \varepsilon$, alors G^δ est intérieur à G^ε. La restriction de l'application ensembliste $q : G \to G/\Lambda$ à G^ε est injective. En plus il existe un nombre fini d'éléments $t_1, \dots, t_n \in T$ tel que $G/\Lambda = \bigcup_i q(t_i G^\delta)$. La structure analytique de G/Λ est donnée par un recollement évident des $\{t_i G^\varepsilon\}$. G/Λ est propre parce que $G/\Lambda = \bigcup_i q(t_i G^\delta)$ et $q(t_i G^\delta)$ est intérieur à $q(t_i G^\varepsilon)$. Ce qui reste de l'énoncé est facile à vérifier.

(1.6.4) Corollaire (Comparer avec [O–vdP]). — *L'anneau des endomorphismes analytiques de G/Λ est égal à*

$$\bigl\{\alpha \in \operatorname{End}(G)\,;\ \alpha(\Lambda) \subseteq \Lambda\bigr\}.$$

Démonstration. — G est simplement connexe, au sens analytique rigide ([vdP2]). Le morphisme $q : G \to G/\Lambda$ est alors le revêtement analytique universel. En particulier chaque endomorphisme β de G/Λ se relève (de façon unique) en $\alpha \in \mathrm{End}(G)$ avec $\alpha(\Lambda) \subseteq \Lambda$. L'autre inclusion est une conséquence directe de la propriété universelle habituelle de G/Λ.

(1.6.5) COROLLAIRE. — *Il existe une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \ker \tau \longrightarrow \mathcal{H}om(\Lambda, K^*) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(G/\Lambda) \xrightarrow{q^*} \mathrm{Pic}^0(G) \longrightarrow 0$$

où l'application $\ker \tau \to \mathcal{H}om(\Lambda, K^*)$ *est ainsi définie : si* $x \in \ker \tau$, *on a* $\mathcal{O}_x = f\mathcal{O}_A$ *où* f *est une fonction méromorphe sur* A *; pour* $\lambda \in \Lambda$ *soit* $C_\lambda \in K^*$ *tel que* $f(\lambda) = C_\lambda f$, *alors* $\lambda \mapsto C_\lambda$ *est l'image de* x *dans* $\mathcal{H}om(A, K^*)$.

Démonstration. — La surjectivité de q^* ; soit $[\mathcal{L}] \in \mathrm{Pic}^0(G)$. Il faut construire une Λ-linéarisation de $\mathcal{L}$, c'est-à-dire une famille d'isomorphismes $\alpha(\lambda) : \lambda^*\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$ avec $\alpha(\lambda_1\lambda_2) = \alpha(\lambda_1) \circ \lambda_1^*(\alpha(\lambda_2))$ pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Comme $\mathcal{L} \cong \pi^*\mathcal{M}$ pour un $\mathcal{M} \in \mathrm{Pic}^0(A)$ (*cf.* (1.5.5)), il suffit de construire une Λ-linéarisation de $\mathcal{M}$. On remarque que $\mathcal{M}^{\mathrm{alg}}$ définit une extension B de A^{alg} par le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_1$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_1 \longrightarrow B \xrightarrow{\rho} A^{\mathrm{alg}} \longrightarrow 0$$

correspondant à $\sigma : X(\mathbb{G}_1) = \mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}^0(A^{\mathrm{alg}})$ avec $\sigma(1) = [\mathcal{M}^{\mathrm{alg}}]$. Soit $h : \Lambda \to B(K)$ un homomorphisme de groupes avec $\rho \circ h = \pi : \Lambda \to A^{\mathrm{alg}}$. Alors h donne une Λ-linéarisation de $\mathcal{M}^{\mathrm{alg}}$. En effet la multiplication par $h(\lambda)$ sur $B = \mathbf{Spec}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{M}^{\mathrm{alg}})^n)$ donne des isomorphismes $\bigoplus_n(\mathcal{M}^{\mathrm{alg}})^n \to \bigoplus_n \pi(\lambda)^*(\mathcal{M}^{\mathrm{alg}})^n$ et en particulier un isomorphisme $\beta(\lambda) : \pi(\lambda)^*\mathcal{M}^{\mathrm{alg}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^{\mathrm{alg}}$. De $h(\lambda_1\lambda_2) = h(\lambda_1)h(\lambda_2)$ on conclut $\beta(\lambda_1\lambda_2) = \beta(\lambda_1) \circ \pi(\lambda_1)^*(\beta(\lambda_2))$ pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. D'où, avec GAGA, une Λ-linéarisation de $\mathcal{M}$.

Le noyau de q^* : soit $[\mathcal{L}] \in \ker q^*$. Alors $q^*\mathcal{L}$ est engendré par une section globale e. L'action naturelle de Λ sur $q^*\mathcal{L}$ s'écrit $\lambda(e) = Z_\lambda(g) \cdot e$ où $\lambda \mapsto Z_\lambda(g)$ est un 1-cocycle pour le groupe Λ à valeurs dans $\mathcal{O}(G)^*$. On voit que $\mathcal{L}$ est trivial si et seulement si le 1-cocycle $\lambda \mapsto Z_\lambda(g)$ est trivial. Donc il existe $f \in \mathcal{O}_G(G)^*$ tel que, pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $g \in G$ $Z_\lambda(g) = f(\lambda^{-1}g)/f(g)$; il résulte de (1.5.5) que Z_λ est invariant sous T, donc constant.

Exactitude en $\mathcal{H}om(\Lambda, q^*)$: soit $\sigma \in \mathcal{H}om(\Lambda, q^*)$ tel que son image dans $\mathrm{Pic}^0(G/\Lambda)$ soit $[\mathcal{O}_{G/\Lambda}]$, alors il existe $f \in \mathcal{O}_G(G)^*$ tel que $f(\lambda.) = \sigma(\lambda)f$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Soit $x \in \ker \tau$ tel que $f(tg) = x(t)f(g)$ pour tout $t \in T$ et $g \in G$. Clairement σ est l'image de x par $\ker \tau \to \mathcal{H}om(\Lambda, K^*)$.

(1.6.6) *Remarque* (sur (1.6.5)). — La démonstration de la surjectivité de q^* peut se faire sans utiliser la structure algébrique de A, en définissant de manière analytique l'extension de A par K^* associée à $\mathcal{M}$ (*cf.* PROPOSITION (3.1)).

(1.7) Décomposition de $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})$.

Notations. — Soit D un diviseur de A et soit π^*D l'image inverse de D. Le faisceau inversible analytique sur G correspondant à π^*D sera noté $\mathcal{O}_{\pi^*D}$. Pour tout $x \in X(T)$ on pose :

$$H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x = \Big\{ f \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})\,;\ f(tg) = x(t)f(g) \\ \text{pour tout } t \in T \text{ et tout } g \in G \Big\}.$$

PROPOSITION.

(1.7.1) *On a l'isomorphisme* $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x \cong H^0(A, \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_x)$ *et* $\dim_K H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x < \infty$;

(1.7.2) $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x$ *possède une norme canonique ;*

(1.7.3) $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D}) = \widehat{\bigoplus}_x H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x$ *où* $\widehat{\bigoplus}$ *désigne l'ensemble des sommes infinies* $\sum a_x$ *tel que, pour tout* $t \in T$ $\lim_x \|a_x\|, |x(t)| = 0$.

Démonstration. — Un recouvrement formel $\{r^{-1}V_i\}$ de A trivialise $\pi : G \to A$ et le diviseur D. En particulier il existe une fonction méromorphe e_i sur $r^{-1}V_i$ de diviseur $-D|r^{-1}V_i$. La norme de l'algèbre affinoïde $\mathcal{O}(r^{-1}V_i)$ est multiplicative parce que $\overline{\mathcal{O}(r^{-1}V_i)} = \mathcal{O}_{\bar{A}}(V_i)$ n'a pas de diviseurs de zéro. La norme de $\mathcal{O}(r^{-1}V_i)$ induit alors une valuation sur le corps des fractions de $\mathcal{O}(r^{-1}V_i)$. On normalise e_i par $\|e_i\| = 1$. Alors on a

$$H^0(\pi^{-1}r^{-1}V_i, \mathcal{O}_{\pi^*D}) = \mathcal{O}(\pi^{-1}r^{-1}V_i)e_i.$$

L'isomorphisme T-équivariant $\theta_i : \pi^{-1}r^{-1}V_i \xrightarrow{\sim} (r^{-1}V_i) \times T$ implique une décomposition canonique :

$$\mathcal{O}(\pi^{-1}r^{-1}V_i) = \widehat{\bigoplus_x} \mathcal{O}(\pi^{-1}r^{-1}V_i)_x$$

où

(i) $\mathcal{O}(\pi^{-1}r^{-1}V_i)_x = \{f \in \mathcal{O}(\pi^{-1}r^{-1}V_i)/\,;\ f(tg) = x(t)f(g)$ pour tout $t \in T$ et tout $g \in G\}$;

(ii) la norme sur $\mathcal{O}(\pi^{-1}r^{-1}V_i)_x$ est la norme spectrale sur $G^0 \cap \pi^{-1}r^{-1}V_i = \theta_i^{-1}((r^{-1}V_i) \times T^0)$;

(iii) $\widehat{\bigoplus}$ a le sens de (1.7.3).

Comme e_i est T-invariant on obtient une décomposition

$$H^0(\pi^{-1}r^{-1}V_i, \mathcal{O}_{\pi^*D}) = \widehat{\bigoplus} = H^0(\pi^{-1}r^{-1}V_i, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x$$

où $H^0(\pi^{-1}r^{-1}V_i, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x = \mathcal{O}(\pi^{-1}r^{-1}V_i)_x e_i \cong H^0(r^{-1}V_i, \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_x)$ est muni de la norme $\|f_x e_i\| = \|f_x\|$.

Remarquons que $\dim_K H^0(A, \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{O}_x) < \infty$ parce que A/K est propre. On déduit la proposition du fait que $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})$ est le noyau de

$$d : \bigoplus_i H^0\big(\pi^{-1}r^{-1}V_i, \mathcal{O}_{\pi^*D}\big) \longrightarrow \bigoplus_{i<j} H^0\big(\pi^{-1}r^{-1}V_i, \mathcal{O}_{\pi^*D}\big)$$

et que d respecte l'action de T.

La norme sur $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x$ ne dépend pas des choix de $\{r^{-1}V_i\}$ et de $\{e_i\}$. En effet, soit $r^{-1}V$ un ouvert formel de A tel que $\pi^{-1}r^{-1}V \cong (r^{-1}V) \times T$. Alors $\pi^{-1}r^{-1}V \cap G^0 \cong (r^{-1}V) \times T^0$ est un affinoïde tel que la norme spectrale soit multiplicative. Alors $\|f\|$, pour $f \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x$, est égal à la norme de la restriction f ; $\pi^{-1}r^{-1}V \cap G^0$.

(1.7.4) *Remarque.* — La proposition reste valable si on remplace $\mathcal{O}_D$ par un faisceau cohérent analytique $\mathcal{M}$ sur A. Dans ce cas, plus général, il faut faire un choix convenable des normes sur $H^0(G, \pi^*\mathcal{M})_x$.

(1.8) Diviseurs T-invariants sur G. — Pour l'énoncé du théorème principal nous avons besoin du

LEMME. — *Soit F un diviseur de G, invariant par l'action de T, et soit h une fonction méromorphe avec $(h) = F$. Alors :*

(1) *Il existe un caractère $x \in X(T)$ tel que $h(tg) = x(t)h(g)$ pour $t \in T$.*

(2) *Soit h_1 une autre fonction méromorphe avec $(h_1) = F$. Alors $h_1 = c \cdot y \cdot h$ où $c \in K^*$, $y \in \ker \tau \subset X(T)$ vu comme fonction inversible sur G. En plus $h_1(tg) = y(t)x(t)h_1(g)$ pour $t \in T$.*

Démonstration. — La fonction méromorphe $(t, g) \to h(tg)h(g)^{-1}$ est inversible sur $T \times G$. D'après (1.5.4), appliqué à $T \times G$, $h(tg)h(g)^{-1} = cx(t)y(g)$ avec $c \in K^*$, $x \in X(T)$, $y \in \ker \tau$ (*cf.* (1.5.4)$'$). En faisant $t = 1$, il vient $c = 1$ et $y = 0$. Cela montre (1). Finalement (2) est une conséquence immédiate de (1.5.4).

(1.9) *Remarque.* — Tous les résultats de ce paragraphe 1, (sauf 1.5.2) sont vrais si A n'a plus de structure algébrique, mais est un groupe analytique propre possédant une réduction analytique non singulière (*cf.* (1.6.6)). L'assertion (1.5.2) est vrai sans que A ait une structure algébrique, mais sous l'hypothèse que l'extension de groupes analytiques $0 \to T \to G \to A \to 0$ soit localement triviale (*cf.* (3.1)).

2. La variété analytique G/Λ

On utilise les notations du paragraphe 1 et l'hypothèse (1.3.1). Le résultat principal de notre travail est le suivant.

(2.1) THÉORÈME. — *On suppose que A possède une réduction analytique $r : A \to \bar{A}$ non singulière. Soit Λ un réseau de $G(K)$. Alors G/Λ est une variété abélienne si et seulement si il existe un diviseur ample D sur A et un homomorphisme $\varphi : \Lambda \to X(T)$ tel que :*

(i) *le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \subset G(K) & \xrightarrow{\ \pi\ } & A(K) \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\Phi_D} \\ X(T) & \xrightarrow{\ \tau\ } & \mathrm{Pic}^0(A) \end{array}$$

où Φ_D est la polarisation associée à D ;

(ii) *la forme bilinéaire*

$$\Lambda \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \longmapsto \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \ell(\lambda_1)(\varphi(\lambda_2))$$

est symétrique et définie positive ;

(iii) *pour tout $\lambda \in \Lambda$, soit $h(\lambda)$ la fonction méromorphe sur G, déterminée à une constante près (cf. (1.8)) par :*

$$\big(h(\lambda)\big) = \lambda^{-1}\pi^*D - \pi^*D \quad \text{et} \quad h(\lambda)(tg) = \varphi(\lambda)(t)h(\lambda)(g),$$

alors, pour tout λ_1, λ_2 appartenant à Λ

$$h(\lambda_1)(\lambda_2 g) \cdot \big[h(\lambda_1)(g)\big]^{-1} = h(\lambda_2)(\lambda_1 g) \cdot \big[h(\lambda_2)(g)\big]^{-1}.$$

(2.2) *Démonstration de "$\Rightarrow$".* — On suppose que G/Λ est une variété abélienne. Soit E un diviseur ample sur G/Λ. D'après (1.5.4), il existe un diviseur D sur A avec $q^*E \sim \pi^*D$. Soit Θ une fonction méromorphe sur

G avec $(\Theta) = q^*E - \pi^*D$. Posons, pour $\lambda \in \Lambda$, $h(\lambda)(g) = \Theta(g)\cdot\Theta(\lambda g)^{-1}$. Alors $(h(\lambda)) = \lambda^{-1}\pi^*D - \pi^*D$. Comme $\lambda^{-1}\pi^*D - \pi^*D$ est invariant par T, il existe d'après (1.8) un caractère $\varphi(\lambda) \in X(T)$ tel que $h(\lambda)(tg) = \varphi(\lambda)(t)h(\lambda)(g)$.

L'égalité triviale $h(\lambda_1\lambda_2)(g) = h(\lambda_1)(\lambda_2 g)\cdot h(\lambda_2)(g)$ montre que l'application $\varphi : \Lambda \to X(T)$ est un homomorphisme et en même temps l'égalité (iii). En plus on a $\Phi_D(\pi(\lambda)) = [\pi(\lambda^{-1})D - D]$ et $\pi^*(\pi(\lambda^{-1})D - D) = (h(\lambda))$. Donc $\Phi_D(\pi(\lambda)) = \tau(\varphi(\lambda))$ et on a vérifié (i). Pour $t \in T$ le diviseur de $g \to \Theta(tg)\Theta(g)^{-1}$ est $t^*q^*E - q^*E = q^*(q(t)^*E - E)$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T \subset G & \xrightarrow{\quad q \quad} & G/\Lambda \\ {\scriptstyle S}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Phi_E} \\ \mathcal{H}om(\Lambda, K^*) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0(G/\Lambda) \end{array}$$

où S est donné par $S(t)(\lambda) = \varphi(\lambda)(t^{-1})$. Le noyau de $\Phi_E \circ q$ est un groupe de type fini. Si φ n'est pas injectif le noyau de S est un sous groupe algébrique de T de dimension positive. Donc φ est injectif.

Montrons maintenant la propriété (ii). Pour cela il faut trouver le lien entre les fonctions $\{h(\lambda)\}$ et la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$. Soit $c : \Lambda \to G^0(K)$ un homomorphisme de groupes tel que $\lambda \cdot c(\lambda)^{-1} \in T(K)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Posons $Q(\lambda) = -\log \|h(\lambda)\|$, où $\|\ \|$ est la norme de (1.7.2). Une combinaison des formules :

$$\begin{aligned} h(\lambda_1\lambda_2)(g) &= h(\lambda_1)(\lambda_2 g)\cdot h(\lambda_2)(g),\\ h(\lambda_1)(\lambda_2 g) &= \varphi(\lambda_1)\big(\lambda_2 c(\lambda_2)^{-1}\big)\cdot h(\lambda_1)(c(\lambda_2)g),\\ \langle\lambda_2,\lambda_1\rangle &= -\log\big|\varphi(\lambda_1)\big(\lambda_2 c(\lambda_2)^{-1}\big)\big|,\\ \|h(\lambda_1)\| &= \big\|h(\lambda_1)\big(c(\lambda_2)g\big)\big\|, \end{aligned}$$

(parce que $c(\lambda_2) \in G^0(K)$) donne

$$\langle\lambda_2,\lambda_1\rangle = Q(\lambda_1\lambda_2) - Q(\lambda_1) - Q(\lambda_2).$$

Donc $\langle\ ,\ \rangle$ est symétrique. De plus $Q(\lambda) = (1/2)\langle\lambda,\lambda\rangle + L(\lambda)$, où $L : \Lambda \to \mathbb{R}$ est linéaire. Considérons la décomposition $\Theta = \sum \Theta_x$ de (1.7). La formule $h(\lambda)(g)\cdot\Theta(\lambda g) = \Theta(g)$ implique alors $h(\lambda)(g)\cdot\Theta_x(\lambda g) = \Theta_{x+\varphi(\lambda)}(g)$ pour tout $x \in X(T)$ et $\lambda \in \Lambda$.

Fixons $x_0 \in X(T)$ avec $\Theta_{x_0} \neq 0$. Alors on a :

$$\Theta_{x_0+\varphi(\lambda)}(g) = h(\lambda)(g) \cdot x_0\big(\lambda c(\lambda)^{-1}\big) \cdot \Theta_{x_0}\big(c(\lambda)g\big),$$
$$-\operatorname{Log} \|\Theta_{x_0+\varphi(\lambda)}\| = Q(\lambda) - \log \big|x_0\big(\lambda c(\lambda)^{-1}\big)\big| - \log \|\Theta_{x_0}\|.$$

Il s'ensuit que $-\log \|\Theta_{x_0+\varphi(\lambda)}\| = \frac{1}{2}\langle\lambda,\lambda\rangle + a(\lambda) + b$, où $a : \Lambda \to \mathbb{R}$ est linéaire et où $b \in \mathbb{R}$. La propriété (1.7.3) implique $\langle\lambda,\lambda\rangle > 0$ pour $\lambda \neq 0$, donc φ est injectif et cela montre (ii).

Il nous reste à montrer que D est ample. On peut faire une démonstration rapide en utilisant que A et $\mathrm{Pic}^0(A)$ sont des variétés abéliennes.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
G/\Lambda \arrow[r, "\Phi_E"] & \mathrm{Pic}^0(G/\Lambda) \arrow[d, "q^*"] \\
G \arrow[u, "q"] \arrow[r, "\Phi_{q^*E}=\Phi_{\pi^*D}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Pic}^0(G) \\
A \arrow[r, "\Phi_D"] & \mathrm{Pic}^0(A). \arrow[u, "\pi^*"']
\end{tikzcd}$$

$\pi^*\Phi_D$ est surjectif parce que Φ_E et q^* sont surjectifs (*cf.* (1.6.5)). Le noyau de π^* est un groupe de type fini d'après (1.5.5). Alors le conoyau de Φ_D est un groupe de type fini. Comme Φ_D est un morphisme de variétés abéliennes il s'ensuit que Φ_D est surjectif. Cela implique que D est ample.

(2.3) Le plongement projectif associé à $3D$. — Dans ce paragraphe, nous montrons l'existence d'un plongement analytique $\phi : A \to \mathbb{P}(H^0(A, \mathcal{O}_{3D}))$ utilisant seulement la structure analytique de A. Il y a deux raisons pour cela. D'abord la démonstration servira de modèle pour la réciproque du théorème (2.1) (*cf.* paragraphe (2.4)), ensuite elle conduit à un résultat plus fort (*cf.* (3.5)). Rappelons que les idées utilisées ici sont essentiellement dues à A. Weil (voir par exemple [W]).

Rappelons (*cf.* (1.9)) que les résultats du paragraphe 1 sont valables sans que A soit algébrisable en faisant l'hypothèse que *l'extention de groupes analytiques* $0 \to T \to G \to A \to 0$ *est localement triviale* (*cf.* (3.1)), hypothèse que nous faisons dans ce paragraphe.

Pour commencer on suppose que E est très ample et que E et D sont symétriques (*i.e.* si $i : A \to A$ est défini par $i(a) = a^{-1}$, on a $i^*E \simeq E$ et $i^*D \simeq D$). D'abord un lemme :

(2.3.1) LEMME. — *Il existe une fonction méromorphe $f(a,b,z)$ sur $A \times A \times A$ telle que pour tout $a, b \in A$ fixés le diviseur de $f(a,b,z)$ soit $aD + bD + a^{-1}b^{-1}D - 3D$.*

Démonstration. — Soit M un diviseur sur un groupe analytique commutatif H. On écrit $\mathcal{V}_3(M)$ pour le diviseur

$$m_{123}^*M - m_{12}^*M - m_{13}^*M - m_{23}^*M + m_1^*M + m_2^*M + m_3^*M$$

sur $H \times H \times H$ où pour $I \subset \{1,2,3\}$, $m_I : H \times H \times H \to H$ est le morphisme $m_I(z_1, z_2, z_3) = \prod_{i \in I} z_i$.

Soit f une fonction méromorphe sur H, alors $\mathcal{V}_3(f)$ désigne la fonction méromorphe sur $H \times H \times H$,

$$(f \circ m_{123})(f \circ m_{12})^{-1}(f \circ m_{13})^{-1}(f \circ m_{23})^{-1}(f \circ m_2)(f \circ m_3).$$

G/Λ est une variété abélienne, d'après GAGA le diviseur E est algébrique et le corollaire 2 p. 58 de [M1] affirme que $\mathcal{V}_3(E)$ est le diviseur d'une fonction rationnelle (et donc méromorphe) f_1 sur $(G/\Lambda)^3$.

La fonction méromorphe $f_2 = \mathcal{V}_3(\Theta)^{-1} f_1$ sur G^3 a pour diviseur $\mathcal{V}_3(\pi^*D)$. Pour t_1, t_2, $t_3 \in T$, la fonction $f_2(t_1 g_1, t_2 g_2, t_3 g_3) f_2(g_1, g_2, g_3)^{-1}$ est inversible sur G^3, invariante par Λ^3, donc égale à une constante $c(t_1, t_2, t_3) \in K^*$.

Parce que $f_2(1, 1, g_3) \in \mathcal{O}(G)^*$ il existe un caractère $x \in \ker \tau \subset X(T)$ avec $c(1, 1, t_3) = x(t_3)$. La symétrie implique $c(t_1, t_2, t_3) = x(t_1 t_2 t_3)$.

Alors $f_3(g_1, g_2, g_3) = x(g_1^{-1} g_2^{-1} g_3^{-1}) f_2(g_1, g_2, g_3)$ est invariante par T^3. On écrit f_4 pour la fonction méromorphe sur A^3 déduite de f_3. Le diviseur de f_4 est $\mathcal{V}_3(D)$ et $f(a,b,z) = f_4(a,b,z) f_4(a, a^{-1}, z)^{-1} f_4(b^{-1}, b, z)^{-1}$ possède les propriétés du lemme.

(2.3.2) COROLLAIRE. — *$\mathcal{O}_{3D}$ est engendré par $H^0(A, \mathcal{O}_{3D})$.*

Démonstration. — Pour $P \in A$ on prend $a, b \in A$ tels que $P \notin aD \cup bD \cup a^{-1}b^{-1}D$. Alors $f(a,b,z) \in H^0(A, \mathcal{O}_{3D})$ ne s'annule pas en P comme section de $\mathcal{O}_{3D}$.

(2.3.3) COROLLAIRE. — *$\mathcal{O}_{3D}$ induit un morphisme analytique*

$$\phi : A \longrightarrow \mathbb{P}^d \quad où \quad \mathbb{P}^d = \mathbb{P}\big(H^0(A, \mathcal{O}_{3D})\big).$$

Démonstration. — Soit $u_0, \ldots, u_d$ une base de $H^0(A, \mathcal{O}_{3D})$, alors $\phi(P) = (u_0(P) : u_1(P) : \cdots : u_d(P)) \in \mathbb{P}^d$. Sur un recouvrement affinoïde admissible de A on vérifie que ϕ est un morphisme d'espaces analytiques.

(2.3.4) LEMME. — *ϕ est injectif.*

Démonstration. — Soient z_1 et z_2 dans A tels que $\phi(z_1) = \phi(z_2)$, alors $u(z_1) = u(z_2)$ pour tout $u \in H^0(A, \mathcal{O}_{3D})$ puisque $1 \in H^0(A, \mathcal{O}_{3D})$.

Soient X_1, X_2, X_3 $\in$ $X(T)$ avec $X_1 + X_2 + X_3 = 0$ et soient $\alpha_i \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^* D})_{x_i}$, $\alpha_i \neq 0$. Alors, si f est donné par (2.3.1),

$$u(g) = \alpha_1(g_1^{-1}g)\alpha_2(g_2^{-1}g)\alpha_3(g_1g_2g)f(\pi(g_1), \pi(g_2), \pi(g))$$

appartient à $H^0(A, \mathcal{O}_{3D})$ pour tout g_1, g_2 dans G. Nous avons supposé que D est symétrique, donc $H^0(G, \pi^*\mathcal{O}_D)_x \neq 0$ implique $H^0(G, \pi^*\mathcal{O}_D)_{-x} \neq 0$. Pour $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_1 \in H^0(G, \pi^*\mathcal{O}_D)_{x_1}$, on peut trouver X_2, X_3 et $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$ avec $X_1 + X_2 + X_3 = 0$ et $\alpha_i \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^* D})_{x_i}$.

Prenons $Z_1, Z_2 \in G$ avec $\pi(Z_1) = z_1$, $\pi(Z_2) = z_2$. Alors $a(Z_1) = a(Z_2)$ implique que le diviseur de la fonction $g \to \alpha_1(g^{-1}Z_1)\alpha_1(g^{-1}Z_2)^{-1}$, méromorphe sur A, est égal à $z_2 i^* D - z_1 i^* D$, où i est l'application inverse de A. Pour $\alpha_1 = 1$ on a $z_2 i^* D = z_1 i^* D$. Posons $\delta = Z_1 Z_2^{-1}$. Alors $g \mapsto \alpha_1(\delta g) \cdot \alpha(g)^{-1}$ est une fonction inversible sur A, donc égale à une constante $c(\alpha_1) \in K^*$. Si α, β sont dans $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^* D})_{x_1}$ on constate que $c(\alpha + \beta) = c(\alpha) = c(\beta)$, alors $c(\alpha)$ ne dépend que de X_1 et nous écrivons alors $c(X_1)$ au lieu de $c(\alpha)$. Revenons à la fonction u précédente, on voit que $c(X_1)c(X_2)c(X_3) = 1$ si $X_1 + X_2 + X_3 = 0$. Donc $X \to c(X)$ est un homomorphisme de groupes $X(T) \to K^*$. Un changement de δ en δt avec $t \in T$ convenablement choisi nous donne $\alpha(\delta g) = \alpha(g)$ pour tout $\alpha \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^* D})_x$ et tout x. L'égalité reste valable pour tout $\alpha \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^* D})$ et est donc valable pour Θ et tout $h(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Comme $H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_E)$ est un sous-espace de $\Theta^{-1}H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^* D})$, il vient $\delta \in \Lambda$ parce que E est très ample. Finalement, $h(\lambda)(g) = h(\lambda)(\delta g)$ pour tout $g \in G$ implique $\langle \lambda, \delta \rangle = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, donc $\delta = 1$ et ϕ est injectif.

(2.3.5) LEMME. — *Pour tout point P de A l'application des espaces tangents $T_{A,P} \to T_{\mathbf{P}^d, \phi(P)}$, induite par ϕ, est injective.*

Démonstration. — Soit $P \in A$ et soit $e : \mathcal{O}_{A,P} \to K$ une dérivation. Après une translation de D, on peut supposer que $P \notin$ support de D. Alors $\mathcal{O}_{A,P}$ s'identifie à $\mathcal{O}_{3D,P}$ et il faut montrer que $e(u) = 0$ pour tout $u \in H^0(A, \mathcal{O}_{3D})$ implique $e = 0$.

Soit Q un point de G avec $\pi(Q) = P$ et soit $e' : \mathcal{O}_{G,Q} \to K$ une dérivation telle que

$$e = \mathcal{O}_{A,P} \xrightarrow{\pi^*} \mathcal{O}_{G,Q} \xrightarrow{e'} K.$$

Comme dans la démonstration de (2.3.4) on prend

$$u(g) = \alpha_1(g_1^{-1}g)\alpha_2(g_2^{-1}g)\alpha_3(g_1g_2g)f\big(\pi(g_1), \pi(g_2), \pi(g)\big).$$

Remarquons que $g \mapsto e'(k(ag))$ est une fonction méromorphe en a, si k est une fonction méromorphe.

Posons $k_i(a) = e'(\alpha_i(a^{-1}g))\alpha_i(a^{-1}Q)^{-1}$ pour $i = 1, 2, 3$. Puisque u et $g \to f(\pi(g_1), \pi(g_2), \pi(g))$ sont dans $H^0(A, \mathcal{O}_{3D})$,

$$k_1(g_1) + k_2(g_2) + k_3(g_1^{-1}g_2^{-1}) = 0 \quad \text{pour tout } g_1, g_2.$$

Cela implique que chaque k_i est nul.

Donc $e'(v) = 0$ pour tout $v \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_x$ et aussi pour tout $v \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})$. Comme dans (2.3.4) on en conclut que e' est nul sur les éléments de $H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_E)$. On a $\mathcal{O}_{G,Q} \cong \mathcal{O}_{G/\Lambda, q(Q)}$ donc $e' = 0$ parce que E est très ample. Cela montre $e = 0$ et le lemme est montré.

(2.3.6) *Fin de la démonstration de* (2.3). — On peut recopier [F–vdP1, p. 201] pour montrer que $\phi : A \to \mathbb{P}^d$ donne un isomorphisme analytique entre A et la variété projective $\phi(A) \subset \mathbb{P}^d$.

L'image X de ϕ est un sous espace analytique de $\mathbb{P}^d([K])$. Le théorème GAGA affirme que X est algébrique. D'après (2.3.4) et (2.3.5), $\phi : A \to X$ est bijective et localement un isomorphisme dans le sens faible. D'après un résultat de GRAUERT-GERRITZEN [G–G], cela implique que ϕ est un isomorphisme d'espaces analytiques.

Encore par GAGA, ϕ est aussi un isomorphisme de variétés algébriques.

(2.4) *Démonstration de* « $\Leftarrow$ ». — Maintenant φ, D et les propriétés (i), (ii), (iii) sont données. On définit $a(\lambda_1, \lambda_2) \in K^*$ par la formule $h(\lambda_1\lambda_2)(g) = a(\lambda_1, \lambda_2)h(\lambda_1)(\lambda_2 g)h(\lambda_2)(g)$ et on constate

$$a(\lambda_1, \lambda_2) = a(\lambda_2, \lambda_1),$$
$$a(\lambda_1\lambda_2, \lambda_3)a(\lambda_1, \lambda_2) = a(\lambda_1, \lambda_2\lambda_3)a(\lambda_2, \lambda_3).$$

Donc $a(\cdots)$ est un 2-cocycle symétrique, à valeurs dans K^*. Le groupe Λ étant libre, il existe une fonction $b : \Lambda \to K^*$ avec $b(\lambda_1\lambda_2)b(\lambda_1)^{-1}b(\lambda_2)^{-1} = a(\lambda_1, \lambda_2)$ pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. On remplace $h(\lambda)$ par $b(\lambda)^{-1}h(\lambda)$ et alors

$$h(\lambda_1\lambda_2)(g) = h(\lambda_1)(\lambda_2 g) \cdot h(\lambda_2)(g) \quad \text{pour } \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda.$$

D'après (2.2), $-\log\|h(\lambda)\| = \frac{1}{2}\langle\lambda, \lambda\rangle + L(\lambda)$, où $L : \Lambda \to \mathbb{R}$ est linéaire. La condition (ii) et (1.7.3) impliquent $\Theta := \sum_{\lambda\in\Lambda} h(\lambda) \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})$. Le diviseur $\pi^*D + (\Theta)$ est invariant par Λ, parce que $h(\lambda)(g)\Theta(\lambda g) = \Theta(g)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Désignons par E le diviseur de G/Λ tel que $q^*E = (\Theta) + \pi^*D$.

On peut supposer que $D = 2D_1$, avec D_1 très ample et $[-1]^*D_1 = D_1$; on va montrer que $3E$ donne un plongement analytique $\phi : G/\Lambda \to \mathbb{P}^d =$

$\mathbb{P}(H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_{3E}))$. Le raisonnement (2.3.6) montrera alors que G/Λ est une variété projective. Le théorème GAGA affirmera que les morphismes analytiques $m : G/\Lambda \times G/\Lambda \to G/\Lambda$ (multiplication) et $i : G/\Lambda \to G/\Lambda$ (inverse) sont des morphismes algébriques. Donc G/Λ sera une variété abélienne.

Pour montrer que $\mathcal{O}_{3E}$ donne un plongement analytique $\phi : G/\Lambda \to \mathbb{P}^d$ on procède comme dans (2.3) :

(2.4.1) LEMME. — *Il existe une fonction méromorphe $f(a,b,z)$ sur $(G/\Lambda)^3$ telle que, pour tout $a,b \in G/\Lambda$ fixés, le diviseur de $f(a,b,z)$ est égal à $aE + bE + a^{-1}b^{-1}E - 3E$.*

Démonstration. — Les notations sont celles de la démonstration de (2.3.1). Il suffit de montrer que $\mathcal{V}_3(E)$ est trivial. Le lemme du cube pour D_1 et A montre qu'il existe une fonction méromorphe k sur A^3 telle que $\mathcal{V}_3(D_1) = (k)$. Soient θ_1 et E_1 définis à partir de D_1 comme le sont juste avant θ et E à partir de D. On a donc $q^*E_1 = \pi^*D_1 + (\theta_1)$, d'où $^*(q^3)\mathcal{V}_3(E_1) = (f)$ où $f = (k \circ \pi^3) \times \mathcal{V}_3(\theta_1)$ (*cf.* (2.3.1)). Il suffit de prouver que f^2 est invariant sous Λ^3. Soit H le groupe d'automorphismes de G^3 engendré par le groupe symétrique S_3, $[-1]$ et Λ^3. Pour $h \in H$, on constate que la restriction de $(f \circ h) \times f^{-1}$, qui appartient à $\mathcal{O}(G^3)^*$, est constante sur T^3. D'après (1.5.4) on a donc : $(f \circ h) \times f^{-1} \in K^*$. La structure du groupe H implique que l'image de l'homomorphisme $h \to (f \circ h) \times f^{-1} \in K^*$ est $\{\pm 1\}$ (en effet, l'image des commutateurs est triviale et H rendu abélien est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Donc f^2 est invariant sous Λ^3 et, si $E = 2E_1$, $\mathcal{V}_3(E)$ est trivial.

On en déduit, comme en (2.3.1)

(2.4.2) COROLLAIRE. — *$\mathcal{O}_{3E}$ est engendré par $H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_{3E})$.*

(2.4.3) COROLLAIRE. — *$\mathcal{O}_{3E}$ induit un morphisme analytique*

$$\phi : G/\Lambda \longrightarrow \mathbb{P}^d \quad \text{où} \quad \mathbb{P}^d = \mathbb{P}\big(H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_{3E})\big).$$

(2.4.4) LEMME. — *ϕ est injectif.*

Démonstration. — Soient $z_1, z_2 \in G/\Lambda$ avec $\phi(z_1) = \phi(z_2)$, alors $u(z_1)u(z_2)^{-1} = 1$ pour tout $u \in H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_{3E})$. Pour $\alpha \in H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_E)$, $\alpha \neq 0$, et $a,b \in G/\Lambda$ la fonction $\alpha(a^{-1}z)\alpha(b^{-1}z)\alpha(abz)f(a,b,z)$ appartient à $H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_{3E})$.

Comme dans (2.3.4), on obtient $\delta_1 = z_1 z_2^{-1} \in G/\Lambda$ satisfaisant $\delta_1 E = E$ et $\alpha(\delta_1 z) = \alpha(z)$ pour tout $\alpha \in H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_E)$. Soit $\delta \in G$ avec $q(\delta) = \delta_1$. Le diviseur de $\Theta(g)\Theta(g\delta)^{-1}$ est $-\pi^*D + \delta^{-1}\pi^*D$. Alors $\Theta(g)\Theta(g\delta)^{-1}$ appartient à $H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_y$ pour un certain $y \in X(T)$, puisque son diviseur est invariant sous T.

L'égalité $\Sigma_\lambda h(\lambda)(g) = \Sigma_\mu \Theta(g)\Theta(g\delta)^{-1}h(\mu)(g\delta)$ implique $h(\lambda_0)(g) = \Theta(g)\Theta(g\delta)^{-1}$ pour certain $\lambda_0 \in \Lambda$.

On remplace δ par $\delta\lambda_0^{-1}$ et on trouve :

$$\Theta(g\delta) = \Theta(g) \quad \text{et} \quad h(\lambda)(g\delta) = h(\lambda)(g) \quad \text{pour tout } \lambda \in \Lambda.$$

Pour tout $y \in X(T)$ et $f_y \in H^0(G, \mathcal{O}_{\pi^*D})_y$ l'élément

$$\alpha = (1/\Theta(g)) \sum_{\lambda\in\Lambda} h(\lambda)(g) f_y(\lambda g)$$

appartient à $H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_E)$. Les égalités $\alpha(\delta g) = \alpha(g)$ et $\Theta(\delta g) = \Theta(g)$ impliquent $f_y(\delta g) = f_y(g)$.

Cette égalité avec $y = 0$ implique $\delta \in T$ parce que D est très ample. Pour $y \in X(T)$ l'égalité implique $y(\delta) = 1$. Donc $\delta = 1$, $z_1 = z_2$ et ϕ est injectif.

(2.4.5) LEMME. — *Pour tout point P de G/Λ l'application des espaces tangents $T_{G/\Lambda,P} \to T_{\mathbf{P}^d,\phi(P)}$, induite par ϕ, est injective.*

Démonstration. — On peut supposer que $P \notin$ support de E et alors $\mathcal{O}_{G/\Lambda,P}$ s'identifie $\mathcal{O}_{3E,P}$. Soit $\varphi : \mathcal{O}_{G/\Lambda,P} \to K$ une dérivation. Il faut montrer que $e(u) = 0$ pour tout $u \in H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_{3E})$ implique $e = 0$.

Soit Q un point de G avec $q(Q) = P$ et désignons par e' la dérivation $\mathcal{O}_{G,Q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{G/\Lambda,P} \xrightarrow{e'} K$.

On choisit u de la forme $u = \alpha(a^{-1}z)\alpha(b^{-1}z)\alpha(abz)f(a,b,z)$ où f est défini en (2.4.1) et où $\alpha \in H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_E)$ est de la forme $\alpha = \sum h(\lambda)(g)f_y(\lambda g)$ avec $f_y \in H^0(\mathcal{O}_{\pi^*D})_y$.

Comme dans (2.3.5) on en conclut $e'(f_y) = 0$ pour tout $f_y \in H^0(\mathcal{O}_{\pi^*D})_y$.

L'application $\bigoplus_{y\in X(T)} H^0(\mathcal{O}_{\pi^*D})_y \to \mathcal{O}_{G,Q}/m^2_{-Q}$ est surjective parce que D est très ample. Cela entraîne $e' = 0$. Donc $e = 0$ et le lemme est montré.

3. Variations sur le même thème

(3.1) Variétés abéloïdes. — Nous reprenons la notion de variété abéloïde de M. RAYNAUD [R].

Une variété abéloïde A/K est un groupe analytique commutatif, connexe, propre sur K.

Le groupe $\mathrm{Pic}^0(A)$ est défini comme dans (1.5). Les auteurs ne savent pas donner à $\mathrm{Pic}^0(A)$ une structure de variété abéloïde lorsque A n'est pas une variété abélienne et possède une bonne réduction.

Soit T/K un tore algébrique déployé. *Une extension d'une variété abéloïde A par le tore T* est un groupe analytique G/K muni d'un morphisme de groupes analytiques $\pi : G \to A$ tel que

(i) $\ker \pi \cong T$;

(ii) localement, pour la topologie de Grothendieck sur A, π est un produit de A par T.

La condition (ii) veut dire qu'il existe un recouvrement affinoïde admissible $\{A_i\}$ de A et des isomorphismes analytiques $\theta_i : \pi^{-1}(A_i) \xrightarrow{\sim} A_i \times T$ tels que

(a) est commutatif

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(A_i) \arrow[r, "\sim", "\theta_i"'] \arrow[d, "\pi"] & A_i \times T \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ A_i & \end{tikzcd}$$

(b) θ_i est T-équivariant.

(3.2) PROPOSITION. — *Soit A/K une variété abéloïde et soient T/K un tore algébrique déployé, $X(T)$ son groupe des caractères. Alors l'ensemble des classes d'isomorphismes des extensions de A par T est isomorphe à $\mathcal{H}om(X(T), \mathrm{Pic}^0(A))$.*

Démonstration. — Soit une extension $\pi : G \to A$, donnée. L'isomorphisme $\theta_i : \pi^{-1}(A_i) \xrightarrow{\sim} A_i \times T$ est de la forme $\theta_i(z) = (\pi(z), f_i(z))$ où $f_i(tz) = tf_i(z)$ pour tout $t \in T$. Si $i \neq j$, $\theta_j \circ \theta_i^{-1}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \theta_j \circ \theta_i^{-1} : A_{ij} \times T &\longrightarrow A_{ij} \times T \\ (z,t) &\longmapsto \big(z, tf_{ij}(z)\big) \end{aligned}$$

où $\{f_{ij}\}$ est un 1-cocycle. Pour tout $x \in X(T)$, $\{x \circ f_{ij}\}$ est un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbb{G}_m$ et définit un faisceau inversible sur A. On trouve ainsi un homomorphisme $\tau : X(T) \to \mathrm{Pic}(A)$.

Soit $x \in X(T)$, $x \neq 0$, et soit $T' = \ker(x : T \to K^*)$. Le groupe analytique $G' = G/T'$ est une extension de A par $K^* = \mathbb{G}_m$. Soient $a \in A$ et $b \in G'$ avec image a. Alors la multiplication par b sur G' induit un isomorphisme $a^*\mathcal{O}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_x$ où $\mathcal{O}_x$ est le faisceau inversible sur A avec $[\mathcal{O}_x] = \tau(x)$. Donc τ est un homomorphisme de $X(T)$ dans $\mathrm{Pic}^0(A)$.

D'autre part, soit $\tau : X(T) \to \mathrm{Pic}^0(A)$ un homomorphisme donné. On se donne un recouvrement admissible $\{A_i\}$ de A trivialisant tous les $\tau(x) = [\mathcal{O}_x]$ pour $x \in X(T)$. Il existe des fonctions holomorphes $f_{ij} : A_{ij} \to T$ telles que $\{x \circ f_{ij}\}_{ij}$ décrit $\tau(x)$ pour tout $x \in X(T)$.

On recolle maintenant les espaces analytiques $A_i \times T$ suivant les isomorphismes $A_{ij} \times T \to A_{ij} \times T$, $(z,t) \to (z, tf_{ij}(z))$. Cela définit $\pi : G \to A$. La structure de groupe analytique sur G (compatible avec les autres données) se déduit de :

$$m^*\mathcal{O}_x \cong p_1^*\mathcal{O}_x \otimes p_2^*\mathcal{O}_x \quad \text{où} \quad m, p_1, p_2 : A \times A \longrightarrow A$$

sont la multiplication et les deux projections, (*cf.* (1.2)). Le lemme suivant achève donc la démonstration de (3.2).

(3.3) LEMME. — *Soit $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(A)$, alors le faisceau inversible $m^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}$ sur $A \times A$ est trivial.*

Démonstration. — Le théorème des morphismes propres de R. KIEHL ([K, théorème 3.3]) appliqué à $\mathcal{M} = m^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}$ et $p_1 : A \times A \to A$ montre que $\mathcal{N} := (p_1)_*\mathcal{M}$ est un faisceau analytique cohérent ; le théorème des fonctions formelles ([K, théorème 3.7]) et le fait que $\mathcal{M}|\{a\} \times A$ soit trivial pour tout $a \in A$, montre que $\mathcal{N}$ est en fait un faisceau inversible. De plus $p_1^*\mathcal{N} \cong \mathcal{M}$. On a les mêmes propriétés avec p_2. On peut montrer facilement qu'étant donné un ouvert admissible affinoïde U de A on a $p_1^*\mathcal{N}(A \times U) \cong \mathcal{N}(A) \otimes_K \mathcal{O}_A(U)$, d'où l'on déduit, puisque $(p_2)_*\mathcal{M}$ est inversible :

$$(p_2)_*\mathcal{M} \cong (p_2)_* p_1^*\mathcal{N} \cong \mathcal{O}_A.$$

Par conséquent $\mathcal{M} \simeq p_2^*(p_2)_*\mathcal{M}$ est trivial.

(3.4) *Remarque.* — Soit A une variété abéloïde possédant une réduction analytique $r : A \to \bar{A}$ avec $\bar{A}$ non singulière. Soit G une extension de A par un tore déployé (analytifié) T/K. Tous les résultats du paragraphe 1 sont encore valables pour G, on peut définir en particulier G^0 et la notion de réseau Λ, donner à G/Λ une structure canonique de variété abéloïde. La démonstration de (2.3) s'applique alors à G/Λ, on en déduit le théorème suivant, d'abord énoncé par M. RAYNAUD ([R, p. 176]).

(3.5) THÉORÈME. — *Soit A une variété abéloïde sur K possédant une réduction analytique $r : A \to \bar{A}$ avec $\bar{A}$ non singulière. Soit Λ un réseau dans une extension G de A par un tore déployé T/K. Supposons que G/Λ soit une variété abélienne, alors A est également une variété abélienne.*

(3.6) Le dual de G/Λ.

PROPOSITION. — *Soient G^{alg} une extension d'une variété abélienne A^{alg}/K avec bonne réduction par une tore T^{alg}/K et Λ un réseau de G. Alors* $\mathrm{Pic}^0(G/\Lambda)$ *est une variété abéloïde. Si G/Λ est une variété abélienne,* $\mathrm{Pic}^0(G/\Lambda)$ *est l'analytifié de* $\mathrm{Pic}^0((G/\Lambda)^{\mathrm{alg}})$.

Rappelons que G, $A,\ldots$ désignent les analytifiés des variétés algébriques G^{alg}, $A^{\mathrm{alg}},\ldots$ Le $\mathrm{Pic}^0(\cdot)$ d'un espace analytique est défini en (1.5).

Démonstration. — Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur A avec $[\mathcal{L}] \in \mathrm{Pic}^0(A^{\mathrm{alg}})$. On sait (*cf.* (1.6.5)) que $\mathcal{L}$ possède une Λ-linéarisation α, c'est-à-dire une famille d'isomorphismes $\alpha(\lambda) : \pi(\lambda)^*\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}$ avec $\alpha(\lambda_1\lambda_2) = \alpha(\lambda_1) \circ \pi(\lambda_1)^*\alpha(\lambda_2)$ pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$.

On définit une relation d'équivalence sur des couples $(\mathcal{L}, \alpha)$ par : $(\mathcal{L}_1, \alpha_1) \sim (\mathcal{L}_2, \alpha_2)$ s'il existe un isomorphisme $f : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ tel que les diagrammes suivants sont commutatifs ($\lambda \in \Lambda$) :

$$\begin{tikzcd} \pi(\lambda)^*\mathcal{L}_1 \arrow[r, "\pi(\lambda)^*f"] \arrow[d, "\alpha_1(\lambda)"'] & \pi(\lambda)^*\mathcal{L}_2 \arrow[d, "\alpha_2(\lambda)"] \\ \mathcal{L}_1 \arrow[r, "f"] & \mathcal{L}_2 \end{tikzcd}$$

Soit H l'ensemble des classes d'isomorphisme des couples $(\mathcal{L}, \alpha)$. On voit aisément que H est un groupe commutatif et qu'on a une suite exacte de groupes

$$0 \longrightarrow T_\Lambda \longrightarrow H \xrightarrow{\rho} \mathrm{Pic}^0(A^{\mathrm{alg}}) \longrightarrow 0$$

où T_Λ est le tore algébrique ayant Λ pour groupe de caractères. On montre que, en tant que groupe, H s'identifie à l'extension de la variété abélienne $\mathrm{Pic}^0(A)$ par T_Λ, donnée par l'homomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\pi} A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}^0((A^{\mathrm{alg}})^t)$. On a écrit $(A^{\mathrm{alg}})^t = \mathrm{Pic}^0(A^{\mathrm{alg}})$ pour la variété duale de A.

Soit $[(\mathcal{L}, \alpha)] \in H$. Alors $\pi^*\mathcal{L}$ sur G possède la Λ-linéarisation $\pi^*\alpha$ et induit ainsi un élément de $\mathrm{Pic}^0(G/\Lambda)$ noté $(\pi^*\mathcal{L}, \alpha)/\Lambda$. Cela définit un homomorphisme $\sigma : H \to \mathrm{Pic}^0(G/\Lambda)$, qui est surjectif, car il résulte de

(1.5.4) et (1.6.5) le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} T_\Lambda & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{H}om(\Lambda, K^*) & & \\ \cap & & \downarrow & & \\ H & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Pic}^0(G/\Lambda) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0(G) \end{array}$$

Le sous-groupe Λ de G induit une action de Λ sur les $\mathcal{O}_x$, notée α_x. On vérifie que pour tout x $\pi^*\mathcal{O}_x \simeq \mathcal{O}_G$ et que cet isomorphisme est compatible avec les actions de Λ, donc $(\pi^*\mathcal{O}_x, \alpha_x)/\Lambda \simeq \mathcal{O}_{G/\Lambda}$. On a donc une suite nulle $X(T) \to H \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Pic}^0(G/\Lambda)$. L'homomorphisme $X(T) \to H$ est injectif parce que Λ est un sous-groupe de G, son image (toujours notée $X(T)$) est un réseau de H puisque Λ est un réseau de G. Montrons que $\ker\sigma \subset X(T)$. Soit $[(\mathcal{L}, \alpha)] \in \ker\sigma$, alors $(\mathcal{L}, \alpha) \sim (\mathcal{O}_x, c\alpha_x)$ pour un certain $x \in X(T)$ et un certain homomorphisme $c : \Lambda \to K^*$. Le faisceau $\pi^*\mathcal{L}$ est engendré par une section Λ-invariante, dont il existe $y \in \ker\tau \subset X(T)$ (*cf.* (1.6.5)) avec $c(\lambda) = y(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Donc $(\mathcal{L}, \alpha) \sim (\mathcal{O}_{x+y}, \alpha_{x+y})$. On a donc prouvé l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow X(T) \longrightarrow H \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(G/\Lambda) \longrightarrow 0$$

$X(T)$ étant un réseau de H, il en résulte une structure de variété abéloïde sur $\mathrm{Pic}^0(G/\Lambda)$.

Supposons maintenant que G/Λ soit une variété abélienne. Il faut comparer les structures analytiques de $H/X(T)$ et de l'analytifié de $\mathrm{Pic}^0((G/\Lambda)^{\mathrm{alg}})$. Pour cela il est nécessaire de construire un faisceau inversible $\mathcal{U}$ sur $(G/\Lambda) \times H$ tel que pour tout $h = [(\mathcal{L}, \alpha)] \times H$, la fibre $\mathcal{U}_h$ sur G/Λ soit isomorphe à $(\pi^*\mathcal{L}, \alpha)/\Lambda$. Cette construction est pénible et trop longue pour être donnée ici. La propriété universelle du faisceau de Poincaré s'étend à la catégorie des espaces analytiques ([B-L, proposition 1.1]). Il en résulte que $H \to \mathrm{Pic}^0((G/\Lambda)^{\mathrm{alg}})$ est un morphisme d'espaces analytique, localement un isomorphisme. La division par $X(T)$ donne l'isomorphisme d'espaces analytiques $H/X(T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}^0((G/\Lambda)^{\mathrm{alg}})$.

(3.7) Une formule pour la dimension de $H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_{nE})$. — On se met dans la situation du THÉORÈME (2.1) avec D, φ et les propriétés (i), (ii) et (iii). Soit E le diviseur de G/Λ défini par $q^*E \sim \pi^*D$ (*cf.* (2.4)). Alors, pour tout entier $n > 0$:

$$\dim H^0\big(G/\Lambda, \mathcal{O}_{nE}\big) = n^{(\dim G/\Lambda)} \cdot \big(\#X(T)/\varphi(\Lambda)\big) \cdot \dim H^0(A, \mathcal{O}_D).$$

En effet, $\Theta^n H^0(G/\Lambda, \mathcal{O}_{nE})$ est le sous espace des $f \in H^0(G, \mathcal{O}^n_{\pi^* D})$ ayant la propriété

$$h(\lambda)(g)^n f(\lambda g) = f(g).$$

Soit Y un ensemble de représentants de $X(T)/n\varphi(\Lambda)$, alors un tel f s'écrit

$$\sum_{y \in Y} \sum_{\lambda \in \Lambda} h(\lambda)(g)^n f_y(\lambda g)$$

où $f_y \in H^0(G, \mathcal{O}^n_{\pi^* D})_y$ pour tout $y \in Y$. Ensuite $H^0(G, \mathcal{O}^n_{\pi^* D})_y \cong H^0(A, \mathcal{O}_y \otimes \mathcal{O}^n_D) \cong H^0(A, \mathcal{O}^n_D)$ parce que $\mathcal{O}_D$ est ample. Cela montre la formule.

(3.8) *Remarque.* — Le THÉORÈME (2.1) et presque tout le paragraphe 1 ne sont plus valables si la variété abélienne A n'a pas bonne réduction. La définition même d'un réseau de G pose un problème dans ce cas là.

BIBLIOGRAPHIE

[B–G–R] BOSCH (S), GÜNTZER (U.) and REMMERT (R.). — *Non archimedean analysis.* — Springer Verlag, 1984.

[B–L] BOSCH (S.) and LÜTKEBOHMERT (W.). — Stable reductions and uniformization of abelian varieties II, *Invent. Math.*, t. **78**, 1984, p 257–297.

[C] CHAI (C.L.). — Compactification of Siegel Moduli Schemes, *London Math. Soc., L.N.* **107**, *Cambridge University Press,* 1985 .

[F] FALTINGS (G.). — Arithmetische Kompaktifizierung des Modulraums der abelschen Varietäten, *Lecture Notes in Math.* **1111**, *Springer Verlag,* 1984 .

[F–vdP1] FRESNEL (J.) et VAN DER PUT (M.). — Géométrie analytique rigide et applications, *Progr. Math., vol.* **18**, *Birkhäuser,* 1981.

[F–vdP2] FRESNEL (J.) et VAN DER PUT (M.). — Localisation formelle et groupe de Picard, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, t. **33**, 1983, p 19–82.

[G1] GERRITZEN (L.). — On non-archimedean representations of abelian varieties, *Math. Ann.*, t. **169**, 1972, p 323–346.

[G2] GERRITZEN (L.). — Zerlegungen der Picard-Gruppe nichtarchimedischer holomorpher Räume, *Compositio Math.*, t. **35**, 1977, p 23–38.

[G–G] GERRITZEN (L.) und GRAUERT (H.). — Die Azyklicität der affinoide Überdeckungen. Global Analysis Papers in honour of Kodaira. *Univ. of Tokyo Press*, 1969, *edited by D. C.* SPENCER *and S.* YANAGA .

[G–vdP] GERRITZEN (L.) and VAN DER PUT (M.). — Schottky groups and Mumford curves, *Lecture Notes in Math.*, **817**, *Springer Verlag*, 1980.

[Gr] GRUSON (L.). — Fibrés vectoriels sur un polydisque ultramétrique, *Ann. Sci. École Norm. Sup (4)*, t. **1**, 1968, p 45–89.

[H] HARTSHORNE (R.). — *Algebraic geometry.* — Springer Verlag, 1977.

[H–vdP] HEINRICH (E.) und VAN DER PUT (M.). — Über die Picardgruppen affinoider Algebren, *Math. Z.*, t. **186**, 1984, p 9–28.

[K] KIEHL (R.). — Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, *Invent. Math.*, t. **2**, 1967, p 191–214.

[Kö] KÖPF (U.). — Über eigentlische Familien algebraischer. Varietäten über affinoiden Räumen, *Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster Ser. 2*, t. **7**, 1974.

[M1] MUMFORD (D.). — *Abelian varieties.* — Oxford University Press, 1974.

[M2] MUMFORD (D.). — An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings, *Compositio Math.*, t. **24**, 1972, p 239–272.

[O–vdP] OORT (F.) and VAN DER PUT (M.). — A construction of simple abelian varieties, *Compositio Math.*, t. **67, n° 1**, 1988, p 103–120.

[vdP1] VAN DER PUT (M.). — Cohomology on affinoid spaces, *Compositio Math.*, t. **45**, 1982, p 165–198.

[vdP2] VAN DER PUT (M.). — A note on p-adic uniformization, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, t. **49 n°3**, 1987, p 313–318.

[R] RAYNAUD (M.). — Variétés abéliennes et géométrie rigide, *Actes, Congrès Inter. Math.*, t. **1**, 1970, p 473–477.

[W] WEIL (A.). — On the projective embedding of abelian varieties, [Algebraic geometry and Topology], an honor of S. Lefschetz, p. 177-181, *Princeton Univ. Press*, 1967 et [Œuvres Scientifiques], vol. **II**, p. 175, *Springer Verlag*, second printing, 1980.