BULLETIN DE LA S. M. F.

VINCENT FRANJOU

Quelques éléments dans l'homotopie stable du groupe unitaire

Bulletin de la S. M. F., tome 115 (1987), p. 309-328
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115__309_0>

Bull. Soc. math. France,
115, 1987, p. 309-328.

QUELQUES ÉLÉMENTS DANS L'HOMOTOPIE STABLE DU GROUPE UNITAIRE

PAR

VINCENT FRANJOU (*)

RÉSUMÉ. — Cet article étudie la partie libre de $\pi_*^S(U(n))$ localisé en un nombre premier impair p. On y construit des hypersurfaces stablement parallélisées qui représentent des familles d'éléments de ce groupe. On montre qu'on a ainsi obtenu des générateurs multiplicatifs en basse dimension $(n<2p)$, à l'aide d'un scindement gouverné par une représentation du groupe symétrique.

ABSTRACT. — This paper is concerned with the torsion-free part of $\pi_*^S(U(n))$ localised at an odd prime p. Framed hypersurfaces are constructed which represent families of elements in this group. One shows that multiplicative generators have thus been obtained in low dimension $(n<2p)$, using a splitting induced by the action of the symmetric group on a complex.

On sait depuis longtemps que l'homotopie stable rationnelle du groupe unitaire $U(n)$ est isomorphe à son homologie rationnelle, et l'isomorphisme est donné par l'homomorphisme de Hurewicz stable

$$h^S:\quad \pi_*^S(U(n)) \to H_*(U(n))$$

rationnalisé. En tant qu'anneau de Pontryagin, $H_*(U(n), Q)$ est une algèbre extérieure en des générateurs primitifs δ_i de degré $2i+1$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$; on prend pour δ_i la classe sphérique image d'un générateur de $\pi_{2i+1}(U(n))$ par l'homomorphisme de Hurewicz. On observera que les classes δ_i ne constituent pas une famille de générateurs multiplicatifs de $H_*(U(n), Z)$. En fait, les δ_i sont divisibles par $i!$: $\delta_i = i!\, R_*(\sigma x_i)$, où R désigne l'application de réflexion complexe $\Sigma CP_+^{n-1} \to U(n)$ [J] et x_i un générateur de

(*) Texte reçu le 30 décembre 1985, révisé le 9 janvier 1987.

V. FRANJOU, Institut de Mathématiques et d'Informatique, 2, chemin de la Houssinière, 44072 Nantes Cedex 03.

$H_{2i}(CP^{n-1})$; et les classes $\delta_i/i!$ fournissent, elles, un système de générateurs multiplicatifs de l'homologie entière de $U(n)$.

Cet article étudie la partie libre du localisé en p, p premier distinct de 2, de $\pi_*^S(U(n))$. Elle est déterminée par l'image de h^S dans $H_*(U(n), Z_{(p)})$. En basse dimension ($n<2p$), on produira des générateurs multiplicatifs de cette image :

THÉORÈME 0.1. — (*a*) *Les éléments*

$$\delta_{i,j}=\frac{1}{p}(\delta_i\,\delta_{j+p-1}-\delta_{i+p-1}\,\delta_j)$$

sont dans l'image de h^S pour tous i, j.

(*b*) *En outre si $n<2p$ les classes δ_i, $1\leqslant i\leqslant n-1$ et $\delta_{i,j}$, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-p$, engendrent multiplicativement l'image de h^S dans $H_*(U(n), Z_{(p)})$.*

On interprète $\pi_*^S(U(n))$, à l'aide de la construction de Thom-Pontryagin, comme l'anneau de bordisme des variétés stablement parallélisées munies d'une application dans $U(n)$. Pour obtenir 0,1 (*a*), nous construirons des hypersurfaces représentant les éléments de $\pi_*^S(U(n))$ s'envoyant sur $\delta_{i,j}$. Les mêmes techniques nous permettent de décrire d'autres éléments de l'image de h^S provenant d'hypersurfaces. Par exemple :

THÉORÈME 0.2 :

$$\frac{1}{p^t}\delta_i\,.\,\delta_{i+p^{t-1}(p-1)}\in H_{4i+2+2p^{t-1}(p-1)}(U)$$

est dans l'image de h^S, $i\geqslant t+2$.

Les groupes d'homotopie stable des groupes unitaires sont intéressants en eux-mêmes, mais les calculs faits ici ont des applications dont je donne deux exemples. L'une concerne l'homotopie stable des sphères, en particulier la famille β_i de Toda-Smith, pour laquelle on peut consulter [7] et [SF]. L'autre apparaît dans l'étude du cobordisme Lagrangien de la manière suivante. Loin de 2, le calcul des groupes de cobordisme Lagrangien se ramène essentiellement à celui de $\pi_*^S(SU/SO)$ et, loin de 2, U se scinde en $S^1\times SO\times SU/SO$. Ce point de vue est développé dans [A], où l'on trouve aussi d'autres représentations géométriques.

Le premier paragraphe décrit des hypersurfaces, le second montre qu'elles représentent les classes $\delta_{i,j}$. Le paragraphe 3 démontre le théorème

0,1 (*b*) à l'aide du scindement d'un complexe muni d'une action du groupe symétrique, expliqué au paragraphe 4. Le cinquième paragraphe étend la méthode du second et le dernier emploie d'autres méthodes pour représenter d'autres éléments de $\pi_*^S(U)$ par des hypersurfaces.

Des calculs analogues à ceux presentés ici ont été faits dans [BCRS] pour BU. Les structures algébriques sont cependant plus simples pour U, ce qui nous permet d'obtenir une description complète en basse dimension.

NOTATION. — Dans tout l'article p est un nombre premier impair et on notera $q=2(p-1)$.

1. Construction des hypersurfaces

On rappelle une construction de Cooke (*voir* aussi [BR], §2, et [Re]). Soit un complexe C plongé comme polyèdre dans S^{N+1}. Soit alors V un voisinage régulier fermé de C dans S^{N+1}, et M son bord. M est une hypersurface linéaire par morceaux (PL). Notons DC l'adhérence de $S^{N+1}-V$. La cofibration de Mayer-Vietoris

$$M \to C \vee DC \to S^{N+1} \xrightarrow{T} \Sigma M \to \dots$$

permet alors de montrer :

PROPOSITION 1.1. — *Il existe une équivalence d'homotopie*

$$\Sigma M \to \Sigma C \vee \Sigma DC \vee S^{N+1}$$

où DC est un N-dual de Spanier-Whitehead de C. Les composantes $\Sigma M \to \Sigma C$ et $\Sigma M \to \Sigma DC$ sont les suspensions des inclusions de M comme bord, et $\Sigma M \to S^{N+1}$ est l'écrasement sur la cellule de dimension maximale.

Notons que l'application de Thom $T: S^{N+1} \to \Sigma M$ fournit une section de cette application.

En fait, il résulte de [HM] 7.2 que M peut être déformée par une isotopie différentiable par morceaux en une hypersurface lisse. La structure différentiable ainsi déterminée sur M est unique.

Dans le paragraphe 2, nous considérons le cas suivant. Soit t le plus grand entier tel que p^{t-1} divise k, et α_k un élément d'invariant d'Adams $e=-1/p^t$, représenté par une application $\alpha_k : S^{kq+2i} \to S^{2i+1}$. Une telle application existe d'après [G]. Soit C_k le cône de cette application. C_k se plonge dans $S^{kq+4t+3}$: on plonge le cylindre de α_k dans le joint $S^{kq+2t} * S^{2t+1} = S^{kq+4t+2}$ que l'on plonge dans $S^{kq+4t+3}$ pour fournir l'extension au cône. Ainsi, la $2s$-ième suspension de C_k, $\Sigma^{2s} C_k$, se plonge dans la sphère S^{N+1}, avec $N = kq+4t+2r+2s+2$, pour tous naturels r et s. k, r et s étant fixés, on note C pour cette suspension et on lui applique la construction qui précède pour produire une hypersurface M.

2. Applications à $\pi_*^S(U)$

Comme hypersurface, M est canoniquement parallélisée (à orientation près). Munie d'une application $f: M \to U$, elle détermine un élément de $\pi_N^S(U)$ représenté par :

$$S^{N+1} \xrightarrow{T} \Sigma M \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma U.$$

On se propose de calculer l'image de cet élément par l'homomorphisme de Hurewicz $k^S : \pi_*^S(U) \to K_*(U)$; de là, on déduit facilement le théorème 0,1 (a).

Pour fixer les idées, notons $[M]$ la classe de $K_N(M)$ dont la suspension est $T_*([S^{N+1}])$, $[S^{N+1}]$ désignant la classe fondamentale de S^{N+1} dans $K_{N+1}(S^{N+1})$. L'élément cherché est alors $f_*[\mathrm{M}]$.

Nous commençons par décrire $K^*(M)$ et $K_*(M)$, avant de définir f et calculer $f_*[M]$. Le calcul qui suit est proche de certains dans [BCRS], mais plus simple, car la multiplication dans $K_*(U)$ est plus accessible.

La suite exacte courte

$$0 \to K^*(S^{kq+2t+2s+1}) \to K^*(C) \to K^*(S^{2t+2s+1}) \to 0$$

détermine une classe b dans $K^{kq+2t+2s+1}(C)$ provenant d'un générateur de $K^{kq+2t+2s+1}(S^{kq+2t+2s+1})$; on choisit une classe a dans $K^{2t+2s+1}(C)$ s'envoyant sur un générateur de $K^{2t+2s+1}(S^{2t+2s+1})$. Les classes a et b sont des générateurs de $K^*(C)$ en tant que $Z[u, u^{-1}]$-module libre. Ici, u désigne l'élément de Bott dans $K^{-2}(\{+\})$. On notera aussi u l'élément de Bott dans $K_2(\{+\})$.

Rappelons qu'après localisation de la K-théorie en p, on y définit pour tout l premier à p des opérations d'Adams stables ψ^l; l'action sur u est :

$\psi^l u = l.u$. Soit Ch le caractère de Chern, donné classiquement sur la base (a, b) par la matrice $\mathrm{Ch}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ e & 1\end{pmatrix}$. Si ψ_H^l désigne l'opération cohomologique (l^{degre}), la relation : $\mathrm{Ch}\circ\psi^l=\psi_H^l\circ\mathrm{Ch}$ nous fournit une diagonalisation simultanée des ψ^l sur $K^*(C)\otimes Q$ ayant $\mathrm{Ch}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -e & 1\end{pmatrix}$ pour matrice de passage. Autrement dit :

$$(2.1)\qquad \begin{cases}(\psi^l-1)(a-eu^{kq/2}b)=0\\ (\psi^l-1)(b)=0.\end{cases}$$

Les crochets de Kronecker mettent $K^*(C)$ et $K_*(C)$ en dualité (*voir* [Ad], p. 284); on note (α, β) la base duale de (a, b) dans $K_*(C)$ (si bien que $\langle a, \alpha\rangle=1$, $\langle a, \beta\rangle=0$, etc.). Le calcul de l'action de ψ^l sur α et β se fait alors par inversion et transposition, puisque :

$$\forall x\in K^i(C),\quad \forall y\in K_i(C),\qquad \langle x, y\rangle=\langle\psi^l x, \psi^l y\rangle.$$

De ${}^t\mathrm{Ch}=\begin{pmatrix}1 & e\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, on tire donc :

$$(2.2)\qquad \begin{cases}(\psi^l-1)(\alpha)=0\\ (\psi^l-1)(e u^{kq/2}\alpha+\beta)=0.\end{cases}$$

L'application de dualité $S^{N+1}\xrightarrow{D}\Sigma C\wedge DC$ détermine de la manière ordinaire des classes β' et α' dans $K_*(DC)$, N-duales des classes a et b. Il est aisé de constater que $(\psi^l x)\, D=\psi^l(xD)$; on en déduit :

$$(2.1')\qquad \begin{cases}(\psi^l-1)(\beta'-e u^{kq/2}\alpha')=0\\ (\psi^l-1)(\alpha')=0\end{cases}$$

et si a' et b' sont les classes duales de α' et β' pour le produit de Kronecker :

$$(2.2')\qquad \begin{cases}(\psi^l-1)(b')=0\\ (\psi^l-1)(e u^{kq/2}b'+a')=0.\end{cases}$$

On note encore a, b, a', b' les classes induites dans $K^*(M)$ par inclusion : elles décrivent $K^*(M)$ conformément au scindement de la proposition 1.1.

Le lemme suivant calcule les produits dans $K^*(M)$:

LEMME 2.3. — *Dans $K^*(M)$, on a les relations :*

(i) $bb'=0$

(ii) $ab'=ba'$

(iii) $aa'=0$.

Démonstration. — (1.1) montre que $K^{\text{pair}}(M)=K^{\text{pair}}(S^N)$; il n'y a donc pas d'invariant par ψ^l du degré de aa' ou bb', d'où :

$$\begin{cases} bb'=0 \\ (a-eu^{kq/2}b)(eu^{kq/2}b'-a')=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} bb'=0 \\ aa'=eu^{kq/2}(ba'-ab'), \qquad e=-\dfrac{1}{p^t}. \end{cases}$$

Par dualité de Poincaré, ab' et ba' sont générateurs de $K^N(M)$. $ba'-ab'$ n'est donc divisible par p que si il est nul, d'où :

$$ba'=ab' \qquad \text{et} \qquad aa'=0.$$

LEMME 2.4. — *L'image de $[M]$ par l'application*

$$M \xrightarrow{\text{diagonale}} M\times M \to C\times DC$$

est égale à $\alpha\otimes\beta'+\beta\otimes\alpha'$.

Cela résulte directement de (2.3) et de la convention de signe $\langle ab', [M]\rangle=1$.

Nous définissons alors l'application f comme la composée :

$$f\colon\ M \xrightarrow{\text{diagonale}} M\times M \to C\times DC$$
$$\xrightarrow{a\times a'} U\times U \xrightarrow{\text{produit}} U$$

où $a\in K^*(C)$ (respectivement $a'\in K^*(DC)$) est interprété comme une application $a: C\to U$ (resp. $a': DC\to U$). En fait, a se factorise à travers $U(|\beta|)$, où $|\beta|=k(q/2)+t+s$. De même a' se factorise à travers $U(|\beta'|)$, $|\beta'|=k(q+2)+t+r$. f se factorise donc à travers $U(kq+2t+r+s)$.

Il nous faut maintenant des notations adéquates pour exprimer $f_*[M]$, et nous procédons donc à quelques rappels sur $K_*(U)$. Nous reprenons les notations de [S]. L'algèbre $K_0(CP^\infty)$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes numériques dont une Z-base est formée des polynômes

$$C_X^i = \frac{X(X-1)\ldots(X-i+1)}{i!}.$$

Le groupe $K_0(CP^{n-1})$ s'identifie naturellement aux polynômes numériques dont le degré n'excède pas $n-1$. Si R désigne la réflexion complexe : $\Sigma CP_+^{n-1} \to U(n)$, on dispose des classes $R_*(\sigma C_X^i)$ dans $K_1(U)$ qui, provenant d'une suspension, sont primitives pour le coproduit induit par la diagonale; l'algèbre de Pontryagin $K_*(U)$ n'est autre que la $Z[u, u^{-1}]$-algèbre extérieure sur ces classes. Dorénavant, on notera simplement $\sigma P(X)$ pour $R_*(\sigma P(X))$, élément de $K_1(U)$ de filtration squelettale $2.d^0 P+1$. Dans la suite, les primitifs apparaîtront donc sous la forme $u^i.\sigma P(X)$. Cette description de $K_*(U)$ permet d'exprimer simplement l'action des opérations d'Adams. Elle est en effet donnée dans $K_0(CP^\infty)$ par : $\psi^l(C_X^i) = C_{X/l}^i$ (ψ^l change la variable X en X/l). Les primitifs de $K_*(U)$ invariants par ψ^l sont donc les multiples des classes indivisibles $u^i.\sigma X^i$.

LEMME 2.5. — *L'image des classes α et β par a est donnée par :*

$$a_*(\alpha) = u^{|\alpha|}\sigma X^{|\alpha|},$$

$$a_*(\beta) = u^{|\beta|} e(\sigma X^{|\beta|} - \sigma X^{|\alpha|}),$$

$$|\alpha| = t+s, \qquad |\beta| = k\frac{q}{2} + t + s, \qquad k=1 \quad \text{ou} \quad s \geqslant 1.$$

Démonstration. — Si $s>0$, C est une suspension; si $k=1$ et $s=0$, C est p-localement rétracte de ΣCP_+^p (*voir* § 3); $a_*(\alpha)$ est donc primitif. De plus, α est invariant par ψ^l; son image $a_*(\alpha)$ est donc invariante par ψ^l dans $K_*(U)$. D'après ce qui précède, ceci impose que $a_*(\alpha)$ est multiple de $u^{|\alpha|}\delta X^{|\alpha|}$.

D'autre part, il est clair que $a_*(\alpha)$ et $\langle a, \alpha \rangle$ sont liés. Plus précisément, si $x \in K^*(C)$ et $y \in K_*(C)$, $x_*(y)$ s'envoie sur $\langle x, y \rangle$ par

$$K_*(U) \to K_0 K \xrightarrow{\varepsilon} K_0(\{+\}),$$

où la première application s'obtient par passage à la limite le long du spectre de la K-théorie, et la seconde est la counité ε. A l'aide de [Ad], part II, § 13, on calcule l'effet de cette composée : elle annule les produits et envoie les primitifs $u^i \sigma X^j$ sur 1.

Ainsi, la relation $\langle a, \alpha \rangle = 1$ impose : $a_*(\alpha) = u^{|\alpha|} \sigma X^{|\alpha|}$.

On procède de même pour calculer $a_*(\beta)$. On remarque d'abord que $a_*(eu^{kq/2}\alpha+\beta)$ est primitif et invariant par ψ^l, donc multiple de $u^{|\beta|}\sigma X^{|\beta|}$, ce qui nous donne :

$$a_*(\beta) = u^{|\beta|}(A.\sigma X^{|\beta|} - e\sigma X^{|\alpha|})$$

pour un certain rationnel A. La relation $\langle a, \beta \rangle = 0$ impose alors $A - e = 0$, dans $K_0(\{+\})$, ce qui donne le résultat.

On effectue le même calcul pour DC, pour obtenir :

$$a'_*(\alpha') = u^{|\alpha'|} \sigma X^{|\alpha'|},$$

$$a'_*(\beta') = u^{|\beta'|} e(\sigma X^{|\alpha'|} - \sigma X^{|\beta'|}),$$

$$|\alpha'| = t + r, \qquad |\beta'| = k\frac{q}{2} + t + r, \qquad k = 1 \quad \text{ou} \quad r \geqslant 1.$$

Et après multiplication et addition :

THÉORÈME 2.6. — *Si r et s sont non nuls, ou si $k = t = 1$, l'élément (M, f) de $\pi_N^S(U)$ s'envoie par $k_{(p)}^S$ sur :*

$$u^{(N/2)-1}.e(\sigma X^{t+s} \wedge \sigma X^{k(q/2)+t+r} - \sigma X^{k(q/2)+t+s} \wedge \sigma X^{t+r}).$$

Exemples :

(1) $e = -\dfrac{1}{p}$, $k = t = 1$, $r = s = 0$; on trouve :

$$2u^{p+1}\frac{\sigma X \wedge \sigma X^p}{p}.$$

(2) $e = -\dfrac{1}{p}$, $k = t = 1$

$$u^{(N/2)-1}.\frac{\sigma X^{s+1} \wedge \sigma X^{p+r} - \sigma X^{p+s} \wedge \sigma X^{r+1}}{p}$$

(3) $k=p,\ t=2,\ e=-\dfrac{1}{p^2},\ r=s=1$

$$2u^{(N/2)-1}\cdot\frac{\sigma X^3\wedge\sigma X^{p(p-1)+3}}{p^2}$$

On obtient le théorème 0,1.(*a*) en traduisant le résultat en homologie; on dispose pour cela d'un homomorphisme de Hurewicz de la K-homologie *connexe* dans l'homologie : $k_*(U)\to H_*(U)$ qui envoie $u^i\sigma X^i$ sur δ_i.

3. La partie libre de $\pi^S(U(2p-1))_{(p)}$

Nous montrons ici que les éléments obtenus au paragraphe 2 engendrent multiplicativement l'algèbre de Pontryagin $\pi_*^S(U(n))_{(p)}/\mathrm{Tor}$ pour $n<2p$ (théorème 0.1(*b*)). La démonstration consiste à décomposer stablement $U(n)_{(p)}$ en bouquet de complexes dont l'homotopie stable a une partie libre facile à identifier. Nous commençons par décrire ces complexes.

Soit X_t un complexe $S^{2t+1}\cup\ldots\cup e^{2pt+1}$ à $t+1$ cellules en dimensions $2t+1+2i(p-1)$, $0\leqslant i\leqslant t$, tel que $(X_t)_{(p)}$ soit rétracte de $(\Sigma CP^{pt})_{(p)}$ (*voir* [7], 2.1 et 2.14). Ainsi, X_t est un co-H-espace mod p et X_1 n'est autre que le complexe C_1 du paragraphe 1. L'homologie de X_t correspondant à la $i+1$-ième cellule est engendrée par la classe $\sigma x_{t+i(p-1)}$ de $H_{2t+1+2i(p-1)}(\Sigma CP^{pt})$. Le lemme suivant nous renseigne quant à l'homotopie stable.

LEMME 3.1. — *L'image de h^S dans $H_*(X_t, Z_{(p)})$ est engendrée par les classes $p^i\sigma x_{t+i(p-1)}$, $0\leqslant i\leqslant t$.*

Démonstration. — Voir [M], ou [S], § 3, corollaire 1.

Nous expliquons maintenant comment ces complexes apparaissent. On sait que $U(n)$ est difféomorphe à $S^1\times SU(n)$, et l'on a pour $SU(n)_{(p)}$ la décomposition suivante, due à NISHIDA [MNT] :

$$SU(n)\underset{(p)}{\simeq}\prod_{i=1}^{p-1}Y_i(n),$$

où, pour $n<2p$, on a les équivalences stables suivantes :

$$(3.2)\qquad\begin{cases}Y_i(n)\simeq\Sigma^{2i-2}X_1\vee S^{2p+4i}, & 1\leqslant i\leqslant n-p\\ Y_i(n)\simeq S^{2i+1}, & n-p<i\leqslant p-1.\end{cases}$$

Il suffit donc d'étudier les produits $X_1^{(k)}=X_1 \wedge \ldots \wedge X_1$ (k facteurs, $k \leqslant n-p$) pour obtenir le résultat sur $U(n)_{(p)}$.

Notons à cet effet que le groupe symétrique S_k agit sur $X_1^{(k)}$ par permutation des facteurs; $\tilde{H}_*(X_1^{(k)}, F_p)$ fournit un espace de représentation de S_k, dont la décomposition en facteurs irréductibles est, d'après le théorème 1.4 de [CS], induite par un scindement de $X_1^{(k)}$. La théorie des représentations de S_k reste simple puisque $k<p$. Plus précisément, on peut associer à chaque partition de k un idempotent central de $F_p[S_k]$ pour former un ensemble complet d'idempotents. L'usage est de noter une partition de k par une suite décroissante $[a, b, \ldots]$, $a \geqslant b \geqslant \ldots$, $a+b+\ldots=k$, et l'idempotent associé $e_{[a,b,\ldots]}$. Le théorème suivant est démontré au paragraphe 4.

THÉORÈME 3.3. — *Il y a une p-équivalence*

$$X_1^{(k)} \to \vee_{[a,b],\, a+b=k,\, a \geqslant b} (\vee_{t \in I_{[a,b]}} Z_t),$$

où l'indice t court sur l'ensemble $I_{[a,b]}$ des $C_{k-1}^{b}-C_{k-1}^{b-2}$ tableaux standards formés à partir du diagramme de Young $[a, b]$, telle que :

$$(a) \qquad e_{[a,b]} \tilde{H}_*(X_1^{(k)}, F_p) \to \oplus_{t \in I_{[a,b]}} \tilde{H}_*(Z_t, F_p)$$

est un isomorphisme.

(b) Tous les complexes Z_t, $t \in I_{[a,b]}$, sont stablement p-équivalents à $\Sigma^{2b(p+1)+k-1} X_{a-b}$.

Notons, dans $H_*(X_1^k)$, v_i et w_i les classes images des classes σx_1 et σx_p de $H_*(X_1)$ par inclusion du i-ième facteur (X_1^k désigne le produit de k espaces X_1). On notera multiplicativement les éléments de $H_*(X_1^k)$ et on notera sans changement leurs réductions modulo p. Par exemple, une F_p-base de $\tilde{H}_*(X_1^{(3)}, F_p)$ est donnée par les classes $v_1 v_2 v_3$, $v_1 v_2 w_3, \ldots$, $v_1 w_2 w_3, \ldots, w_1 w_2 w_3$; avec nos notations, $v_1 v_2 w_3$ et $v_1 w_3 v_2$, par exemple, désignent la même classe. On définit :

$$\Delta_{i,j}=v_i w_j - w_i v_j,$$

et pour $t \in I_{[a,b]}$, $0 \leqslant i \leqslant a-b$:

$$\Sigma_{t,i}=(a-b-i)! \sum \Delta_{i_1,j_1} \ldots \Delta_{i_b,j_b} \cdot w_{i_b+1} \ldots w_{i_b+i} \cdot v_{i_b+i+1} \ldots v_{i_a}$$

où la somme est prise sur les indices tels que $\{i_1, \ldots, i_a\}$ est l'ensemble des symboles de la première ligne de t, $\{j_1, \ldots, j_b\}$ l'ensemble des symboles de la deuxième ligne de t, et tels que $i_1<j_1, \ldots, i_b<j_b$.

THÉORÈME 3.3. — (*c*) *Le sous-groupe de* $H_{3k+2(b+i)(p-1)}(X_1^{(k)}, F_p)$ *correspondant à la* $(i+1)$*-ième cellule d'un facteur* Z_t *par* 3.3(*a*), $t \in I_{(a,b)}$, *est engendré par* $\Sigma_{t,i}$.

Les résultats du théorème 3.3 et le lemme 3.1 nous permettent de décrire la partie libre de $\pi_*^S(X_1^{(k)})_{(p)}$: *l'image de* h^S *dans* $H_*(X_1^{(k)}, Z_{(p)})$ *est engendrée par les classes* $p^i\Sigma_{t,i}$.

Pour obtenir le théorème 0.1(*b*), il suffit maintenant de pister ces classes par les équivalences (3.2). Suivant l'homologie $H_*(Y_i, Z_{(p)})$ d'un facteur Y_i de $SU(n)$, les classes δ_i et δ_{i+p-1}/p s'envoient sur des générateurs du facteur $H_*(\Sigma^{2i-2}X_i, Z_{(p)})$, le second facteur $H_*(S^{2p+4i}, Z_{(p)})$ étant engendré par l'image de $\delta_{i,i}=2/p\,\delta_i\delta_{i+p-1}$. Les autres classes s'en déduisent par produits. Par exemple, une classe $\delta_{i,j}$, $i\neq j$, donne une classe $\Sigma^{2i+2j-4}\Delta_{1,2}$ d'un terme $\Sigma^{2i+2j-4}X_1^{(2)}$; la classe $\delta_{1,3}\delta_2(\delta_{3+p})/p$ correspond de même à la classe $\Sigma^{12}\Delta_{1,3}v_2w_4$ d'un terme $\Sigma^{12}X_1^{(4)}$. Ainsi, les classes $p^i\Sigma_{t,i}$ d'un terme $\Sigma^* X_1^{(k)}$ proviennent de sommes $\sum\delta_{l,n}\ldots\delta_{j+p-1}\ldots\delta_k\ldots$, car chacun de ses termes contient précisément i classes du type δ_{j+p-1}. On en déduit que les classes

$$\delta_i,\ 1\leqslant i\leqslant n-1 \qquad \text{et} \qquad \delta_{i,j},\quad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-p,$$

du 0.1(*b*) engendrent multiplicativement l'image de h^S dans $H_*(U(n), Z_{(p)})$.

4. Démonstration du théorème 3.3

L'action de S_k sur $X_1^{(k)}$ fournit une représentation de S_k sur le corps F_p d'espace sous-jacent

$$\tilde{H}_*(X_1^{(k)}, F_p)=\tilde{H}_*(H_1, F_p)^{k\otimes}, \qquad \dim_{F_p}\tilde{H}_*(X_1, F_p)=2,$$

S_k agissant en permutant les bases des k facteurs. Cette représentation est bien connue en théorie des représentations de S_k ou de $GL(2, p)$. On pourra consulter [R] comme référence générale sur les représentations du groupe symétrique.

Ainsi qu'il a été rappelé au paragraphe 3, on dispose d'un ensemble complet d'idempotents dans $F_p[S_k]$, provenant en fait de $Q[S_k]$. Une fois relevé dans $Z[S_k]$, un idempotent agit sur $X_1^{(k)}$, utilisant la structure de co-H-espace mod p de X_1 pour les additions. Tout relèvement a même effet sur $\tilde{H}_*(X_1^{(k)}, F_p)$, et on notera encore $e_{[a, b, \ldots]}$ pour un tel relèvement et pour l'application induite de $X_1^{(k)}$ dans lui-même. Notons que le rang rationnel et le rang mod p de nos idempotents sont égaux; les problèmes qui peuvent apparaître si ces rangs ne coïncident pas font l'objet d'une discussion étendue dans [7], § 2.

On procède par récurrence sur k, le résultat étant clair pour $k=1$. L'hypothèse de récurrence nous dit que :

$$X_1^{(k+1)} \simeq \vee_{[a, b]} \vee_{t \in I_{[a, b]}} (Z_t \wedge X_1). \tag{4.1}$$

Les idempotents de $F_p[S_{k+1}]$ suceptibles de scinder non trivialement un facteur $Z_t \wedge X_1$ nous sont donnés par [Ja], 26.6 en utilisant le résultat suivant (*voir* [Ja], § 9) :

$$\begin{aligned} [a, b] \uparrow S_{k+1} &= [a+1, b] + [a, b+1] + [a, b, 1] \quad \text{pour } a > b, \\ [a, a] \uparrow S_{k+1} &= [a+1, a] + [a, a, 1], \\ [k] \uparrow S_{k+1} &= [k+1] + [k, 1]. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Il est souvent éclairant de noter une partition de k, $[a, b, \ldots]$, par un diagramme de Young, c'est-à-dire un diagramme formé d'une ligne de a « nœuds », puis d'une ligne de b « nœuds », etc. (*voir* [R], chap. 2). On appelle tableau un diagramme de Young dans lequel on a remplacé les k nœuds par les k symboles $1, \ldots, k$; un tableau est dit standard si les symboles sont dans l'ordre naturel dans les lignes et les colonnes. A titre d'exemple, nous donnons les quatre tableaux standards associés aux partitions de 3 :

$$\begin{array}{lllllll}
\text{pour } [3] & \text{ou} & x\ x\ x & : & 1\ 2\ 3 & & \\
\text{pour } [2, 1] & \text{ou} & x\ x & : & 1\ 2 & \text{et} & 1\ 3 \\
 & & x & & 3 & & 2 \\
\text{pour } [1, 1, 1] & \text{ou} & x & : & 1 & & \\
 & & x & & 2 & & \\
 & & x & & 3 & &
\end{array}$$

Les relations (4.2) nous disent que les facteurs qui apparaissent au rang $k+1$ correspondent à l'adjonction du symbole $k+1$ à un tableau standard. Par exemple,

le tableau 1 2 donne

$$\begin{array}{ccccccc} 1\ 2\ \underline{3} & \text{et} & \begin{array}{l}1\ 2\\ \underline{3}\end{array}, & \begin{array}{l}1\\2\end{array} \text{ donne} & \begin{array}{l}1\ \underline{3}\\2\end{array} & \text{et} & \begin{array}{l}1\\2\\ \underline{3}\end{array}\end{array}$$

conformément à (4.2). Ceci doit éclairer l'indexation dans (3.3) (a).

Il est facile de lire sur un tableau l'action de l'idempotent correspondant : heuristiquement, $e_{[a,\,b]}$ « symétrise » les lignes et « antisymétrise » les colonnes d'indices des tableaux de $I_{[a,\,b]}$. Ainsi, si l'on scinde $Z_t \wedge X_1$ selon (4.2), le facteur correspondant à la partition $[a, b, 1]$ est trivial, car de longueur supérieure à 2 alors que $\dim_{F_p} \tilde{H}_*(X_1, F_p)=2$. Il reste à exhiber les espaces correspondant aux autres termes.

Définissons donc

$$Z_+ = \varinjlim (Z_t \wedge X_1 \to Z_t \wedge X_t \to \ldots)$$

pour l'application

$$Z_t \wedge X_1 \to X_1^{(k+1)} \xrightarrow{e_{[a+1,\,b]}} X_1^{(k+1)} \to Z_t \wedge X_1.$$

Dans le cas $a>b$, on définit de même Z_- à partir de $e_{[a,\,b+1]}$. Chaque espace porte l'homologie souhaitée, si bien qu'on obtient une équivalence

$$(4.3) \qquad Z_t \wedge X_1 \xrightarrow{\sim} Z_+ \vee Z_-.$$

Le cas $a=b$ est immédiat : seul le facteur Z_+ apparaît, et on obtient une équivalence

$$Z_t \wedge X_1 \simeq S^{2b(p+1)+k} \wedge X_1 \xrightarrow{\sim} Z_+ ;$$

mais l'identification des facteurs Z_+ et Z_- est un peu moins évidente si $a>b$. Nous procédons donc à la partie (c) du théorème 3.3.

Nous utilisons ici l'action de P^1 sur $\tilde{H}_*(X_1, F_p)$ donnée par : $\sigma x_p . P^1 = \sigma x_1$. L'action de P^1 sur $H_*(X_1^4, F_p)$ s'en déduit. On a par exemple :

$$v_i . P^1 = 0, \qquad w_i . P^1 = v_i, \qquad \Delta_{i,j} . P^1 = 0.$$

Cette action commute à celle de S_k.

Soit maintenant x la classe $\Sigma_{t,a-b}$ de degré maximal dans $\tilde{H}_*(Z_t, F_p)$. Les classes $x, x.P^1, \ldots, x.(P^1)^{a-b-1}$ engendrent $\tilde{H}_*(Z_t, F_p)$. Nous cherchons les classes de $\tilde{H}_*(Z_t \wedge X_1, F_p)$ qui s'envoient sur les classes de degré maximal des facteurs

$$\tilde{H}_*(Z_+, F_p)=e_{[a+1,b]}\tilde{H}_*(Z_t \wedge X_1, F_p)$$

et

$$\tilde{H}_*(Z_-, F_p)=e_{[a,b+1]}\tilde{H}_*(Z_t \wedge X_1, F_p).$$

L'homologie de degré maximal est engendrée par la classe xw_{k+1}, qui est dans $\tilde{H}_*(Z_+, F_p)$ comme les $a-b+1$ classes non nulles qui s'en déduisent par application de P^1.

L'homologie apparaît ensuite en degré $2(p-1)$ de moins; elle y est de dimension 2 sur F_p, engendrée par $x.P^1 w_{k+1}$ et xv_{k+1}. On vient de voir que

$$(xw_{k+1}).P^1=x.P^1 w_{k+1}+xv_{k+1}$$

est dans $\tilde{H}_*(Z_+, F_p)$. Supposons que pour un certain $\lambda \in F_p$, la classe y définie par

$$y=x.P^1 w_{k+1}+\lambda\, xv_{k+1}$$

soit invariante par $e_{[a,b+1]}$. On a :

$$y.(P^1)^{a-b}=(a-b+\lambda)\,x.(P^1)^{a-b}v_{k+1}=(a-b+\lambda)(xw_{k+1}).(P^1)^{a-b}$$

qui est dans $\tilde{H}_*(Z_+, F_p)$. Il faut donc que $y.(P^1)^{a-b}$ soit nulle, d'où $\lambda=-(a-b)$. Prenant donc

$$y=x.P^1 w_{k+1}-(a-b)\,xv_{k+1},$$

on constate que y n'est autre que $\Sigma_{t',a-b-1}$, où t' est le tableau de $I_{[a,b+1]}$ obtenu par l'adjonction du symbole $k+1$ à la deuxième ligne du tableau t. De plus, y est bien invariant par $e_{[a,b+1]}$, sinon $\tilde{H}_*(Z_t \wedge X_1, F_p)$ serait complètement invariant par $e_{[a+1,b]}$, ce qui n'est pas le cas. Les $a-b-1$ classes non nulles qui se désuisent de y par application de P^1 sont donc elles aussi dans $\tilde{H}_*(Z_-, F_p)$. Ceci complète notre description du scindement (4.3) en homologie.

L'identification de Z_+ et Z_- comme suspensions de X_{a-b+1} et X_{a-b-1} se fait alors en utilisant [EW] : tous les complexes à $t+1$ cellules, $t<p$, attachées par α_1, ici détectée par P^1, sont stablement p-équivalents. Ceci achève la partie (b), et donc le pas de récurrence.

5. D'autres éléments de $\pi_*^S(U)$ représentés par des hypersurfaces

On reprend maintenant les méthodes des paragraphes 1 et 2, mais en plongeant, au lieu de C_1, un complexe à trois cellules. Les notations sont celles du paragraphe 1, avec $t=1$. Notre 3-complexe est la cofibre d'un relèvement de α_1 à $\Sigma^{q-1}C$.

$$\begin{tikzcd} S^{4p+2s-3} \arrow[r, "\alpha_1"] & S^{2p+2s} \arrow[r] \arrow[dr, "\alpha_1"'] & \Sigma^{q-1+2s}C_1 \arrow[d, dashed] \\ & & S^{3+2s} \end{tikzcd}$$

Un tel relèvement existe si et seulement si $\alpha_1 \circ \alpha_1$ est nul dans $\pi_{4p+2s-3}(S^{3+2s})$. Mais le groupe $\pi_{4p-1}(S^5, p)$ est nul, et le relèvement existe pour $s=1$. Le 3-complexe obtenu étant stablement p-équivalent à X_2, on le note encore X_2, par abus.

Le complexe X_2 se plonge dans la sphère de dimension $4p+11$. La construction du paragraphe 1 appliquée au complexe $C=\Sigma^{2s}X_2, s\geqslant 0$, plongé dans $S^{4p+2s+2r+11}$, $r\geqslant 0$, produit une hypersurface M. Le groupe $K^*(C)$ se décrit à l'aide de trois classes a, b et c en degrés $5+2s$, $2p+3+2s$ et $4p+1+2s$. La matrice de Chern associée est de la forme :

$$\mathrm{Ch}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ \mu & e & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda=e=-\frac{1}{p} \quad (\text{modulo } Z).$$

Si α, β et γ sont les classes duales de a, b et c pour le produit de Kronecker, les classes :

$$\begin{gathered} \alpha \\ \lambda u^{q/2}\alpha+\beta \\ \mu u^q \alpha + e u^{q/2}\beta+\gamma \end{gathered}$$

sont invariantes par ψ^l.

On procède de même pour DC, $(4p+10+2s+2r)$-dual de C, avec des notations a', b', c', α', β', γ'. Puisque

$$Ch^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ e\lambda-\mu & -e & 1 \end{pmatrix}$$

les classes suivantes sont invariantes par ψ^l :

$$\gamma' - \lambda u^{q/2}\beta' + (e\lambda-\mu)u^q\alpha'$$

$$\beta' - eu^{q/2}\alpha'$$

$$\alpha'.$$

Dans $K^*(C)$ et $K^*(DC)$, les produits sont nuls. De plus :

LEMME 5.3. — *Dans $K^*(M)$, on a les relations :*

(i) $bc' = cb' = 0, \quad cc' = 0.$

(ii) $ba' = 0, \quad ca' = bb'.$

(iii) $ab' = 0, \quad ac' = bb'.$

Démonstration : (i) est vrai pour des raisons de filtration squelettale. (ii) et (iii) se démontrent comme 2.3.

Il en découle, en reprenant les notations du paragraphe 2 :

LEMME 5.4. — *L'image de* [M] *par l'application*

$$M \xrightarrow{\text{diagonale}} M \times M \to C \times DC$$

est égale à $\alpha\otimes\gamma' + \beta\otimes\beta' + \gamma\otimes\alpha'$.

On définit f comme au paragraphe 2. Il nous reste donc à calculer l'effet de $a : \Sigma^{2s}X_2 \to U$ en K-homologie. On se limite au cas où $s>0$; ainsi, les classes images sont primitives. On obtient :

LEMME 5.5 :

$$a_*(\alpha) = u^{|\alpha|}\sigma X^{|\alpha|}$$

$$a_*(\beta) = u^{|\beta|}\lambda(\sigma X^{|\beta|} - \sigma X^{|\alpha|})$$

$$a_*(\gamma) = u^{|\gamma|}(\mu\sigma X^{|\gamma|} - e\lambda\sigma X^{|\beta|} + (e\lambda-\mu)\sigma X^{|\alpha|}),$$

$$|\alpha| = s+2, \qquad |\beta| = |\alpha| + \frac{q}{2}, \qquad |\gamma| = |\alpha| + q.$$

Démonstration. — Nous ne détaillons que la dernière relation. $a_*(\mu u^q \alpha + e u^{q/2} \beta + \gamma)$ est primitif et invariant par ψ^l dans $K_*(U)$, donc de la forme $A u^{|\gamma|} \sigma X^{|\gamma|}$ pour un certain rationnel A. On a donc :

$$a_*(\gamma) = u^{|\gamma|}(A \sigma X^{|\gamma|} - e\lambda\sigma X^{|\beta|} + (e\lambda - \mu)\sigma X^{|\alpha|}).$$

La relation $\langle a, \gamma \rangle = 0$ impose alors : $A - e\lambda + (e\lambda - \mu) = 0$.

On procède de même pour le dual DC, et l'on trouve :

$$a'_*(\alpha') = u^{|\alpha'|} \sigma X^{|\alpha'|}, \qquad a'_*(\beta') = u^{|\beta'|} e(\sigma X^{|\alpha'|} - \sigma X^{|\beta'|}),$$

$$a'_*(\gamma') = u^{|\gamma'|}((e\lambda - \mu)\sigma X^{|\gamma'|} - e\lambda\sigma X^{|\beta'|} + \mu\sigma X^{|\alpha'|}),$$

$$|\alpha'| = r + 4, \qquad |\beta'| = |\alpha'| + \frac{q}{2}, \qquad |\gamma'| = |\alpha'| + q.$$

D'où :

$$f_*([M]) = u^{2p+r+s+4}((e\lambda - \mu)\sigma X^{|\alpha|} \wedge \sigma X^{|\gamma'|} - e\lambda\sigma X^{|\beta|} \wedge \sigma X^{|\beta'|} + \mu\sigma X^{|\gamma|} \wedge \sigma X^{|\alpha'|}),$$

pour $r \geqslant 1$ et $s \geqslant 1$.

Revenons à l'expression de $a_*(\gamma) \in K_*(U)$. Il faut que le polynôme suivant soit un polynôme numérique :

$$\mu X^{2p} - e\lambda X^{p+1} + (e\lambda - \mu) X^2 = p^2 \mu \left(\frac{X^p - X}{p}\right)^2 + p(2\mu - e\lambda) X \left(\frac{X^p - X}{p}\right).$$

Ceci entraîne que $p(2\mu - e\lambda) \in Z_{(p)}$. Il est alors facile d'obtenir :

THÉORÈME 5.6 :

$$\frac{1}{2p^2}(\delta_{s+2} \cdot \delta_{2p+r+2} - 2\delta_{p+s+1}\delta_{p+r+3} + \delta_{2p+s} \cdot \delta_{r+4})$$

provient par $h^S_{(p)}$ d'un élément de $\pi^S_{4p+2r+2s+10}(U)$ représentable par une hypersurface pour tous $r \geqslant 1$ et $s \geqslant 1$.

6. Une classe de longueur trois représentée par une hypersurface

Les éléments construits jusqu'à présent ne suffisent pas à décrire la partie libre de l'homotopie stable de $U(2p)$, et les classes $\delta_{i,j}$ du théorème 0.1 n'engendrent multiplicativement l'image de h^S dans $H^*(U(2p), Z_{(p)})$ que si on leur adjoint l'élément $1/p^2\,\delta_1\,\delta_p\,\delta_{2p-1}$. Nous montrons dans ce paragraphe comment utiliser les résultats de [BRS] pour obtenir une hypersurface de $\pi_*^S(U)$ s'envoyant par $h_{(p)}^S$ sur ce nouvel élément. Plus précisément :

THÉORÈME 6.1. — (*a*) *Il existe une variété M de dimension $6p$, qui se plonge en codimension 2 avec un fibré normal trivial, et trois classes de cohomologie c_1, c_2 et c_3 dans $H^2(M)$ telles que :*

$$\langle c_1^{2p-1}\, c_2^p\, c_3,\ [\mathrm{M}]\rangle \equiv 1\,(p).$$

(*b*) *La variété $(S^1)^3\times M$ est une hypersurface qui, munie d'une application convenable dans U, représente un élément de $\pi_{6p+3}^S(U)$ s'envoyant par $h_{(p)}^S$ sur $1/p^2\,\delta_1\,\delta_p\,\delta_{2p-1}$.*

L'application de M dans U s'obtient de la manière suivante.

On considère d'abord :

$$M \xrightarrow{\text{diagonale}} M^{3p} \xrightarrow{(c_1)^{2p-1}\times(c_2)^p\times c_3} (CP^\infty)^{2p-1}\times(CP^\infty)^p\times CP^\infty$$
$$\xrightarrow{m^{2p-2}\times m^{p-1}\times 1} CP^\infty\times CP^\infty\times CP^\infty,$$

où m est la multiplication de H-espace, puis :

$$(S^1)^3\times M \to (S^1)^3\times CP^\infty\times CP^\infty\times CP^\infty$$
$$\to \Sigma CP_+^\infty\times\Sigma CP_+^\infty\times\Sigma CP_+^\infty \xrightarrow{R\times R\times R} U\times U\times U \to U.$$

En fait, cette application se factorise à travers $U(3p+3)$.

On déduit alors la partie (*b*) du théorème de sa partie (*a*). La variété $(S^1)^3\times M$ est une hypersurface car

$$(S^1)^3\times M \subsetneq R^4\times M \subsetneq R^{6p+4}.$$

La démonstration de 6.1(*a*), qui occupe le reste du paragraphe, fournit une construction de la variété M. Nous partons de deux variétés A et B vérifiant les conditions suivantes.

La variété A est de dimension $2p$ et $A \times R$ se plonge dans R^{2p+4}. Elle possède une classe de cohomologie z dans $H^2(A)$ telle que z^p est non nulle modulo p.

La variété B est de dimension $2p+2$ et se plonge dans R^{2p+4} avec un fibré normal trivial. Elle possède deux classes de cohomologie x et y dans $H^2(B)$ telles que $x^p y$ est non nulle modulo p.

La construction de telles variétés est le résultat principal de [BRS]. Rappelons-en brièvement le principe. On considère le fibré en droites complexes $\xi = \eta \otimes \ldots \otimes \eta$ ($p-1$ facteurs) de base $(S^2)^{p-1}$. Le fibré en sphères $S = S(\xi^{n\otimes} \oplus 1)$, $n \in Z$, est une variété lisse de dimension $2p$. Si l'on choisit n convenablement S convient comme variété A, en prenant pour z l'image de la classe de Thom par l'écrasement de S sur son espace de Thom. De plus, il existe une variété homotopiquement équivalente à S qui se plonge dans $S^5 \times (S^2)^{p-1}$. Le bord d'un voisinage régulier fermé de l'image du plongement, rendu lisse, fournit alors un modèle pour la variété B.

Considérons maintenant la variété $X = A \times B \times (S^2)^{p-2}$. Comme $R^2 \times B$ se plonge dans R^{2p+4}, $X \times R$ se plonge dans R^{6p+2} :

$$R \times X \hookrightarrow R^{2p+4} \times B \times (S^2)^{p-2} \hookrightarrow R^{6p+2}.$$

De plus, X possède deux classes de cohomologie c_1 et c_2 dans $H^2(X)$ telles que : $c_1^{2p-1} c_2^p \not\equiv 0\,(p)$. Il suffit de prendre

$$c_2 = z \qquad \text{et} \qquad c_1 = x + y + u_1 + \ldots + u_{p-2},$$

où u_i désigne l'image d'un générateur de $H^2(S^2)$ par la projection de X sur le i-ième facteur S^2. En effet, c_1^{2p-1} est non nul grâce au terme $x^p y u_1 \ldots u_{p-2}$.

Soit alors U un voisinage tubulaire régulier de $R \times X$ dans R^{6p+2}, de la forme $R \times V$. Le bord de V est une variété PL de dimension $6p$, que l'on peut déformer en une variété lisse M (*voir* [HM]). Le fibré normal de M est trivial par construction. La variété M a le type d'homotopie d'un fibré en sphère sur X, et un argument de suite spectrale montre que $H^*(X)$ s'injecte dans $H^*(M)$. En plus des classes c_1 et c_2, on obtient par dualité de Poincaré une classe c_3 dans $H^2(M)$ pour satisfaire la condition de 6.1(a), en achevant ainsi sa démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[7] CARLISLE (D.), ECCLES (P.), HILDITCH (S.), RAY (N.), SCHWARTZ (L.), WALKER (G.) and WOOD (R.). – Modular representations of $GL(n, p)$, splitting $\Sigma(CP^{\infty} x \ldots x CP^{\infty})$, and the β-family as framed hypersurfaces, *Math. Z.*, vol. 189, 1985, p. 239-261.

[A] AUDIN (M.). – Quelques calculs en cobordisme Lagrangien, *Annales de l'Institut Fourier*, vol. 35, 1985, p. 159-194.

[Ad] ADAMS (J.). – Stable homotopy and generalised homology, *Chicago Lectures in Math.*, part II-III, 1974.

[BCRS] BAKER (A.), CLARKE (F.), RAY (N.) and SCHWARTZ (L.). – *The Kummer congruences and the stable homotopy of BU*, preprint Swansea, 1985.

[BR] BAKER (A.) and RAY (N.). – Some infinite families of U-hypersurfaces, *Math. Scand.*, vol. 50, 1982, p. 149-166.

[BRS] BAKER (A.), RAY (N.) et SCHWARTZ (L.). – *Hypersurfaces framées et l'élément β_1 de Toda*, preprint Orsay, 1985.

[CS] COOKE (G.) and SMITH (L.). – Mod p decompositions of Co-H-spaces and applications, *Math. Z.*, vol. 157, 1977, p. 155-177.

[EW] ECCLES (P.) and WALKER (G.). – The elements β_1 are representable as framed hypersurfaces, *J. Lon. Math. Soc.*, vol. 22, 1980, p. 159.

[G] GRAY (B.). – On the sphere of origine of infinite families in the homotopy groups of spheres, *Topology*, vol. 8, 1969.

[HM] HIRSCH (M.) and MAZUR (B.). – Smoothing of piecewise linear manifolds, *Ann. of Math. Studies*, vol. 80, § 7, 1974, p. 35-45.

[Ja] JAMES (G. D.). – The representation theory of the symmetric groups, *Lecture Notes in Math.*, 682, *Springer*, 1978.

[J] JAMES (I.). – The topology of Stiefel manifolds, *London Math. Soc. Lecture Notes*, vol. 24, chap. 7, 1976.

[M] MOSHER (R.). – Some stable homotopy of complex projective space, *Topology*, vol. 7, 1968, p. 179-194.

[MNT] MIMURA (M.), NISHIDA (G.) and TODA (H.). – Mod p decomposition of compact Lie groups, *Pub. R.I.M.S. Kyoto Univ.*, vol. 13, 1977, p. 627-680.

[RS] RAY (N.) and SCHWARTZ (L.). – Embedding certain complexes via unstable homotopy theory, *A.M.S. Contemp. Math.*, vol. 19, 1983, p. 331-338.

[RE] REES (E.). – Framings on hypersurfaces, *J. Lon. Math. Soc.*, vol. 22, 1980, p. 161-167.

[R] ROBINSON (G. de B.). – *Representation theory of the symmetric group*, Univ. of Toronto Press, 1961.

[S] SCHWARTZ (L.). – Opérations d'Adams en K-homologie et applications, *Bull. Soc. Math. de France*, vol. 109, 1981, p. 237-257.

[SF] FRANJOU (V.) and SCHWARTZ (L.). – Hypersurfaces et homotopie stable de U, *Comptes rendus*, tome 299, série I, 1984, p. 619-622.