BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL COGNET

Représentation de Weil et changement de base quadratique dans le cas archimédien. II

Bulletin de la S. M. F., tome 114 (1986), p. 325-354

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1986__114__325_0>

Bull. Soc. math. France,
114, 1986, p. 325-354.

REPRÉSENTATION DE WEIL ET CHANGEMENT DE BASE QUADRATIQUE DANS LE CAS ARCHIMÉDIEN. II

PAR

MICHEL COGNET (*)

RÉSUMÉ. — Grâce à la représentation de Weil associée à la paire réductive duale formée du groupe linéaire $GL_2(\mathbb{R})$ et du groupe des similitudes d'un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, on construit, à la donnée d'une représentation irréductible, admissible de dimension infinie de $GL_2(\mathbb{R})$, le modèle de Whittaker d'une représentation de $GL_2(\mathbb{C})$. Cette correspondance vérifie les conjectures de Roger Howe en donnant notamment un exemple où ce modèle de Whittaker n'est pas simple et possède un seul vrai quotient irréductible. Elle fournit aussi une construction explicite du changement de base de Langlands entre les groupes $GL_2(\mathbb{R})$ et $GL_2(\mathbb{C})$.

ABSTRACT. — Given an irreducible admissible representation of $GL_2(\mathbb{R})$ of infinite dimension we can construct from the Weil representation of the dual reductive pair $(GL_2(\mathbb{R}), G_1)$ — where G_1 is the group of the similitudes on a vector space of dimension four over $\mathbb{R}$ — the Whittaker's model of a representation of $GL_2(\mathbb{C})$. We verify with this correspondance the Howe's conjecture for $GL_2(\mathbb{R})$ and we give an exemple where the Whittaker's model isn't irreducible and has one irreducible quotient. We give in this article an explicit construction of the base change of Langlands between the groups $GL_2(\mathbb{R})$ and $GL_2(\mathbb{C})$.

(*) Texte reçu le 14 mai 1985, révisé le 10 décembre 1985.

Michel COGNET, E.N.S. J.F., Département de Mathématiques, 1, rue Maurice-Arnoux, 92120 Montrouge.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1986/03 325 30/$5.00

Notations

1. Si b est un nombre complexe, égal à $a+ic$ avec a et c deux nombres réels on notera :

$$\bar{b}=a-ic, \qquad |b|=(a^2+c^2)^{1/2},$$
$$|b|_{\mathbb{C}}=|b|^2=b\bar{b}=N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(b).$$

On notera aussi $\mathrm{Re}(b)$ [resp. $\mathrm{Im}(b)$] la partie réelle de b (resp. la partie imaginaire de b).

2. $\psi_{\mathbb{R}}$ désignera le caractère de $\mathbb{R}$ tel que, quel que soit le nombre réel x, $\psi_{\mathbb{R}}(x)=\exp(2i\pi cx)$ avec c un nombre réel quelconque fixé et non nul. $\psi_{\mathbb{C}}$ sera le caractère de $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe b associe le nombre complexe $\psi_{\mathbb{R}}(b+\bar{b})$.

3. Si μ est un caractère de $\mathbb{R}^*$, μ' sera le caractère de $\mathbb{C}^*$ égal à $\mu\circ N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$.

4. $G=GL_2(\mathbb{R})$, $G'=GL_2(\mathbb{C})$. On désigne par K le groupe compact maximal $O_2(\mathbb{R})$ de G [resp. par K', le groupe compact maximal $U_2(\mathbb{C})$ de G']; par $K_\circ$ le sous-groupe $SO_2(\mathbb{R})$, par B (resp. B'), le sous-groupe de G (resp. G') des matrices triangulaires supérieures et par N, le sous-groupe de B formé des matrices unipotentes.

5. Si dx est une mesure additive sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, $\overset{*}{dx}$ désignera la mesure sur $\mathbb{R}^*$ ou sur $\mathbb{C}^*$ égale à $dx/|x|$ ou $dx/|x|_{\mathbb{C}}$.

6. Si V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, on notera $\mathcal{S}(V\times\mathbb{R}^*)$ l'espace des fonctions de Schwartz de $V\times\mathbb{R}^*$.

7. On utilisera les notations de [J – L] pour nommer les représentations. Ainsi, si μ_1 et μ_2 sont deux caractères de $\mathbb{R}^*$ (resp. de $\mathbb{C}^*$), on notera $\rho(\mu_1, \mu_2)$ la représentation de G (resp. de G'), induite de la représentation τ de B (resp. B') définie par :

$$\tau\left(\begin{pmatrix} a_1 & n \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\right)=\mu_1(a_1)\mu_2(a_2)\,|a_1/a_2|^{1/2}$$
$$\left[\text{resp. } \tau\left(\begin{pmatrix} a_1 & n \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\right)=\mu_1(a_1)\mu_2(a_2)\,|a_1/a_2|_{\mathbb{C}}^{1/2}\right]$$

pour a_1 et a_2 deux nombres réels non nuls (resp. complexes non nuls) et n un nombre réel (resp. complexe).

L'espace de la représentation $\rho(\mu_1, \mu_2)$ est noté $B(\mu_1, \mu_2)$ (*cf.* [J – L] page 164 et 221).

Quand la représentation $\rho(\mu_1, \mu_2)$ est réductible, on notera $B^S(\mu_1, \mu_2)$ le seul sous-quotient de $B(\mu_1, \mu_2)$ qui soit propre, stable et de dimension infinie. On désignera par $\sigma(\mu_1, \mu_2)$ la représentation sur l'espace $B^S(\mu_1, \mu_2)$. Les représentations de la forme $\rho(\mu_1, \mu_2)$ constituent la série principale et celles de la forme $\sigma(\mu_1, \mu_2)$ constituent, dans le cas où le corps de base est le corps des nombres réels, la série discrète.

On sait aussi que la représentation $\rho(\mu_1, \mu_2)$ est équivalente à la représentation $\rho(\mu_2, \mu_1)$. De même, la représentation $\sigma(\mu_1, \mu_2)$ est équivalente à la représentation $\sigma(\mu_2, \mu_1)$.

Si π est une représentation irréductible admissible de G ou de G', on notera ω_π le caractère central de cette représentation.

8. Pour tout entier naturel j, on notera E_j la fonction :

$$\mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(b, u) \mapsto ((d^j/dy^j)(\exp(-2\pi y^2))y = \sqrt{2\lceil cu \rceil} \operatorname{Re}(b).$$

On notera F_j la fonction :

$$\mathbb{C} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$(b, u) \mapsto ((d^j/dy^j)(\exp(-2\pi y^2)))y = \sqrt{2\lceil cu \rceil} \operatorname{Im}(b).$$

Introduction

A l'exemple du cas non archimédien (*cf.* [CO]) déjà traité, on se propose d'établir une construction du changement de base de Langlands dans le cas archimédien. On sait que, à toute représentation irréductible admissible de G de la série principale $\rho(\mu_1, \mu_2)$ [resp. de la série discrète $\sigma(\mu_1, \mu_2)$] – où μ_1 et μ_2 sont deux caractères de $\mathbb{R}^*$ tels que la fonction $t \mapsto |\mu_1 \mu_2^{-1}(t)|$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ (on peut toujours se ramener à ce cas d'après les équivalences entre représentations rappelées dans les notations), on associe, par cette correspondance, le seul quotient irréductible non nul de la série principale de G' $\rho(\mu_1', \mu_2')$ [resp. le seul sous-module irréductible non nul et de dimension infinie de $B(\mu_1', \mu_2')$ dont la représentation est notée $\sigma(\mu_1', \mu_2')$].

Les résultats obtenus dans l'article sont plus précis qu'une construction du changement de base de Langlands. Plus précisément, à toute représentation π irréductible admissible de $(\mathfrak{g}, K_1)$ où $\mathfrak{g}$ désigne l'algèbre de Lie de G, on construit un espace $\mathscr{B}$ de fonctions de Whittaker sur lequel agissent

K_1' et l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}'$ de G'. L'espace $\mathscr{B}$ est un $(\mathfrak{g}', K')$-module et il n'est réductible que si la représentation π est la représentation exceptionnelle de la série principale $\rho(\mu_1, \mu_2)$ avec $\mu_1 \mu_2^{-1}$ égal au caractère $t \mapsto t^p$ pour un entier naturel non nul p. Mais le module $\mathscr{B}$ possède toujours un unique quotient irréductible, ce qui est en accord avec la conjecture de Roger Howe (*cf.* [H]). Et dans le cas exceptionnel où le module $\mathscr{B}$ est réductible, la représentation de $(\mathfrak{g}', K_1')$ sur le quotient est isomorphe à la représentation $\sigma(\mu_1', \mu_2')$.

Dans cet article, l'outil de base (*cf.* [CO]) est la représentation de Weil associée à un caractère additif $\psi_{\mathbb{R}}$: $x \mapsto \exp(2 i \pi c x)$ (avec c fixé une fois pour toute dans $\mathbb{R}^*$) et la forme quadratique q définie sur l'espace E des matrices 2-2 à coefficients complexes et égales à leurs transconjuguées :

$$E \to \mathbb{R}$$
$$M = \begin{pmatrix} y & \bar{b} \\ b & -x \end{pmatrix} \mapsto q(M) = -\det(M) = xy + b\bar{b}.$$

On s'intéresse ici seulement à la restriction de cette représentation au produit des deux groupes G et $\mathrm{GO}(q)$ (groupe des similitudes de l'espace E relativement à la forme q).

La méthode suit la voie ouverte par J.-L. Waldspurger dans son article [WALD] et utilise des formules intégrales telles qu'on en trouve dans [WALD 2], p. 24. Ces formules sont purement locales et, en cela, la méthode diffère de celles qu'on peut trouver dans des articles tels [O] ou [FR] d'Oda et de Friedberg (ce dernier utilise aussi le même espace de matrices et la représentation de Weil mais les calculs faits sont essentiellement globaux et visent à préciser des résultats sur les formes modulaires alors que dans mon article, je vise plutôt à fournir un exemple concret pour les conjectures locales de Roger Howe).

Rappelons quelques résultats (*cf.* [CO] et [WALD]).

1. On sait relier le groupe G' au groupe $GO(q)$ par l'homomorphisme :

$$G' \to GO(q)$$
$$g_1 \mapsto \begin{cases} E \to E \\ M \mapsto g_1 M g_1^* \end{cases}$$

avec g_1^* désignant la transconjuguée de la matrice g_1.

Cet homomorphisme permet de définir la restriction au groupe G' de la représentation de Weil sur l'espace $\mathscr{S}(E \times \mathbb{R}^*)$. Soit R cette représentation.

Soit r_ψ la restriction au groupe G de la représentation de Weil sur l'espace $\mathcal{S}(E \times \mathbb{R}^*)$. On renvoie à [CO] pour les expressions de ces représentations.

2. Introduisons le sous-espace de $\mathcal{S}(E \times \mathbb{R}^*)$ des fonctions :

$$\left(\begin{pmatrix} y & \bar{b} \\ b & -x \end{pmatrix}, u\right) \mapsto P(x, y, b, \bar{b}) \exp(-2\pi\,|cu|\,(b\bar{b}+(x^2+y^2)/2)\, h(u)$$

avec P, polynôme en quatre variables, à coefficients complexes et avec h, fonction à support compact dans $\mathbb{R}^*$ et de classe C^∞.

Soit $\mathcal{S}_\psi(E \times \mathbb{R}^*)$, cet espace de fonctions. Il est dense dans $\mathcal{S}(E \times \mathbb{R}^*)$. Il n'est pas stable par la restriction de la représentation de Weil à $G \times GO(q)$, mais il l'est si on restreint cette représentation au groupe $K_1 \times K'_1$.

3. La transformée de Fourier définie par :

$$\mathcal{S}(E \times \mathbb{R}^*) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^*)$$

$$f \mapsto \left(\tilde{f} : (x, y, b, u) \mapsto \int_{\mathbb{R}} f\left(\begin{pmatrix} v & \bar{b} \\ b & -x \end{pmatrix}, u\right) . \psi_{\mathbb{R}}(vuy)\,|u|^{1/2}\, dv\right)$$

(où dv est la mesure autoduale pour $\psi_{\mathbb{R}}$) permet de définir un isomorphisme de l'espace $\mathbb{S}_\psi(E \times \mathbb{R}^*)$ dans l'espace $\mathcal{S}_\psi(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^*)$ — ce dernier espace étant défini comme $\mathcal{S}_\psi(E \times \mathbb{R}^*)$ l'est à partir de $\mathcal{S}(E \times \mathbb{R}^*)$.

On notera $\tilde{r}_\psi$ (resp. $\tilde{R}$) la représentation de Weil de G (resp. de G') que cet isomorphisme permet de définir sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^*)$ à partir de la représentation r_ψ (resp. R).

On renvoie à [CO] pour les expressions de R (formules R_1, R_2, R_3 et R_4). On remarquera que si un élément f de $\mathcal{S}_\psi(E \times \mathbb{R}^*)$ vérifie :

$$f(x, y, b, u) = f_1(x, y, u)\, f_2(b, u)$$

avec :

$$f_1(x, y, u) = P(x, y) \exp(-\pi\,|cu|\,(x^2+y^2))$$

et

$$f_2(b, u) = Q(b, \bar{b}) \exp(-2\pi\,|\mathrm{cu}|\,\mathrm{b}\bar{\mathrm{b}})\, \mathrm{h}(\mathrm{u})$$

(où P et Q sont deux polynômes à coefficients complexes et en deux variables et où h est une fonction C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^*$), on a :

quel que soit g dans G,

$$\tilde{r}_\psi(g)\, \tilde{f}(x, y, b, u) = f_1((x, y)g, u) . \rho_\psi(g)\, f_2(b, u)$$

(en notant ρ_ψ la représentation de Weil de G sur l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{C}\times\mathbb{R}^*)$ relativement au caractère ψ et à la forme quadratique $N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$).

4. Soient m_1 et m_2 les deux entiers (définis uniquement modulo 2) et s_1 et s_2 les deux nombres complexes tels que, pour $i=1$ ou 2 :

$$\mu_i(t)=|t|^{s_i}(\operatorname{sgn}(t))^{m_i} \quad \text{quel que soit le réel non nul } t.$$

Soient $m=m_1-m_2$ et $s=s_1-s_2$.

Puisque $\rho(\mu_1,\mu_2)$ [resp. $\sigma(\mu_1,\mu_2)$] est équivalente à $\rho(\mu_2,\mu_1)$ [resp. $\sigma(\mu_2,\mu_1)$] on pourra restreindre l'étude au seul cas : $\operatorname{Re}(s)\geqq 0$.

En outre, pour chaque représentation irréductible admissible de dimension infinie de G, notons $\mathscr{W}_\pi^{\psi^-}$ son modèle de Whittaker relatif au caractère additif $\psi^-: x\mapsto\psi(-x)$. On rappelle que l'ensemble K_π des entiers u pour lesquels il existe un élément W_u non nul dans $\mathscr{W}_\pi^{\psi^-}$ vérifiant l'égalité :

quel que soit $g\in G$, quel que soit $\theta\in\mathbb{R}$ et pour $k_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$$W_u(gk_\theta)=\exp(iu\theta)\,W_u(g)$$

est exactement l'ensemble des entiers de même parité que m sauf si s est un entier naturel non nul et que m est congru à $s+1$ modulo 2, auquel cas cet ensemble est l'ensemble $\{\delta((s+1)+2k),\ k\in\mathbb{N},\ \delta=+1 \text{ ou } -1\}$. (*Cf.* [GOD], ces entiers constituant les K-types de la représentation π.) La fonction W_u est alors déterminée à une constante multiplicative près.

L'espace $\mathscr{W}_\pi^{\psi^-}$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les éléments W_u pour u décrivant les K-types de la représentation π. On donnera une expression de W_u page 336.

Indiquons comment cet article se présente. Les deux premiers lemmes sont des lemmes qui établissent la convergence des intégrales introduites. Leur rédaction est un peu technique (et en fait très facile), mais elle est nécessaire car elle présente diverses notations utilisées par la suite. Notamment, elle introduit toutes les réductions à des cas qui permettent des calculs explicites [*cf.* le lemme 2 qui permet d'obtenir le lemme 7 et donc que la série discrète de G, $\sigma(\mu_1,\mu_2)$, s'envoie sur la série principale $\sigma(\mu_1',\mu_2')$]. Par ailleurs, le choix des fonctions (dans le lemme 2) qui forment une base de $\mathscr{S}_\psi(E\times\mathbf{R}^*)$ permet de se passer de l'intégration sur le groupe K.

Comme dans le cas non archimédien, on construit, à la donnée d'une représentation irréductible admissible de dimension infinie de

$(\mathfrak{g}, K_1)$-module, un espace $\mathscr{B}$ de fonctions de Whittaker. On montre que cet espace est non nul et on précise le comportement à l'infini de ces fonctions. Ainsi, cet espace est un modèle de Whittaker en tant que $(\mathfrak{g}', K'_1)$-module. On prouve en fait qu'il est un sous-quotient de l'espace $B(\mu'_1, \mu'_2)$ en introduisant, comme dans le cas non archimédien, une variable complexe supplémentaire et en faisant des prolongements analytiques. Les lemmes d'analyticité ont été énoncés sans démonstration car la vérification des théorèmes de Lebesgue est facile et est purement technique.

Si on appelle π' la représentation de $(\mathfrak{g}', K'_1)$ sur l'espace $\mathscr{B}$, on détermine exactement π' de la connaissance des sous-quotients de $B(\mu'_1, \mu'_2)$ et de majorations du modèle de Kirillov de la représentation π'.

Remarque. — On a relégué à la fin, sous forme d'appendice, la preuve de la non-nullité d'une intégrale. Ce calcul est en effet un peu lourd, mais nécessaire pour prouver la non nullité de l'espace de fonctions de Whittaker qu'on a introduit.

Je voudrais remercier Jean-Lou Waldspurger pour de nombreuses discussions qui ont permis de simplifier quelques démonstrations.

I. Construction d'un modèle de Whittaker de fonctions de G'

On renvoie aux articles de Waldspurger et à l'article [CO] pour justifier les fonctions introduites ci-dessous.

Soient $f \in \mathscr{S}_\psi(E \times \mathbb{R}^*)$, $W \in \mathscr{W}_*^{\psi -}$, $g_1 \in G'$. On considère la fonction :

$$B_{f,W}^{g_1}: \quad G \to \mathbb{C}$$
$$g \mapsto W(g)\, \tilde{r}_\psi(g)\, \tilde{R}(g_1)\, \tilde{f}(0, 1, 1, 1).$$

LEMME 1. — *L'application $B_{f,W}^{g_1}$ est intégrable pour la mesure dg de $N \backslash G$.*

Démonstration. — 1. Si a est un nombre complexe non nul, la fonction $R\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) f$ appartient à $\mathscr{S}_\psi(E \times \mathbf{R}^*)$ si f appartient à $\mathscr{S}_\psi(E \times \mathbb{R}^*)$.

Via la décomposition d'Iwasawa, on peut se ramener au cas où g_1 est de la forme $\begin{pmatrix} a & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec a dans $\mathbf{C}^*$ et n dans $\mathbf{C}$.

D'après la formule (R_2) de [CO], on a aussi :

$$\left(R\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}f\right)(0, 1, 1, 1)=\psi_{\mathbb{C}}(n)f(0, 1, 1, 1)$$

On peut donc ramener le cas général au cas où la matrice g_1 est de la forme $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ avec a dans $\mathbb{C}^*$.

Soit a fixé non nul. On va prouver que la fonction M définie par :

$$(\mathbb{R}^*)^2\times K\to\mathbb{C}$$

$$(\alpha, \beta, k) \qquad W\left(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}k\right)\tilde{r}_\psi(k)\tilde{f}(0, \beta, \alpha.\bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha\beta)\,|\beta\alpha^{-1}|^{1/2}$$

est intégrable pour la mesure $d^*\alpha\, d^*\beta\, dk$ de $(\mathbb{R}^*)^2\times K$.

2. D'après le quatrième rappel (p. 330), on peut se contenter de choisir W telle qu'il existe un entier relatif u dans l'ensemble K_π tel que, pour tous α et β dans $\mathbb{R}^*$ et pour tout θ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}W\left(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}k_\theta\right)&=\exp(iu\theta)\,\omega_\pi(\beta)\,W\left(\begin{pmatrix}\alpha\beta^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\\ &=\exp(iu\theta)\,|\beta|^{s_1+s_2}(\operatorname{sgn}(\beta))^m\,W\begin{pmatrix}\alpha\beta^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. Quitte à faire ensuite une combinaison linéaire, on se ramène au cas où il existe quatre entiers naturels q, r, j et t et une fonction h, C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^*$ tels que, si $(x, y, b, u)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x, y, b, u)&=(x+iy)^r(x-iy)^q\exp(-\pi|cu|(x^2+y^2))\\ &\quad\times\exp(2\pi|cu|b\bar{b}).h(u).E_j(b, u).F_t(b, u).\end{aligned}$$

Lemme 2. — *Soient x, y et θ des nombres réels, soit u un réel non nul, soit b un nombre complexe. Soit $\varepsilon=\operatorname{sgn}(cu)$ et soit f comme ci-dessus. On a :*

$$\tilde{r}_\psi(k_\theta)\tilde{f}(x, y, b, u)=\exp(i((r-q)+\varepsilon(1+j+t))\theta)\,\tilde{f}(x, y, b, u).$$

Preuve. — Il suffit d'utiliser [GE], p. 94, ou [WALD], p. 91, et le fait que, si r_1 est la représentation de Weil de G sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*)$ relativement au caractère ψ et à la forme quadratique $x\mapsto x^2$, on obtient la représentation ρ_ψ de G sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{C}\times\mathbb{R}^*)$ par prolongement par continuité de la représentation $r_1\otimes r_1$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*)\otimes\mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*)$ — qui se plonge et qui est dense dans $\mathscr{S}(\mathbb{C}\times\mathbb{R}^*)$, le plongement étant :

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*)\otimes\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*)\to\mathscr{S}(\mathbb{C}\times\mathbb{R}^*)$$
$$f\otimes g\mapsto(z=x+iy\mapsto f(x)g(y)).$$

Ce lemme et le choix des fonctions de $\mathscr{W}_\pi^{\psi -}$ auquel on peut se restreindre permettent de ramener le problème en le problème d'intégrabilité de la fonction

$$N:\quad (\mathbb{R}^*)^2\to\mathbb{C}$$
$$(\alpha,\beta)\mapsto\left|W\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\right|\left|f(0,\beta,\alpha\bar{a}^{-1},a\bar{a}/\alpha\beta)\right|.\left|\beta\alpha^{-1}\right|^{1/2}$$

pour la mesure $d^*\alpha\, d^*\beta$ sur $(\mathbb{R}^*)^2$.

Il suffit de voir que la fonction :

$$F:\quad (\mathbb{R}^*)^2\mapsto\mathbb{C}$$
$$(\alpha,z)\mapsto\left|W\begin{pmatrix}\alpha^2/z & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|\left|\alpha\right|^{-1-(r+q)+n}\left|h(a\bar{a}/z)\right|$$
$$\left|z\right|^{1/2+\mathrm{Re}(s_1+s_2)+(r+q)}\exp(-2\pi\left|c\right|(\left|z\right|a\bar{a}/2\alpha^2+\alpha^2/\left|z\right|)$$

est intégrable pour la mesure $d^*\alpha\, d^*\beta$ de $(\mathbb{R}^*)^2$.

Or, d'après [GOD], §2, et [WALD] la fonction $x\mapsto W\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ est à décroissance rapide à l'infini et à croissance lente en 0. D'autre part, h est à support compact dans $\mathbb{R}^*$. On déduit facilement de cela que F est intégrable. □

Soit $f\in\mathscr{S}_\psi(E\,x\,\mathbb{R}^*)$ et soit $W\in\mathscr{W}_\pi^{\psi -}$. On définit la fonction $A_{f,\,W}$:

$$G'\to\mathbb{C}$$
$$g_1\mapsto\int_{N\backslash G}B_{f,\,W}^{g_1}(g)\,dg.$$

Soit le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{B}=\{A_{f,\,W},\ f\in\mathscr{S}_\psi(E\,x\,\mathbb{R}^*),\ W\in\mathscr{W}_\pi^{\psi -}\}$. Soit $\mathfrak{g}'$ l'algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ de G'. Soit $X\in\mathfrak{g}'$, $k\in K_1'$, $n\in\mathbb{C}$ et $g_1\in G'$. On a :

1. $A_{f,\,W}\left(\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}g_1\right)=\psi_{\mathbb{C}}(n)\,A_{f,\,W}(g_1)$.

2. L'application $g_1\mapsto A_{f,\,W}(g_1 k)$ – qui est l'application $A_{R(k)f,\,W}$ – appartient encore à $\mathscr{B}$.

3. L'application

$$A^X_{f,W}:\quad G' \to \mathbb{C}$$
$$g_1 \mapsto (d/dt\,(A_{f,W}(g_1 \exp(tX)))_{t=0}$$

appartient encore à $\mathscr{B}$. En effet, si $R(X)f$ est la fonction telle que :

$$(R(X)f)\left(\begin{pmatrix} y & \bar{b} \\ b & -x \end{pmatrix}, u\right) = d/dt\left(R(\exp(tX)f)\left(\begin{pmatrix} y & \bar{b} \\ b & -x \end{pmatrix}, u\right)\right)_{t=0},$$

$R(X)f$ reste dans $\mathscr{S}_\psi(E \times \mathbb{R}^*)$ si f est dans $\mathscr{S}_\psi(E \times \mathbb{R}^*)$ et on a : $A^X_{f,W} = A_{R(X)f,W}$. On définit alors la représentation π' de $\mathfrak{g}'$ sur $\mathscr{B}$ par :

$$\forall X \in \mathfrak{g}', \qquad \pi'(X)\, A_{f,W} = A^X_{f,W}.$$

On définit aussi la représentation, qu'on appelle aussi π', de K'_1 sur $\mathscr{B}$, action de translation à droite de K'_1.

LEMME 3. — *La représentation π' munit $\mathscr{B}$ d'une structure de $(\mathfrak{g}', K'_1)$-module. Ceci est clair car on sait que les applications :*

$$\begin{cases} \mathfrak{g}' \times \mathscr{S}_\psi(E \times \mathbb{R}^*) \to \mathscr{S}_\psi(E \times \mathbb{R}^*) \\ \qquad (X, f) \mapsto R(X) f \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} K'_1 \times \mathscr{S}_\psi(E \times \mathbb{R}^*) \to \mathscr{S}_\psi(E \times \mathbb{R}^*) \\ \qquad (k, f) \mapsto R(k) f \end{cases}.$$

munissent l'espace $\mathscr{S}_\psi(E \times \mathbb{R}^*)$ d'une structure de $(\mathfrak{g}', K'_1)$-module. □

LEMME 4. — *L'espace $\mathscr{B}$ n'est pas l'espace nul.*

Avant de démontrer le lemme, on va rappeler quelques résultats relatifs aux modèles de Whittaker d'une représentation irréductible admissible π du groupe G.

On renvoie, par exemple, à [WALD], p. 23 et 24, pour les calculs précis.

Soit n entier de l'ensemble K_π. Il existe une fonction φ_n de $B(\mu_1, \mu_2)$ non nulle telle que, pour tout g dans G et tout θ dans $\mathbb{R}$:

$$\varphi_n(gk_\theta) = \exp(in\theta)\, \varphi_n(g)$$

et

$$\varphi_n(\mathrm{Id}) = 1.$$

Identifions tout nombre complexe b à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit la fonction

$$V_n^g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$b \mapsto \varphi_n(w^{-1}bg)\,\psi_{\mathbb{R}}(b).$$

Soit $g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k$ conformément à la décomposition d'Iwasawa.
On a l'égalité :

$$V_n^g(b) = \exp(in\theta)\,\mu_1(\beta)\,\mu_2(\alpha)\,|\beta\alpha^{-1}|^{1/2}\,(i + (b\,\beta\alpha^{-1} + \eta))^n \times (1 + (\eta + b\,\beta\alpha^{-1})^2)^{-(n+s+1)/2}.$$

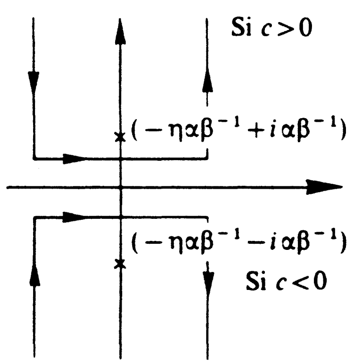
(*Cf.* [WALD], p. 23.)

La fonction V_n^g est intégrable pour la mesure db sur $\mathbb{R}$ seulement si $\mathrm{Re}(s) > 0$. L'espace engendré par les fonctions $W_n: g \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(w^{-1}bg)\,\psi_{\mathbb{R}}(b)\,db$ pour toute valeur de n décrivant les K-types de la représentation $\pi = \rho(\mu_1, \mu_2)$ [resp. $\sigma(\mu_1, \mu_2)$] est le modèle de Whittaker de la représentation $\rho(\mu_1, \mu_2)$ [resp. $\sigma(\mu_1, \mu_2)$] seulement si s est tel que $\mathrm{Re}(s)$ est strictement positive.

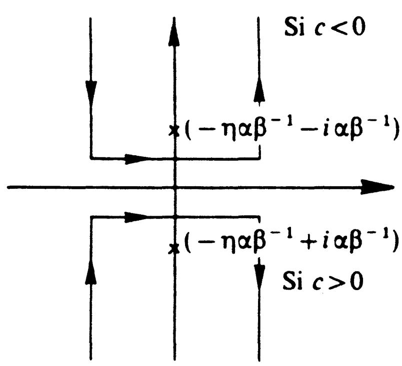
C'est pourquoi, dans le cas général (*id* est quand $\mathrm{Re}(s) \geqq 0$), on prolonge la fonction V_n^g à une partie du plan complexe.

Soit Δ_c^g le contour suivant :

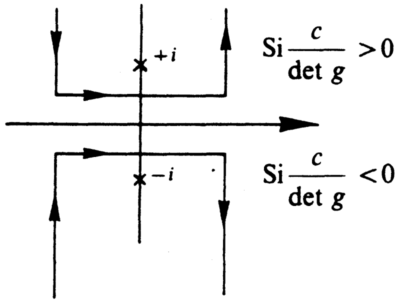
(1) si $\det g$ est positif,



(2) si $\det g$ est négatif,



Soit Γ_c^g le contour suivant :



Le modèle de Whittaker $\mathscr{W}_\pi^{\psi -}$ de la représentation $\rho(\mu_1, \mu_2)$ [resp. $\sigma(\mu_1, \mu_2)$] est l'espace engendré par les fonctions W_n :

$$G \to \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \int_{\Delta_c^g} V_n^g(b)\,db = \exp(in\theta)\,\mu_1(\beta)\,\mu_2(\alpha)\,|\beta\alpha^{-1}|^{-1/2}$$

$$\times \int_{\Gamma_c^g} (i+b)^n (1+b^2)^{-(n+s+1)/2} \exp(2i\pi c\alpha\beta^{-1}(b-\eta))\,db$$

pour n décrivant les K-types de la représentation $\rho(\mu_1, \mu_2)$ [resp. $\sigma(\mu_1, \mu_2)$]. □

Démontrons maintenant le lemme 4.

On va chercher $W \in \mathscr{W}_\pi^{\psi -}$, $f \in \mathscr{S}_\psi(E \times \mathbb{R}^*)$ et $g_1 \in G'$ tels que $A_{f,W}(g_1)$ est non nul. Soit :

1. $W = W_n$ (notation p. 336).

2. f est comme dans le lemme 2 (*cf.* p. 333) avec $j = t = 0$, $(r-q)+n+1=0$. La fonction h prend des valeurs positives et son support est inclus dans $\mathbb{R}^{(\mathrm{sgn}\,(c))*}$.

3. $g_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec le nombre complexe a à fixer ultérieurement.

D'après le lemme 2, il existe une constante indépendante de a, non nulle, notée ν telle que :

$$A_{f,W}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = K_{f,W}(a)$$

$$= \nu |a|_{\mathbb{C}}^{1/2} \int_{(\mathbb{R}^*)^2} W\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right)$$
$$\times \beta^{r+q} h(a\bar{a}/\alpha\beta) \operatorname{sgn}(\alpha) |\beta\alpha^{-1}|^{1/2}$$
$$\exp(-2\pi |c/\alpha\beta| (\alpha^2 + a\bar{a}\beta^2/2)) \, d\alpha^* \, d\beta^*.$$

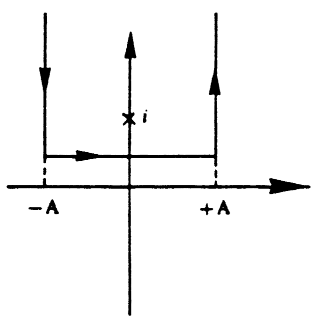
On rappelle que :

$$W\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\right) = \mu_1(\beta)\mu_2(\alpha) |\beta\alpha^{-1}|^{-1/2}$$
$$\times \int_{\Gamma_c^q} (i+b)^n (1+b^2)^{-(n+s+1)/2} \exp(2i\pi cb\alpha\beta^{-1}) \, db.$$

D'après le choix de h et puisque le contour Γ_c^q ne dépend en fait que du signe de $(c/\alpha\beta)$, on déduit que :

$$h(a\bar{a}/\alpha\beta) \cdot \int_{\Gamma_c^q} (i+b)^n (1+b^2)^{-(n+s+1)/2} \exp(2i\pi cb\alpha\beta^{-1}) \, db$$
$$= h(a\bar{a}/\alpha\beta) \cdot \int_{\Gamma_c} (i+b)^n (1+b^2)^{-(n+s+1)/2} \exp(2i\pi |c\alpha\beta^{-1}| b) \, db$$

avec Γ_c qui désigne le contour :



Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$H(x) = \int_{\Gamma_c} (i+b)^n (1+b^2)^{-(n+s+1)/2} \exp(2i\pi |cx| b) \, db.$$

Soit

$$G(\beta)=\int_{\mathbb{R}*}\mu_2(\alpha)\operatorname{sgn}(\alpha)\,h(a\bar{a}/\alpha\beta)\,H(\alpha\beta^{-1})$$
$$\times\exp(-2\pi\,|c/\alpha\beta|\,(\alpha^2+a\bar{a}\,\beta^2/2))\,d\alpha^*.$$

Effectuons dans l'intégrale $G(\beta)$ le changement de variable $\alpha=u\,\beta^{-1}$. On obtient que :

$$G(\beta)=\mu_2(\beta^{-1})\operatorname{sgn}(\beta)\operatorname{sgn}(c)\int_{\mathbb{R}*}\mu_2(u)\,h(a\bar{a}/u)\,H(u/\beta^2)$$
$$\times\exp(-2\pi\,|c|\,(|u|/\beta^2+a\bar{a}\,\beta^2/2\,|u|))\,du^*.$$

Soit $\nu^a=|a|_{\mathbb{C}}^{1/2}.\,\nu.\operatorname{sgn}(c)$ et soit :

$$I(\beta)=\int_{\mathbb{R}*}\mu_2(u)\,h(a\bar{a}/u)\exp(-2\pi\,|c|\,(|u|/|\beta^2$$
$$+a\bar{a}\,\beta^2/2\,|u|))\,H(u/\beta^2)\,du^*.$$

On a l'égalité :

$$A_{f,w}\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=K_{f,w}(a)=\nu^a.\int_{\mathbb{R}*}|\beta|^s(\operatorname{sgn}(\beta))^{1+m}\,\beta^{q+r}\,I(\beta)\,d\overset{*}{\beta}$$

$$=\nu^a.\int_{\mathbb{R}*}\mu_2(u)\,h(a\bar{a}/u)\,J^a(u)\,d\overset{*}{u}$$

avec

$$J^a(u)=\int_{\mathbb{R}*}|\beta|^s(\operatorname{sgn}(\beta))^{1+m}\,\beta^{q+r}$$
$$\times\exp(-2\pi\,|c|\,(|u|/\beta^2+\beta^2\,a\bar{a}/2\,|u|))\,H(u/\beta^2)\,d\overset{*}{\beta}$$
$$=|u|^{(s+r+q)/2}.\,J^a(1).$$

Donc, on a :

$K_{f,w}(a)$

$$=\nu^a\left(\int_{\mathbb{R}*}|u|^{s_2+(s+r+q)/2}(\operatorname{sgn}(u))^{m_2}.\,h(a\bar{a}/u)\,\overset{*}{du}\right)J^a(1)$$

$$=\nu^a((\operatorname{sgn}(c))^{m_2}.\left(\int_{\mathbb{R}*}|u|^{s_2+(s+r+q)/2}\,h(a\bar{a}/u)\,\overset{*}{du}\right)J^a(1).$$

1. L'intégrale $I=\int_{\mathbb{R}*}|u|^{s_2+(s+r+q)/2}\,h(a\bar{a}/u)\,\overset{*}{du}$ peut être choisie non nulle.

Il suffit de choisir la fonction h à support assez petit (ce support dépend du nombre complexe a qu'on va fixer dans ce qui suit).

2. $J^a(1)$ est différent de 0 pour au moins une valeur réelle de a.

En effet, considérons la fonction

$$L:\ \mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{C}$$
$$x\mapsto L(x)=J^{\sqrt{x}}(1).$$

Puisque $r+q=2q-n-1$ (ainsi, les deux entiers $r+q$ et $1+m$ ont même parité), on a :

$$L(x)=\int_{\mathbb{R}*}|\beta|^{s+2q-n-1}\exp(-2\pi|c|(1/\beta^2+\beta^2x/2))\,H(1/\beta^2)\,\overset{*}{d\beta}.$$

Il existe un entier n_0 assez grand tel que si n_1 est supérieur à n_0, la fonction $x\mapsto L(x)x^{n_1}$ est intégrable pour la mesure dx de $\mathbb{R}^+$ (*cf.* appendice). Ce même appendice montre aussi que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^+}L(x)x^{n_1}\,dx$ est égale, à un facteur multiplicatif non nul près, à :

$$\Gamma(n_1-q+2+3n/2)^{-1}\,\Gamma((1+s)/2)^{-1}\,\Gamma(n_1-q+3(1+n)/2+s).$$

On choisira en outre n_1 tel que $n_1-q+2+3n/2$ ne soit jamais négatif. On rappelle que le nombre complexe s est tel que $\operatorname{Re}(s)$ est positive. Pour de telles valeurs de n_1 et de s, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^+}L(x)x^{n_1}\,dx$ est non nulle. Il existe donc un nombre réel strictement positif x_0 tel que $L(x_0)$ est non nul. Ainsi $J^a(1)$ est non nul pour $a=\sqrt{x_0}$. □

Remarque. — Si la représentation π est la représentation $\sigma(\mu_1, \mu_2)$ de la série discrète, on peut choisir $x_0 = 1$ (*cf.* la description du modèle de Kirillov de π dans ce cas. *Voir* [GOD], § 2, p. 21).

LEMME 5. — Soit $f \in \mathscr{S}_\psi(E \times \mathbb{R}^*)$, $W \in \mathscr{W}_\pi^{\psi-}$. *Il existe un entier n tel que la fonction* $K_{f,W}: a \mapsto A_{f,W}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ *est majorée par la fonction* $a \mapsto |a|_{\mathbf{C}}^n$ *au voisinage de l'infini.*

On déduit de ce lemme, du lemme 3 et de la relation 1, p. 334, le corollaire suivant : L'espace $\mathscr{B}$ est un modèle de Whittaker pour la représentation de translation à droite de G' sur $\mathscr{B}$.

Remarque sur ce lemme. — Dans le cas où π est la représentation $\sigma(\mu_1, \mu_2)$, on utilisera ce lemme pour démontrer que l'espace $\mathscr{B}$ réalise le modèle de Whittaker de $\sigma(\mu_1', \mu_2')$ tel que Jacquet et Langlands l'ont défini dans [J – L] (en effet, la preuve de l'unicité du modèle de Whittaker pour une représentation irréductible admissible de G' nécessite les conditions de croissance à l'infini pour les éléments, analogues à celles données dans ce lemme).

Schéma de démonstration du lemme 5. — On se ramène au cas où la fonction f est de la forme donnée dans le lemme 2 et où W est égal à W_n avec $n \in K_\pi$ (*cf.* p.). Il existe un nombre complexe λ (éventuellement nul) indépendant de a tel que :

$$\begin{aligned} K_{f,W}(a) &= \lambda |a|_{\mathbf{C}}^{1/2} \int_{(\mathbb{R}^*)^2} W\begin{pmatrix} \alpha z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} f(0, z, \alpha z\bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha z^2) \\ &\qquad \times |\alpha|^{-1/2} \operatorname{sgn}(\alpha z)\, d\overset{*}{\alpha}\, d\overset{*}{z} \\ &= \lambda |a|_{\mathbf{C}}^{1/2} \int_{(\mathbb{R}^*)^2} (\mu_1 \mu_2)(z) W\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z^{r+q} \\ &\qquad \times \exp(-\pi a\bar{a}/|\alpha|)\, |\alpha|^{-1/2} \operatorname{sgn}(\alpha . z) \\ &\qquad \times E_j(\alpha z\bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha . z^2)\, F_t(\alpha z\bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha . z^2) . h(a\bar{a}/\alpha . z^2)\, d\overset{*}{\alpha}\, d\overset{*}{z}. \end{aligned}$$

Il suffit de prouver le lemme pour des intégrales de la forme (j_1 et t_1 désignant deux entiers quelconques) :

$$\int_{(\mathbb{R}^*)^2} |(\mu_1 \mu_2)(z)|\, \left| W\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| |z|^{r+q}\, |h(a\bar{a}/\alpha . z^2)|$$

$$\times|\alpha|^{-1/2+(j_1+t_1)/2}\exp(-2\pi|c|(|\alpha|+a\bar{a}/2|\alpha|))\,d\overset{*}{\alpha}\,d\overset{*}{z},$$

En faisant le changement de variable $u=\alpha.z^2/a\bar{a}$ dans l'intégrale ci-dessus, on obtient que cette intégrale est majorée par l'expression (où ν désigne une constante indépendante de a et où $|W|$ est la fonction

$$\mathbb{R}^*\to\mathbb{C}$$

$$x\mapsto|\mu_2(x)|\,|x|^{+1/2}$$

$$\times\left(\int_{\Gamma_c}|(i+b)|^n|1+b^2|^{-(n+\mathrm{Re}(s)+1)/2}|\exp(2i\pi|c\times|b)|\,d\theta)\right):$$

$$\int_{(\mathbb{R}*)^2}|z|^{\mathrm{Re}(s_1+s_2)}|W|\begin{pmatrix}a\bar{a}\mu/z^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}|z|^{(r+q)-(j_1+t_1)}$$

$$\exp(-2\pi|c|(a\bar{a}|u|/z^2+z^2/2|u|).\left|h\left(\frac{1}{u}\right)\right|d\overset{*}{z}\,d\overset{*}{u}.$$

Le lemme découle alors des deux remarques suivantes :

1. la fonction

$$\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{C}$$

$$x\mapsto\int_{\Gamma_c}|i+b|^n|1+b^2|^{-(n+1+\mathrm{Re}(s))/2}|\exp(2i\pi|c|bx)|\,db$$

est à décroissance rapide en l'infini et à croissance lente en 0.

2. Soit, pour tout réel r, la fonction I_r :

$$(\mathbb{R}^+)^*\to\mathbb{C}$$

$$x\mapsto I_r(x)=\int_{(\mathbb{R}^+)^*}z^r\exp(-2\pi|c|(z^2+x/z^2)\,d\overset{*}{z}.$$

On a :

(*a*) si $r\geqq 1$, la fonction I_r est bornée;

(*b*) si $r<0$, la fonction $x\mapsto I_r(x)/x^{r/2}$ est bornée;

(*c*) si $r\in[0,1[$, il existe une constante ν_r non nulle telle que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^{+*}$: $I_r(x)\leqslant\nu_r\exp(-2\pi|c|\sqrt{x}).x^{(r-1)/4}$.

II. Résultat principal et prolongement analytique

On définit, pour n un K-type de la représentation principale $\rho(\mu_1, \mu_2)$ – quand celle-ci est irréductible – ou discrète $\sigma(\mu_1, \mu_2)$ et pour x nombre complexe, la fonction :

$$\begin{aligned} \varphi_n^x: \quad & G \to \mathbb{C} \\ & g \mapsto |\alpha\beta^{-1}|^{x/2} . \varphi_n(g) \end{aligned}$$

avec $g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k_\theta$, selon la décomposition d'Iwasawa.

On définit également la fonction W_n^x :

$$\begin{aligned} & G \to \mathbb{C} \\ & g \mapsto \int_{\Delta^g} \varphi_n^x(w^{-1} bg) \psi_{\mathbb{R}}(b)\, db. \end{aligned}$$

On a l'égalité :

$$\begin{aligned} W_n^x(g) = {} & \exp(in\theta)\, \mu_1(\beta)\, \mu_2(\alpha) \,|\beta\alpha^{-1}|^{(x-1)/2} \\ & \times \int_{\Gamma_\xi^g} (i+b)^n (1+b^2)^{-(n+s+1+x)/2} \exp(2 i \pi c\, \alpha\beta^{-1} (b-\eta))\, db. \end{aligned}$$

Il est alors facile de vérifier successivement :

1. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui à b associe $\varphi_n^x(w^{-1} bg) \psi_{\mathbb{R}}(b)$ est intégrable pour la mesure db sur $\mathbb{R}$ si $\mathrm{Re}(s+x)$ est > 0.

2. Dans ce cas, on a :

$$\int_{\Delta_\xi^g} \varphi_n^x(w^{-1} bg) \psi_{\mathbb{R}}(b)\, db = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n^x(w^{-1} bg) \psi_{\mathbb{R}}(b)\, db.$$

3. On a l'analogue de la proposition 2 établie dans le cas non archimédien : si $\mathrm{Re}(x)$ est assez grande (en fait, si $\mathrm{Re}(x) > -\mathrm{Re}(s)+1$ (*cf.* [CO]), il existe une fonction $\Phi_{f,n}^x$ à valeurs complexes et définie sur G' telle que :

(*a*) $\Phi_{f,n}^x$ appartient à l'espace $B(\mu'_1 |\quad|_{\mathbb{C}}^{x/2}, \mu'_2 |\quad|_{\mathbb{C}}^{-x/2})$;

(*b*) Soit l'application

$$G' \to \mathbb{C}$$

$$g_1 \mapsto A^x_{f,w_n}(g_1) = \int_{N\backslash G} W^x_n(g)\,\tilde{r}_\psi(g)\,\tilde{R}(g_1)\,\tilde{f}(0, 1, 1, 1)\,dg$$

On a l'égalité, pour tout g_1 dans G' :

$$(*)\qquad A^x_{f,w_n}(g_1) = \int_{\mathbb{C}} \Phi^x_{f,n}\left(w\begin{pmatrix}1 & -\bar{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}g_1\right)\psi_{\mathbb{C}}(a)\,da,$$

cette égalité résultant de l'égalité 2 et de [CO].

On a, en outre :

$$(**)\quad \Phi^x_{f,n}(g_1)$$

$$= \gamma_q(1)\int_{\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*} \mu_1(\alpha)\,\mu_2(\beta)\,|\alpha\beta^{-1}|^{(x+1)/2}\,\mathrm{sgn}(\alpha)$$

$$\times\left(\int_K \varphi_n(k)\,(r_\psi(k)\,R(g_1)\,f)\left(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, 1/\alpha\beta\right)dk\right)d^*\alpha\,d^*\beta$$

($\gamma_q(1)$ étant le facteur de Weil de la forme q relativement au caractère $\psi_{\mathbb{R}}$).

(c) Soit A l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des fonctions $\Phi^x_{f,n}$ pour f décrivant $\mathscr{S}_\psi(E\times\mathbb{R}^*)$ et n décrivant l'ensemble K_π. A est inclus dans le $(\mathfrak{g}', K'_1)$-module $B(\mu'_1|\ |^{x/2}_{\mathbb{C}}, \mu'_2|\ |^{-x/2}_{\mathbb{C}})$. On vérifie facilement (*cf.* p. 334) que A est stable sous les actions de $\mathfrak{g}'$ et de K'_1 et est donc un sous-$(\mathfrak{g}', K'_1)$-module de $B(\mu'_1|\ |^{x/2}_{\mathbb{C}}, \mu'_2|\ |^{-x/2}_{\mathbb{C}})$.

Par ailleurs, on a les deux lemmes d'analyticité :

1. quel que soit l'élément g_1 de G', l'application $x\mapsto A_{f,w_n}(g_1)$ est analytique sur l'ouvert Ω, ensemble des nombres complexes dont la partie réelle est strictement supérieure à $-\mathrm{Re}(s)-1$.

2. L'application $x\mapsto \Phi^x_{f,n}\left(w\begin{pmatrix}1 & -\bar{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}g_1\right)\psi_{\mathbb{C}}(a)$, définie *a priori* si $\mathrm{Re}(x) > -\mathrm{Re}(s)+1$, est définie par la relation $(**)$ sur Ω. L'application $x\mapsto \int_{\mathbb{C}} \Phi^x_{f,n}\left(w\begin{pmatrix}1 & -\bar{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}g_1\right)\psi_{\mathbb{C}}(a)\,da$ est analytique sur Ω. L'égalité $(*)$ est donc vraie pour x décrivant Ω et il suffit de faire $x=0$ pour

obtenir que :

$$A_{f,w_n}(g_1)=\int_{\mathbb{C}}\Phi^0_{f,n}\left(w\begin{pmatrix}1 & -\bar{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}g_1\right)\psi_{\mathbb{C}}(a)\,da$$

et $\Phi^0_{f,n}\in B(\mu'_1,\mu'_2)$.

D'après le résultat (c), l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des fonctions A_{f,w_n^-} pour f décrivant $\mathscr{S}_\psi(E\times\mathbb{R}^*)$ et pour n décrivant K_π est un $(\mathfrak{g}', K'_1)$-module, sous-quotient de $B(\mu'_1,\mu'_2)$. Comme cet espace est $\mathscr{B}$, il n'est pas de dimension finie (puisqu'un modèle de Whittaker n'est jamais de dimension finie).

Soit pour p entier naturel non nul ν_p le caractère de $\mathbb{R}^*\, t\mapsto t^p$ et $\tilde{\nu}_p$ le caractère de $\mathbb{R}^*\, t\mapsto t^p\operatorname{sgn}(t)$.

PROPOSITION. — 1. Si, quel que soit l'entier naturel non nul p, $\mu'_1\mu_2'^{-1}$ est différent de ν'_p, π' est irréductible et est la représentation $\rho(\mu'_1,\mu'_2)$.

2. S'il existe un entier naturel non nul p tel que $\mu'_1\mu_2'^{-1}$ est le caractère ν'_p, si $\mu_1\mu_2^{-1}$ est le caractère $\tilde{\nu}_p$, l'espace $\mathscr{B}$ est alors $B^S(\mu'_1,\mu'_2)$ et π' est la représentation $\sigma(\mu'_1,\mu'_2)$.

3. S'il existe un entier naturel non nul p tel que $\mu'_1\mu_2'^{-1}$ est le caractère ν'_p, si $\mu_1\mu_2^{-1}$ est le caractère ν_p, l'espace $\mathscr{B}$ est alors $B(\mu'_1,\mu'_2)$ et π' est réductible.

Démonstration. — 1. 1 est clair car on sait que $\mu'_1\mu_2'^{-1}(t)=(t\bar{t})^s$ et la représentation de $B(\mu'_1,\mu'_2)$, translation à droite de G', est réductible seulement si s est un entier non nul.

2. Comme $\mathscr{B}$ ne peut être de dimension finie, $\mathscr{B}$ est soit $B(\mu'_1,\mu'_2)$, soit $B^S(\mu'_1,\mu'_2)$.

Soit $f\in\mathscr{S}_\psi(E\times\mathbb{R}^*)$ et soit $n\in K_\pi$. Pour a dans $\mathbb{C}^*$, on considère :

$$K_{f,w_n}(a)=A_{f,w_n}\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right).$$

LEMME 6. — *Il existe un nombre réel λ tel que, quel que soit le nombre complexe non nul a et au voisinage de* 0, *on a :*

$$K_{f,w_n}(a)\leqslant\lambda\,|\mu_1(a\bar{a})|\,(a\bar{a})^{1/4+p/2}.$$

Remarque. — La majoration donnée dans ce lemme est aussi vérifiée pour toute combinaison linéaire de fonctions $a \mapsto K_{f,W_n}(a)$ et l'est donc aussi pour toute fonction $a \mapsto V\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ quelle que soit V dans $\mathscr{B}$.

Démonstration du lemme 6. — On peut se restreindre au cas où f est comme dans le lemme 2. Ce lemme 2 assure que :

$$
\begin{aligned}
&\tilde{r}_\psi(k_\theta)\tilde{f}(0, z, \alpha z\bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha . z^2) \\
&\qquad = (-1)^q . (i)^{r+q} . z^{r+q} \exp(i((r-q+\varepsilon(1+j+t))\theta) \\
&\qquad\qquad \times \exp(-2\pi|c|(|\alpha|+a\bar{a}/2|\alpha|)) \\
&\qquad\qquad \times E_j(\alpha z\bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha . z^2) . F_t(\alpha z\bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha . z^2)\, h(a\bar{a}/\alpha . z^2)
\end{aligned}
$$

[avec $\varepsilon = \operatorname{sgn}(c\,\alpha)$] [expression (E)].

Comme

$$
K_{f,W_n}(a) = |a|_{\mathbb{C}}^{1/2} \int_{(\mathbb{R}^*)^2 \times K} \mu_1^2(z) z^{-p} \operatorname{sgn}(z)\, W_n\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \operatorname{sgn}(\alpha z)
$$

$$
\tilde{r}_\psi(k)\tilde{f}(0, z, \alpha z\bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha . z^2)\,|\alpha|^{-1/2}\, d\overset{*}{\alpha}\, d\overset{*}{z},
$$

on peut, pour obtenir la majoration du lemme, au lieu de garder $\tilde{r}_\psi(k)\tilde{f}(0, z, \alpha . z\bar{a}^{-1}, a\bar{a}/\alpha . z^2)$ dans l'expression de K_{f,W_n}, se restreindre à des expressions de la forme $(*)$ [*cf.* expression (E)] quitte à faire une somme finie de telles expressions par la suite et avec j_1 et t_1 désignant deux entiers naturels :

$$
\begin{aligned}
(*) \quad & z^{(r+q)} \exp(-2\pi|c|(|\alpha|+a\bar{a}/2|\alpha|))(a\bar{a})^{(j_1+t_1)/2}(\operatorname{Re}(a))^{j_1}(\operatorname{Im}(a))^{t_1} \\
&\qquad \times \alpha^{(j_1+t_1)/2}\, h(a\bar{a}/\alpha . z^2).
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, comme π est la série discrète $\sigma(\mu_1, \mu_2)$, on peut considérer (*cf.* [GOD], §2, p. 21) :

$$
\begin{aligned}
(**) \quad & W_n\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k_\theta\right) = \exp(in\theta)(\mu_1(|\alpha|)|\alpha|^{-p/2}) \\
&\qquad \times |\alpha|^{(1+p)/2} . \alpha^{s'} \exp(-2\pi|c\alpha|)
\end{aligned}
$$

si $\operatorname{sgn}(\alpha)=\operatorname{sgn}(c)$ et avec s' entier naturel.

$$(***)\quad W_n\left(\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}k_\theta\right)=\exp(in\theta)(\mu_1(|\alpha|).|\alpha|^{-p/2}$$
$$\times|\alpha|^{(1+p)/2}.\alpha^{s''}\exp(-2\pi|c\alpha|)$$

si $\operatorname{sgn}(\alpha)=-\operatorname{sgn}(c)$ et avec s'' entier naturel.

Soit $\mathbb{R}^S=\mathbb{R}^{(\operatorname{sgn}(c))*}$ et $\mathbb{R}^{-S}=\mathbb{R}^{-(\operatorname{sgn}(c))*}$.

Soit H l'application :

$$\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{N}\to\mathbb{C}$$
$$(\alpha, z, x)\mapsto|\mu_1^2(z)|\,|\mu_1(|\alpha|)|\,|z|^{-p+r+q}.|\alpha|^{x+(j_1+t_1)/2}.|h(a\bar{a}/\alpha z^2)|$$
$$\exp(-2\pi|c|(2|\alpha|+a\bar{a}/2|\alpha|)).$$

En groupant les expressions $(*)$, $(**)$ et $(***)$, la valeur absolue de $K_{f,W_n}(a)$ est majorée par une combinaison linéaire (portant sur les indices $(r, q, j_1, t_1, s', s'')$) d'expressions de la forme :

$$(a\bar{a})^{1/2-(j_1+t_1)/2}|\operatorname{Re}(a)|^{j_1}|\operatorname{Im}(a)|^{t_1}\left(\int_{\mathbb{R}^S\times\mathbb{R}^*}H(\alpha, z, s')\,d\overset{*}{\alpha}\,d\overset{*}{z}\right.$$
$$\left.+\int_{\mathbb{R}^{-S}\times\mathbb{R}^*}H(\alpha, z, s'')\,d\overset{*}{\alpha}\,d\overset{*}{z}\right).$$

Soit

$$C_1(a)=(a\bar{a})^{-(j_1+t_1)/2+1/2}.|Re(a)|^{j_1}.|\operatorname{Im}(a)|^{t_1}$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^S\times\mathbb{R}^*}H(\alpha, z, s')\,d\overset{*}{\alpha}\,d\overset{*}{z}$$

et

$$C_2(a)=(a\bar{a})^{-(j_1+t_1)/2+1/2}.|\operatorname{Re}(a)|^{j_1}.|\operatorname{Im}(a)|^{t_1}$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^{-S}\times\mathbb{R}^*}H(\alpha, z, s'')\,d\overset{*}{\alpha}\,d\overset{*}{z}.$$

Posons, dans l'expression $C_1(a)$, $u=\alpha.z^2/a\bar{a}$. On a l'égalité :

$$C_1(a)=|\mu_1(a\bar{a})|.(a\bar{a})^{s'+1/2}.|\operatorname{Re}(a)|^{j_1}|\operatorname{Im}(a)|^{t_1}$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^S \times \mathbb{R}^*} |\mu_1(u)| \, |h(1/u)|$$
$$\times |u|^{s'+(j_1+t_1)/2} |z|^{-p+(r+q)-2s'-(j_1+t_1)}$$
$$\times \exp(-2\pi |c| (2a\bar{a}|u|/z^2 + |u|/2)) \, d\overset{*}{z} \, d\overset{*}{u}.$$

Il existe donc une constante positive λ qui ne dépend pas de a telle que :

$$C_1(a) = \lambda |\mu_1(a\bar{a})| . (a\bar{a})^{s'+1/2} . |\mathrm{Re}(a)|^{j_1} . |\mathrm{Im}(a)|^{t_1}$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^*} |z|^{-p+(r+q)-2s'-(j_1+t_1)} \times \exp(-2\pi |c| (a\bar{a}/z^2 + z^2)) \, d\overset{*}{z}.$$

Une égalité du même type est vraie pour l'expression $C_2(a)$ au changement près de s' en s''.

On obtient, avec les notations utilisées page 16 dans le lemme 5 :

$$C_1(a) = \lambda |\mu_1(a\bar{a})| (a\bar{a})^{s'+1/2} . |\mathrm{Re}(a)|^{j_1}$$
$$\times |\mathrm{Im}(a)|^{t_1} . I_{(-p+(r+q)-2s'-(j_1+t_1))}(a\bar{a}).$$

On déduit le lemme des propriétés des fonctions I_r (pour r entier relatif) qu'on a rappelées page 342 et de l'égalité ci-dessus.

LEMME 7. — *Si $\mathscr{B} = B(\mu'_1, \mu'_2)$, il existe une fonction V dans $\mathscr{B}$ telle que, quel que soit $a = \gamma + i\delta$ dans $\mathbb{C}^*$ (avec $\gamma = \mathrm{Re}(a)$ et $\delta = \mathrm{Im}(a)$) :*

$$V\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (a\bar{a})^{-p+1/2} \mu_1(a\bar{a})$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^2} (1+x^2+y^2)^{-(1+p)} \exp(4i\pi c(\gamma x - \delta y) \, dx \, dy.$$

Ce lemme contredit le lemme 6. D'où le résultat annoncé dans la proposition.

En effet, d'après le lemme 6, il existe un nombre réel λ tel que, pour tout a non nul et au voisinage de 0, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1+x^2+y^2)^{-(1+p)} \exp(4i\pi c(\gamma x - \delta y)) \, dx \, dy \leqslant \lambda (a\bar{a})^{p/2-1/4}.$$

En faisant tendre a *vers* 0, *on obtient la contradiction cherchée* (*on rappelle que* p est un entier naturel non nul).

Démonstration du lemme 7. — Si $\mathscr{B}=B(\mu_2', \mu_2')$, $\mathscr{B}$ est l'ensemble des fonctions de la forme $g_1 \mapsto \int_{\mathbf{C}} \Phi\left(w\begin{pmatrix}1 & -a\\ 0 & 1\end{pmatrix} g_1\right)\psi_{\mathbf{C}}(a)\,da$ pour Φ décrivant $B(\mu_1', \mu_2')$. Soit θ la fonction de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

$$\theta(x, y)=\exp(-2\pi|c|(x\bar{x}+y\bar{y}))$$

Quel que soit $g_1 \in G'$, soit $(\rho(g_1)\theta)$ la fonction de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $(\rho(g_1)\theta)(x, y)=\theta((x, y)g_1)$. Considérons Φ (dont on sait qu'elle appartient à $B(\mu_1', \mu_2')$ d'après [J-L]) telle que, pour tout g_1 dans G' :

$$\Phi(g_1)=\mu_1'(\det g_1)|\det g_1|_{\mathbf{C}}^{1/2}\int_{\mathbf{C}^*}(\mu_1'\mu_2'^{-1})(t)\,|t|_{\mathbf{C}}(\rho(g_1)\theta)((0, t))\,d\overset{*}{t}.$$

Un calcul facile montre qu'il existe une constante ν non nulle telle que, pour a dans $\mathbb{C}^*$:

$$\int_{\mathbf{C}}\Phi\left(w\begin{pmatrix}1 & -\bar{b}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_{\mathbf{C}}(b)\,db=\nu(a\bar{a})^{-p+1/2}\mu_1(a\bar{a})$$
$$\times\int_{\mathbf{C}}(1+b\bar{b})^{-(1+p)}\exp(4i\pi c(ba+\overline{ba}))\,db.$$

c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbf{C}}\Phi\left(w\begin{pmatrix}1 & -\bar{b}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\psi_{\mathbf{C}}(b)\,db=\nu(a\bar{a})^{-p+1/2}\mu_1(a\bar{a})$$
$$\times\int_{\mathbf{R}^2}(1+x^2+y^2)^{-(p+1)}\exp(4i\pi c(\gamma x-\delta y))\,dx\,dy.$$

Il suffit de remplacer la fonction θ par la fonction θ/ν pour établir le lemme.

Il reste à établir le troisième point de la proposition. Supposons que $\mathscr{B}$ soit l'espace $B^S(\mu_1', \mu_2')$. On sait que l'action π' sur $\mathscr{B}$ est en fait la série principale $\rho(\nu_1, \nu_2)$ avec, pour t nombre complexe non nul :

$$\nu_1(t)=\bar{t}^{-p}\mu_1(t\bar{t})$$

$$\nu_2(t)=\bar{t}^p\,\mu_2(t\bar{t})=t^{-p}\,\mu_1(t\bar{t}) \qquad (cf.\ \text{[God.]}, \S 2,\ \text{p. } 13).$$

Le modèle de Kirillov de $\mathscr{B}$ est alors (*cf.* [J-L], p. 233 et 96) l'ensemble des fonctions h_Φ :

$$\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

$$a\mapsto \nu_1(a)(a\bar{a})^{1/2}\int_{\mathbb{C}^*}\Phi(at,\ t^{-1})\,\bar{t}^p.\,t^p\,d\overset{*}{t}$$

avec Φ décrivant les fonctions de $\mathbb{C}^2$ à valeurs complexes telles que :

$$\Phi(x,\ y)=P(x,\ y,\ \bar{x},\ \bar{y})\exp(-2\pi\,|\,c\,|\,(x\bar{x}+y\bar{y}))$$

avec P, polynôme à coefficients complexes et en quatre variables.

LEMME 8. — *Soit P un polynôme en quatre variables et à coefficients complexes. Soit Φ, l'application de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que :*

$$\Phi(x,\ y)=P(x,\ \bar{x},\ y,\ \bar{y})\exp(-2\pi\,|\,c\,|\,(x\bar{x}+y\bar{y})),$$

il existe une constante réelle λ telle que, quel que soit a non nul et au voisinage de 0 :

$$|\,h_\Phi(a)\,|\leqslant\lambda\,|\,\mu_1(a\bar{a})^{1/4-p/2}.$$

Démonstration. — Quitte à faire une combinaison linéaire, on peut considérer, sans restreindre la généralité, que Φ est de la forme, pour $(y,\ x,\ u,\ z)$ dans $\mathbb{N}^4$ et $(v,\ w)$ dans $\mathbb{C}^2$:

$$\Phi(v,\ w)=v^y\,w^x\,\bar{v}^u\,\bar{w}^z\exp(-2\pi\,|\,c\,|\,(v\bar{v}+w\bar{w})).$$

On a l'égalité :

$$h_\Phi(a)=\nu_1(a)(a\bar{a})^{1/2}\,a^y\,\bar{a}^u\int_{\mathbb{C}^*}\bar{t}^{p+u-z}\,t^{p+y-x}$$

$$\times\exp(-2\pi\,|\,c\,|\,(a\bar{a}t\bar{t}+(t\bar{t})^{-1}))\,d\overset{*}{t}$$

et il vient que :

$$|\,h_\Phi(a)\,|\leqslant(a\bar{a})^{(1-p+(y+u))/2}\,|\,\mu_1(a\bar{a})\,|\biggl(\int_{\mathbb{C}^*}(t\bar{t})^{(y+u-(x+z))/2}$$

$$\times \exp(-2\pi|c|(a\bar{a}t\bar{t}+(t\bar{t})^{-1}))\, d\overset{*}{t}$$

c'est-à-dire, au voisinage de 0, il existe une constante λ positive telle que :

$$\begin{aligned}
|h_\Phi(a)| &\leqslant \lambda(a\bar{a})^{(1-p+(y+u))/2}|\mu_1(a\bar{a})| && \text{si} \quad -(y+u)+(x+z)>0 \\
&\leqslant \lambda(a\bar{a})^{(1-p+(x+z))/2}|\mu_1(a\bar{a})| && \text{si} \quad -(y+u)+(x+z)<0 \\
&\leqslant \lambda(a\bar{a})^{((y+u)-p)/2+1/4}|\mu_1(a\bar{a})| && \text{si} \quad (y+u)-(x+z)=0.
\end{aligned}$$

Le lemme découle de ces majorations.

On va construire maintenant une fonction de $\mathscr{B}$ qui ne vérifie pas la majoration du lemme précédent.

Considérons à nouveau l'élément non nul $A_{f,W}$ utilisé dans le lemme 4 page 12. Supposons en outre que l'entier n, K-type de la représentation π, est égal à l'entier p tel que $\mu_1\mu_2^{-1}(t)=t^p$ quel que soit le nombre réel non nul t.

Comme p est un entier non nul (*cf.* le point 2, p. 343), on a l'égalité (*cf.* notation de la formule donnant $K_{f,W}(a)$, p. 337).

$$\begin{aligned}
K_{f,W}(a) &= A_{f,W}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \nu(a\bar{a})^{1/2}\int_{(\mathbf{R}^*)^2} \mu_1(\beta)\,\mu_2(\alpha)\,\beta^{r+q}\,h(a\bar{a}/\alpha\beta)\operatorname{sgn}(\alpha) \\
&\quad \times \exp(-2\pi|c/\alpha\beta|(\alpha^2+a\bar{a}\beta^2/2))\left(\int_{\mathbf{R}} (i+b)^p(1+b^2)^{-(2p+1)/2}\right. \\
&\quad \left. \times \exp(2i\pi cb\alpha\beta^{-1})\, db\right) d\overset{*}{\alpha}\, d\overset{*}{\beta}.
\end{aligned}$$

Après changements de variables (notamment $\alpha=ua\bar{a}/\beta$) du même type que ceux effectués dans la démonstration du lemme 5, on a l'égalité, pour ν' constante indépendante de a et non nulle :

$$\begin{aligned}
K_{f,W}(a) &= \nu'(a\bar{a})^{-p+1/2}\mu_1(a\bar{a}) \\
&\quad \times \int_{\mathbf{R}^*} |\beta|^{p+q+r}\exp\left(-2\pi|c|\left(\frac{\beta^2}{2}+a\bar{a}/\beta^2\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\times\left(\int_{\mathbf{R}}(i+b)^p(1+b^2)^{-(1+2p)/2}\exp\left(\frac{2i\pi|c|ba\bar{a}}{\beta^2}\right)db\right)d\overset{*}{\beta}.$$

D'après le lemme 8 qui précède, il existe une constante réelle λ telle que, pour a au voisinage de 0 :

$$|K_{f,w_n}(a)/(\nu'(a\bar{a})^{1/2-p}.\mu_1(a\bar{a}))|\leqslant\lambda.(a\bar{a})^{p/2-1/4}.$$

La limite de la fonction majorante pour a tendant vers 0 est nulle car p est un entier non nul et positif. Celle du membre de gauche vaut :

$$\left(\int_{\mathbf{R}^*}|\beta|^{p+q+r}\exp(-\pi|c|\beta^2)d\overset{*}{\beta}\right)\left(\int_{\mathbf{R}}(i+b)^p(1+b^2)^{-(2p+1)/2}db\right).$$

La contradiction vient du lemme suivant :

LEMME 9. — *L'intégrale* $J=\int_{\mathbf{R}}(i+b)^p(1+b^2)^{-(2p+1)/2}db$ *est non nulle.*

Démonstration. — C'est un calcul déjà fait pour la démonstration du lemme 5. En effet :

$$(i+b)^p(1+b^2)^{-(2p+1)/2}=i^p(1-ib)^{-1/2}(1+ib)^{-(2p+1)/2}.$$

Comme $1+p>1$, on a :

$$J=i^p2^{1-p}\Gamma(1/2)^{-1}\Gamma(p+1/2)^{-1}\Gamma(p)$$

(*cf.* [Wald], p. 93). Donc, J est non nulle.

L'espace $\mathscr{B}$ n'est pas l'espace $B^S(\mu_1',\mu_2')$ et est donc tout l'ensemble $B(\mu_1',\mu_2')$.

A chaque représentation π de l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}_{\mathbf{R}}$ de G, on associe le seul quotient irréductible non nul de la représentation π' construite ci-dessus — qui est exactement π' sauf si π est la représentation de la série principale $\rho(\mu_1,\mu_1|\ \ |^{-p})$ où p est un entier naturel non nul et auquel cas ce quotient est le module de dimension finie. Il s'agit précisément du changement de base de Langlands dans le cas archimédien.

Appendice (*cf.* p. 340)

On rappelle que :

$$L(x)=\int_{\mathbb{R}^*} |\beta|^{s+2q-n-1}\exp(-2\pi|c|(1/\beta^2+x\beta^2+x\beta^2/2)H(1/\beta^2)d^*\beta.$$

Pour montrer la convergence de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^+} L(x)x^{n_1}dx$, considérons la fonction g :

$$\mathbb{R}\times\Gamma_c\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{C}$$

$$(\beta, b, x)\mapsto x^{n_1}|\beta|^{\mathrm{Re}(s)+2q-n-1}\exp(-2\pi|c|(1/\beta^2+x\beta^2/2)$$
$$|1+b^2|^{-(n+\mathrm{Re}(s)+1)/2}|i+b|^n|\exp(2i\pi b|c|/\beta^2).$$

(*a*) $\int_{\mathbb{R}^+} g(\beta, b, x)dx$ est égale à :

$$(n_1!/(\pi|c|)^{n_1})|\beta|^{(\mathrm{Re}(s)+2q-n-2n_1-3)}\exp(-2\pi|c|/\beta^2)|i+b|^n$$
$$\times|1+b^2|^{-(n+1+\mathrm{Re}(s))/2}\exp(2i\pi b|c|/\beta^2).$$

Soit $U(\beta, b)$ cette expression.

(*b*) $\int_{\mathbb{R}} U(\beta, b)d\overset{*}{\beta}$ vaut, à une constante multiplicative près :

$$|i+b|^n|1+b^2|^{-(n+1+\mathrm{Re}(s))/2}$$
$$\left(\int_{\mathbb{R}^+}\beta^{\mathrm{Re}(s)+2q-n-2n_1-3}\exp(-2\pi|c|/\beta^2)\exp(2i\pi|c|b/\beta^2)d\overset{*}{\beta}\right)$$
$$=|i+b|^n|1+b^2|^{-(n+1+\mathrm{Re}(s))/2}\left(\int_{\mathbb{R}^+}\beta^{-\mathrm{Re}(s)-2q+n+2n_1+3}\right.$$
$$\left.\times\exp(-2\pi|c|\beta^2(1+\mathrm{Im}(b)))d\overset{*}{\beta}\right)$$
$$=|i+b|^n|1+b^2|^{-(n+1+\mathrm{Re}(s))/2}(2\pi|c|(1+\mathrm{Im}(b))^{(\mathrm{Re}(s)+2q-n-2n_1-3)/2}$$
$$\times\Gamma(2n_1+3+n-\mathrm{Re}(s)-2q).$$

(*c*) L'application

$$b \mapsto |i+b|^n |1+b^2|^{-(n+1+\mathrm{Re}(s))/2}(1+\mathrm{Im}(b))^{(\mathrm{Re}(s)+2q-n-2n_1-3)/2}$$

est intégrable sur Γ_c si n_1 est assez grand (la partie réelle de b qui décrit le contour Γ_c reste bornée). Ces calculs permettent notamment d'appliquer le théorème de Fubini. On a donc l'égalité, pour n_1 assez grand :

$$\int_{\mathbb{R}^+} L(x)\, x^{n_1}\, dx$$
$$= 2(n_1!)/(\pi|c|)^{n_1}\left(\int_{\mathbb{R}^+} \exp(-2\pi|c|\beta^2)\,\beta^{2n+3-s+n-2q}\right.$$
$$\left.\times\left(\int_{\Gamma_c} (i+b)^n(1+b^2)^{-(n+1+s)/2}\exp(2i\pi|c|\beta^2 b)\,db\right)d\overset{*}{\beta}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}^+} L(x)\, x^{n_1}\, dx$$
$$= 2(n_1!)/(\pi|c|)^{n_1}\left(\int_{\Gamma_c} (i+b)^n(1+b^2)^{-(n+1+s)/2}\right.$$
$$\left.\times(2\pi|c|(1+ib))^{(s+2q-n-2n_1-3)/2}\,db\right)\Gamma(2n_1+3+n-s-2q).$$

Or : $(i+b)^n(1+b^2)^{-n/2} = i^n(1-ib)^{n/2}(1+ib)^{-n/2}$.

On déduit qu'il existe une constante λ_{n_1} non nulle telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^+} L(x)\, x^{n_1}\, dx = \lambda_{n_1}\int_{\Gamma_c}(1+ib)^{q-2-n_1-3n/2}(1-ib)^{-(1+s)/2}\,db.$$

On a l'égalité :

$$(1+ib)^{-y_1}(1-ib)^{-y_2}\,db = \pi 2^{-y_1-y_1+2}\,\Gamma(y_1)^{-1}\,\Gamma(y_2)^{-1}\,\Gamma(y_1+y_2-1)$$

(*cf.* [Wald], p. 93) vraie pour tous les nombres complexes y_1 et y_2 tels que $\mathrm{Re}(y_1+y_2) > 1$.

En choisissant n_1 peut-être encore plus grand (notamment pour que $\mathrm{Re}(n_1+5/2+3n/2+s)$ soit strictement supérieure à 1), on obtient que, avec $\lambda'_{n_1}=\pi\lambda_{n_1}$:

$$\int_{\mathbb{R}^+} L(x)\, x^{n_1}\, dx=\lambda'_{n_1}\, 2^{-(n_1-q+1/2+3n/2+s)}$$

$$\times\Gamma(n_1-q+2+3n/2)^{-1}\,\Gamma((1+s)/s)^{-1}\,\Gamma(n_1-q+3(1+n)/2+s).$$

BIBLIOGRAPHIE

[FR] FRIEDBERG. — Theta Functions, Liftings, and generalized Hilbert modular Forms. *Thèse*, Chicago, Illinois, juin 1982.

[H] HOWE. — θ-series and invariant theory in *Proceedings of Sympsia in Pure Mathematics*, vol. 33, part. 1, 1979, p. 275-285.

[GE] GELBART. — Weil representation and the spectrum of the metaplectic group, *Springer L.N.* 530, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[GOD] GODEMENT. — Notes on Jacquet-Langlands' theory, Prépublication I.A.S., 1970.

[J-L] JACQUET-LANGLANDS. — Automorphic on GL_2, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 114, 1970.

[WALD] WALDSPURGER. — Correspondance de Shimura, *J. Math. pures et appliquées*, 59, 1980, p. 1-133.

[WALD 2] WALDSPURGER. — Correspondance de Shimura et quaternions Preprint.

[CO] COGNET. — Representation de Weil et changement de base quadratique, *Bull. de la S.M.F.*, t. 113, 1985.

[O] ODA. — Periods of Hilbert Modular surfaces, *Progress in Mathematics*, Birkhäuser.