BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE CONZE
EMMANUEL LESIGNE

Théorèmes ergodiques pour des mesures diagonales

Bulletin de la S. M. F., tome 112 (1984), p. 143-175
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1984__112__143_0>

Bull. Soc. math. France,
112, 1984, p. 143-175.

THÉORÈMES ERGODIQUES POUR DES MESURES DIAGONALES

PAR

JEAN-PIERRE CONZE et EMMANUEL LESIGNE (*)

RÉSUMÉ. — On établit la convergence en moyenne des expressions

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x)g(S^n x) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^{pn} x)g(T^{qn} x)h(T^{rn} x)$$

sur un espace probabilisé muni de transformations T et S qui commutent et préservent la mesure.

ABSTRACT. — We prove the convergence in the mean of the expressions

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x)g(S^n x) \qquad \text{and} \qquad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^{pn} x)g(T^{qn} x)h(T^{rn} x)$$

where T and S are two commuting measure-preserving transformations on a probability space.

Introduction

Considérons un espace probabilisé $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et, sur cet espace, des transformations mesurables $T_1, T_2, \ldots, T_k$, commutant deux à deux et conservant la mesure μ. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_k$ des fonctions mesurables sur X.

(*) Texte reçu le 8 mars 1983.

J.-P. CONZE, I.R.M.A.R., Campus de Beaulieu, Université de Rennes I, 35042 Rennes Cedex.

E. LESIGNE, Département de Mathématiques, Université de Lyon I, 69622 Villeurbanne Cedex.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1984/02 143 33/$ 5.30

Nous nous proposons d'établir, dans certains cas particuliers, la convergence de moyennes de la forme :

$$(1)\qquad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_1(T_1^n x)\, f_2(T_2^n x) \ldots f_k(T_k^n x).$$

Dans le cas d'une transformation, la convergence en moyenne et presque sûre de ces expressions résulte du théorème ergodique de Birkhoff. Dans le cas général, l'usage des moyennes données par (1), portant sur des mesures de type diagonal, est apparu dans la démonstration due à H. FURSTENBERG du théorème de Szemeredi. C'est en effet en prouvant que, si f est une fonction bornée positive et non nulle, alors la limite inférieure de

$$\int_X f(x)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T_1^n x)\, f(T_2^n x) \ldots f(T_k^n x)\, d\mu(x)$$

est strictement positive, que H. FURSTENBERG ([12]), puis H. FURSTENBERG et Y. KATZNELSON ([3]) ont donné une version ergodique du théorème de Szemeredi dans le cas de Z et dans le cas général d'un réseau. La méthode développée par H. FURSTENBERG repose sur la notion de système dynamique à spectre discret généralisé. En utilisant l'étude de structure développée par H. FURSTENBERG dans son article initial et par R. J. ZIMMER dans [6] et [7], nous allons établir la convergence en moyenne de (1) dans les deux cas suivants :

celui de deux transformations :

$$(2)\qquad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g(T^n x)\, h(S^n x)$$

et celui de trois puissances d'une même transformation :

$$(3)\qquad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g(T^{pn} x)\, h(T^{qn} x)\, k(T^{rn} x).$$

Nous commençons par une présentation des outils et résultats utilisés : $\mathscr{B}$-modules, spectre discret généralisé et mesures produit conditionnelles. Cette présentation est réduite au minimum et les résultats ne sont qu'énoncés. Une description plus complète des notions définies et les justifications détaillées des propositions se trouvent dans [4].

Nous démontrons ensuite successivement les deux principaux théorèmes (th. 4 et 6). Ce sont ces théorèmes de convergence qui constituent des résultats nouveaux. Leurs démonstrations sont présentées avec tous leurs détails dans [4]. Il est à noter que la démonstration de la convergence de (3) utilise la résolution d'une équation fonctionnelle, travail qui sera présenté dans [5].

Nous n'obtenons donc finalement qu'une réponse partielle à la question de la convergence de (1), mais, à partir de là, nous pensons qu'il devrait être possible d'avancer dans la résolution du cas général.

NOTATIONS. — Quand toute ambiguïté sera écartée, l'expression de moyenne $1/N\sum_{n=0}^{N-1}\ldots$ sera plus simplement notée $1/N\sum\ldots$

Étant donnés un espace X muni d'une transformation T et une fonction f sur X, on note Tf la fonction qui à $x\in X$ associe $f(Tx)$.

Si $(X, \mathscr{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré, on utilise les notations classiques des espaces $L^p(\mu)$ munies des normes $\|\ \|_p$ $(p\in[1, +\infty])$. Si E désigne une partie de $L^2(\mu)$, $E^\perp$ désignera son orthogonal.

Quand X est un espace topologique, on note $\mathscr{C}(X)$ l'espace des fonctions continues sur X.

Étant donnés un espace de probabilité $(X, \mathscr{A}, \mu)$, une sous-tribu $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ et une fonction intégrable f sur X, on note $E(f\,|\,\mathscr{B})$ l'espérance conditionnelle de f par rapport à $\mathscr{B}$.

I. $\mathscr{B}$-modules

Dans cette première partie, nous définissons les $\mathscr{B}$-modules et les opérateurs correspondants et nous citons les propriétés que nous utiliserons par la suite.

Considérons un espace probabilisé $(X, \mathscr{A}, \mu)$ tel que $L^2(\mu)$ soit séparable. Soit $\mathscr{B}$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$. On notera $\|\,.\,\|$ et $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ la norme et le produit scalaire dans $L^2(\mu)$.

DÉFINITION 1. — *Un $\mathscr{B}$-module est un sous-espace fermé V de $L^2(\mu)$ vérifiant la condition suivante : si $f\in V$ et si Φ est une fonction $\mathscr{B}$-mesurable et bornée, alors $\Phi f\in V$.* —

1. Bases

PROPOSITION 1. — *Dans tout $\mathscr{B}$-module V, il existe une famille $(e_n, n \geqslant 0)$ vérifiant :*

(i) $n \neq m \Rightarrow E(e_n . \bar{e}_m \mid \mathscr{B}) = 0$,

(ii) *il existe une fonction $x \to n(x)$ définie presque partout sur X et à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ telle que :*

$$E(|e_n|^2 \mid B)(x) = 1 \qquad si \quad n < n(x)$$

et

$$E(|e_n|^2 \mid B)(x) = 0 \qquad si \quad n \geqslant n(x).$$

(iii) *pour tout $f \in V$,*

$$\lim_{N \to +\infty} \| f - \textstyle\sum_{n=0}^{N} E(\bar{e}_n . f \mid \mathscr{B}) . e_n \|_2 = 0$$

et

$$\lim_{N \to +\infty} E(| f - \textstyle\sum_{n=0}^{N} E(\bar{e}_n . f \mid \mathscr{B}) . e_n |^2 \mid \mathscr{B}) = 0 \quad p. p.$$

De plus la fonction $n(x)$ est indépendante de la famille $(e_n)_{n \geqslant 0}$ considérée.

DÉFINITION 2. — *Une famille (e_n) vérifiant les conditions* (i), (ii) *et* (iii) *de la proposition* 1 *est appelée une $\mathscr{B}$-base de V. Le $\mathscr{B}$-module V est dit de $\mathscr{B}$-dimension finie si $n(x)$ est fini presque partout. S'il existe $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, tel que $n(x) = N$ pour presque tout x, la famille $(e_n)_{0 \leqslant n < N}$ est appelée une $\mathscr{B}$-base orthonormée de V.*

2. $\mathscr{B}$-opérateurs

DÉFINITION 3. — *Soient V un $\mathscr{B}$-module et U une application de V dans V. On dit que U est un $\mathscr{B}$-opérateur de V si U est linéaire et si, pour tout $f \in V$ et tout φ, $\mathscr{B}$-mesurable et borné, on a*

$$U(\varphi f) = \varphi . U(f).$$

DÉFINITION 4. — *Un $\mathscr{B}$-opérateur U de V est dit $\mathscr{B}$-borné s'il existe une fonction α positive, $\mathscr{B}$-mesurable et presque partout finie telle que, pour tout $f \in V$,*

$$E(| U f |^2 \mid \mathscr{B}) \leqslant \alpha . E(| f |^2 \mid \mathscr{B}).$$

DÉFINITION 5. — *Un $\mathscr{B}$-opérateur U de V est dit $\mathscr{B}$-compact s'il est $\mathscr{B}$-borné et vérifie : pour toute suite $(f_n)_{n\geq 0}$ dans V vérifiant d'une part*

$$\sup_n E(|f_n|^2 \mid \mathscr{B}) < +\infty \quad \text{p. p.}$$

et d'autre part, pour tout $g \in V$,

$$\lim_{n\to+\infty} E(f_n . \bar{g} \mid \mathscr{B}) = 0 \quad \text{p. p.},$$

on a

$$\lim_{n\to+\infty} E(|U f_n|^2 \mid \mathscr{B}) = 0 \quad \text{p. p.}$$

Remarquons que l'on reconnaît ici la définition classique des opérateurs compacts qui transforment les suites faiblement convergentes en suites fortement convergentes.

PROPOSITION 2. — *Si U est un $\mathscr{B}$-opérateur $\mathscr{B}$-borné de V et si $(e_n)_{n\geq 0}$ est une $\mathscr{B}$-base de V, la fonction $[\sum_n E(|U e_n|^2 \mid \mathscr{B})]^{1/2}$ est indépendante de la base choisie.*

Cette fonction est notée $N_{\mathscr{B}}(U)$.

Un $\mathscr{B}$-opérateur U est appelé un $\mathscr{B}$-opérateur de Hilbert-Schmidt si $N_{\mathscr{B}}(U)$ est presque partout fini. On montre que tout $\mathscr{B}$-opérateur de Hilbert-Schmidt est $\mathscr{B}$-compact.

3. Réduction des opérateurs $\mathscr{B}$-compacts

DÉFINITION 6. — *Soit U un $\mathscr{B}$-opérateur $\mathscr{B}$-borné de V.*

— *Un élément f de V est appelé une $\mathscr{B}$-fonction propre pour U s'il existe φ $\mathscr{B}$-mesurable telle que $U f = \varphi f$.*

— *Une fonction $\mathscr{B}$-mesurable φ est appelée une $\mathscr{B}$-valeur propre pour U s'il existe $f \in V$, non nulle, telle que $U f = \varphi f$.*

— *Si φ est une $\mathscr{B}$-valeur propre pour U, on pose*

$$E_\varphi = \{ f \in V \mid U f = \varphi f \text{ et } \{ \varphi = 0 \} \subset \{ E(|f|^2 \mid \mathscr{B}) = 0 \} \}$$

E_φ est un $\mathscr{B}$-module, qui est appelé $\mathscr{B}$-module propre pour U attaché à φ.

II. Spectre discret généralisé

On reprend les hypothèses de la partie I et on suppose à présent que l'espace X est muni d'une transformation T inversible, mesurable et préservant la mesure μ. On suppose également que la sous-tribu $\mathscr{B}$ est stable sous T.

1. ($\mathscr{B}$, T)-modules

DÉFINITION 7. — *Un $\mathscr{B}$-module est appelé ($\mathscr{B}$, T)-module s'il est stable sous T.*

On supposera dorénavant que le système (X, $\mathscr{B}$, μ, T) est ergodique. Sous cette condition tout ($\mathscr{B}$, T)-module admet une $\mathscr{B}$-base orthonormée, car la fonction $n(x)$ apparaissant dans la proposition 1 est $\mathscr{B}$-mesurable et invariante sous T, donc constante presque partout. Soit V un ($\mathscr{B}$, T)-module de $\mathscr{B}$-dimension finie et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une $\mathscr{B}$-base orthonormée de V; il existe une fonction matricielle $M(x)$ telle que :

– pour tout $x \in X$, $M(x)$ est une matrice (n, n) unitaire.

– M est une fonction $\mathscr{B}$-mesurable.

$$\begin{bmatrix} Te_1 \\ Te_2 \\ \vdots \\ Te_n \end{bmatrix} = M . \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \quad \text{p.p.}$$

DÉFINITION 8. — *Un ($\mathscr{B}$, T)-module est dit irréductible s'il ne contient pas de sous-($\mathscr{B}$, T)-module non trivial.*

THÉORÈME 1. — *Soit U un $\mathscr{B}$-opérateur de V. Si U est $\mathscr{B}$-compact et auto-adjoint, il existe une suite (λ_n), de $\mathscr{B}$-valeurs propres pour U, telle que :*

$$V = \operatorname{Ker} U \oplus (\oplus_n E_{\lambda_n}).$$

Les λ_n sont à valeurs réelles et la suite $(|\lambda_n|)$ tend en décroissant vers 0, presque partout.

Les $\mathscr{B}$-modules propres E_{λ_n} sont de $\mathscr{B}$-dimension finie et sont deux à deux orthogonaux.

PROPOSITION 3. — *Soit V un $(\mathscr{B}, T)$-module de $\mathscr{B}$-dimension finie et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une $\mathscr{B}$-base orthonormée de V. Soit M la fonction matricielle $\mathscr{B}$-mesurable unitaire représentant T dans cette base.*

On a équivalence entre :

(i) *V est un $(\mathscr{B}, T)$-module irréductible.*

(ii) *Si A et N sont des fonctions matricielles $\mathscr{B}$-mesurables vérifiant*

$$A(Tx)\,M(x) = N(x)\,A(x) \quad \text{p.p.,}$$

alors $A = 0$ ou $A(x)$ est une matrice (n, n) inversible pour presque tout x.

(iii) *Si A est une fonction matricielle $\mathscr{B}$-mesurable vérifiant*

$$A(Tx)\,M(x) = M(x)\,A(x) \quad \text{p.p.,}$$

alors A est une matrice scalaire constante.

Une fonction M vérifiant ces conditions sera dite $\mathscr{B}$-irréductible.

2. Spectre discret généralisé

DÉFINITION 9. — *On dit qu'un élément f de $L^2(\mu)$ est une $(\mathscr{B}, T)$-fonction propre généralisée s'il existe un entier positif n et des fonctions $\mathscr{B}$-mesurables $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ tels que :*

$$T^n f = \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i \,.\, T^i f.$$

Le sous-espace fermé de $L^2(\mu)$ engendré par les $(\mathscr{B}, T)$-fonctions propres généralisées est noté $\mathscr{E}(\mathscr{B}, T)$.

PROPOSITION 4. — *$\mathscr{E}(\mathscr{B}, T)$ est le sous-espace fermé de $L^2(\mu)$ engendré par la réunion des $(\mathscr{B}, T)$-modules de $\mathscr{B}$-dimension finie. C'est lui-même un $(\mathscr{B}, T)$-module et il s'écrit comme somme directe orthogonale d'une famille dénombrable de $(\mathscr{B}, T)$-modules irréductibles de $\mathscr{B}$-dimension finie.*

Remarque. — La structure des systèmes $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ vérifiant $\mathscr{E}(\mathscr{B}, T) = L^2(\mu)$ est étudiée dans [6]. Ce sont les systèmes qui sont isomorphes à une extension de $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ par un groupe compact.

III. Mesure produit conditionnelle

1. Produit fibré

Considérons à présent un espace compact métrisable X, sa tribu borélienne $\mathscr{A}$ et μ une probabilité régulière sur $(X, \mathscr{A})$. Soit $\mathscr{B}$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$. On peut définir sur $(X\times X, \mathscr{A}\oplus\mathscr{A})$ une mesure $\mu\otimes_{\mathscr{B}}\mu$ par :

pour tous A, $A'\in\mathscr{A}$,

$$\mu\otimes_{\mathscr{B}}\mu\,(A\times A')=\int P(A\mid\mathscr{B})(x).P(A'\mid\mathscr{B})(x)\,d\mu(x).$$

L'espace $(X\times X, \mathscr{A}\otimes\mathscr{A}, \mu\otimes_{\mathscr{B}}\mu)$ est appelé le produit fibré de $(X, \mathscr{A}, \mu)$ par lui-même au-dessus de $\mathscr{B}$.

Restreinte à $(X\times X, \mathscr{B}\otimes\mathscr{B})$ la mesure $\mu\otimes_{\mathscr{B}}\mu$ est la mesure diagonale. Modulo cette mesure, on peut donc considérer $\mathscr{B}$ comme une sous-tribu de $\mathscr{A}\otimes\mathscr{A}$.

Si V et W sont des $\mathscr{B}$-modules dans $L^2(\mu)$, les fonctions de la forme $v\otimes w$ avec $v\in V$, $E(|v|^2\mid\mathscr{B})$ borné, $w\in W$ et $E(|w|^2\mid\mathscr{B})$ borné engendrent un sous-espace fermé de $L^2(\mu\otimes_{\mathscr{B}}\mu)$ qui est un $\mathscr{B}$-module et qui sera noté $V\otimes_{\mathscr{B}}W$.

Soit à présent un homéomorphisme T de X, préservant la mesure μ et laissant stable la tribu $\mathscr{B}$. La mesure $\mu\otimes_{\mathscr{B}}\mu$ est alors $T\times T$-invariante, et on a le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Les éléments $T\times T$-invariants de $L^2(\mu\otimes_{\mathscr{B}}\mu)$ sont contenus dans $\mathscr{E}(\mathscr{B}, T)\otimes_{\mathscr{B}}\mathscr{E}(\mathscr{B}, T)$.*

L'outil fondamental pour la démonstration de ce théorème est le théorème 1 sur la réduction des opérateurs $\mathscr{B}$-compacts. Voici, en résumé, comment on procède :

Soit $(e_i)_{i\geq 0}$ une $\mathscr{B}$-base orthonormée de $L^2(\mu)$. La famille $(e_i\otimes\bar{e}_j)_{i,\,j\geq 0}$ est alors une $\mathscr{B}$-base orthonormée de $L^2(\mu\otimes_{\mathscr{B}}\mu)$.

Si $\varphi\in L^2(\mu\otimes_{\mathscr{B}}\mu)$, φ s'écrit

$$\varphi=\sum\nolimits_{i,\,j\geq 0}\varphi_{i,\,j}\,.\,e_i\otimes\bar{e}_j$$

où les φ_{ij} sont $\mathscr{B}$-mesurables.

Supposons que φ soit $T\times T$-invariante et symétrique, c'est-à-dire que $\varphi_{ij}=\overline{\varphi_{ji}}$ μ-presque partout.

On considère alors le $\mathscr{B}$-opérateur U de $L^2(\mu)$ dont la matrice dans la $\mathscr{B}$-base (e_i) est $[\varphi_{ij}]$. En d'autres termes, si $f \in L^2(\mu)$, on pose

$$U f = \sum_{i,\, j \geq 0} \varphi_{ij} \,.\, E(f\bar{e}_j \,|\, \mathscr{B}) \,.\, e_i.$$

Formellement cet opérateur s'écrit

$$U f(x) = E[\varphi(x, .) . f(.) \,|\, \mathscr{B}](x).$$

Le fait que $\varphi \in L^2(\mu \otimes_{\mathscr{B}} \mu)$ assure que U est un $\mathscr{B}$-opérateur de Hilbert-Schmidt. De plus, φ étant symétrique, U est autoadjoint. On peut donc appliquer à l'opérateur U le théorème 1 .

$L^2(\mu) = \operatorname{Ker} U \oplus (\oplus_{n \geq 0} E_{\lambda_n})$ où les E_{λ_n} sont des $\mathscr{B}$-modules propres pour U, de $\mathscr{B}$-dimension finie.

Le fait que φ soit $T \times T$-invariante entraîne que U et T commutent. En utilisant les propriétés de la suite de $\mathscr{B}$-valeurs propres (λ_n), on en déduit alors que les E_{λ_n} sont des $(\mathscr{B}, T)$-modules et donc que, pour tout n, $E_{\lambda_n} \subset \mathscr{E}(\mathscr{B}, T)$.

D'autre part, sachant que $\operatorname{Ker} U = (\oplus_{n \geq 0} E_{\lambda_n})^{\perp}$, on a :

$$\varphi \in (\oplus_{n \geq 0} E_{\lambda_n}) \otimes_{\mathscr{B}} (\oplus_{n \geq 0} E_{\lambda_n}).$$

Finalement on arrive bien à $\varphi \in \mathscr{E}(\mathscr{B}, T) \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}(\mathscr{B}, T)$.

2. Mesure produit conditionnelle

Nous reprenons ici une définition due à H. FURSTENBERG.

Soit $(X_i, \mathscr{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ des espaces probabilisés. Pour tout i, soit $\mathscr{B}_i$ une sous-tribu de $\mathscr{A}_i$.

DÉFINITION 10. — *Une probabilité* ν *sur* $(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k, \mathscr{A}_1 \otimes \mathscr{A}_2 \otimes \ldots \otimes \mathscr{A}_k)$ *est appelée mesure produit conditionnelle si :*

a) la projection de ν *sur* X_i *est* $\mu_i \,(i = 1, 2, \ldots, k)$.

b) pour tout $f_i \in L^{\infty}(\mu_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *on a :*

$$\int f_1(x_1) \ldots f_k(x_k)\, d\nu(x_1, \ldots, x_k)$$
$$= \int E(f_1 \,|\, \mathscr{B}_1)(x_1) \ldots E(f_k \,|\, \mathscr{B}_k(x_k)\, d\nu(x_1, \ldots, x_k).$$

Une étude des propriétés d'une telle mesure est faite dans [4]. Nous nous limiterons ici à l'énoncé du théorème principal. Ce résultat figure dans [2].

THÉORÈME 3. — *Soient* $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i, T_i)$, $i=1, \ldots, k$, *des systèmes dynamiques mesurés réguliers. Pour tout i, soit* $\mathcal{B}_i$ *une sous-tribu de* $\mathcal{A}_i$, *stable sous* T_i *et telle que* $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i, T_i)$ *soit ergodique.*

Soit ν *une mesure produit conditionnelle sur le produit des k espaces. On suppose que* ν *est* $T_1 \times \ldots \times T_k$*-invariante.*

On a alors :

Les éléments $T_1 \times \ldots \times T_k$*-invariants de* $L^2(\nu)$ *sont contenus dans*

$$\mathcal{E}(\mathcal{B}_1, T_1) \otimes \mathcal{E}(\mathcal{B}_2, T_2) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}(\mathcal{B}_k, T_k).$$

En d'autres termes, si $(e_i^n)_{n \geq 0}$ *est une* $\mathcal{B}$*-base orthonormée de* $\mathcal{E}(\mathcal{B}_i, T_i)$, *tout élément* $T_1 \times \ldots \times T_k$*-invariant de* $L^2(\nu)$ *est contenu dans le* $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}_k$*-module engendré par*

$$\{ e_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes e_k^{n_k} \mid n_1, \ldots, n_k \geq 0 \}.$$

Remarque. — Ce théorème généralise bien sûr le théorème 2, mais sa démonstration ne présente pas de grande difficulté quand le théorème 2 est acquis.

IV. Convergence de $1/N \sum T^n g\, S^n h$

1. Le théorème de convergence

THÉORÈME 4. — *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace probabilisé et T, S deux transformations inversibles mesurables de X qui commutent et préservent* μ. *Alors, pour tous* $g, h \in L^2(\mu)$, *la suite* $(1/N \sum_{n=0}^{N-1} T^n g\, S^n h)_{N>0}$ *converge en moyenne.*

Nous allons commencer par préciser et établir ce résultat dans un cadre plus restrictif.

PROPOSITION 5. — *Soient X un espace compact métrisable,* $\mathcal{A}$ *sa tribu borélienne et* μ *une probabilité régulière sur* $(X, \mathcal{A})$. *Soient T et S deux homéomorphismes de X qui commutent et préservent* μ. *On suppose de plus* *que l'action du groupe engendré par T et S sur $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est ergodique. Désignons par $\mathscr{B}$ la tribu des événements TS^{-1}-invariants. On a alors, pour tous g, $h \in L^2(\mu)$,*

si $g \in [\mathscr{E}(\mathscr{B}, T)]^\perp$ ou si $h \in [\mathscr{E}(\mathscr{B}, S)]^\perp$ alors $(1/N \sum T^n g S^n h)$ converge vers 0 *en moyenne* (1)

et si $g \in \mathscr{E}(\mathscr{B}, T)$ et $h \in \mathscr{E}(\mathscr{B}, S)$, alors $(1/N \sum T^n g S^n h)$ converge presque partout (2).

Démonstration de la proposition 5. — Commençons par établir (1).

Fixons une suite $(f_N)_{N>0}$ dans $L^\infty(\mu)$ vérifiant $\| f_N \|_\infty \leqslant 1$ pour tout N, et une suite croissante d'entiers $(N_k)_{k \geqslant 0}$.

Si ψ est une fonction continue sur $X \times X$, posons

$$\lambda_N(\psi) = \int f_N(x) \, . \, \frac{1}{N} \sum \psi(T^n x, S^n x) \, d\mu(x).$$

Pour toute fonction $\psi \in \mathscr{C}(X \times X)$, on peut extraire de (N_k) une sous-suite (N'_k) telle que $(\lambda_{N'_k}(\psi))_{k>0}$ soit une suite convergente.

Si D désigne une partie dénombrable dense de $\mathscr{C}(X \times X)$, on peut par un procédé diagonal, extraire de (N_k) une sous-suite (N'_k) telle que $(\lambda_{N'_k}(\psi))_{k>0}$ soit une suite convergente pour tout $\psi \in D$. Sachant que $| \lambda_N(\psi) | \leqslant \| \psi \|_\infty$, on en déduit, en utilisant le critère de Cauchy que $(\lambda_{N'_k}(\psi))$ converge pour tout $\psi \in \mathscr{C}(X \times X)$.

Posons $\lambda(\psi) = \lim_{k \to +\infty} \lambda_{N'_k}(\psi)$. On a $| \lambda(\psi) | \leqslant \| \psi \|_\infty$, pour tout $\psi \in \mathscr{C}(X \times X)$, et λ est donc une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}(X \times X)$, autrement dit une mesure régulière sur $(X \times X, \mathscr{A} \otimes \mathscr{A})$. Par construction, λ est $T \times T$-invariante. D'autre part, si u, $v \in \mathscr{C}(X)$, on a :

$$\begin{aligned} | \lambda(u \otimes v) | &= \lim_{k \to +\infty} \left| \int f_{N'_k}(x) \, . \, \frac{1}{N'_k} \sum u(T^n x) \, . \, v(S^n x) \, d\mu(x) \right| \\ &\leqslant \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{N'_k} \sum \int | u | (T^n x) \, . \, | v | (S^n x) \, d\mu(x) \\ &= \lim_{k \to +\infty} \int \frac{1}{N} \sum | u | ((TS^{-1})^n x) \, . \, | v | (x) \, d\mu(x) \end{aligned}$$

d'après l'invariance de μ sous S.

Cette dernière expression est égale, d'après le théorème ergodique, à :

$$\int E(| u | \, | \mathscr{B})(x) \, . \, | v | (x) \, d\mu(x),$$

c'est-à-dire à $\mu \otimes_B \mu(|u| \otimes |v|)$.

Ainsi, pour u, $v \in \mathscr{C}(X)$, on a

$$|\lambda(u \times v)| \leqslant \mu \otimes_{\mathscr{B}} \mu(|u| \otimes |v|).$$

On en déduit successivement que si ψ est une fonction continue positive sur $X \times X$, on a $|\lambda(\psi)| \leqslant \mu \otimes_{\mathscr{B}} \mu(\psi)$, puisque, si A est un borélien de $X \times X$, on a $|\lambda(A)| \leqslant \mu \otimes_{\mathscr{B}} \mu(A)$.

En particulier, on a $\lambda \ll \mu \otimes_{\mathscr{B}} \mu$.

Soit φ la densité de λ par rapport à $\mu \otimes_{\mathscr{B}} \mu$. Ces deux mesures étant $T \times S$-invariantes, φ est $T \times S$ invariante modulo $\mu \otimes_{\mathscr{B}} \mu$. D'après le théorème 3, on en déduit que $\varphi \in \mathscr{E}(\mathscr{B}, T) \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}(\mathscr{B}, S)$.

Pour toutes fonctions continues u, v sur X, on a :

$$\lim_{k \to +\infty} \int_X f_{N'_k}(x) \cdot \frac{1}{N'_k} \sum u(T^n x) \cdot v(S^n x)\, d\mu(x) = \int_{X \times X} \varphi(x, y) \cdot u(x) \cdot v(y)\, d(\mu \otimes_{\mathscr{B}} \mu)(x, y).$$

On en déduit aisément, grâce à la densité de $\mathscr{C}(X)$ dans $L^2(\mu)$, que, pour tous g, $h \in L^2(\mu)$,

$$\lim_{k \to +\infty} \int_X f_{N'_k}(x) \cdot \frac{1}{N'_k} \sum g(T^n x) \cdot h(S^n x)\, d\mu(x) = \int_{X \times X} \varphi(x, y) \cdot g(x) \cdot h(y)\, d(\mu \otimes_{\mathscr{B}} \mu)(x, y).$$

Fixons g, h dans $L^2(\mu)$ et supposons que $g \in [\mathscr{E}(\mathscr{B}, T)]^\perp$ ou $h \in [\mathscr{E}(\mathscr{B}, S)]^\perp$. Sachant que $\varphi \in \mathscr{E}(\mathscr{B}, T) \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}(\mathscr{B}, S)$, on en déduit que

$$\lim_{k \to +\infty} \int_X f_{N'_k}(x) \cdot \frac{1}{N'_k} \sum g(T^n x) \cdot h(S^n x)\, d\mu(x) = 0.$$

Ceci étant vrai pour une suite (N'_k) extraite d'une suite (N_k) arbitraire, on a en fait :

$$\lim_{N \to +\infty} \int f_N(x) \cdot \frac{1}{N} \sum g(T^n x) \cdot h(S^n x)\, d\mu(x) = 0.$$

La suite (f_N) étant arbitraire, on peut la choisir de façon que

$$f_N \cdot \frac{1}{N} \sum T^n g \cdot S^n h = \left| \frac{1}{N} \sum T^n g \cdot S^n h \right|.$$

On obtient ainsi la convergence en moyenne vers 0 de $(1/N \sum T^n g\, S^n h)_{N>0}$ et (1) est donc établi.

Montrons à présent (2)

Soient V, un $(\mathscr{B}, T)$-module irréductible de $\mathscr{B}$-dimension finie, et W, un $(\mathscr{B}, S)$-module irréductible de $\mathscr{B}$-dimension finie. Soient $(g_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ et $(h_j)_{1\leqslant j\leqslant s}$ des $\mathscr{B}$-bases orthonormées de, respectivement, V et W. Nous allons commencer par étudier le cas où g et h vérifient :

$$g(x)=a(x).g_i(x) \qquad \text{et} \qquad h(x)=b(x).h_j(x) \quad (3)$$

où a et b sont $\mathscr{B}$-mesurables.

Soient M et N les fonctions matricielles unitaires $\mathscr{B}$-mesurables telles que

$$T\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \end{bmatrix} = M.\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \end{bmatrix}$$

et

$$S\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_s \end{bmatrix} = N.\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_s \end{bmatrix}.$$

Posons

$$M^{(n)}(x)=M(T^{n-1}x).M(T^{n-2}x)\ldots M(x)$$

et

$$N^{(n)}(x)=N(S^{n-1}x).N(S^{n-2}x)\ldots N(x)$$

on a

$$N^{(n)}(x)=N(T^{n-1}x).N(T^{n-2}x)\ldots N(x)$$

car N est $\mathscr{B}$-mesurable.

Notons S_k la sphère unité de $\mathbb{C}^k$ et m_k la mesure de Lebesgue sur S_k. Considérons la transformation R de $X\times S_r\times S_s$, définie par :

$$R(x, Y, Z)=(Tx, M(x).Y, N(x).Z).$$

La mesure $\mu\otimes m_r\otimes m_s$ est R-invariante.

Posons

$$\Psi_{ij}(x, Y, Z)=a(x).b(x).y_i.z_j \qquad \text{pour} \quad 1\leqslant i\leqslant r \quad \text{et} \quad 1\leqslant j\leqslant s,$$

où l'on note $Y=(y_1,\ldots,y_r)$ et $Z=(z_1,\ldots,z_s)$.

Le théorème ergodique de Birkhoff assure la convergence $\mu \otimes m_r \otimes m_s$-presque partout de la suite $(1/N \sum_{n=0}^{N-1} \Psi_{ij}(R^n(x, Y, Z)))$.

En développant l'expression $1/N \sum_{n=0}^{N-1} \Psi_{ij}(R^n(x, Y, Z))$, on peut la mettre sous la forme $\sum_{1 \leq k \leq r,\ 1 \leq l \leq 1} \Phi_{i,\ j, N}^{k,\ 1}(x) . y_k . z_l$.

Les $\Phi_{i,\ j, N}^{k,\ l}$ sont $\mathscr{B}$-mesurables et convergent μ-presque partout quand N tend vers l'infini.

En substituant $(g_1, \ldots, g_r)$ à Y et $(h_1, \ldots, h_s)$ à Z, on constate que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (T^n(ab) . T^n g_i . S^n h_j = \sum_{k,\ l} \Phi_{i,\ j, N}^{k,\ l} . g_k . h_l.$$

Or, d'après (3),

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^n(ab) . T^n g_i\, S^n h_j = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^n g . S^n h.$$

On en déduit que la suite $(1/N \sum T^n g\, S^n h)$ converge presque partout.

Si on choisit à présent des fonctions g et h qui sont sommes finies de fonctions de la forme indiquée dans (3), cette convergence est encore vérifiée. Or, d'après les propositions 1 et 4, les fonctions g (resp. h) qui sont de telles sommes forment une partie dense (au sens L^2) de $\mathscr{E}(\mathscr{B}, T)$ (resp. de $\mathscr{E}(\mathscr{B}, S)$).

On fixe g de cette forme et, pour $h \in \mathscr{E}(\mathscr{B}, S)$ on pose :

$$R(h, x) = \limsup_{N,\ M \to +\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(T^n x) . h(S^n x) - \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} g(T^n x) . h(S^n x) \right|.$$

Du fait que $R(h, x) = 0$, pour presque tout x, pour une famille dense de fonctions h dans $\mathscr{E}(\mathscr{B}, S)$, on déduit, par une suite de majorations simples, que $R(h, x) = 0$ pour presque tout x, pour tout $h \in \mathscr{C}(B, S)$.

On obtient ainsi la convergence presque sûre de

$$(1/N \sum g(T^n x) . h(S^n x)) \quad \text{pour tout } h \in \mathscr{E}(\mathscr{B}, S).$$

En fixant h dans $\mathscr{E}(\mathscr{B}, S)$, on établit ensuite, par le même argument, la convergence presque sûre de $(1/N \sum g(T^n x)\, h(S^n x))$ pour tout $g \in \mathscr{E}(\mathscr{B}, T)$.

Nous avons achevé ainsi la démonstration de (2), et donc de la proposition 5.

Démonstration du théorème 4. — On se place, dans un premier temps, sous les hypothèses de la proposition 5. Soient g, $h \in L^2(\mu)$. D'après l'inégalité de Schwarz, on a

$$\left|\frac{1}{N}\sum T^n g\, S^n h\right| \leqslant \left(\frac{1}{N}\sum T^n |g|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{N}\sum S^n |h|^2\right)^{1/2}.$$

Les suites $(1/N\sum T^n |g|^2)$ et $(1/N\sum S^n |h|^2)$ convergent en moyenne et sont donc équi-intégrables. On en déduit que $(1/N\sum T^n g\, S^n h)$ est une suite équi-intégrable et donc qu'elle converge en moyenne dès qu'elle converge presque partout.

D'après (2), pour tout $g \in \mathscr{E}(\mathscr{B}, T)$ et tout $h \in \mathscr{E}(\mathscr{B}, S)$, la suite $(1/N\sum T^n g\, S^n h)$ converge donc en moyenne.

Finalement, en utilisant (1) et par bilinéarité, ceci entraîne la convergence en moyenne de $(1/N\sum_{n=0}^{N-1} T^n g\, S^n h)$ pour tous g, $h \in L^2(\mu)$.

Pour établir le théorème 4 dans toute sa généralité, nous devons encore écarter deux hypothèses : l'une sur l'ergodicité du groupe de transformations et l'autre sur la nature topologique du système considéré.

Dans un premier temps nous ne supposons plus que le groupe Γ engendré par T et S agit de façon ergodique sur $(X, \mathscr{A}, \mu)$.

On peut alors désintégrer la mesure μ au-dessus de la tribu des événements invariants par ce groupe Γ. On obtient ainsi un facteur $(Y, \mathscr{I}, \nu)$ de $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et une famille de mesures $(\mu_y)_{y \in Y}$ sur $(X, \mathscr{A})$ tels que :

— pour tout $y \in Y$, μ_y est invariant sous T et S, et le système $(X, \mathscr{A}, \mu_y, \Gamma)$ est ergodique.

— si f est une fonction μ-intégrable, alors, pour ν-presque tout y, f est μ_y-intégrable et on a :

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x)\, d\mu_y(x)\, d\nu(y).$$

Si g, $h \in L^2(\mu)$, alors g, $h \in L^2(\mu_y)$ pour presque tout y et donc, d'après la proposition 5, la suite $(1/N\sum T^n g\, S^n h)$ converge dans $L^1(\mu_y)$.

On a donc, pour presque tout y,

$$\lim_{N,\ M \to +\infty} \int_Y \int_X \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(T^n x) . h(S^n x) - \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} g(T^n x) . h(S^n x) \right| d\mu_y(x)\, d\nu(y) = 0.$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{N,\ M \to +\infty} \int_X \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(T^n x) . h(S^n x) - \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} g(T^n x) . h(S^n x) \right| d\mu(x) = 0.$$

Autrement dit, la suite $(1/N \sum T^n g\, S^n h)$ converge en moyenne.

Le résultat souhaité est ainsi établi sans l'hypothèse d'ergodicité.

Plaçons-nous à présent sous les hypothèses générales du théorème 4.

Fixons g, h dans $L^2(\mu)$. Posons

$$g_n = 1_{[|g| \leq n]} . g \qquad \text{et} \qquad h_n = 1_{[|h| \leq n]} . h$$

et considérons la sous-algèbre de $L^\infty(\mu)$, stable par conjugaison, engendrée par :

$$\{ T^p S^q g_n,\ T^p S^q h_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ et } p, q \in \mathbb{Z} \}.$$

Cette algèbre peut être représentée comme l'espace des fonctions continues sur un espace compact métrisable $\tilde{X}$. Cette algèbre étant stable sous T et S, ces transformations induisent des opérateurs multiplicatifs et inversibles de $\mathscr{C}(\tilde{X})$, et donc des homéomorphismes $\tilde{T}$ et $\tilde{S}$ de $\tilde{X}$. La probabilité μ induit une mesure de Radon $\tilde{\mu}$ sur $\tilde{X}$, et g, h correspondent à deux éléments $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ de $L^2(\tilde{\mu})$.

Finalement, la convergence dans $L^1(\mu)$ de la suite $(1/N \sum T^n g\, S^n h)$ est équivalente à la convergence dans $L^1(\tilde{\mu})$ de la suite $(1/N \sum \tilde{T}^n \tilde{g}\, \tilde{S}^n \tilde{h})$ et nous sommes ainsi ramenés à la situation précédente.

Le théorème 4 se trouve donc démontré.

2. Étude de la limite de $(1/N\sum T^{pn} g\, T^{qn} h)$

Considérons un espace compact métrisable X, muni de sa tribu borélienne $\mathscr{A}$ et d'une probabilité régulière μ.

Soit T un homéomorphisme de X qui préserve μ et dont l'action sur $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est totalement ergodique, i. e. tel que T et toutes ses puissances agissent de façon ergodique sur $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Les fonctions propres pour T dans $L^2(\mu)$ engendrent une sous-algèbre A de $L^\infty(\mu)$, stable par conjugaison. La fermeture $\mathscr{E}_T$ de A dans $L^\infty(\mu)$ est de la forme $L^2(\mu, \mathscr{C})$ où $\mathscr{C}$ est une sous-tribu de $\mathscr{A}$, stable sous T. Le système $(X, \mathscr{C}, \mu, T)$ est un système ergodique à spectre discret et est donc isomorphe à une rotation sur un groupe compact abélien. En considérant le groupe dual de ce groupe et l'isomorphisme, on constate que l'on peut trouver une famille orthonormée maximale $(e_i)_{i\geqslant 0}$ de fonctions propres pour T dans $L^2(\mu)$, telle que $\{e_i \mid i\geqslant 0\}$ forme un groupe multiplicatif. Dans ces conditions, on a :

THÉORÈME 5. — *Pour tous entiers p, q, pour tous g, $h\in L^2(\mu)$, la suite $(1/N\sum_{n=0}^{N-1} T^{pn} g\, T^{qn} h)_{N>0}$ converge en moyenne vers :*

$$\sum_{i,\, j\geqslant 0,\; e_i^p .\, e_j^q=1} \langle g, e_i\rangle . \langle h, e_j\rangle . e_i . e_j.$$

Démonstration du théorème 5. — La convergence de la suite $(1/N\sum T^{pn} g\, T^{qn} h)$ est assurée par le théorème 4. La tribu $\mathscr{B}$ qui intervient dans la démonstration du théorème 4 est ici celle des T^{p-q}-invariants et est donc triviale, d'après l'hypothèse de totale ergodicité. On a donc $\mathscr{E}(\mathscr{B}, T^p)=\mathscr{E}(\mathscr{B}, T^q)=\mathscr{E}_T$.

D'après la proposition 5 on sait que, dans la limite de $(1/N\sum T^{pn} g\, T^{qn} h)$, seules les projections de g et h sur $\mathscr{E}_T$ apportent une contribution. Ces projections sont, respectivement, $E(g\mid\mathscr{C})$ et $E(h\mid\mathscr{C})$.

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{L^1}&\left[\frac{1}{N}\sum T^{pn} g . T^{qn} h\right]\\ &=\lim_{L^1}\left[\frac{1}{N}\sum T^{pn}(E(g\mid\mathscr{C})) . T^{qn}(E(h\mid\mathscr{C}))\right]\\ &=\lim_{\text{p.p.}}\left[\frac{1}{N}\sum T^{pn}(E(g\mid\mathscr{C})) . T^{qn}(E(h\mid\mathscr{C}))\right] \qquad (4)\end{aligned}$$

La famille $(e_i)_{i\geqslant 0}$ est une base orthonormée de $\mathscr{E}_T$.

Notons ρ_i la valeur propre pour T attachée à e_i. Soient $i, j \in \mathbb{N}$. On a :

$$\lim \frac{1}{N} \sum T^{pn} e_i \,.\, T^{qn} e_j = \lim \left[\frac{1}{N} \sum (\rho_i^p \,.\, \rho_j^q)^n \right] e_i \,.\, e_j$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \rho_i^p \,.\, \rho_j^q \neq 1. \\ e_i \,.\, e_j & \text{si} \quad \rho_i^p \,.\, \rho_j^q = 1. \end{cases}$$

Si g et h sont des combinaisons linéaires finies des $e_i\,(i \geqslant 0)$, on en déduit, en développant l'expression :

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^{pn} g \,.\, T^{qn} h = \sum_{i,\ j \geqslant 0,\ e_i^p = e_j^{-q}} \langle g, e_i \rangle \,.\, \langle h, e_j \rangle \,.\, e_i \,.\, e_j$$

On vérifie finalement que, par densité, cette formule se prolonge à tous les g, h éléments de $\mathscr{E}_T$ et, tenant compte de (4), le théorème 5 se trouve démontré.

V. Convergence de $1/N \sum T^{pn} g \,.\, T^{qn} h \,.\, T^{rn} k$

1. Le théorème de convergence

Considérons un espace probabilisé $(X, \mathscr{A}, \mu)$ muni d'une transformation mesurable inversible T, préservant μ. On suppose que le système $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$ est totalement ergodique, c'est-à-dire que T et toutes ses puissances agissent de façon ergodique sur $(X, \mathscr{A}, \mu)$. On a alors le résultat suivant :

THÉORÈME 6. — *Pour tous entiers p, q, r et pour tous $g, h, k \in L^\infty(\mu)$, la suite $(1/N \sum_{n=0}^{N-1} T^{pn} g \,.\, T^{qn} h \,.\, T^{rn} k)_{N>0}$ converge en moyenne.*

Remarques. — Nous nous contenterons d'étudier le cas où $p=1$, $q=2$ et $r=3$. Le cas général se traite de façon similaire.

— Si g, h, $k \in L^\infty(\mu)$, la suite $(1/N \sum T^n g\, T^{2n} h\, T^{3n} k)_{N>0}$ est bornée. La convergence en moyenne entraîne donc la convergence dans tous les $L^p\,(p \in [1, +\infty[)$.

— Par les mêmes arguments que dans la démonstration du théorème 4, on se ramène à la situation topologique suivante : X est un espace compact métrisable; $\mathscr{A}$ est sa tribu borélienne; μ est une probabilité régulière et T est un homéomorphisme. Nous nous plaçons dorénavant dans ce cadre.

Pour l'étude de cette convergence, nous devons introduire un nouveau type de spectre généralisé. C'est celui défini par L. M. ABRAMOV dans [1].

Désignons par $\mathscr{B}$ la plus petite sous-tribu de $\mathscr{A}$ rendant mesurables les éléments propres pour T. On sait que $L^2(\mu, \mathscr{B}) = \mathscr{E}_T$, où $\mathscr{E}_T$ désigne le sous-espace fermé de $L^2(\mu)$ engendré par les éléments propres. On notera comme précédemment $\{e_i \mid i \geqslant 0\}$ une base orthonormée de $\mathscr{E}_T$, formée d'éléments propres pour T et formant un groupe multiplicatif.

NOTATION. — *$\mathscr{E}'_T$ désignera le sous-espace fermé de $L^2(\mu)$ engendré par les éléments f de $L^2(\mu)$ vérifiant $Tf = ef$ où e est une fonction propre pour T, de module constant* 1.

On vérifie sans peine que $\mathscr{E}'_T$ est un $(\mathscr{B}, T)$-module et que la projection orthogonale d'un élément de $L^\infty(\mu)$ sur $\mathscr{E}'_T$ est encore dans $L^\infty(\mu)$. Une étude plus précise de ces fonctions propres généralisées est faite dans [4].

Les deux points fondamentaux de la démonstration du théorème sont :

(5) pour $g, h, k \in L^\infty(\mu)$,

$$\left.\begin{array}{l} g \in (\mathscr{E}'_T)^\perp \\ \text{ou} \\ h \in (\mathscr{E}'_{T^2})^\perp \\ \text{ou} \\ k \in (\mathscr{E}'_{T^3})^\perp \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{1}{N}\sum T^n g\, T^{2n} h\, T^{3n} k \to_{N \to +\infty} 0 \text{ dans } L^1(\mu)$$

(6) pour tout $g \in L^\infty(\mu) \cap \mathscr{E}'_T$, tout $h \in L^\infty(\mu) \cap \mathscr{E}'_{T^2}$, tout $k \in L^\infty(\mu) \cap \mathscr{E}'_{T^3}$,

$\frac{1}{N}\sum T^n g\, T^{2n} h\, T^{3n} k$ converge μ-presque partout.

Nous devons commencer par introduire une mesure produit conditionnelle ν sur $X \times X \times S$ et étudier les éléments $T \times T^2 \times T^3$ invariants modulo ν.

2. Une mesure produit conditionnelle

PROPOSITION 7. — *Il existe une probabilité régulière* ν *sur* $X \times X \times X$ *vérifiant :*

(i) *pour tout* ψ *continue sur* $X \times X \times X$,

$$\nu(\psi) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \int \psi(x, T^n x, T^{2n} x)\, d\mu(x).$$

(ii) *pour tous f, g, $h \in L^2(\mu)$, $f \otimes g \otimes h$ est ν-intégrable et*

$$\nu(f \otimes g \otimes h) = \sum_{i \geq 0} \langle f, e_i \rangle . \langle g, e_i^2 \rangle . \langle h, e_i^{-1} \rangle .$$

(iii) *pour tous $f \in L^\infty(\mu)$ et g, $h \in L^2(\mu)$,*

$$\nu(f \otimes g \otimes h) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int f(x) . g(T^n x) . h(T^{2n} x) \, d\mu(x).$$

(iv) ν *est une mesure produit conditionnelle sur le cube du système $(X, \mathscr{A}, \mu)$ muni de la sous-tribu $\mathscr{B}$.*

(v) ν *est $T \times T^2 \times T^3$-invariante.*

Démonstration de proposition 7. — (i) Désignons par

$$\mathscr{C}(X) \otimes \mathscr{C}(X) \otimes \mathscr{C}(X)$$

le sous-espace de $\mathscr{C}(X^3)$ engendré par les fonctions de la forme $u \otimes v \otimes w$ où u, v et $w \in \mathscr{C}(X)$. Ce sous-espace est bien sûr dense dans $\mathscr{C}(X^3)$. Si

$$\psi = \sum_{i=1}^{m} u_i \otimes v_i \otimes w_i \in \mathscr{C}(X) \otimes \mathscr{C}(X) \otimes \mathscr{C}(X),$$

on pose

$$\nu(\psi) = \sum_{i=1}^{m} \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int u_i(x) . v_i(T^n x) . w_i(T^{2n} x) \, d\mu(x)$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int \psi(x, T^n x, T^{2n} x) \, d\mu(x).$$

Cette limite existe bien d'après le théorème 4. On obtient ainsi une forme linéaire positive sur $\mathscr{C}(X) \otimes \mathscr{C}(X) \otimes \mathscr{C}(X)$ qui est continue, car $|\nu(\psi)| \leq \|\psi\|_\infty$ pour tout $\psi \in \mathscr{C}(X) \otimes \mathscr{C}(X) \otimes \mathscr{C}(X)$. Par densité, cette forme linéaire se prolonge donc en une forme linéaire positive continue sur $\mathscr{C}(X^3)$. On obtient ainsi une probabilité de Radon sur X^3, notée encore ν.

On vérifie aisément que l'on a, pour tout $\psi \in \mathscr{C}(X^3)$,

$$\nu(\psi) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum \int \Psi(x, T^n x, T^{2n} x) \, d\mu(x).$$

Le résultat (i) est ainsi établi. —

La démonstration du (ii) est détaillée sans [4]. En voici le schéma : on commence par montrer que l'expression

$$\sum_{i\geq 0} \langle f, e_i \rangle \langle g, e_i^2 \rangle \langle h, e_i^{-1} \rangle$$

a bien un sens pour tous $f, g, h \in L^2(\mu)$.

On établit que :

$$\left| \sum_{i\geq 0} \langle f, e_i \rangle \langle g, e_i^2 \rangle \langle h, e_i^{-1} \rangle \right| \leq \| f \|_2 . \| g \|_2 . \| h \|_2 .$$

On remarque ensuite que le théorème 5 et le point (i) impliquent que, si $u, v, w \in \mathscr{C}(X)$,

$$\nu(u \otimes v \otimes w) = \sum_{i\geq 0} \langle u, e_i \rangle . \langle v, e_i^2 \rangle . \langle w, e_i^{-1} \rangle .$$

Grâce enfin à un lemme de théorie de la mesure on arrive au résultat (ii).

Le résultat (iii) est une conséquence immédiate de (ii) et du théorème 5.

D'après (i), les trois projections de ν coïncident avec μ. D'autre part, $(e_i)_{i\geq 0}$ est une base de $\mathscr{E}_T$ et donc, d'après (ii), seules interviennent dans la valeur de $\nu(f \otimes g \otimes h)$, les projections de f, g et h sur $\mathscr{E}_T$.

En d'autres termes :

$$\nu(f \otimes g \otimes h) = \nu(E(f \mid \mathscr{B}) \otimes E(g \mid \mathscr{B}) \otimes E(h \mid \mathscr{B})).$$

La mesure ν est donc bien une mesure produit conditionnelle et le fait qu'elle soit $T \times T^2 \times T^3$-invariante se lit sur (i).

Ceci conclut la démonstration de la proposition 7.

Nous sommes à présent amenés à étudier les éléments $T \times T^2 \times T^3$-invariants de $L^2(\mu)$.

La principale difficulté de cette étude réside dans la résolution d'une équation fonctionnelle qui sera présentée dans [5]. Nous nous limiterons ici à l'énoncé du résultat :

PROPOSITION 8. — *Soit G un groupe abélien compact à base dénombrable.*

Soit α un élément de G tel que l'application $g \to g + \alpha$ soit une rotation ergodique de G.

Soit H une application mesurable de G dans les matrices unitaires de dimension d. On suppose que cette fonction matricielle est irréductible pour la rotation par α (cf. II-1).

On suppose que : à tout β dans G sont associées une fonction matricielle $F_\beta(g)$ et une constante de module 1, λ_β *telles que :*

— $F_\beta(g)$ *est une matrice carrée de dimension d, fonction mesurable de g.*

— *pour tout $\beta \in G$, $F_\beta \neq 0$.*

— λ_β *est une fonction mesurable de β.*

— *pour tout $\beta \in G$, on a*

$$\lambda_\beta . H(g+\beta) . F_\beta(g) = F_\beta(g+\alpha) . H(g)$$

pour presque tout $g \in G$. On a alors :

H est nécessairement une fonction scalaire (c'est-à-dire $d=1$) cohomologue au produit d'une constante et d'un caractère de G.

Autrement dit, il existe une fonction m, mesurable et de module 1, *sur G, un caractère γ de G et une constante δ de module* 1 *tels que :*

$$H(g) = \delta . \gamma(g) . m(g+\alpha) . \overline{m(g)} \quad \textit{pour presque tout } g \in G.$$

A l'aide de cette proposition 8, nous voulons établir le résultat suivant.

PROPOSITION 9. — *Tout élément $T \times T^2 \times T^3$-invariant de $L^2(\nu)$ appartient à $\mathscr{E}'_T \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}'_{T^2} \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}'_{T^3}$.*

Démonstration de la proposition 9. — Remarquons tout d'abord que $\mathscr{E}'_T \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}'_{T^2} \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}'_{T^3}$ désigne une sous-espace de $L^2(\nu)$ qui est bien défini car ν est une mesure produit conditionnelle et les $\mathscr{E}'_{T^i}$ sont des $(\mathscr{B}, T)$-modules (pour plus de détails, *voir* [4]).

La probabilité ν étant une mesure produit conditionnelle $T \times T^2 \times T^3$-invariante, le théorème 3 nous affirme que tout élément $T \times T^2 \times T^3$-invariant de $L^2(\nu)$ appartient à $\mathscr{E}(\mathscr{B}, T) \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}(\mathscr{B}, T^2) \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}(\mathscr{B}, T^3)$. (On peut voir qu'en fait $\mathscr{E}(\mathscr{B}, T) = \mathscr{E}(\mathscr{B}, T^2) = \mathscr{E}(\mathscr{B}, T^3)$). Un élément f de $L^2(\mu)$ sera dit $\mathscr{B}$-borné si $E(|f|^2 | \mathscr{B}) \in L^\infty(\mu)$. On peut voir sans difficulté que, si f, g et h sont des éléments $\mathscr{B}$-bornés de $L^2(\mu)$, alors $f \otimes g \otimes h$ définit bien un élément de $L^2(\nu)$.

Nous allons à présent énoncer et démontrer deux lemmes.

LEMME 1. — *Soit φ un élément $T \times T^2 \times T^3$-invariant de $L^2(\nu)$, et soient f, g, h des éléments $\mathscr{B}$-bornés de $L^2(\mu)$.*

Supposons que, dans $L^2(\nu)$, φ et $f \otimes g \otimes h$ ne sont pas orthogonales. On a alors : pour toute suite croissante d'entiers $(n_k)_{k \geq 0}$, il existe u, v, w

fonctions continues sur X telles que,

$$\limsup_{k\to+\infty} \sup_{i\geq 0} |\langle T^{n_k} f.u, e_i\rangle| > 0,$$
$$\limsup_{k\to+\infty} \sup_{i\geq 0} |\langle T^{2n_k} g.v, e_i\rangle| > 0,$$

et

$$\limsup_{k\to+\infty} \sup_{i\geq 0} |\langle T^{3n_k} h.w, e_i\rangle| > 0.$$

Preuve du lemme 1. — Soit $(n_k)_{k>0}$ une suite croissante d'entiers.

Supposons que : pour tous u, v et $w\in\mathscr{C}(X)$,

$$(7)\quad \lim_{k\to+\infty} \int u(x)\, v(y)\, w(z)\, f(T^{n_k} x) \times g(T^{2n_k} y)\, h(T^{3n_k} z)\, d\nu(x, y, z) = 0$$

L'espace $\mathscr{C}(X)\otimes\mathscr{C}(X)\otimes\mathscr{C}(X)$ est dense dans $L^2(\nu)$; en effet cet espace est dense dans $\mathscr{C}(X^3)$ pour la norme uniforme, $\mathscr{C}(X^3)$ est dense dans $L^2(\nu)$ pour la norme de $L^2(\nu)$ et la norme de $L^2(\nu)$ est dominée par la norme uniforme.

D'autre part, pour tout $\psi\in L^2(\nu)$, on a la majoration

$$\left|\int \psi(x, y, z)\, f(T^{n_k} x)\, g(T^{2n_k} y)\, g(T^{3n_k} z)\, d\nu\right| \leq \|\psi\|_{L^2(\nu)} \|f\otimes g\otimes h\|_{L^2(\nu)}$$

car ν est $T\times T^2\times T^3$-invariante.

Ces deux remarques permettent d'étendre (7) à tous les éléments de $L^2(\nu)$, c'est-à-dire : pour tout $\psi\in L^2(\nu)$,

$$\lim_{k\to+\infty} \int \psi(x, y, z)\, f(T^{n_k} x)\, g(T^{2n_k} y)\, h(T^{3n_k} z)\, d\nu = 0.$$

En appliquant ceci à φ et en utilisant l'invariance de φ et de ν par $T\times T^2\times T^3$, on en déduit :

$$\int \varphi(x, y, z)\, f(x)\, g(y)\, h(z)\, d\nu = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc : il existe u, v et $w \in \mathscr{C}(x)$ tels que,

$$\int u(x)\, v(y)\, w(z)\, f(T^{n_k} x)\, g(T^{2n_k} y)\, h(T^{3n_k} z)\, d\nu$$

ne tend pas vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

On se fixe un tel triplet (u, v, w). On a alors :

$$\limsup_{k \to +\infty} \left| \int u(x)\, v(y)\, w(z)\, f(T^{n_k} x)\, g(T^{2n_k} y)\, h(T^{3n_k} z)\, d\nu \right| > 0$$

c'est-à-dire, d'après la proposition 7 (ii),

$$\limsup_{k \to +\infty} \left| \sum_{i \geq 0} \langle T^{n_k} f . u, e_i \rangle \times \langle T^{2n_k} g . v, e_i^2 \rangle . \langle T^{3n_k} h . w, e_i^{-1} \rangle \right| > 0.$$

Or :

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i \geq 0} \langle T^{n_k} f . u, e_i \rangle . \langle T^{2n_k} g . v, e_i^2 \rangle . \langle T^{3n_k} h . w, e_i^{-1} \rangle \right| \\ &\qquad \leq \| T^{2n_k} g . v \|_2 . \| T^{3n_k} h . w \|_2 . \sup_{i \geq 0} | \langle T^{n_k} f . u, e_i \rangle | \\ &\qquad\qquad \leq \| g \|_2 . \| v \|_\infty . \| h \|_2 . \| w \|_\infty . \sup_{i \geq 0} | \langle T^{n_k} f . u, e_i \rangle | . \end{aligned}$$

On a donc :

$$\limsup_{k \to +\infty} \sup_{i \geq 0} | \langle T^{n_k} f . u, e_i \rangle | > 0$$

et de la même façon,

$$\limsup_{k \to +\infty} \sup_{i \geq 0} | \langle T^{2n_k} g . v, e^i \rangle | > 0$$

et

$$\limsup_{k \to +\infty} \sup_{i \geq 0} | \langle T^{3n_k} h . w, e_i \rangle | > 0$$

le lemme 1 est ainsi démontré.

LEMME 2. — *Soit V un $(\mathscr{B}, T)$-module irréductible dans $L^2(\mu)$ et soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une $\mathscr{B}$-base orthonormée de V.*

Supposons que, pour toute suite croissante d'entiers $(n_k)_{k \geq 0}$, il existe $u \in \mathscr{C}(X)$ telle que

$$\limsup_{k \to +\infty} \sup_{i \geq 0} | \langle T^{n_k} f_1 . u, e_i \rangle | > 0.$$

Alors V est de $\mathscr{B}$-dimension 1 et est engendré par une fonction propre généralisé f_0 vérifiant $T f_0=\gamma f_0$ où γ est une fonction propre pour T, de module 1. Autrement dit, on a $V \subset \mathscr{E}'_T$.

Preuve du lemme 2. — La transformation T est représentée, dans la $\mathscr{B}$-base $(f_1, \ldots, f_p)$, par une matrice unitaire $\mathscr{B}$-mesurable M. Autrement dit, on a :

$$T\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix} = M.\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{bmatrix}.$$

On notera

$$M^{(n)}(x)=M(T^{n-1}x).M(T^{n-2}x)\ldots M(x)$$

et

$$M^{(n)}(x)=(m_n^{ij})_{1\leqslant i,\, j\leqslant p}.$$

Dans la $\mathscr{B}$-base considérée, la matrice $M^{(n)}$ représente la transformation T^n.

Fixons-nous une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k\geqslant 0}$.

Par hypothèse, il existe $u\in\mathscr{C}(X)$ tel que

$$\limsup_{k\to+\infty}\sup_{i\geqslant 0}|\langle T^{n_k}f_1.u, e_i\rangle|>0.$$

On peut donc trouver un $\varepsilon>0$, une suite (n'_k) extraite de (n_k) et une suite (i_k) d'entiers tels que, pour tout k,

$$|\langle T^{n'_k}f_1.u, e_{i_k}\rangle|>\varepsilon>0.$$

Considérons la suite $((\overline{e_{i_k}}.M^{(n'_k)})_{k\geqslant 0}$, M étant unitaire et les e_i étant normées, les coefficients des matrices de cette suite sont bornés par 1 dans $L^2(\mu)$.

On peut donc en extraire une sous-suite $(\overline{e_{i'_k}}M^{(n''_k)})_{k\geqslant 0}$ qui converge faiblement (au sens de la convergence faible de chaque coefficient dans $L^2(\mu)$) vers une matrice F.

$$F=(a_{ij})_{1\leqslant i,\, j\leqslant p},\qquad a_{ij}\in L^2(\mu)\quad\text{et}\quad\|a_{ij}\|_2\leqslant 1.$$

On a :

$$\varepsilon\geqslant|\langle T^{n''_k}f_1.u, e_{i'_k}\rangle| = |\textstyle\sum_{l=1}^{p}\langle m_{n''_k}^{1l}.f_l.u, e_{i'_k}\rangle|$$

qui converge, quand k tend vers l'infini, vers $\left|\sum_{l=1}^{p}\langle f_l.u, \overline{a_{1l}}\rangle\right|$. On en déduit que $F\neq 0$.

Nous avons ainsi montré que M est une matrice $\mathscr{B}$-irréductible telle que : quelle que soit la suite croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 0}$ on peut en extraire une sous-suite $(n_k'')_{k>0}$ et on peut trouver une suite d'entiers $(i_k')_{k\geq 0}$ tels $(\overline{e}_{i_k'}.M^{(n_k'')})$ admette une limite faible non nulle F.

Le système $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ est un système dynamique ergodique à spectre discret; il est donc isomorphe à une rotation ergodique $g\to g+\alpha$ sur un groupe compact abélien G. L'espace $L^2(\mu)$ étant séparable, G est à base dénombrable. L'isomorphisme peut être choisi de façon que le groupe $\{e_i\,|\,i\geqslant 0\}$ soit envoyé sur le dual de G. Cet isomorphisme permet de transporter la situation précédente sur le nouveau système : M est envoyé sur une matrice H irréductible. e_i est envoyé sur un caractère γ_i de G.

Soit $\beta\in G$. On peut trouver une suite croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 0}$ telle que $n_k\alpha\to_{k\to+\infty}\beta$ dans G.

On extrait de (n_k) une sous-suite $(n_k'')_{k\geq 0}$ et on choisit une suite d'entiers $(i_k')_{k\geq 0}$ de façon que $(\overline{e_{i_k'}}.M^{(n_k'')})_{k\geq 0}$ converge faiblement vers une matrice F_β non nulle. F_β est une matrice à coefficients dans $L^2(\mu)$. Par l'isomorphisme, on a :

La suite $(\overline{\gamma}_{i_k'}.H^{(n_k'')})_{k\geq 0}$ converge faiblement vers une matrice $\tilde{F}_\beta$ non nulle, à coefficients dans $L_2(G)$.

D'autre part, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$H^{(n)}(Tx).H(x)=H(T^n x).H^{(n)}(x).$$

On en déduit que, pour tout k,

$$[\overline{\gamma}_{i_k'}.H^{(n_k'')}](g+\alpha).H(g)=\overline{\gamma_{i_k'}}(\alpha).H(g+n''_k\alpha).[\overline{\gamma}_{i_k'}.H^{(n_k'')}](g) \tag{8}$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(\overline{\gamma_{i_k'}}(\alpha))_{k\geq 0}$ converge vers une constante de module 1, notée λ_β.

Les différentes suites apparaissant dans l'égalité (8) sont convergentes :

– la suite $(\gamma_{i_k'}H^{(n_k'')})$ converge faiblement dans $L^2(\mu)$,

– la suite $(\overline{\gamma_{i_k'}}(\alpha))$ converge dans les scalaires,

– la suite $(H(g+n_k''\alpha))$ converge vers $H(g+\beta)$ au sens de la norme dans $L^2(\mu)$.

Les coefficients de ces différentes matrices étant bornés par 1, on constate aisément que l'on peut passer à la limite dans l'égalité (8) et on obtient :

$$\tilde{F}_\beta(g+\alpha).H(g)=\lambda_\beta.H(g+\beta).\tilde{F}_\beta(g).$$

Précisons que ceci a été obtenu pour tout β et pour presque tout g. C'est l'équation fonctionnelle étudiée dans la proposition 8. La seule hypothèse figurant dans cette proposition et non vérifiée ici est le fait que λ_β dépende mesurablement de β. Nous ne détaillerons pas ici la construction qui permet de s'en assurer, reposant sur le principe selon lequel les différentes suites successivement extraites doivent « dépendre » mesurablement de β. On suppose donc la mesurabilité de λ_β acquise.

On a alors, d'après la proposition 8, $p=1$ et H est cohomologue au produit d'une constante et d'un caractère de G.

Ceci entraîne, d'après l'isomorphisme des systèmes $(G, g\to g+\alpha)$ et $(X, \mathscr{A}, \mu, T)$: $p=1$ et M est cohomologue à une fonction T-propre.

Le $\mathscr{B}$-module V est donc de $\mathscr{B}$-dimension 1 et on a

$$M(x)=\gamma(x)\, m(Tx)\, \overline{m(x)}$$

$$\text{où}\begin{cases}\gamma \text{ est une fonction propre pour } T \text{ et } |\gamma|=1\\ m \text{ est } \mathscr{B}\text{-mesurable et } |m|=1.\end{cases}$$

On a

$$f_1(Tx)=M(x)\,f_1(x)=\gamma(x)\,m(Tx)\,\overline{m(x)}\,f_1(x).$$

Posons $f_0=\bar{m}.f_1$.

Le $\mathscr{B}$-module V est engendré par f_0 et on a $Tf_0=\gamma f_0$. Le lemme 2 est ainsi démontré.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration de la proposition 9.

Soit φ un élément $T\times T^2\times T^3$-invariant de $L^2(\nu)$. Comme nous l'avons remarqué au début de ce paragraphe, on a :

$$\varphi\in\mathscr{E}(\mathscr{B}, T)\otimes_{\mathscr{B}}\mathscr{E}(\mathscr{B}, T^2)\otimes_{\mathscr{B}}\mathscr{E}(\mathscr{B}, T^3).$$

Le $\mathscr{B}\otimes\mathscr{B}\otimes\mathscr{B}$-module $\mathscr{E}(\mathscr{B}, T)\otimes_{\mathscr{B}}\mathscr{E}(\mathscr{B}, T^2)\otimes_{\mathscr{B}}\mathscr{E}(\mathscr{B}, T^3)$ est somme directe orthogonale de sous-espaces de la forme $V_1\otimes_{\mathscr{B}} V_2\otimes_{\mathscr{B}} V_3$ où V_1, V_2 et V_3 sont respectivement des $(\mathscr{B}, T)$-, $(\mathscr{B}, T^2)$-, $(\mathscr{B}, T^3)$-modules irréductibles de $\mathscr{B}$-dimension finie.

Supposons que $\varphi\notin(V_1\otimes V_2\otimes V_3)^\perp$.

Soit $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant r}$, $(g_m)_{1 \leqslant m \leqslant s}$ et $(h_l)_{1 \leqslant l \leqslant t}$ des $\mathscr{B}$-bases orthonormales de, respectivement, V_1, V_2 et V_3.

$$\{ e_{i_1} . f_j \otimes e_{i_2} . g_m \otimes e_{i_3} . h_l \mid i_1, i_2, i_3 \geqslant 0,\ 1 \leqslant j \leqslant r,\ 1 \leqslant m \leqslant s,\ 1 \leqslant l \leqslant t \}$$

engendre $V_1 \otimes_{\mathscr{B}} V_2 \otimes_{\mathscr{B}} V_3$ comme sous-espace de $L^2(\nu)$.

Donc il existe i_1, i_2, i_3, j, m et l tels que

$$\varphi \text{ et } e_{i_1} . f_j \otimes e_{i_2} . g_m \otimes e_{i_3} . h_l$$

ne sont pas orthogonales.

D'après le lemme 1, ceci entraîne que, pour toute suite croissante d'entiers $(n_k)_{k \geqslant 0}$, il existe u, v, $w \in \mathscr{C}(X)$ tels que

$$\limsup_{k \to +\infty} \sup_{i \geqslant 0} \left| \langle T^{n_k} (e_{i_1} . f_j) . u, e_i \rangle \right| > 0,$$
$$\limsup_{k \to +\infty} \sup_{i \geqslant 0} \left| \langle T^{2n_k} (e_{i_2} . g_m) . v, e_i \rangle \right| > 0,$$

et

$$\limsup_{k \to +\infty} \sup_{i \geqslant 0} \left| \langle T^{3n_k} (e_{i_3} . h_l) . w, e_i \rangle \right| > 0.$$

Or

$$\langle T^{n_k} (e_{i_1} f_j) . u, e_i \rangle = \rho_{i_1}^{n_k} \langle T^{n_k} f_j . u, e_i . \overline{e_{i_1}} \rangle$$

d'où

$$\limsup_{k \to +\infty} \sup_{i \geqslant 0} \left| \langle T^{n_k} f_j . u, e_i \rangle \right| > 0.$$

Et de la même façon,

$$\limsup_{k \to +\infty} \sup_{i \geqslant 0} \left| \langle T^{2n_k} g_m . v, e_i \rangle \right| > 0$$

et

$$\limsup_{k \to +\infty} \sup_{i \geqslant 0} \left| \langle T^{3n_k} h_l . w, e_i \rangle \right| > 0.$$

D'après le lemme 2, que l'on peut appliquer à T mais également à T^2 et à T^3, car elles sont ergodiques, on en déduit que $V_1 \subset \mathscr{E}'_T$, $V_2 \subset \mathscr{E}'_{T^2}$ et $V_3 \subset \mathscr{E}'_{T^3}$.

On a donc $V_1 \otimes_{\mathscr{B}} V_2 \otimes_{\mathscr{B}} V_3 \subset \mathscr{E}'_T \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}'_{T^2} \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}'_{T^3}$. Finalement on a montré que, dès que φ n'était pas orthogonale à $V_1 \otimes_{\mathscr{B}} V_2 \otimes_{\mathscr{B}} V_3$, on avait $V_1 \otimes_{\mathscr{B}} V_2 \otimes_{\mathscr{B}} V_3 \subset \mathscr{E}'_T \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}'_{T^2} \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}'_{T^3}$.

On en déduit que la projection de φ sur l'orthogonal de $\mathscr{E}'_T \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}'_{T^2} \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}'_{T^3}$ est nulle, c'est-à-dire que $\varphi \in \mathscr{E}'_T \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}'_{T^2} \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}'_{T^3}$. Ceci achève la démonstration de la proposition 9.

Pour établir le théorème 6, nous allons commencer par démontrer (5) et (6).

3. Démonstration de (5)

Cette démonstration se fait suivant les mêmes idées que celles développées pour établir (1).

Nous voulons démontrer que, pour tous g, h, $k \in L^\infty(\mu)$, si $g \in (\mathscr{E}'_T)^\perp$ ou si $h \in (\mathscr{E}'_{T^2})^\perp$ ou si $k \in (\mathscr{E}'_{T^3})^\perp$, alors la suite $(1/N \sum T^n g\, T^{2n} h\, T^{3n} k)_{N>0}$ converge vers 0 en moyenne.

Pour ce faire, fixons-nous une suite $(f_N)_{N>0}$ dans $L^\infty(\mu)$, vérifiant $\| f_N \| \leqslant 1$, et une suite croissante d'entiers $(N_k)_{k \geqslant 0}$. On considère la suite de mesures de Radon définies par, pour $\psi \in \mathscr{C}(X^3)$,

$$\lambda_{N_k}(\psi) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N_k - 1} \int f_{N_k}(x) \times \psi(T^n x, T^{2n} x, T^{3n} x)\, d\mu(x).$$

Quitte à extraire une sous-suite (N'_k) de (N_k), on peut supposer que $\lim_{k \to +\infty} \lambda_{N'_k}(\psi)$ existe pour tout $\psi \in \mathscr{C}(X^3)$. Notons $\lambda(\psi)$ cette limite. En remarquant que, si u, v, $w \in \mathscr{C}(X)$,

$$| \lambda_{N_k}(u \otimes v \otimes w) | \leqslant \frac{1}{N_k} \sum \int | u | (T^n x) \, | v | (T^{2n} x) . \, | w | (T^{3n} x)\, d\mu(x)$$

et que, d'après la proposition 7,

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{N_k} \sum \int | u | (T^n x) . \, | v | (T^{2n} x) \times | w | (T^{3n} x)\, d\mu(x) = \nu(| u | \otimes | v | \otimes | w |),$$

on constate que la mesure de Radon λ est absolument continue par rapport à la probabilité ν.

Soit φ la densité de λ par rapport à ν. Ces deux mesures étant $T \times T^2 \times T^3$-invariantes, φ est $T \times T^2 \times T^3$-invariante modulo ν. D'après la proposition 9, on sait donc que $\varphi \in \mathscr{E}'_T \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}'_{T^2} \otimes_{\mathscr{B}} \mathscr{E}'_{T^3}$.

On vérifie, par densité de $\mathscr{C}(X)$ dans $L^2(\mu)$ que, pour tous g, h, $k \in L^\infty(\mu)$, on a :

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{N'_k} \sum \int f_{N'_k}(x)\, g(T^n x)\, h(T^{2n} x)\, k(T^{3n} x)\, d\mu(x)$$

$$= \int \varphi(x, y, z)\, g(x)\, h(y)\, k(z)\, d\nu(x, y, z).$$

Finalement si $g \in (\mathscr{E}'_T)^\perp$ ou $h \in (\mathscr{E}'_{T^2})^\perp$ ou $k \in (\mathscr{E}'_{T^3})^\perp$, cette dernière expression est nulle (on utilise encore ici le fait que ν est une mesure produit conditionnelle).

Les suites (f_N) et (N_k) ayant été choisies arbitrairement, le fait que

$$\lim_{k \to +\infty} \int f_{N'_k}(x) \cdot \frac{1}{N'_k} \sum_{n=0}^{N'_k - 1} g(T^n x)\, h(T^{2n} x) \cdot k(T^{3n} x)\, d\mu(x) = 0$$

entraîne que

$$\lim_{N \to +\infty} \int \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(T^n x)\, h(T^{2n} x)\, k(T^{3n} x) \right| d\mu(x) = 0.$$

Et (5) se trouve ainsi établi.

4. Démonstration de (6)

Nous voulons montrer que si $g \in L^\infty(\mu) \cap \mathscr{E}'_T$, si $h \in L^\infty(\mu) \cap \mathscr{E}'_{T^2}$ et si $k \in L^\infty(\mu) \cap \mathscr{E}'_{T^3}$, alors la suite des moyennes

$$\frac{1}{N} \sum T^n g\, T^{2n} h\, T^{3n} k$$

converge μ-presque partout.

$\mathscr{E}'_T$ est le sous-espace fermé de $L^2(\mu)$ engendré par les fonctions g vérifiant $Tg = \gamma g$ avec γ propre pour T et de module 1.

Supposons que

$$\begin{array}{llll} Tg = \gamma_1 \cdot g & \text{avec} & T\gamma_1 = a_1 \gamma_1 & \text{et} \quad a_1 \in \mathbb{C} \\ T^2 h = \gamma_2 \cdot h & \text{avec} & T^2 \gamma_2 = a_2 \cdot \gamma_2 & \text{et} \quad a_2 \in \mathbb{C} \\ T^3 k = \gamma_3 \cdot k & \text{avec} & T^3 \gamma_3 = a_3 \cdot \gamma_3 & \text{et} \quad a_3 \in \mathbb{C}. \end{array}$$

On a alors :

$$T^n g = a_1^{n(n-1)/2} \cdot \gamma_1^n \cdot g$$
$$T^{2n} h = a_2^{n(n-1)/2} \cdot \gamma_2^n \cdot h$$
$$T^{3n} k = a_3^{n(n-1)/2} \cdot \gamma_3^n \cdot k.$$

Et donc :

$$\frac{1}{N}\sum T^n g\, T^{2n} h\, T^{3n} k = \frac{1}{N}\sum (a_1\, a_2\, a_3)^{n(n-1)/2}\, (\gamma_1\, \gamma_2\, \gamma_3)^n\, ghk.$$

Notons

$$a_i = e^{2\pi i b_i} \qquad \text{où} \quad b_i \in [0, 1[$$

et

$$\gamma_i(x) = e^{2\pi i \sigma_i(x)} \qquad \text{où} \quad \sigma_i(x) \in [0, 1[$$

$$\frac{1}{N}\sum g(T^n x)\, h(T^{2n} x)\, k(T^{3n} x)$$

$$= \frac{1}{N}\sum e^{2\pi i ((b_1+b_2+b_3)\, n\, ((n-1)/2) + (\sigma_1(x)+\sigma_2(x)+\sigma_3(x))\, n)}\, g.\, h.\, k$$

la moyenne $\frac{1}{N}\sum g(T^n x)\, h(T^{2n} x)\, k(T^{3n} x)$

est donc de la forme

$$\frac{1}{N}\sum e^{2\pi i (un^2 + v(x)\, n)}\, g.\, h.\, k.$$

Si u ou $v(x)$ est irrationnel la suite $un^2 + v(x)\, n$ est équirépartie modulo 1 et $1/N \sum e^{2\pi i (un^2+v(x)\, n)} \to_{N \to +\infty} 0$.

Si u et $v(x)$ sont rationnels la suite $un^2 + v(x)\, n$ est périodique modulo 1 et $1/N \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i (un^2+v(x)\, n)}$ converge.

On voit ainsi que$1/N \sum T^n g\, T^{2n} h\, T^{3n} k$ converge μ-presque partout.

Par trilinéarité, on voit qu'il en est de même pour toutes fonctions g, h et k qui sont combinaisons linéaires finies de fonctions de la forme précédente (8).

LEMME 3. — *Soient E_1, E_2 et E_3 des sous-espaces de $L^\infty(\mu)$ tels que pour tout $g \in E_1$, tout $h \in E_2$ et tout $k \in E_3$, $1/N \sum T^n g\, T^{2n} h\, T^{3n} k$ converge μ-presque partout.*

Notons $\bar{E}_i$ la fermeture de E_i dans $L^2(\mu)$ ($i=1, 2, 3$). On a alors : pour tout $g \in L^\infty(\mu) \cap \bar{E}_1$, tout $h \in L^\infty(\mu) \cap \bar{E}_2$ et tout $k \in L^\infty(\mu) \cap \bar{E}_3$,

$$\frac{1}{N}\sum T^n g\, T^{2n} h\, T^{3n} k \quad \textit{converge } \mu\textit{-presque partout.}$$

Preuve du lemme 3. — Soient h et k fixées, respectivement, dans E_2 et E_3. Pour $g \in L^2(\mu)$, posons

$$R(g, x) = \limsup_{N, M \to +\infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(T^n x)\, h(T^{2n} x)\, k(T^{3n} x) - \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} g(T^n x)\, h(T^{2n} x)\, k(T^{3n} x) \right|.$$

On vérifie que si $g, g' \in L^2(\mu)$, alors $R(g+g', x) \leqslant R(g, x) + R(g', x)$ et, en utilisant le théorème ergodique, que

$$R(g, x) \leqslant 2.\, \|h\|_\infty .\, \|k\|_\infty .\, \|g\|_2.$$

Par hypothèse, on a $R(g, x) = 0$ pour tout $g \in E_1$.

Les deux inégalités précédentes permettent d'afirmer que ceci s'étend à tout $g \in \overline{E_1}$.

Autrement dit, la suite $(1/N \sum T^n g\, T^{2n} h\, T^{3n} k)$ converge presque partout pour tout $g \in \overline{E_1}$.

En fixant g dans $\bar{E}_1 \cap L^\infty(\mu)$ et k dans E_3, on établit de la même façon la convergence de cette suite pour tout $h \in \bar{E}_2$.

Enfin, en fixant g dans $\bar{E}_1 \cap L^\infty(\mu)$ et h dans $\bar{E}_2 \cap L^\infty(\mu)$, on établit de la même façon la convergence pour tout $k \in \bar{E}_3$.

Le lemme 3 est ainsi vérifié.

(8) et le lemme 3 permettent finalement de conclure : pour tout $g \in \mathscr{E}'_T \cap L^\infty(\mu)$, tout $h \in \mathscr{E}'_{T^2} \cap L^\infty(\mu)$ et tout $k \in \mathscr{E}'_{T^3} \cap L^\infty(\mu)$, la suite $(1/N \sum T^n g\, T^{2n} h\, T^{3n} k)$ converge μ-presque partout.

Ceci achève la démonstration de (6).

Fin de la démonstration du théorème 6. — Si $g, h, k \in L^\infty(\mu)$, on a

$$\left| \frac{1}{N} \sum T^n g\, T^{2n} h\, T^{3n} k \right| \leqslant \|g\|_\infty \|h\|_\infty \|k\|_\infty.$$

D'après cette majoration uniforme de la suite, si $1/N \sum T^n g\, T^{2n} h\, T^{3n} k$ converge μ-presque partout, alors la convergence a également lieu dans $L^1(\mu)$.

Si $1/N\sum T^n g\, T^{2n} h\, T^{3n} k$ converge dans $L^1(\mu)$, alors la convergence a également lieu dans tout $L^p(\mu)$ pour $1 \leqslant p < +\infty$.

On a donc, d'après (5), pour tous g, h, $k \in L^\infty(\mu)$, si $g \in \mathscr{E}'^{\perp}_T$ ou si $h \in \mathscr{E}'^{\perp}_{T^2}$ ou si $k \in \mathscr{E}'^{\perp}_{T^3}$, alors $1/N\sum T^n\, T^{2n} h\, T^{3n} k$ converge vers 0 dans $L^p(\mu)$.

On a également, d'après (6), pour tout $g \in L^\infty(\mu) \cap \mathscr{E}'_T$, tout $h \in L^\infty(\mu) \cap \mathscr{E}'_{T^2}$ et tout $k \in L^\infty(\mu) \cap \mathscr{E}'_{T^3}$, $1/N\sum T^n g\, T^{2n} h\, T^{3n} k$ converge dans $L^p(\mu)$.

On sait que les projections sur $\mathscr{E}_{T^i}$ et $\mathscr{E}^{\perp}_{T^i}$ d'un élément de $L^\infty(\mu)$ sont encore dans $L^\infty(\mu)$.

Par trilinéarité, on obtient donc bien finalement. Pour tous g, h, $k \in L^\infty(\mu)$, $1/N\sum T^n g\, T^{2n} h\, T^{3n} k$ converge dans $L^p(\mu)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$.

Le théorème est ainsi démontré.

RÉFÉRENCES

[1] Abramov (L. M.). — "Metric automorphisms with quasi-discrete spectrum" Amer. Math. Soc. Transl. (2) 39 (1964), 37-56.

[2] Furstenberg (H.). — "Ergodic behaviour of diagonal measures and a theorem of Szemeredi on arithmetic progressions." J. Analyse Math. 31 (1977), 204-256.

[3] Furstenberg (H.) et Katznelson (Y.). — "An ergodic Szemeredi theorem for commuting transformations". J. Analyse Math. 34 (1978), 275-291.

[4] Lesigne (E.). — « Convergence de moyennes ergodiques pour des mesures diagonales ». Thèse de 3e cycle, Université de Rennes.

[5] Lesigne (E.). — « Résolution d'une équation fonctionnelle » à paraître.

[6] Zimmer (R. J.). — "Extensions of ergodic group actions". Illinois J. Math. 20 (1976), 373-409.

[7] Zimmer (R. J.). — "Ergodic actions with generalized discrete spectrum". Illinois J. Math. 20 (1976), 555-588.