BULLETIN DE LA S. M. F.

COLETTE GUILLOPÉ

Remarques à propos du comportement, lorsque $t \to +\infty$, des solutions des équations de Navier-Stokes associées à une force nulle

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 151-180

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__151_0>

Bull. Soc. math. France,
111, 1983, p. 151-180.

REMARQUES A PROPOS DU COMPORTEMENT, LORSQUE $t \to +\infty$, DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES ASSOCIÉES A UNE FORCE NULLE

PAR

C. GUILLOPÉ (*)

Dans cet article, nous donnons des extensions d'un résultat de C. FOIAS et J. C. SAUT ([1]-[2]), relatif au comportement, lorsque $t \to +\infty$, des solutions des équations de Navier-Stokes dans un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N=2$ ou 3, associées à une force nulle (ou, ce qui reviendrait au même, à une force dérivant d'un potentiel) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u.\nabla) u + \operatorname{grad} p = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \times [0, \infty[, \tag{0.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \times [0, \infty[, \tag{0.2}$$

$$u(0) = u^0 \quad \text{dans } \mathcal{O}, \tag{0.3}$$

munies des conditions au bord :

$$u_{|\Gamma_i} = u_{|\Gamma_{N+i}}, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{0.4}$$

si $\mathcal{O}$ est le cube Q de côtés de longueur $L > 0$, Γ_i et Γ_{N+i} désignant deux faces opposées du bord de Q, ou :

$$u_{|\Gamma} = 0, \tag{0.5}$$

si $\mathcal{O}$ est un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^N$, de frontière Γ très régulière (de classe $\mathscr{C}^{\infty}$). La viscosité $\nu > 0$ et la vitesse initiale u^0 sont données; les inconnues du problème sont le vecteur vitesse u et la pression p. Dans le cas où $\mathcal{O} = Q$, u

(*) Texte reçu le 11 octobre 1982, révisé le 4 mars 1983.

C. GUILLOPÉ, Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment n° 425, 91405 Orsay Cedex.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1983/151/$ 5.00

désigne en fait la restriction à Q d'un vecteur vitesse, solution des équations (0.1)-(0.3) sur $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[$, périodique de période Q.

Dans les deux exemples de conditions au bord considérés, les solutions des équations de Navier-Stokes possèdent, en général, les mêmes propriétés (sauf, sûrement, celles relatives à une couche limite le long du bord de $\mathcal{O}$). Le cas « $\mathcal{O} = Q$ » est étudié ici car, bien que ne représentant pas une situation physique, il se pose dans un cadre fonctionnel qui permet de formuler et de montrer très simplement les propriétés qui nous intéressent ([1]).

J. Leray ([8], [9]) a montré que le problème (0.1)-(0.3), (0.4) ou (0.5) admet une solution définie, régulière et unique sur l'intervalle $]0, +\infty[$ si $N = 2$, ou sur un intervalle $(t_0, +\infty)$ si $N = 3$; l'instant t_0 est choisi « assez grand » et dépend de la solution faible choisie, de la viscosité ν et de l'ouvert $\mathcal{O}$. De plus, lorsque $t \to +\infty$, cette solution vérifie une propriété de stabilité, dans le sens où elle décroît de façon au moins exponentielle (*cf.* aussi J. L. Lions [10], R. Temam [11], [13]).

C. Foias et J. C. Saut ([1], [2]) ont récemment précisé cette propriété : ils ont montré que la décroissance de la solution est, pour certaines normes, exactement exponentielle et que le taux de décroissance est caractérisé par une valeur propre de l'opérateur de Stokes A. Précisément :

Théorème (C. Foias, J. C. Saut [1], [2]). — *Soit $u^0 \in H$. Pour toute solution non nulle des équations* (0.1)-(0.4) *ou* (0.5), *il existe une valeur propre $\Lambda = \Lambda(u)$ de l'opérateur de Stokes A telle que :*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\|u(t)\|^2}{|u(t)|^2} = \Lambda, \tag{0.6}$$

$$\liminf_{t \to +\infty} \frac{|(A-\Lambda)u(t)|}{|u(t)|} = 0, \tag{0.7}$$

$$\lim_{t \to +\infty} (I - R_\Lambda) \frac{u(t)}{|u(t)|} = 0 \quad \text{dans } V. \tag{0.8}$$

De plus, lorsque $\mathcal{O} = Q$, le comportement de la solution u pour $t \to +\infty$, peut être précisé ainsi :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{|Au(t)|^2}{\|u(t)\|^2} = \Lambda, \tag{0.9}$$

$$\lim_{t \to +\infty} (A - \Lambda) \frac{u(t)}{|u(t)|} = 0 \quad \textit{dans } H, \tag{0.10}$$

([1]) Ce cas, par contre, est très proche du cas — physique celui-là (intervenant par exemple en météorologie) — des équations de Navier-Stokes sur une sphère de $\mathbb{R}^3$.

$$(0.11) \qquad \lim_{t\to+\infty}(I-R_\Lambda)\frac{u(t)}{|u(t)|}=0 \quad dans\ D(A)(^2).$$

Ci-dessus, et dans la suite, H désigne l'espace des fonctions de $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})=L^2(\mathcal{O})^N$, à divergence nulle, vérifiant :

$$\int_{\mathcal{O}} u\,dx=0, \qquad u.n_{|\Gamma_i}=-u.n_{|\Gamma_{N+i}},$$

$$i=1,\ldots,N \qquad \text{si} \quad \mathcal{O}=Q,$$

ou :

$$u.n_{|\Gamma}=0 \qquad \text{si} \quad \mathcal{O}=\Omega,$$

muni de la norme $|.|$ de $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})=L^2(\mathcal{O})^N$. V désigne l'espace de restrictions à Q de fonctions périodiques, de période Q, de moyenne nulle sur Q, qui sont dans $\mathbb{H}^1_{loc}(\mathbb{R}^N)=H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)^N$ si $\mathcal{O}=Q$ (resp. l'espace des fonctions de $\mathbb{H}^1_0(\mathcal{O})=H^1_0(\mathcal{O})^N$ si $\mathcal{O}=\Omega$), à divergence nulle, muni de la norme du gradient dans $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$, soit $\|.\|$. P désigne la projection de H sur $\mathbb{L}^2(\mathcal{O})$. $A=-P.\Delta$ désigne l'opérateur de Stokes, linéaire, non borné dans H et R_Λ la projection de H sur le sous-espace propre associé à la valeur propre Λ de A. Enfin, B désigne la forme bilinéaire continue de $V\times D(A)$ sur H, définie par

$$B(u,v)=p(u.\nabla)v, \qquad \forall(u,v)\in V\times D(A);$$

$B(u,u)$ sera noté $B(u)$.

Le résultat du théorème 0.1 admet de nombreuses conséquences (*cf.* [1]-[2]). La plus simple d'entre elles est que la décroissance de la fonction u dans H lorsque $t\to+\infty$ est exactement celle de la fonction $t\to\exp(-\nu\Lambda t)$ (*cf.* aussi le paragraphe I-1 ci-après).

Dans cet article, nous donnons deux types d'extension du théorème 0.1 : nous montrons que :

(*a*) si $\mathcal{O}=Q$, les divers quotients de deux normes successives $|A^{(m+1)/2}u|/|A^{m/2}u|$ de la solution u convergent vers la même limite $\Lambda^{1/2}$ et les limites (0.10)-(0.11) sont vraies dans $V_m=D(A^{m/2})$, $\forall m\in\mathbb{N}$;

(*b*) si $\mathcal{O}=\Omega$, le même type de résultats que ceux montrés en (*a*) sont vrais; en particulier, les propriétés (0.9)-(0.11) sont vérifiées. Par contre comme, en général, $u(t)$ n'appartient pas à $D(A^{m/2})$ pour $m>3$, les convergences obtenues ont lieu dans les espaces $E_m=\mathbb{H}^m(\mathcal{O})\cap H$.

Plan :

I. Cas des équations de Navier-Stokes périodiques en espace.

1. Énoncé des principaux résultats.

(²) $D(A^{m/2})$, $m\in Z$, désigne le domaine de l'opérateur $A^{m/2}$. Par exemple, $D(A)=V\cap\mathbb{H}^2_{per}$ si $\mathcal{O}=Q$ ($\mathbb{H}^2_{per}$ est l'ensemble des restrictions à Q des fonctions périodiques, de période Q, et appartenant à $\mathbb{H}^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$) ou $D(A)=V\cap\mathbb{H}^2(\mathcal{O})^N$ si $\mathcal{O}=\Omega$.

Je remercie C. Foias et J. C. Saut d'avoir attiré mon attention sur cette question.

I. Cas des équations de Navier-Stokes périodiques en espace

1. Énoncé des principaux résultats

Soit $]0, L[^N$ le cube de $\mathbb{R}^N (L>0, N=2$ ou 3). Soit u une solution des équations de Navier-Stokes périodiques en espace, définie et régulière ([3]) pour $t \geqslant t_0$: u est la solution de l'équation différentielle abstraite :

$$
(1.1) \quad \begin{cases} u \in \mathscr{C}^\infty(t_0, +\infty; \bigcap_{m=0}^{\infty} D(A^{m/2})), \qquad u(t) \neq 0, \qquad \forall\, t \geqslant t_0, \\ u' + \nu\, A\, u + B(u) = 0, \\ u(0) = u^0 \qquad (u^0 \in H \text{ donné}). \end{cases}
$$

Les espaces $V_m = D(A^{m/2})$ sont munis de la norme $|\,.\,|_m = |A^{m/2}\,.\,|$ et du produit scalaire associé $(.\,,\,.)_m$. Nous noterons aussi $|\,.\,|$ la norme sur $H = V_0$, $\|\,.\,\|$ la norme sur $V = V_1$ et $(.\,,\,.), ((.\,,\,.))$ les produits scalaires associés (*cf.* par exemple R. Temam [13], pour la définition précise des espaces fonctionnels associés aux équations de Navier-Stokes périodiques en espace).

Nous montrons que, pour toute solution u des équations de Navier-Stokes périodiques en espace, il existe un sous-espace propre de A, tel que la fonction vectorielle $u(t)/|u(t)|$ se trouve concentrée sur ce sous-espace pour $t \to +\infty$. Nous en déduisons des informations sur l'ordre de la décroissance exponentielle vers 0 de la fonction u pour $t \to +\infty$.

Notons R_λ la projection orthogonale de $H, V, \ldots$ sur le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de A.

([3]) Les équations de Navier-Stokes possèdent au moins une solution faible $t \to u(t)$, définie sur $]0, +\infty[$; de plus toute solution faible, définie sur $]0, +\infty[$, devient régulière, c'est-à-dire continue à valeurs dans V, à partir de n'importe quel instant $t_0 > 0$ si $N=2$, ou à partir d'un instant t_0 assez grand si $N=3$. De plus, si $u(t_0) \neq 0$, la solution u est non nulle sur $[t_0, +\infty[$, d'après la propriété d'unicité rétrograde (*cf.* par exemple C. Bardos-L. Tartar [14] et J. Serrin [16]).

Les résultats obtenus par C. FOIAS et J. C. SAUT et rappelés dans l'Introduction sont vrais aussi dans les espaces de fonctions très régulières. Précisément, nous allons montrer ceci :

THÉORÈME 1.1. — *Pour toute solution u de* (1.1), *il existe une valeur propre $\Lambda=\Lambda(u)$ de l'opérateur A telle que :*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{|u(t)|_m^2}{|u(t)|^2}=\Lambda^m, \tag{1.2}$$

$$\lim_{t\to+\infty}(A-\Lambda)\frac{u(t)}{|u(t)|}=0 \quad \textit{dans } V_m, \tag{1.3}$$

$$\lim_{t\to+\infty}(I-R_\Lambda)\frac{u(t)}{|u(t)|}=0 \quad \textit{dans } V_m, \tag{1.4}$$

pour tout $m\in\mathbb{N}$.

La démonstration de ce résultat est un peu longue et est effectuée dans les paragraphes suivants. Nous en donnons maintenant une conséquence.

COROLLAIRE 1.2. — *Il existe un vecteur propre (non nul) w_Λ de A, associé à la valeur propre Λ, tel que :*

$$\lim_{t\to+\infty}e^{\nu\Lambda t}u(t)=w_\Lambda \quad \textit{dans } V_m, \tag{1.5}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{u(t)}{|u(t)|}=\frac{w_\Lambda}{|w_\Lambda|} \quad \textit{dans } V_m, \tag{1.6}$$

pour tout $m\in\mathbb{N}$.

Démonstration du corollaire 1.2. — (*a*) De (1.2), nous déduisons que :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\operatorname{Log}|u(t)|_m}{t}=-\nu\Lambda, \qquad \forall m\in\mathbb{N}. \tag{1.7}$$

Il suffit de montrer que (1.7) est vraie pour $m=0$. De l'égalité d'énergie usuelle :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2+\nu\|u(t)\|^2=0, \qquad \forall t\geq t_0,$$

nous déduisons par intégration que :

$$\frac{1}{t}\operatorname{Log}|u(t)|=\frac{1}{t}\operatorname{Log}|u(s)|-\frac{\nu}{t}\left[\int_s^t\frac{\|u(\tau)\|^2}{|u(\tau)|^2}d\tau\right],$$

pour tous s et t tels que $t_0\leq s\leq t$. Faisant tendre t vers $+\infty$, nous en déduisons (1.7) pour $m=0$, puis pour tout $m\in\mathbb{N}$ d'après (1.2).

Dans la suite, nous fixons $m\in\mathbb{N}$ et $\varepsilon\in]0, 1/2[$. D'après (1.7), il existe un instant $t_\varepsilon\geq t_0$ tel que :

$$\exp(-\nu(\Lambda+\varepsilon)t)\leq|u(t)|_{m+2}\leq\exp(-\nu(\Lambda-\varepsilon)t), \qquad \forall t\geq t_\varepsilon. \tag{1.8}$$

(*b*) Notons $u_\Lambda=R_\Lambda u$. Montrons que $\lim_{t\to+\infty}e^{\nu\Lambda t}u_\Lambda(t)$ existe dans V_m et est non nulle. L'équation différentielle vérifiée par la fonction u_Λ est obtenue en projetant l'équation (1.1) sur le sous-espace propre associé à la valeur propre Λ :

$$\frac{du_\Lambda}{dt}+\nu\,\Lambda\,u_\Lambda+R_\Lambda\,B(u)=0;$$

or, d'après (1.8) et la continuité de $R_\Lambda\,B$ de $V_{m+2}\times V_{m+2}$ dans V_m, la fonction $t\to e^{\nu\Lambda t}R_\Lambda\,B(u(t))$ appartient à l'espace $L^1(t_0,+\infty;\,V_m)$. La fonction u_Λ est donc donnée par :

$$(1.9)\quad u_\Lambda(t)\,e^{\nu\Lambda t}=u_\Lambda(s)\,e^{\nu\Lambda s}-\int_s^t e^{\nu\Lambda\tau}R_\Lambda\,B(u(\tau))\,d\tau,\qquad \forall s,\ t,\ \ t_0\leqslant s\leqslant t,$$

ce qui montre que $\lim_{t\to+\infty}u_\Lambda(t)\,e^{\nu\Lambda t}$ existe dans V_m.

Supposons que cette limite soit nulle. Alors, de (1.9), nous déduisons que :

$$u_\Lambda(s)=e^{-\nu\Lambda s}\left[\int_s^{+\infty}e^{\nu\Lambda\tau}R_\Lambda\,B(u(\tau))\,d\tau\right],\qquad \forall s\geqslant t_0.$$

Donc, d'après (1.8),

$$(1.10)\qquad |u_\Lambda(s)|_m\leqslant\frac{c}{\nu(\Lambda-2\,\varepsilon)}\exp[-2\,\nu(\Lambda-\varepsilon)\,s],\qquad \forall s\geqslant t_\varepsilon.$$

Mais, d'après (1.4), les fonctions $|u|_m$ et $|u_\Lambda|_m$ sont équivalentes et donc, d'après (1.7) :

$$\mathrm{Log}\,|u_\Lambda(t)|_m\underset{t\to+\infty}{\sim}-\nu\,\Lambda\,t;$$

La fonction $t\to\mathrm{Log}\,(|u_\Lambda(t)|_m\exp(2\,\nu\,(\Lambda-\varepsilon)\,t))$ est donc équivalente, pour $t\to+\infty$, à la fonction non bornée $t\to\nu\ (\Lambda-2\,\varepsilon)\,t$, ce qui contredit l'estimation (1.10).

Donc, la fonction $t\to e^{\nu\Lambda t}u_\Lambda(t)$ converge dans V_m, lorsque $t\to+\infty$, vers un vecteur propre de A, associé à la valeur propre Λ, soit w_Λ et nous avons :

$$u_\Lambda(t)=e^{-\nu\Lambda t}w_\Lambda\ +e^{-\nu\Lambda t}\left[\int_t^{+\infty}e^{\nu\Lambda\tau}R_\Lambda\,B(u(\tau))\,d\tau\right],\qquad \forall t\geqslant t_0.$$

La fonction $t\to e^{\nu\Lambda t}|u(t)|_m$ admet donc une limite non nulle. Mais de (1.4), nous déduisons aussi que :

$$\lim_{t\to+\infty}(u(t)-u_\Lambda(t))\,e^{\nu\Lambda t}=0\quad\text{dans }\ V_m.$$

Lorsque $t\to+\infty$, la fonction $t\to e^{\nu\Lambda t}u(t)$ converge donc dans V_m vers le vecteur propre (non nul) w_Λ de A associé à la valeur propre Λ. Cela montre (1.5) et (1.6).

Remarque 1.3. — Nous avons montré que la fonction $u_\Lambda = R_\Lambda u$ converge vers 0 exactement comme la fonction $t \to \exp(-\nu \Lambda t)$. Notant $u_i = R_{\lambda_i} u$ la projection sur le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i, nous pouvons montrer de façon similaire à ce qui précède :

(*a*) si $\lambda_i < \Lambda$, alors la fonction u_i décroît vers 0 au moins comme $t \to \exp(-2\nu \Lambda t)$;

(*b*) si $\Lambda < \lambda_i < 2\Lambda$, alors la fonction u_i décroît vers 0 éventuellement comme $t \to \exp(-\nu\lambda_i t)$, sinon comme $t \to \exp(-2\nu\Lambda t)$;

(*c*) si $\lambda_i \geqslant 2\Lambda$, alors la fonction u_i décroît vers 0 en général comme $t \to \exp(-2\nu\Lambda t)$.

(*cf.* C. Foias, J. C. Saut [1], [2].)

Les paragraphes suivants sont consacrés à la démonstration du théorème 1.1.

2. Remarques préliminaires

Soit $\Lambda (\geqq \lambda_1)$ une valeur propre de l'opérateur de Stokes : nous désignons par Λ_0 la valeur propre immédiatement inférieure à Λ, si elle existe, et par Λ_1 la valeur propre immédiatement supérieure à Λ. Nous notons P_Λ (*resp.* R_Λ) la projection orthogonale de H sur le sous-espace propre associé à toutes les valeurs propres inférieures ou égales à Λ (resp. associé à la valeur propre Λ).

Soit u une solution du problème (1.1) définie et régulière pour $t \geqslant t_0$. Écrivons u sous la forme $u = p + R_\Lambda u + q$ avec :

$$(1.11) \qquad q = (I - P_\Lambda) u, \qquad p = 0 \quad \text{si } \Lambda = \lambda_1, \qquad = P_{\Lambda_0} \quad \text{si } \Lambda > \lambda_1.$$

Notons :

$$(1.12) \qquad \rho_m = \frac{|u|_{m+1}^2}{|u|_m^2}, \qquad \forall m \in \mathbb{N},$$

$$\chi = \frac{|q|^2}{|u|^2}, \qquad \xi = \frac{|p|^2}{|u|^2};$$

ces fonctions sont définies et régulières sur $[t_0, +\infty[$ et vérifient

$$(1.13) \qquad |p|_{m+1}^2 \leqslant \Lambda_0 |p|_m^2, \qquad \Lambda_1 |q|_m^2 \leqslant |q|_{m+1}^2, \qquad \forall m \in \mathbb{N},$$

$$(1.14) \qquad \lambda_1 \leqslant \rho_0 \leqslant \rho_1 \leqslant \ldots, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \chi \leqslant 1.$$

2.1. — Remarquons que, pour montrer le théorème 1.1, il suffit de montrer que :

$$\lim_{t\to+\infty} \rho_m(t)=\Lambda, \qquad \forall m\in\mathbb{N}, \tag{1.15}$$

$$\lim_{t\to+\infty} [\xi(t)+\chi(t)]=0. \tag{1.16}$$

En effet, effectuant une récurrence sur m pour montrer la propriété (1.4), nous devons montrer que :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{|R_\Lambda u|_{m-1}}{|u|_{m-1}}=1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{|R_\Lambda u|_m}{|u|_m}=1. \tag{1.17}$$

Or, nous avons :

$$\frac{|R_\Lambda u|_m}{|u|_m}=\frac{\Lambda^{1/2}|R_\Lambda u|_{m-1}}{|u|_{m-1}}\,\frac{|u|_{m-1}}{|u|_m}, \tag{1.18}$$

ce qui, avec (1.15), montre la propriété (1.17).

De la même façon, nous effectuons une récurrence sur m pour montrer la propriété (1.3) : nous utilisons les relations :

$$\left\{\begin{aligned} &\left|(A-\Lambda)\frac{u}{|u|}\right|_m=\Lambda^{1/2}\left|(A-\Lambda)\frac{u}{|u|}\right|_{m-1}, \\ &\left|(A-\Lambda)\frac{u}{|u|}\right|^2=\rho_1\,\rho_0-2\Lambda\,\rho_0+\Lambda^2. \end{aligned}\right. \tag{1.19}$$

Remarque 1.4. — La relation (1.18) avec $m=0$, 1, 2 est aussi vraie dans le cas où u est solution des équations de Navier-Stokes sur un ouvert Ω, car $u(t)\in D(A)$, pour tout $t\geqslant t_0$.

2.2. Inégalités différentielles vérifiées par les fonctions ρ_m, ξ, χ.

Montrons que, sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$:

$$\frac{d\rho_m}{dt}+\nu\frac{|(A-\rho_m)u|_m^2}{|u|_m^2}\leqslant\frac{1}{\nu}\,\frac{|B(u)|_m^2}{|u|_m^2}, \quad \forall m\in\mathbb{N}, \tag{1.20}$$

$$\frac{d\chi}{dt}+\nu\frac{\|q\|^2-\chi\|u\|^2}{|u|^2}\leqslant\frac{1}{\nu(\Lambda_1-\Lambda)}\,\frac{|B(u)|^2}{|u|^2}, \tag{1.21}$$

$$(1.22) \qquad \frac{d\xi}{dt} - \nu \frac{\xi \| u \|^2 - \| p \|^2}{| u |^2} \geqslant - \frac{1}{\nu(\Lambda - \Lambda_0)} \frac{| B(u) |^2}{| u |^2}.$$

(*a*) Soit $m \in \mathbb{N}$. De l'équation (1.1) et de l'identité.

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho_m}{dt} = \frac{1}{| u |_m^2} \left[\frac{du}{dt}, (A - \rho_m) u \right]_m,$$

nous déduisons que :

$$\frac{1}{2} \frac{d\rho_m}{dt} + \nu \frac{| (A - \rho_m) u |_m^2}{| u |_m^2} = - \left[\frac{B(u)}{| u |_m}, (A - \rho_m) \frac{u}{| u |_m} \right]_m.$$

Utilisant l'inégalité de Schwarz, nous en déduisons l'inégalité (1.20).

(*b*) De l'équation (1.1) et de l'identité :

$$\frac{1}{2} \frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{| u |^2} \left[\frac{du}{dt}, q - \chi u \right],$$

nous déduisons que :

$$(1.23) \qquad \frac{1}{2} \frac{d\chi}{dt} + \frac{\nu}{| u |^2} (\| q \|^2 - \chi \| u \|^2) = - \left[\frac{B(u)}{| u |}, \frac{q - \chi u}{| u |} \right].$$

Mais, d'après la définition de Λ_1, nous avons l'inégalité :

$$(1.24) \qquad \| q \|^2 - \chi \| u \|^2 \geqslant (\Lambda_1 - \Lambda) | q - u |^2.$$

En effet, comme $u = P_\Lambda u + q$, nous avons :

$$\| q \|^2 - \chi \| u \|^2 = (1 - \chi) \| q \|^2 - \chi \| P_\Lambda u \|^2,$$

puis, d'après (1.13) :

$$(1.25) \qquad \| q \|^2 - \chi \| u \|^2 \geqslant \Lambda_1 (1 - \chi) | q |^2 - \Lambda \chi | P_\Lambda u |^2;$$

calculant le second membre de l'égalité ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Lambda_1 (1 - \chi) | q |^2 - \Lambda \chi | P_\Lambda u |^2 &= (\Lambda_1 (1 - \chi) + \Lambda \chi) | q |^2 - \Lambda \chi | u |^2 \\ &= (\Lambda_1 - \Lambda)(1 - \chi) | q |^2 \\ &= (\Lambda_1 - \Lambda) | q - \chi u |^2, \end{aligned}$$

ce qui avec (1.25) donne l'inégalité (1.24).

De (1.23)-(1.24), nous déduisons l'inégalité (1.21).

(c) Nous procédons de la même façon pour la fonction ξ : au lieu de l'inégalité (1.24), nous utilisons l'inégalité :

$$\|p\|^2-\xi\|u\|^2 \leqslant -(\Lambda-\Lambda_0)|p-\xi u|^2. \tag{1.26}$$

Remarque 1.5. — Les inégalités (1.20) pour $m=0$ et (1.21)-(1.22) sont vérifiées dans le cas où u est une solution des équations de Navier-Stokes non périodiques. □

3. Fin de la démonstration du théorème 1.1

La démonstration de (1.15) se fait par récurrence sur m.

3.1. Le principe de la démonstration est le suivant : nous explicitons une fonction Φ_m, positive, intégrable sur un certain intervalle $(t_1, +\infty)$, telle que :

$$\frac{1}{\nu}\,\frac{|B(u)|_m^2}{|u|_m^2} \leqslant \rho_m \Phi_m; \tag{1.27}$$

par intégration de l'inégalité (1.14), nous déduisons que :

$$\lambda_1 \leqslant \rho_m(t) \leqslant \rho_m(s)\exp\left(\int_s^{+\infty} \Phi_m(\tau)\,d\tau\right), \tag{1.28}$$

pour tous s, t, $t_1 \leqslant s \leqslant t$. Utilisant dans (1.28) la limite supérieure pour $t \to +\infty$, puis la limite inférieure pour $s \to +\infty$, nous voyons que $\lim_{t\to+\infty} \rho_m(t)$ existe et est supérieure ou égale à λ_1. Nous déduisons aussi de (1.20) que la fonction $(A-\rho_m)(u/|u|_m)$ appartient à l'espace $L^2(t_1, +\infty; V_m)$.

Notons $\bar\rho_0 = \operatorname{Sup}_{t\geqslant t_0}(\rho_0(t))$. Intégrant les inégalités (1.21)-(1.22), nous obtenons :

$$\left\{\begin{aligned} & 0 \leqslant \chi(t) \leqslant \chi(s) + \frac{\bar\rho_0}{\nu(\Lambda_1-\Lambda)}\left[\int_s^{+\infty} \Phi_0(\tau)\,d\tau\right], \\ & \xi(s) - \frac{\bar\rho_0}{\nu(\Lambda-\Lambda_0)}\left[\int_s^{+\infty} \Phi_0(\tau)\,d\tau\right] \leqslant \xi(t) \leqslant 1, \end{aligned}\right. \tag{1.29}$$

pour tous s et t vérifiant $t_1 \leqslant s \leqslant t$. Appliquant à (1.29) la $\limsup_{t\to+\infty}$, puis la $\liminf_{s\to+\infty}$, nous déduisons que $\lim_{t\to+\infty} \chi(t)$ et $\lim_{t\to+\infty} \xi(t)$ existent et sont comprises entre 0 et 1. Enfin, des inégalités (1.15)-(1.16), nous déduisons aussi que les fonctions :

$$\frac{\|q\|^2-\chi\|u\|^2}{|u|^2} \quad \text{et} \quad \frac{\xi\|u\|^2-\|p\|^2}{|u|^2},$$

sont intégrables sur $(t_1, +\infty)$.

3.2. DÉMARRAGE DE LA RÉCURRENCE : ÉTUDE DU CAS $m=0$

L'application B est bilinéaire continue de $V\times D(A^{3/4})$ dans H, et :

$$\frac{1}{\nu}\frac{|B(u)|^2}{|u|^2}\leqslant C_0\,\rho_0\|u\|\;|Au|. \tag{1.30}$$

Montrons que la fonction $\Phi_0=C_0\|u\|\;|Au|$ est intégrable sur l'intervalle $(t_0, +\infty)$. La fonction u, solution régulière des équations de Navier-Stokes sur l'intervalle $(t_0, +\infty)$ vérifie :

$$\begin{cases} 2\nu\left[\displaystyle\int_s^t \|u(\tau)\|^2\,d\tau\right]=|u(s)|^2-|u(t)|^2, \\ 2\nu\left[\displaystyle\int_t^{+\infty} \|u(\tau)\|^2\,d\tau\right]=|u(t)|^2, \end{cases} \tag{1.31}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2+\nu\left(1-\frac{C_0^{1/2}}{\nu}|u(t)|^{1/2}\|u(t)\|^{1/2}\right)|Au(t)|^2\leqslant 0, \tag{1.32}$$

pour tous s, t, $t_0\leqslant s\leqslant t$.

Soit $t_1>(C_0/2\nu^3)\lambda_1^{-1/2}|u^0|^2$. La première relation (1.31) implique que $u(t_1)\in V$ et $\|u(t_1)\|<(\nu/C_0^{1/2})\lambda_1^{1/4}$. De (1.32), nous déduisons que l'application $\|u(.)\|$ est décroissante sur $[t_1, +\infty[$.

Posant :

$$\frac{1}{\varkappa}=\frac{2\nu}{C_0}\left(1-\frac{C_0^{1/2}}{\nu}\lambda_1^{-1/4}\|u(t_1)\|^{1/2}\right),$$

nous déduisons aussi de (1.32) que :

$$\nu\left[\frac{C_0}{2\nu\varkappa_0}\right]^2\left[\int_t^{+\infty}|Au(\tau)|^2\,d\tau\right]\leqslant\frac{1}{2}\|u(t)\|^2,\qquad \forall\, t\geqslant t_1. \tag{1.33}$$

De (1.31)-(1.33), nous déduisons que la fonction Φ_0 est intégrable sur $(t_1, +\infty)$, et donc sur $(t_0, +\infty)$.

D'après le paragraphe 3.1, $\Lambda = \lim_{t \to +\infty} \rho_0(t)$ existe et la fonction $|(A-\rho_0)(u/|u|)|^2$ est intégrable sur $(t_0, +\infty)$: donc il existe une suite $(t_n)_{n \geq 0}$ tendant vers $+\infty$, telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left| (A - \rho_0(t_n)) \frac{u(t_n)}{|u(t_n)|} \right|^2 = 0. \tag{1.34}$$

Donc la suite $v(t_n) = u(t_n)/|u(t_n)|$ est bornée dans $D(A)$: il existe un vecteur $\bar{v}$ et une sous-suite, encore notée (t_n), tels que $\lim_{n \to +\infty} v(t_n) = \bar{v}$ dans $D(A)$ faible. Or, d'après (1.34), $|(A-\Lambda)v(t_n)|$ converge vers 0. Donc la limite $\bar{v}$ vérifie :

$$(A-\Lambda)\bar{v} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{v} \neq 0;$$

Λ est donc une valeur propre de A et $\bar{v}$ est un vecteur propre associé à Λ.

Nous déduisons aussi du paragraphe 3.1 que $\lim_{t \to +\infty} \chi(t)$ et $\lim_{t \to +\infty} \xi(t)$ existent et que les fonctions :

$$\frac{\|q\|^2 - \chi \|u\|^2}{|u|^2} \quad \text{et} \quad \frac{\xi \|u\|^2 - \|p\|^2}{|u|^2},$$

sont intégrables sur $(t_0, +\infty)$: il existe donc une suite, encore notée $(t_n)_{n \geq 0}$, tendant vers $+\infty$, telle que :

$$\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} \chi(t_n) = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{\|q(t_n)\|^2}{\|u(t_n)\|^2}, \\ \lim_{n \to +\infty} \xi(t_n) = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{\|p(t_n)\|^2}{\|u(t_n)\|^2}. \end{cases} \tag{1.35}$$

Mais, d'après (1.18) et (1.20), nous avons :

$$(\Lambda_1 - \Lambda)(1-\chi)\chi \leqslant \frac{\|q\|^2 - \chi \|u\|^2}{|u|^2},$$

$$(\Lambda - \Lambda_0)(1-\xi)\xi \leqslant \frac{\xi \|u\|^2 - \|p\|^2}{|u|^2};$$

de (1.35), nous déduisons alors que les limites, pour $t \to +\infty$, des fonctions χ et ξ sont égales à 0 ou 1.

Supposant que $\lim_{t \to +\infty} \chi(t) = 1$, nous déduisons de (1.13) que :

$$\Lambda_1 \leqslant \lim_{n \to +\infty} \frac{\| q(t_n) \|^2}{| q(t_n) |^2}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{\| q(t_n) \|^2}{\| u(t_n) \|^2} \frac{\| u(t_n) \|^2}{| u(t_n) |^2} \frac{| u(t_n) |^2}{| q(t_n) |^2} \right] = \Lambda,$$

ce qui contredit la définition de Λ_1. De la même façon, l'hypothèse $\lim_{t \to +\infty} \xi(t) = 1$ contredit la définition de Λ_0.

Remarque 1.6. — L'étude précédente, où $m=0$, est valable sans changement dans le cas où u est une solution des équations de Navier-Stokes non périodiques. Nous avons donc montré que, si u est une solution des équations de Navier-Stokes sur un ouvert borné Ω, alors il existe une valeur propre $\Lambda = \Lambda(u^0)$ de l'opérateur A telle que :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\| u(t) \|^2}{| u(t) |^2} = \Lambda,$$

$$(\mathrm{A} - \Lambda) \frac{u}{| u |} \in L^2(t_0, +\infty; H),$$

$$\lim_{t \to +\infty} (I - R_\Lambda) \frac{u}{| u |} = 0 \quad \text{dans } V.$$

La dernière propriété est déduite de ce qui précède et de la remarque 1.3.

3.3. MISE EN ŒUVRE DE LA RÉCURRENCE

Soit $m \geqslant 1$. Supposons que :

(1.36) $$\lim_{t \to +\infty} \rho_p(t) = \Lambda \qquad \text{pour} \quad p = 0, \ldots, m-1,$$

(1.37) $$(A - \rho_{m-1}) \frac{u}{| u |_{m-1}} \in L^2(t_0, +\infty; V_{m-1}).$$

Montrons que les propriétés (1.36)-(1.37) sont vérifiées avec $m-1$ remplacé par m.

D'après les propriétés de continuité de B, nous avons :

$$\frac{1}{\nu} \frac{| B(u) |_m^2}{| u |_m^2} \leqslant C_m \begin{cases} \rho_1 \| u \| \, | Au | & \text{pour} \quad m = 1, \\ \rho_m (\prod_{j=1}^{m-1} \rho_j) \| u \|^2 & \text{pour} \quad m \geqslant 2. \end{cases}$$

Nous avons déjà montré que la fonction $\|u\|\ |Au|$ est intégrable sur $(t_0, +\infty)$ (cas $m=1$), tandis que pour $m\geqslant 2$, la fonction $(\prod_{j=1}^{m-1}\rho_j)$ est bornée sur $(t_0, +\infty)$ d'après l'hypothèse (1.36). Nous avons donc :

$$\frac{1}{\nu}\ \frac{|B(u)|_m^2}{|u|_m^2}\leqslant \rho_m\,\Phi_m,$$

avec $\Phi_m\geqq 0$, $\Phi_m\in L^1(t_1, +\infty; V_m)$. Des propriétés vues au paragraphe 3.1, nous déduisons que $\lim_{t\to+\infty}\rho_m(t)$ existe et est supérieure ou égale à Λ, tandis que la fonction $(A-\rho_m)(u/|u|_m)$ appartient à $L^2(t_0, +\infty; V_m)$. Cela montre en particulier la propriété (1.37) avec $m-1$ remplacé par m.

Par ailleurs, de l'hypothèse (1.37), nous déduisons qu'il existe une suite, notée $(t_n)_{n\geqq 0}$, tendant vers $+\infty$, telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|Au(t_n)|_{m-1}^2}{|u(t_n)|_{m-1}^2}=\Lambda^2;$$

cela montre que :

$$(1.38)\qquad \begin{cases} \lim_{t\to+\infty}\rho_m(t)=\Lambda, \\ \lim_{t\to+\infty}(A-\rho_{m-1}(t))\,\dfrac{u(t)}{|u(t)|_{m-1}}=0 \quad \text{dans } V_{m-1}; \end{cases}$$

les propriétés (1.36)-(1.37) sont donc vraies avec $m-1$ remplacé par m.

Nous avons montré au paragraphe 3.2 que les propriétés (1.36)-(1.37) sont vraies pour $m=1$; elles sont donc vraies pour tout m. D'après les remarques faites au paragraphe 2.1, le théorème 1.1 est démontré. □

II. Cas des équations de Navier-Stokes dans un ouvert borné

1. Énoncé des principaux résultats

Soit Ω un ouvert borné régulier (de classe $\mathscr{C}^\infty$). Considérons une solution u des équations de Navier-Stokes définie et régulière ([3]) sur $\Omega\times[t_0, +\infty[$: u est la solution de l'équation différentielle abstraite :

$$(2.1)\qquad \begin{cases} u\in\mathscr{C}^\infty(t_0, +\infty; \bigcap_{m=0}^\infty E_m)\cap\mathscr{C}^\infty(t_0, +\infty; D(A)), \\ u'+\nu A u+B(u)=0, \qquad u\neq 0, \\ u(0)=u^0 \quad (u^0\in H \text{ donné}). \end{cases}$$

Les espaces $E_m = \mathbb{H}^m(\Omega) \cap H$ sont munis de la norme induite par celle de $\mathbb{H}^m(\Omega)$, notée $\| \cdot \|_m$; le produit scalaire associé est noté $((.,.))_m$ (*cf.* par exemple, R. TEMAM [12] pour la définition précise des espaces fonctionnels associés aux équations de Navier-Stokes dans un ouvert Ω).

Nous obtenons ici le même type de résultats dans le cas périodique, de façon moins directe cependant, du fait de l'existence de conditions au bord : de l'étude des fonctions dérivées de u par rapport au temps [*cf.* aussi, A. A. KISELEV et O. A. LADYZENSKAIA ([6], [7])], nous déduisons des informations sur le comportement de la fonction $u(t) \in E_m$.

Notant $u_j = u^{(j)}$ la dérivée d'ordre j de la fonction u par rapport au temps ($u_0 \equiv u$), nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1. — *Pour toute solution u des équations* (2.1), *il existe une valeur propre* $\Lambda = \Lambda(u)$ *de A telle que :*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\| u_j(t) \|^2}{| u_j(t) |^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{| A u_j(t) |^2}{\| u_j(t) \|^2} = \Lambda, \tag{2.2}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{| u_{j+1}(t) |^2}{| u_j(t) |^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\| u_{j+1}(t) \|^2}{\| u_j(t) \|^2} = \nu^2 \Lambda^2, \tag{2.3}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\| u_j(t) \|_{m+1}}{\| u_j(t) \|_m} \quad \textit{existe et est non nulle}, \tag{2.4}$$

$$\lim_{t \to +\infty} (\mathrm{A} - \Lambda) \frac{u_j(t)}{| u_j(t) |} = 0 \quad \textit{dans } E_m, \tag{2.5}$$

$$\lim_{t \to +\infty} (I - R_\Lambda) \frac{u_j(t)}{| u_j(t) |} = 0 \quad \textit{dans } E_m, \tag{2.6}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$, *pour tout* $j \in \mathbb{N}$.

De façon tout à fait similaire à celle utilisée au paragraphe I — 1, nous déduisons de ce résultat des informations sur le comportement, pour $t \to +\infty$, des fonctions u_j.

COROLLAIRE 2.2. — *Il existe un vecteur propre de A associé à la valeur propre* Λ, *soit* w_Λ, *tel que :*

$$\begin{cases} \lim_{t \to +\infty} e^{\nu \Lambda t} u_j(t) = (-\nu\Lambda)^j w_\Lambda & \textit{dans } E_m, \\ \lim_{t \to +\infty} \dfrac{u_j(t)}{| u_j(t) |} = \dfrac{w_\Lambda}{| w_\Lambda |} & \textit{dans } E_m, \end{cases} \tag{2.7}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$, *pour tout* $m \in \mathbb{N}$.

Remarque 2.3. — La propriété (2.5) implique en particulier que :

$$\lim_{t \to +\infty} (I - R_\Lambda) \frac{u_j(t)}{|u_j(t)|} = 0 \quad \text{dans } D(A). \tag{2.8}$$

Les fonctions $|AR_\Lambda u_j|$ et $|Au_j|$ sont donc équivalentes lorsque $t \to +\infty$. Cette propriété est réalisée aussi bien dans le cas des équations de Navier-Stokes périodiques en espace que dans celui des équations de Navier-Stokes dans un ouvert borné Ω.

Les résultats énoncés ici sont démontrés au cours des paragraphes suivants.

2. Démonstration du corollaire 2.2 et du théorème 2.1

2.1. Préliminaires

Soit u une solution des équations de Navier-Stokes : la fonction u converge très rapidement vers 0 quand $t \to +\infty$. Précisément, il est établi en [3] (*cf.* aussi J. Heywood [5]) :

Lemme 2.3. — *Il existe $t_0 \geqq 0$, $\xi_0 > 0$ et des constantes K_j positives telles que :*

$$|A\, u_j(t)| \leqq K_j \exp\left[-\nu\xi_0 (t - t_0)\right], \qquad \forall\, t \geqq t_0,$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Nous avons montré au paragraphe I.3.2 que $\Lambda = \lim_{t \to +\infty} \| u(t) \|^2 / |u(t)|^2$, existe et est égale à une valeur propre de A, que la fonction $(A - \rho_0)(u/|u|)$ appartient à l'espace $L^2(t_0, +\infty; H)$ et que :

$$\lim_{\to \infty} (I - R_\Lambda) \frac{u(t)}{|u(t)|} = 0 \quad \text{dans } V,$$

(*cf.* remarque I.2.5).

Mais, comme ici la fonction $u(t)$ n'appartient pas, en général, à $D(A^{m/2})$ si $m > 2$, la démonstration présentée au paragraphe I ne s'applique pas. La démonstration proposée ici repose sur l'utilisation des fonctions dérivées $u^{(j)}$ de la fonction u. Nous remarquons tout d'abord que les fonctions dérivées u_j vérifient des propriétés analogues à celles vérifiées par la fonction u et rappelées ci-dessus.

Précisément, nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.4. — *Les fonctions u_j, $j \in \mathbb{N}$, vérifient les propriétés suivantes :*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\| u_j(t) \|^2}{|u_j(t)|^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{|Au_j(t)|^2}{\| u_j(t) \|^2} = \Lambda, \tag{2.9}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{|u_{j+1}(t)|^2}{\|u_j(t)\|^2} = \nu^2 \Lambda, \tag{2.10}$$

$$\lim_{t \to +\infty} (I - R_\Lambda) \frac{u_j(t)}{|u_j(t)|} = 0 \quad \textit{dans } H. \tag{2.11}$$

Ce résultat sera montré au paragraphe 3. Le théorème 2.1 en est une conséquence immédiate.

Dans la suite, nous désignons par $C_{j,m}(j=0, 1, \ldots, m=0, 1, \ldots)$ des constantes dépendant de l'ouvert Ω, éventuellement de ν, mais pas de u.

Soit j un entier positif ou nul. Notant $g_j = -(B(u))^{(j)}$, nous remarquons que la fonction $u_{j+1}(\equiv u^{(j+1)})$ vérifie l'équation différentielle :

$$u_{j+1} + \nu A u_j = g_j, \tag{2.12}$$

où, en particulier, la fonction g_j décroît « très vite » vers 0, dans le sens où :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{|g_j(t)|}{\|u_l(t)\|} = 0 \quad \text{pour tout } l=0, 1, 2, \ldots \tag{2.13}$$

En effet, utilisant la continuité de la forme bilinéaire de $V \times D(A)$ dans H, nous écrivons :

$$\frac{|g_j|}{\|u_l\|} \leqslant C_{j,1} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \frac{\|u_{j-k}\|}{\|u_l\|} |Au_k|;$$

puis des lemmes 2.3 et 2.4, nous déduisons la propriété (2.13).

La suite de ce paragraphe est consacrée à la démonstration des propriétés (2.3)-(2.6) et (2.7).

2.2. Démonstration du corollaire 2.2

Nous supposons le théorème 2.1 démontré.

(*a*) Montrons que :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\operatorname{Log} \|u_j(t)\|_m}{t} = -\nu\Lambda, \qquad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

D'après (2.4), il suffit de montrer que (2.14) est vraie pour $m=0$.

De l'égalité d'énergie :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_j(t)|^2 + \nu \|u_j(t)\|^2 = (g_j(t), u_j(t)), \qquad \forall t \geqslant t_0,$$

nous déduisons par intégration que :

$$\frac{1}{t}\operatorname{Log}|u_j(t)|=\frac{1}{t}\operatorname{Log}|u_j(s)|-\frac{\nu}{t}\int_s^t\frac{\|u_j(\tau)\|^2}{|u_j(\tau)|}\,d\tau+\frac{1}{t}\int_s^t\frac{(g_j(t),\,u_j(t))}{|u_j(t)|^2}\,d\tau,$$

pour tous s et t tels que $t_0 \leqslant s \leqslant t$. Mais, d'après (2.13) et le lemme 2.3, le terme contenant g_j converge vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Donc :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\operatorname{Log}|u_j(t)|}{t}=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{\nu}{t}\int_s^t\frac{\|u_j(\tau)\|^2}{|u_j(\tau)|^2}\,d\tau\right)=-\nu\Lambda.$$

Nous déduisons alors de la propriété (2.4) que (2.14) est vraie pour tout $m\in\mathbb{N}$.

(*b*) Notons $u_{\Lambda,j}=R_\Lambda u_j$. Utilisant la remarque 2.3 nous montrons exactement comme au paragraphe I.1 que $\lim_{t\to+\infty}e^{\nu\Lambda t}u_{\Lambda,j}(t)$ existe dans $D(A)$, et donc dans V_m, $\forall m\in\mathbb{N}$, et est égale à un vecteur propre (non nul) de A associé à la valeur propre Λ, soit $w_{\Lambda,j}$. De la remarque 2.3 nous déduisons aussi que $\lim_{t\to+\infty}e^{\nu\Lambda t}u_j(t)$ existe dans $D(A)$ et est égale à $w_{\Lambda,j}$.

Mais, projetant sur le sous-espace propre associé à la valeur propre Λ la dérivée j-ième de l'équation (2.1), nous obtenons :

$$u_{\Lambda,j+1}+\nu\Lambda u_{\Lambda,j}=R_\Lambda g_j.$$

Multipliant cette égalité par $e^{\nu\Lambda t}$ et faisant tendre t vers $+\infty$, nous obtenons que :

$$w_{\Lambda,j+1}+\nu\Lambda w_{\Lambda,j}=0 \quad \text{dans } V, \text{ donc dans } V_m, \qquad \forall m\in\mathbb{N}.$$

Notant $w_\Lambda=\lim_{t\to+\infty}e^{\nu\Lambda t}u_\Lambda(t)=\lim_{t\to+\infty}e^{\nu\Lambda t}u(t)$, nous avons donc :

$$(2.15)\quad \lim_{t\to+\infty}e^{\nu\Lambda t}u_{\Lambda,j}(t) =\lim_{t\to+\infty}e^{\nu\Lambda t}u_j(t)=(-\nu\Lambda)^j w_\Lambda \text{ dans } D(A).$$

Nous en déduisons alors que :

$$(2.16)\qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{u_j(t)}{|u_j(t)|}=\frac{w_\Lambda}{|w_\Lambda|}\quad\text{dans } D(A).$$

Puis, effectuant une récurrence sur m, nous déduisons de la propriété (2.5) (resp. (2.6)) que l'égalité (2.16) (resp. (2.15)) est vraie dans E_m, $\forall m\in\mathbb{N}$. □

2.3. Démonstration des propriétés (2.2) a (2.4)

Soit $m \geqslant 2$. Supposons que :

$$(2.17) \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{\| u_j(t) \|_p}{\| u_j(t) \|_{p-1}} \quad \text{existe et est non nulle,}$$

$$(2.18) \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{\| u_{j+1}(t) \|_{p-1}}{\| u_j(t) \|_{p-1}} \quad \text{existe et est non nulle,}$$

$p = 1, \ldots, m$.

(*a*) Écrivant, pour $j \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\| u_{j+1} \|_m}{\| u_j \|_m} = \frac{\| u_{j+1} \|_m}{\| u_{j+1} \|_{m-1}} \frac{\| u_{j+1} \|_{m-1}}{\| u_j \|_{m-1}} \frac{\| u_j \|_{m-1}}{\| u_j \|_m},$$

nous déduisons de (2.17)-(2.18) que, pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\| u_{j+1}(t) \|_m}{\| u_j(t) \|_m},$$

existe et est non nulle : c'est la propriété (2.18) avec $p = m+1$.

(*b*) Montrons que :

$$(2.19) \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{\| Au_j(t) \|_{m-1}}{\| u_j(t) \|_m} = \frac{1}{\nu} \lim_{t \to +\infty} \frac{\| u_{j+1}(t) \|_{m-1}}{\| u_j(t) \|_m}, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

De l'équation (2.12), nous déduisons que :

$$(2.20) \quad \frac{\nu^2 \| Au_j \|_{m-1}^2}{\| u_j \|_m^2} = \frac{\| u_{j+1} \|_{m-1}^2}{\| u_j \|_m^2} - 2 \frac{((g_j, u_{j+1}))_{m-1}}{\| u_j \|_m^2} + \frac{\| g_j \|_{m-1}^2}{\| u_j \|_m^2}.$$

Par ailleurs, l'application B est continue de $E_m \times E_m$ dans E_{m-1} (car $m \geqslant 2$) et donc :

$$\frac{\| g_j \|_{m-1}}{\| u_j \|_m} \leqslant C_{j,m} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \frac{\| u_{j-k} \|_m}{\| u_j \|_m} \| u_k \|_m,$$

ce qui, d'après le lemme 2.3 et le point (*a*) précédent, montre que :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\| g_j(t) \|_{m-1}}{\| u_j(t) \|_m} = 0, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

La propriété (2.19) est alors une conséquence de (2.20).

Comme les normes $\|\,.\,\|_{m+1}$ et $\|A\,.\,\|_{m-1}$ sont équivalentes sur l'espace E_{m+1} et que la limite du deuxième membre de l'égalité (2.19) existe et est non nulle d'après les hypothèses (2.17)-(2.18), nous avons montré la propriété (2.17) avec $p=m+1$.

(*c*) Nous déduisons du lemme 2.4 les propriétés (2.2)-(2.3); les propriétés (2.17)-(2.18) sont donc vérifiées pour $m=2$.

Nous avons donc montré, par récurrence, que les propriétés (2.17)-(2.18) sont vraies pour tout $p\in\mathbb{N}^*$; cela montre en particulier la propriété (2.4) et la propriété :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\|g_j(t)\|_m}{\|u_l(t)\|_p}=0,\qquad \forall j,\, l\in\mathbb{N},\quad \forall m,\, p\in\mathbb{N}. \tag{2.21}$$

En effet, nous avons démontré cette propriété en (2.13) pour $m=0, p=1$, tandis que nous la déduisons de ce qui précède dans les autres cas.

2.4. Démonstration de la propriété (2.5)

Soit $m\geqslant 1$. Supposons que :

$$\lim_{t\to+\infty}(A-\Lambda)\frac{u_j(t)}{\|u_j(t)\|_{p-1}}=0\quad \text{dans } E_{p-1}, \tag{2.22}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{u_{j+1}(t)+\nu\Lambda u_j(t)}{\|u_j(t)\|_p}=0\quad \text{dans } E_p, \tag{2.23}$$

pour tout $j\in\mathbb{N}$, pour $p=1,\ldots, m$.

(*a*) De l'équation (2.12), nous déduisons que :

$$(A-\Lambda)\,u_j=-\frac{1}{\nu}(u_{j+1}+\nu\Lambda u_j)+\frac{1}{\nu}\,g_j,$$

et donc :

$$\frac{\|(A-\Lambda)\,u_j\|_m}{\|u_j\|_m}\leqslant\frac{1}{\nu}\,\frac{\|u_{j+1}+\nu\Lambda u_j\|_m}{\|u_j\|_m}+\frac{1}{\nu}\,\frac{\|g_j\|_m}{\|u_j\|_m}.$$

La propriété (2.21) et l'hypothèse (2.23) permettent alors de déduire la propriété (2.22) avec $p=m+1$.

(*b*) De l'équation (2.12), nous déduisons aussi que :

$$A(u_{j+1}+\nu\Lambda u_j)=(A-\Lambda)\,u_{j+1}+\Lambda g_j,$$

et donc :

$$(2.24)\qquad \frac{\|A(u_{j+1}+\nu\Lambda u_j)\|_{m-1}}{\|u_j\|_{m+1}}\leqslant\frac{\|(A-\Lambda)\,u_{j+1}\|_{m-1}}{\|u_j\|_{m+1}}+\frac{\Lambda\|g_j\|_{m-1}}{\|u_j\|_{m+1}}.$$

Or, d'après la propriété (2.21), le terme de (2.24) contenant g_{j-1} admet une limite nulle pour $t\to+\infty$.

La propriété (2.3) et l'hypothèse (2.22) permettant alors de déduire de (2.24) que la propriété (2.23) est vérifiée pour $p=m+1$.

(*c*) Les propriétés (2.22)-(2.23) sont vérifiées pour $m=1$. Cela se déduit du lemme 2.4 et des expressions :

$$\frac{|(A-\Lambda)\,u_j|^2}{|u_j|^2}=\frac{|Au_j|^2}{|u_j|^2}-2\Lambda\frac{\|u_j\|^2}{|u_j|^2}+\Lambda^2,$$

$$\frac{\|u_{j+1}+\nu\Lambda u_j\|^2}{\|u_j\|^2}=\frac{\|u_{j+1}\|^2}{\|u_j\|^2}-2\Lambda\frac{|u_{j+1}|^2}{\|u_j\|^2}+\nu^2\Lambda^2+2\Lambda\frac{(g_j,\,u_{j+1})}{\|u_j\|^2},$$

où le terme contenant g_{j-1} admet une limite nulle pour $t\to+\infty$.

D'après les points (*a*), (*b*), (*c*), les propriétés (2.22)-(2.23) sont donc vraies pour tout $p\in\mathbb{N}^*$: cela montre en particulier la propriété (2.5).

2.5. Démonstration de la propriété (2.6)

Soit $m\geqslant 1$. Supposons que :

$$(2.25)\qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{(I-R_\Lambda)\,u_j(t)}{\|u_j(t)\|_p}=0\quad\text{dans } E_p,$$

pour tout $j\in\mathbb{N}$, pour $p=0,\ldots,m$.

(*a*) Soit $j\in\mathbb{N}$. De l'équation (2.12), nous déduisons que :

$$A(I-R_\Lambda)\,u_j=\frac{1}{\nu}(I-R_\Lambda)\,u_{j+1}+\frac{1}{\nu}(I-R_\Lambda)\,g_j,$$

et donc :

$$(2.26) \qquad \frac{\| A(I-R_\Lambda) u_j \|_{m-1}}{\| u_j \|_{m+1}} \leqslant \frac{1}{\nu} \frac{\| (I-R_\Lambda) u_{j+1} \|_{m-1}}{\| u_j \|_{m+1}} + \frac{1}{\nu} \frac{\| (I-R_\Lambda) g_j \|_{m-1}}{\| u_j \|_{m+1}}.$$

D'après la propriété (2.21) et la continuité de l'application $(I-R_\Lambda)$, le terme de (2.26) contenant g_j admet une limite nulle pour $t \to +\infty$. Donc de l'hypothèse (2.25) et de l'inégalité (2.26), nous déduisons que la propriété (2.25) est vérifiée avec $p=m+1$.

(*b*) Or, d'après la relation (2.11) du lemme 2.4, la propriété (2.25) est vraie pour $m=1$. En effet, il suffit d'écrire :

$$\frac{\| R_\Lambda u_j \|}{\| u_j \|} = \Lambda^{1/2} \frac{| R_\Lambda u_j |}{| u_j |} \frac{| u_j |}{\| u_j \|},$$

ce qui montre que :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\| R_\Lambda u_j(t) \|}{\| u_j(t) \|} = \lim_{t \to +\infty} \frac{| R_\Lambda u_j(t) |}{| u_j(t) |} = 1.$$

La propriété (2.6) est donc vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Le théorème 2.1 est donc démontré. □

3. Démonstration du lemme 2.4

Soit u la solution du problème (2.1) et soient $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ la suite des fonctions dérivées de la fonction u par rapport au temps. Soit :

$$\Lambda = \lim_{t \to +\infty} \rho_0(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\| u(t) \|^2}{| u(t) |^2},$$

la valeur propre de A obtenue précédemment (*cf.* § II.2.1). Les notations Λ_0, Λ_1, P_Λ, R_Λ sont celles introduites au paragraphe I.2.

Écrivons u_j sous la forme $u_j = p_j + R_\Lambda u_j + q_j$, avec :

$$(2.27) \qquad q_j = (I-P_\Lambda) u_j, \qquad p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \Lambda = \lambda_1, \\ P_{\Lambda_0} u_j & \text{si } \Lambda > \lambda_1. \end{cases}$$

Posons, pour $j \in \mathbb{N}$:

$$(2.28)\qquad \begin{cases} \rho_j = \dfrac{\|u_j\|^2}{|u_j|^2}, \quad \chi_j = \dfrac{|q_j|^2}{|u_j|^2}, \quad \xi_j = \dfrac{|p_j|^2}{|u_j|^2}, \\ v_j = (A - \rho_j)\dfrac{u_j}{|u_j|}, \end{cases}$$

et, pour $j \in \mathbb{N}^*$:

$$(2.29)\qquad \sigma_j = \frac{|u_j|^2}{\|u_{j-1}\|^2}, \qquad r_j = \left(u_j + \frac{\sigma_j}{\nu} u_{j-1}\right) / \|u_{j-1}\|.$$

Remarquons que les notations utilisées ici sont différentes de celles utilisées au paragraphe I.2, ρ_0 désignant toutefois la même quantité.

3.1. La démonstration du lemme 2.4 se fait par récurrence sur j.

Rappelons (*cf.* remarque I.2.6.) que nous avons montré que :

$$(2.30)\qquad \Lambda = \lim_{t \to +\infty} \rho_0(t),$$

$$(2.31)\qquad v_0 \in L^2(t_0, +\infty; H),$$

$$(2.32)\qquad \lim_{t \to +\infty} (\chi_0(t) + \xi_0(t)) = 0.$$

Donnons ci-dessous quel est, par exemple, le schéma de la première étape de la récurrence.

(*a*) D'une inéquation différentielle vérifiée par σ_1, nous déduisons que $\lim_{t \to +\infty} \sigma_1(t)$ existe et que la fonction r_1 appartient à $L^2(t_0, +\infty; V)$. De l'équation $u_1 + \nu Au + B(u) = 0$ et de la propriété (2.31), nous déduisons que

$\lim_{t\to+\infty} \dfrac{\sigma_1(t)}{\nu^2} = \Lambda$; puis que $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{|Au(t)|^2}{\|u(t)\|^2}$ existe et est égale à Λ.

(*b*) D'une inéquation différentielle vérifiée par ρ_1 (similaire à celle vérifiée par ρ_0), nous déduisons que $\lim_{t \to +\infty} \rho_1(t)$ existe et est une valeur propre de A, puis que la fonction v_1 appartient à $L^2(t_0, +\infty; H)$. De la propriété $r_1 \in L^2(t_0, +\infty; V)$ montrée en (*a*) et de l'équation $u_1 + \nu Au + B(u) = 0$, nous déduisons que $\lim_{t \to +\infty} \rho_1(t) = \Lambda$. Enfin, de la même façon qu'au paragraphe I.3.2, nous en déduisons que $\lim_{t \to +\infty} (\chi_1(t) + \xi_1(t)) = 0$.

3.2. Inégalités différentielles vérifiées par les fonctions ρ_j, χ_j, ξ_j et σ_j.

Montrons que, pour $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{d\rho_j}{dt} + \nu |v_j|^2 \leqslant \frac{1}{\nu} \frac{|g_j|^2}{|u_j|^2}, \tag{2.33}$$

$$\frac{d\chi_j}{dt} + \nu \frac{\|g_j\|^2 - \chi_j \|u_j\|^2}{|u_j|^2} \leqslant \frac{1}{\nu(\Lambda_1 - \Lambda)} \frac{|g_j|^2}{|u_j|^2}, \tag{2.34}$$

$$\frac{d\xi_j}{dt} - \nu \frac{\xi_j \|u_j\|^2 - \|p_j\|^2}{|u_j|^2} \geqslant - \frac{1}{\nu(\Lambda - \Lambda_0)} \frac{|g_j|^2}{|u_j|^2}, \tag{2.35}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d\sigma_j}{dt} + \sigma \|r_j\|^2 = \left(\frac{g_j + (\sigma_j/\nu) g_{j-1}}{\|u_{j-1}\|}, \frac{u_j}{\|u_{j-1}\|} \right). \tag{2.36}$$

Les inégalités (2.33)-(2.35) sont obtenues exactement comme dans le cas $j=0$, car la fonction u_j vérifie l'équation $(du_j/dt) + \nu A u_j = g_j$, similaire à l'équation (2.1) vérifiée par la fonction u.

Montrons l'égalité (2.36). De l'identité :

$$\frac{1}{2} \frac{d\sigma_j}{dt} = \frac{1}{\|u_{j-1}\|^2} \left[\frac{du_j}{dt} - \sigma_j A u_{j-1}, u_j \right]$$

et de l'équation différentielle vérifiée par u_j, nous déduisons que :

$$\frac{1}{2} \frac{d\sigma_j}{dt} = - \frac{\nu}{\|u_{j-1}\|^2} \left[\|u_j\|^2 + \frac{\sigma_j}{\nu} ((u_{j-1}, u_j)) \right] + \frac{1}{\|u_{j-1}\|^2} (g_j, u_j). \tag{2.37}$$

Or, multipliant par u_j dans H la relation $u_j + \nu A u_{j-1} = g_{j-1}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_j}{\nu} ((u_{j-1}, u_j)) &= - \frac{\sigma_j}{\nu^2} |u_j|^2 + \frac{\sigma_j}{\nu^2} (g_{j-1}, u_j) \\ &= \left\| u_j + \frac{\sigma_j}{\nu} u_{j-1} \right\|^2 - \|u_j\|^2 - \frac{\sigma_j}{\nu} (g_{j-1}, u_j), \end{aligned} \tag{2.38}$$

d'après la définition de σ_j.

Utilisant (2.38) dans (2.37), nous obtenons l'égalité (2.36).

Calculons aussi $|r_j|^2, j\in\mathbb{N}^*$. Pour cela, écrivons :

$$\left|u_j+\frac{\sigma_j}{\nu}u_{j-1}\right|^2=|u_j|^2+\frac{2\sigma_j}{\nu}(u_j, u_{j-1})+\frac{\sigma_j^2}{\nu^2}|u_{j-1}|^2. \tag{2.39}$$

Puis, multipliant par u_{j-1} dans H la relation $u_j+Au_{j-1}=q_{j-1}$, nous obtenons :

$$\frac{\sigma_j}{\nu}(u_j, u_{j-1})=-\frac{\sigma_j}{\nu}\|u_{j-1}\|^2+\frac{\sigma_j}{\nu}(g_{j-1}, u_{j-1}) \tag{2.40}$$

$$=-|u_j|^2\left[1-\frac{1}{\nu}\frac{(g_{j-1}, u_{j-1})}{\|u_{j-1}\|^2}\right].$$

De (2.39)-(2.40), nous déduisons une expression de $|r_j|^2$:

$$|r_j|^2=\frac{1}{\nu^2}\frac{\sigma_j^2}{\rho_{j-1}}-\sigma_j\left[1-\frac{2}{\nu}\frac{(g_{j-1}, u_{j-1})}{\|u_{j-1}\|^2}\right]. \tag{2.41}$$

Remarquons que :

$$|r_1|^2=\frac{1}{\nu^2}\frac{\sigma_1^2}{\rho_0}.$$

Nous verrons plus loin que, dans l'expression (2.41) ($j\geqslant 2$), le terme $(g_{i-1}, u_{j-1})/\|u_{j-1}\|^2$ converge très vite vers 0 quand $t\to+\infty$.

3.3. Fin de la démonstration du lemme 2.4

Nous opérons une récurrence sur j de la manière suivante.

Soit $j\geqslant 1$. Supposons que :

$$\lim_{t\to+\infty}\rho_p(t)=\Lambda, \qquad p=0,\ldots,j-1, \tag{2.42}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\rho_p(t)}{\nu^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{|Au_{p-1}(t)|^2}{\|u_{p-1}(t)\|^2}=\Lambda, \qquad p=1,\ldots,j-1, \tag{2.43}$$

$$\lim_{t\to+\infty}(\chi_p(t)+\xi_p(t))=0, \qquad p=0,\ldots,j-1, \tag{2.44}$$

(2.45) Il existe $t_{j-1}\geqslant t_0$ tel que $v_{j-1}\in L^2(t_{j-1}, +\infty; H)$.

Les propriétés (2.42)-(2.43) impliquent en particulier que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\|u_{j-p}(t)\|}{\|u_{j-1}(t)\|}=(\nu\Lambda)^{p-1}, \qquad p=1,\ldots,j-1, \tag{2.46}$$

tandis que la propriété (2.45) implique l'existence d'une suite $(\tau_n)_{n\geqslant 0}$ tendant vers $+\infty$ telle que :

$$\text{(2.47)} \qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{|Au_{j-1}(\tau_n)|}{|u_{j-1}(\tau_n)|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\|u_{j-1}(\tau_n)\|^2}{|u_{j-1}(\tau_n)|^2}=\Lambda.$$

(*a*) *Étude de la fonction* σ_j

(i) Montrons qu'il existe un réel $t_j\geqslant t_0$, et une fonction $\Phi_j\geqslant 0$, appartenant à $L^1(t_j,+\infty)$ tels que :

$$\text{(2.48)} \qquad \frac{d\sigma_j}{dt}+\nu\|r_j\|^2\leqslant\sigma_j^2\Phi_j \quad \text{sur } (t_j,+\infty).$$

Pour cela, estimons le second membre de l'égalité (2.36). Écrivons :

$$\frac{(g_j+(\sigma_j/\nu)g_{j-1},u_j)}{\|u_{j-1}\|^2}$$
$$=(B(r_j,u),r_j)-\frac{\sigma_j}{\nu}\left[B(r_j,u)+B(u,r_j),\frac{u_{j-1}}{\|u_{j-1}\|}\right]$$
$$+\left[\sum_{p=1}^{j-1}\binom{j}{p}B\left[\frac{u_{j-p}}{\|u_{j-1}\|},u_p\right]\right.$$
$$\left.+\frac{\sigma_j}{\nu}\sum_{p=1}^{j-2}\binom{j-1}{p}B\left[\frac{u_{j-1-p}}{\|u_{j-1}\|},u_p\right],\frac{u_j}{\|u_{j-1}\|}\right],$$

Dans les deux premiers termes, nous utilisons la continuité de l'application B de $V\times V$ dans l'espace $D(A^{-1/4})$, tandis que, dans le troisième terme, nous utilisons la continuité de l'application B de $V\times D(A^{3/4})$ dans l'espace H. Nous obtenons :

$$\text{(2.49)} \quad \frac{(g_j+(\sigma_j/\nu)g_{j-1},u_j)}{\|u_{j-1}\|^2}$$
$$\leqslant C_0\|u\|\left(|r_j|^{1/2}\|r_j\|^{3/2}+\frac{\sigma_j}{\nu}\lambda_1^{-1/4}\|r_j\|\right)$$
$$+C_1\sigma_j^{1/2}\left[\sum_{p=1}^{j-1}\binom{j}{p}\frac{\|u_{j-p}\|}{\|u_{j-1}\|}|u_p|_{3/2}\right.$$
$$\left.+\frac{\sigma_j}{\nu}\left[\sum_{p=1}^{j-2}\binom{j-1}{p}\frac{\|u_{j-1-p}\|}{\|u_{j-1}\|}|u_p|_{3/2}\right]\right].$$

Utilisant la formule de Young, nous déduisons de (2.36) et (2.49) que :

$$(2.50)\quad \frac{d\sigma_j}{dt}+\nu\|r_j\|^2\leqslant C_2(|r_j|^2\,\|u\|^2+\frac{\sigma_j^2}{\nu^2}\lambda_1^{-1/2})\,\|u\|^2 +\sigma_j^{1/2}\left(1+\frac{\sigma_j}{\nu}\right)\psi_j,$$

où nous avons posé :

$$\psi_j=C_1\left[\sum_{p=1}^{j-1}\binom{j}{p}\frac{\|u_{j-p}\|}{\|u_{j-1}\|}|u_p|_{3/2}+\sum_{p=1}^{j-2}\binom{j-1}{p}\frac{\|u_{j-1-p}\|}{\|u_{j-1}\|}|u_p|_{3/2}\right].$$

D'après le lemme 2.3 et la propriété (2.46), la fonction ψ_j est intégrable sur l'intervalle $(t_0,\,+\infty)$.

Par ailleurs, comme $\lim_{t\to\infty}\dfrac{(g_{j-1},\,u_{j-1})}{\|u_{j-1}\|^2}=0$, il existe un réel $t_j\geqslant t_0$ tel que :

$$(2.51)\qquad \operatorname{Sup}_{t\geqslant t_j}\frac{(g_{j-1},\,u_{j-1})}{\|u_{j-1}\|^2}\leqslant\frac{\nu}{2};$$

donc, d'après (2.41), nous avons :

$$(2.52)\qquad |r_j(t)|\leqslant\frac{1}{\nu}\,\frac{\sigma_j(t)}{\rho_{j-1}^{1/2}(t)}\leqslant\frac{1}{\nu\lambda_1^{1/2}}\,\sigma_j(t),\qquad \forall\, t\geqslant t_j.$$

De plus, la fonction σ_j est minorée sur $[t_j,\,+\infty[$. En effet, d'après (2.40) :

$$\nu-\frac{(g_{j-1},\,u_{j-1})}{\|u_{j-1}\|^2}=-\frac{(u_j,\,u_{j-1})}{\|u_{j-1}\|^2},$$

puis, d'après (2.51) :

$$(2.53)\quad \frac{\nu}{2}\leqslant\nu-\frac{(g_{j-1}(t),\,u_{j-1}(t))}{\|u_{j-1}(t)\|^2} \leqslant\frac{|u_j(t)|}{\|u_{j-1}(t)\|}\,\frac{|u_{j-1}(t)|}{\|u_{j-1}(t)\|}\leqslant\left(\frac{\sigma_j(t)}{\lambda_j}\right)^{1/2},\qquad \forall\, t\geqslant t_j,$$

Utilisant la majoration (2.52) de $|r_j|$ et la minoration (2.53) de σ_j, nous mettons l'inégalité (2.50) sous la forme (2.48).

(ii) Le passage à la limite pour $t \to +\infty$ se fait maintenant de façon standard. En effet, intégrant l'inégalité (2.47), nous obtenons que :

$$\frac{1}{\sigma_j(s)} - \int_s^{+\infty} \Phi_j(\tau)\, d\tau \leqslant \frac{1}{\sigma_j(t)}, \qquad \forall s,\ t, \quad t_j \leqslant s \leqslant t;$$

donc $\lim_{t \to +\infty} \sigma_j(t)$ existe, est non nulle, mais peut éventuellement être égale à $+\infty$.

Or, de l'équation $u_j + \nu A u_{j-1} = g_{j-1}$ et de (2.53), nous déduisons que :

$$(2.54) \quad \frac{\| u_{j-1} \|}{| u_{j-1} |} \left(\nu - \frac{(g_{j-1}, u_{j-1})}{\| u_{j-1} \|^2} \right) \leqslant \sigma_j^{1/2} \leqslant \nu \frac{| A u_{j-1} |}{\| u_{j-1} \|} + \frac{| g_{j-1} |}{\| u_{j-1} \|}.$$

Les termes contenant g_{j-1} admettent une limite nulle quand $t \to +\infty$. Utilisant la suite $(\tau_n)_{n \geqslant 0}$ définie par (2.47), nous déduisons des inégalités (2.54) que :

$$(2.55) \qquad \lim_{t \to +\infty} \sigma_j(t) = \nu^2 \Lambda.$$

Enfin, comme d'après l'équation vérifiée par u_j nous avons aussi :

$$\nu \frac{\| u_{j-1} \|}{| u_{j-1} |} \leqslant \nu \frac{| A u_{j-1} |}{\| u_{j-1} \|} \leqslant \frac{| u_j |}{\| u_{j-1} \|} + \frac{| g_{j-1} |}{\| u_{j-1} \|},$$

nous déduisons de (2.42) et (2.55) que :

$$(2.56) \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{| A u_{j-1}(t) |^2}{\| u_{j-1}(t) \|^2} = \Lambda.$$

Nous avons donc montré la relation (2.43) pour $p = j$.

(*b*) *Étude de la fonction* ρ_j

(i) Des résultats obtenus au paragraphe (*a*), nous déduisons qu'il existe une suite, encore notée $(\tau_n)_{n \geqslant 0}$, tendant vers $+\infty$, telle que :

$$(2.57) \qquad \lim_{n \to +\infty} \rho_j(\tau_n) = \Lambda.$$

En effet, la fonction σ_j étant bornée sur $(t_j, +\infty)$, la fonction $\| r_j \|^2$ est, d'après (2.48), intégrable sur $(t_j, +\infty)$: donc il existe une suite $(\tau_n)_{n \geqslant 0}$ telle que :

$$(2.58) \qquad \lim_{n \to +\infty} \| r_j(\tau_n) \| = 0.$$

Or, nous avons (*cf.* (2.38)) :

$$\|r_j\|^2 = \frac{\|u_j\|^2}{\|u_{j-1}\|^2} - \frac{\sigma_j^2}{\nu^2} + \frac{2\sigma_j}{\nu^2}\frac{(g_{j-1}, u_j)}{\|u_{j-1}\|^2}. \tag{2.59}$$

Le terme contenant g_{j-1} tend vers zéro car :

$$\frac{|(g_{j-1}, u_j)|}{\|u_{j-1}\|^2} \leqslant \frac{|g_{j-1}|}{\|u_{j-1}\|}\sigma_j^{1/2}.$$

De (2.58)-(2.59), nous déduisons que :

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_j(\tau_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\|u_j(\tau_n)\|^2}{\|u_{j-1}(\tau_n)\|^2}\frac{1}{\sigma_j(\tau_n)} = \Lambda.$$

(ii) Montrons qu'il existe une fonction, encore notée Φ_j, positive intégrable sur $(t_j, +\infty)$, telle que :

$$\frac{|g_j|^2}{|u_j|^2} \leqslant \rho_j \Phi_j. \tag{2.60}$$

Utilisant la continuité de la forme B de l'espace $V \times D(A)$ à valeurs dans H, nous écrivons :

$$\frac{|g_j|}{|u_j|} \leqslant C_0 \sum_{p=0}^{j} \binom{j}{p} \frac{\|u_{j-p}\|}{|u_j|} |Au_p|;$$

Ci-dessus, le terme $\|u_{j-p}\|/|u_j|$ est majoré sur $(t_j, +\infty)$ pour $p=1,\dots,j$, tandis que pour $p=0$, ce terme est égal à $\rho_j^{1/2}$. Par ailleurs, les fonctions $|Au_p|$ sont intégrables sur $(t_j, +\infty)$, d'après le lemme 2.3.

Donc, nous avons montré l'existence d'une fonction intégrable $\Phi_j \geqslant 0$, telle que :

$$\frac{d\rho_j}{dt} + \nu |v_j|^2 \leqslant \rho_j \Phi_j \quad \text{sur } (t_j, +\infty). \tag{2.61}$$

Des inégalités analogues sont vérifiées par les fonctions ξ_j et χ_j.

Nous montrons de la même façon que dans le cas $j=0$ (*cf.* § I.3.2) que $\lim_{t\to+\infty} \rho_j(t)$ existe, que cette limite est égale à Λ d'après (2.57), puis que $\lim_{t\to+\infty} \chi_j(t)$ et $\lim_{t\to+\infty} \xi_j(t)$ existent et sont nulles.

Enfin, nous déduisons aussi de (2.61) que la fonction v_j appartient à l'espace $L^2(t_j, +\infty; H)$. Nous avons donc montré les propriétés (2.42) et (2.44)-(2.45) pour $p=j$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] FOIAS (C.) et SAUT (J.-C.). — Limite du rapport de l'enstrophie sur l'énergie pour une solution faible des équations de Navier-Stokes, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 293, série I, 1981, p. 241-244.

[2] FOIAS (C.) et SAUT (J. C.). — Asymptotic behavior, as $t \to +\infty$, of solutions of Navier-Stokes equations, *Séminaire du Collège de France*, 1981-1982, à paraître aux Éditions Pitman.

[3] GUILLOPE (C.). — Comportement à l'infini des solutions des équations de Navier-Stokes et propriété des ensembles fonctionnels invariants (ou attracteurs), *Annales de l'Institut Fourier*, t. 32, 1982, p. 1-37.

[4] HEYWOOD (J. G.). — The Navier-Stokes equations: on the existence, regularity and decay of solutions, *Indiana U. Math. J.*, t. 29, 1980, p. 639-681.

[5] HEYWOOD (J. G.) et RANNACHER (R.). — Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem, Part I: Regularity of solutions and second-order estimates for spatial discretization, *S.I.A.M. J. Numer. Anal.*, t. 19, 1982, p. 275-311.

[6] KISELEV (A. A.) et LADYZENSKAIA (O. A.). — On existence and uniqueness of the solution of the nonstationary problem for a viscous incompressible fluid, *Ann. Math. Soc. Transl.*, (2), t. 24, 1963, p. 79-106.

[7] LADYZENSKAIA (O. A.). — Solutions "in the large" of nonstationary boundary value problem for the Navier-Stokes system with two space variables, *Comm. Pure Appl. Math.*, t. 12, 1959, p. 427-433.

[8] LERAY (J.). — Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.*, t. 63, 1934, p. 193-248.

[9] LERAY (J.). — Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois, *J. Math. Pures et Appl.*, t. 13, 1934, p. 331-418.

[10] LIONS (J. L.). — *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier Villars, Paris, 1969.

[11] TEMAM (R.). — *Navier-Stokes equations, Theory and numerical analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

[12] TEMAM (R.). — Behaviour at time $t=0$ of the solutions of semi-linear evolution equations, *J. Diff. Eq.*, t. 43, 1982, p. 73-82.

[13] TEMAM (R.). — *Navier-Stokes equations and nonlinear analysis, N.S.F./C.B.M.S. Regional Conference*, Dekalb, 1981, S.I.A.M., 1983.

[14] BARDOS (C.) et TARTAR (L.). — Sur l'unicité rétrograde des équations paraboliques et quelques questions voisines, *Arch. Rat. Mech. An.*, t. 50, 1973, p. 10-25.

[15] FOIAS (C.) et SAUT (J. C.). — Asymptotic behavior, as $t \to +\infty$, of solutions of Navier-Stokes equations and nonlinear spectral manifolds, *Indiana Math. J.*, (à paraître).

[16] SERRIN (J.). — The initial value problem for the Navier-Stokes equation, *Nonlinear problems*, University of Wisconsin Press, R. E. LANGER éd., 1963.