BULLETIN DE LA S. M. F.

DENIS FEYEL

Sur la théorie fine du potentiel

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 41-57
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__41_0>

Bull. Soc. math. France,
111, 1983, p. 41-57.

SUR LA THÉORIE FINE DU POTENTIEL

PAR

DENIS FEYEL (*)

RÉSUMÉ. — On étudie les propriétés fines des fonctions fortement surmédianes presque boréliennes associées à un noyau de Hunt. On dégage le rôle essentiel des ensembles « presque G_δ fins » en théorie des ensembles semi-polaires. Les méthodes sont purement potentialistes.

ABSTRACT. — Fine properties of strongly supermedian functions are studied with respect to a Hunt kernel. We point out the essential role of "fine almost G_δ" in semi-polar sets theory. We use of purely potentialist methods.

Introduction

Dans des articles antérieurs [F 1] et [F 2], l'auteur avait mis au point quelques méthodes propres à l'étude des fonctions fortement surmédianes, de la topologie fine, des ensembles semi-polaires. Ces méthodes « purement potentialistes » dépendaient toujours d'une mesure θ fixée, et ne fournissaient donc que des propriétés vraies sauf peut-être sur un polaire relatif à la mesure de référence.

On se propose ici, à partir de la donnée d'un noyau de Hunt sur un espace LCD, de comparer et de recoller les quasi-notions relatives aux différentes mesures θ. De ce point de vue, les théorèmes 2°, 4° et 9° sont cruciaux. On arrive bien naturellement à la notion de fonction presque borélienne des probabilistes, et l'on obtient un certain nombre de propriétés nouvelles ou anciennes mais seulement accessibles aux méthodes probabilistes (*cf.* [D 1] et [M 2]). On voit par exemple que même sans l'hypothèse de continuité absolue, les propriétés de rareté métrique des ensembles sont liées à leurs propriétés de rareté en topologie fine (th. 10° et 11°). De même la formule de décomposition de Mertens est valable sans condition (th. 7°).

Signalons enfin que l'on pourrait étendre toute cette étude à des cônes de potentiels définis sur des espaces mesurables beaucoup plus généraux que les espaces LCD (*cf.* [F 6] pour une notion de cône « semi-adapté »).

(*) Texte reçu le 30 avril 1982.

Denis FEYEL, Université de Paris-VI, Équipe d'Analyse, Tour 46-0, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1983/41/$ 5.00

I. Fonctions fortement surmédianes

L'espace de base X est localement compact à base dénombrable. Nous considérons la théorie du potentiel associée à un noyau de Hunt V. On pourrait généraliser (*cf.* [F 6]) mais cela apporterait des difficultés étrangères à la question.

La relation du balayage $\mu \prec \nu$ entre mesures de Radon bornées $\geqslant 0$ est la relation $\mu V \leqslant \nu V$. On notera B_θ l'ensemble des balayées de θ : c'est un ensemble vaguement métrisable et compact.

Dans tout cet article, le mot « mesure » signifiera « mesure $\geqslant 0$ de Radon bornée ». On écrira $\mu \in \mathscr{M}^+$.

Une fonction $f \geqslant 0$ quelconque est dite « fortement surmédiane » si l'on a $\int^* f\, d\mu \leqslant f(x)$ pour tout $x \in X$ et toute $\mu \in B_x = B_{\varepsilon_x}$.

On notera S^* l'ensemble de ces fonctions. S^* est stable par les passages aux enveloppes inférieures quelconques et aux enveloppes supérieures des suites croissantes. Si $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est quelconque, la fonction :

$$R\,\varphi = \mathrm{Min}\,\{f \in S^* / f \geqq \varphi\},$$

existe : c'est la réduite de φ.

On notera C_σ le sous-ensemble des $f \in S^*$ qui sont excessives et finies. Si $\varphi \in \mathscr{C}_0(X)$, sa réduite $R\varphi$ est excessive et $\in \mathscr{C}_0(X)$. Si $\varphi \geqq 0$ est « analytique » (i. e. à sous-graphe analytique dans $X \times \overline{\mathbb{R}^+}$), la fonction $R\,\varphi$ l'est aussi et l'on a la relation du balayage (Mokobodzki) (MO 1) :

$$\theta(R\,\varphi) = \sup\{\mu(\varphi)/\mu \in B_\theta\},$$

pour toute mesure $\theta \in \mathscr{M}^+$.

Si $\varphi \geqslant 0$ est quelconque et $\theta \in \mathscr{M}^+$, on définit :

$$c_\theta(\varphi) = \int^* R\,\varphi\, d\theta.$$

c_θ est une capacité fonctionnelle de Choquet (C). Si E est un ensemble, on écrit aussi $c_\theta(E) = c(1_E)$. c_θ est fortement sous-additive sur les ensembles analytiques. On en déduit ([ME], p. 72) qu'un ensemble analytique θ-polaire (i. e. $c_\theta(E) = 0$) est contenu dans un G_δ-polaire.

1° DÉFINITION. — *Une fonction $f \geqslant 0$ est dite « presque analytique » (en abrégé p. a.) si pour toute mesure $\theta \geqslant 0$ il existe deux fonctions g et $h \geqslant 0$ analytiques telles que :*

$$g \leqslant f \leqslant h \quad \text{partout}$$

et telles que l'ensemble $\{h > g\}$ soit contenu dans un G_δ θ-polaire.

On définit de même la notion de fonction presque borélienne (en abrégé p. b.).

Ces fonctions sont universellement mesurables.

Une fonction f est dite « presque continue » si elle est θ-quasi-continue pour toute mesure θ; c'est-à-dire si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert G de capacité $c_\theta(G) < \varepsilon$ tel que f soit continue sur $X \setminus G$. Une telle fonction est évidemment p. b.

Si θ est fixée, $\mathscr{L}^1(c_\theta)$ est l'espace des f qui sont θ-quasi-continues et telles que :

$$\operatorname{Inf}\{c_\theta(\varphi - \psi) / \psi \in \mathscr{C}_0(X)\} = 0.$$

On notera $\mathscr{R} = \bigcap_\theta \mathscr{L}^1(c_\theta)$: les éléments de $\mathscr{R}$ sont des fonctions bornées presque continues.

Soit $\mathscr{L}^\infty$ l'espace des fonctions universellement mesurables et bornées. On a $V_t(\mathscr{L}^\infty) \subset \mathscr{R}$ pour tout $t > 0$. On en déduit :

(*a*) $\varphi \in \mathscr{R} \Leftrightarrow \varphi \in \mathscr{L}^\infty$ et $\operatorname{Lim}_{t \to \infty} R(|\varphi - t V_t \varphi|) \equiv 0$;

(*b*) toute fonction excessive u est p. b. (et même presque s. c. i.).

2° THÉORÈME. — *Toute fonction fortement surmédiane presque analytique est presque borélienne.*

Démonstration. — Disons qu'une fonction $\varphi \geqslant 0$ est de type F_σ si elle est enveloppe supérieure d'une suite de fonctions s. c. s. Notons u la fonction étudiée, et soit $\mathscr{A}$ l'ensemble filtrant croissant de toutes les fonctions de type F_σ minorant u. Fixons $\theta \in \mathscr{M}^+$. Il existe $h \in \mathscr{A}$ telle que $f \in \mathscr{A}$ implique $f \leqslant h$ θ-quasi-partout : en effet, soit $\mathscr{A}'$ l'ensemble des Rf pour $f \in \mathscr{A}$, donc $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$ est cofinal dans $\mathscr{A}$. Si u est bornée, les éléments de $\mathscr{A}'$ définissent des fonctionnelles surmédianes au sens de [F 2] et l'existence de $h \in \mathscr{A}'$ résulte de ([F 2], p. 191). Si u n'est pas bornée, on utilise la fonction Arc tg : on obtient une h de type F_σ ayant la propriété voulue, et l'on peut la remplacer par $Rh \in \mathscr{A}'$.

L'ensemble $\{w>h\}$ est θ-polaire, car si l'on avait $w>t>s>h$ sur un compact K, on aurait $h+(t-s)1_K \in \mathscr{A}$, donc $\leqslant h$ θ-q. p., ce qui exige $c_\theta(K)=0$ puisque $h<\infty$ sur K. Soit alors u excessive s. c. i. valant $+\infty$ sur $(w>h)$ et $\theta(u)<\infty$. La fonction $h'=h+\mathrm{Inf}_n\ (u/n)$ est borélienne, $h'=h$ θ-quasi-partout, et $h \leqslant w \leqslant h'$. En faisant varier θ on trouve que w est presque borélienne.

Remarque. — On peut supposer $h=Rh$, i. e. $h \in S^*$, donc aussi $h' \in S^*$.

3° THÉORÈME. — *Le cône S des fonctions fortement surmédianes finies et presque boréliennes est un cône de potentiels, et $V(\mathscr{C}_0(X))$ est dense dans S pour $\sigma(S, \mathscr{M}^+)$.*

En effet, si f et $g \in S$, $R(f-g)$ est p. a. donc $\in S$ par le théorème, mais alors aussi $f-R(f-g)$ par ([F 2], p. 185). La densité de $V(\mathscr{C}_0(X))$ provient de ce que les $f \in S$ vérifient la relation du balayage.

Rappelons quelques propriétés : (qui résultent immédiatement de [F 2]) :

(a) si φ est p. a., $R\varphi$ est p. b. et $R\varphi = \mathrm{Max}\ (\varphi, \widehat{R\varphi})$: c'est la relation de Mertens. On en déduit que le sous-cône des $f \in S$ qui sont mesurables par rapport à la tribu engendrée par les excessives est aussi un cône de potentiels que nous noterons S_e;

(b) si E est fermé, et $f \in S$ est bornée, $R_f^E = R(1_E f)$ est presque continue sur $X \setminus E$ ([F 2], p. 187);

(c) S est dénombrablement réticulé en ordre spécifique, car d'après un résultat général de (MO 1) la borne inférieure $f \curlywedge g$ s'obtient comme limite commune des deux suites définies par récurrence :

$$f_0=f, \qquad g_0=g, \qquad f_{n+1}=f_n-R(f_n-g_n),$$
$$g_{n+1}=g_n-R(g_n-f_n);$$

(d) si E est p. a., et $f \in S$, la fonction $f \curlywedge R_f^E$ est « autoréduite » sur E, c'est la plus grande minorante spécifique de f ayant cette propriété, et l'on a $f \prec f \curlywedge R_f^E + f \curlywedge R_f^{X \setminus E}$ (théorème de partition de Brelot, *cf.* [B] et [F 5]).

II. Ensembles adjacents

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ inclus dans S. Nous dirons que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont adjacents si :

(a) $\mathscr{A}$ est filtrant croissant, $\mathscr{B}$ est filtrant décroissant;

(*b*) pour toute $\mu \in \mathcal{M}^+$, on a :

$$\operatorname{Sup}\{\mu(f)/f \in \mathcal{A}\} = \operatorname{Inf}\{\mu(g)/g \in \mathcal{B}\}.$$

En prenant dans (*b*) les mesures discrètes, on voit que la fonction $w = \operatorname{Sup} \mathcal{A} = \operatorname{Inf} \mathcal{B}$ appartient à S^*.

Nous dirons que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont fortement adjacents si l'on a aussi :

(*c*) pour toute $\theta \in \mathcal{M}^+$, il existe une suite croissante $f_n \in \mathcal{A}$, une suite décroissante $g_n \in \mathcal{B}$, telles que :

$$\operatorname{Sup}_n f_n = \operatorname{Inf}_n g_n, \quad \theta-\text{q. p.}$$

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont fortement adjacents, il est clair que la limite commune w est une fonction p. b. donc $w \in S$. Or, on a :

4. THÉORÈME. — *Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont adjacents, ils sont fortement adjacents.*

Démonstration. — Supposons d'abord w bornée : l'ensemble $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) définit un ensemble filtrant croissant de fonctionnelles surmédianes au sens de [F 2]. Le résultat découle alors de ([F 2], p. 191).

Dans le cas général, fixons θ. Toute fonction de $\mathcal{B}$ est finie donc la condition (*b*) entraîne que l'on a aussi pour $\mu \in \mathcal{M}^+$:

$$\sup\{\mu(\operatorname{Arc}\operatorname{tg} f)/f \in \mathcal{A}\} = \operatorname{Inf}\{\mu(\operatorname{Arc}\operatorname{tg} h)/h \in \mathcal{B}\},$$

i. e. que les ensembles Arc tg $\mathcal{A}$ et Arc tg $\mathcal{B}$ sont eux aussi adjacents : ils le sont donc fortement, d'où deux suites $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} f_n$ et $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} h_n$ donnant naissance à deux suites f_n et h_n vérifiant le (*c*).

On peut préciser la nature des éléments de S :

5° THÉORÈME. — *Si $f \in S$, f bornée, l'ensemble $\mathcal{A} = \{f\}$ et l'ensemble $\mathcal{B}$ des excessives s. c. i. bornées majorant f sont fortement adjacents.*

Démonstration. — Il suffit de montrer qu'ils sont adjacents; soit $\theta \in \mathcal{M}^+$, et soit $a > \theta(f)$. Il existe v θ-quasi-excessive $\geqslant f$ θ-quasi-partout et $\theta(v) < a$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert G de capacité $c_\theta(G) < \varepsilon$, et tel que $v \geqslant f$ et soit s. c. i. sur $X \setminus G$. La fonction $g = v \wedge M$ sur $X \setminus G$, M sur G majore f dès que $M \geqslant f$, et est s. c. i. partout. Posons $u = Rg$: u est excessive s. c. i. bornée, majore f et vérifie :

$$\theta(u) \leqslant c_\theta(g) \leqslant c_\theta(v) + M\, c_\theta(G) \leqslant \theta(v) + M\,\varepsilon < a,$$

si ε est assez petit.

Remarque. — Si f n'est pas bornée, on peut remplacer $\mathscr{B}$ par l'ensemble des excessives finies ou non, mais non nécessairement s. c. i.

III. Sur la topologie fine

C'est la topologie la moins fine rendant continues les fonctions excessives. Si p est un potentiel strict appartenant à $\mathscr{C}_0(X)$, l'adhérence fine d'un ensemble E p. a. est $\overline{E}=\{p=R_p^E\}$ d'après le théorème 5°, c'est donc un ensemble p. b., et il existe une base de la topologie formée d'ouverts p. b. Mokobodzki a remarqué aussi, à l'aide du théorème 5° que chaque point possède une base de voisinages compacts ordinaires et en a déduit que X est fortement tamisable.

Disons qu'un ensemble E est « presque G_δ fin » si E est p. b. et si pour toute mesure $\theta\in\mathscr{M}^+$ il existe une suite d'ouverts fins p. b. G_n telle que $E=\bigcap_n G_n$ θ-quasi-partout. D'après [F 1] tout E presque G_δ fin est un espace de Baire en topologie fine, et plus précisément, si des E_n sont ouverts fins relatifs finement denses dans E, $\bigcap_n E_n$ contient un ensemble A presque G_δ fin non θ-polaire; ceci $\forall\,\theta\in\mathscr{M}^+$.

IV. Potentiels semi-réguliers

Nous avons donné dans ([F 2], p. 192) la définition d'une fonctionnelle semi-régulière. Cela se traduit ici par :

DÉFINITION. — *Soit $q\in S$, q est dit « potentiel semi-régulier » s'il existe un noyau S^q tel que $S^q(F)=q\curlywedge R_q^F$ pour tout fermé F.*

Ce noyau vérifie alors le principe complet du maximum, admet une famille résolvante (*cf.* (T)), et toute fonction de S est S^q-surmédiane. On notera C_δ le sous-cône de S constitué des potentiels semi-réguliers.

q est dit « régulier » si $q\in C=C_\delta\cap C_\sigma$.

6° THÉORÈME. — *Soit $q\in S$. Pour que q soit un potentiel régulier, il faut et suffit que soit satisfait* (a), (b), *ou* (c). *Pour que q soit un potentiel semi-régulier, il faut et suffit que soit satisfait* (d) *ou* (e).

(a) $\mathrm{Inf}_t\, R(q-t\,V_t q)\equiv 0$,

(b) pour toute mesure θ telle que $\theta(q)<\infty$, $\mu\rightsquigarrow\mu(q)$ est continue sur B_θ;

(c) q est presque continue;

(d) pour toute mesure θ telle que $\theta\,(q)<\infty$, $\mu \rightsquigarrow \mu\,(q)$ est s. c. s. sur B_θ;

(e) q est « presque-s. c. s. ».

Les caractérisations (a), (b), (c) résultent de ([F 2], p. 193) et de la notion de fonction presque continue. Les caractérisations (d) et (e) résultent de ([F 2], p. 193) et du théorème suivant dont je dois une partie à Mokobodzki :

7° THÉORÈME (*décomposition de Mertens*). — *Toute $f \in S$ se décompose de manière unique sous la forme $f=u+p+q$ où $p \in C$, $u \in C_\sigma$ est étrangère à C_δ, et où $q \in C_\delta$ est étrangère à C_σ.*

Démonstration. — Posons $v=f \curlywedge \hat{f}$: il est clair que v est la plus grande minorante spécifique excessive de f. Donc $q=f-v$ est étrangère à C_σ : il s'ensuit ([F 2], p. 193) que $q \in C_\delta$. Il reste à extraire p de v : on ne peut raisonner comme dans [F 2] puisque S est seulement dénombrablement réticulé. Posons $v'=\operatorname{Inf}_t R\,(v-t\,V_t\,v)$ donc $v' \in S$ et $v' \prec v$ puisque pour tout $t>0$ $R\,(v-t\,V_t\,v) \prec v$. Puis par récurrence : $v_0=v$, $v_{n+1}=v_n-v'_n$. La suite v_n décroît spécifiquement. Posons $p=\operatorname{Inf}_n v_n$, $u=v-p$: c'est la décomposition cherchée. En effet, $v=p+\sum_{n\geqslant 0} v'_n$, donc $p \prec v$ d'où l'on déduit :

$$R(p-t\,V_t\,p) \leqslant R\,(v-t\,V_t\,v),$$

puis $p' \leqslant v'$, et de même $p' \leqslant v'_n$ puisque $p \prec v_n$. A la limite $p'=0$, donc $p \in C$.

Ensuite, soit $p_0 \in C$, et $p_0 \prec v$. On a $v=p_0+s$, donc $v' \leqslant p'_0+s'=s'$ puisque $p_0 \in C$. On a aussi $v' \geqslant s'$ car $v \succ s$ puis $v'=s'$, et $v_1=p_0+s_1$. Par récurrence on obtient $v_n=p_0+s_n$, et à la limite $p_0 \prec p$. D'après cela p est la plus grande minorante spécifique régulière de v, donc $u=v-p$ est étrangère à C et finalement à C_δ puisque $C=C_\delta \cap C_\sigma$.

V. Supports fins

Soit $q \in C_\delta$. Considérons la relation $\mu \prec_{(q)} \nu$ si $\mu \prec \nu$ et $\mu(q)=\nu(q)$: nous dirons que μ est « balayée de ν modulo q » et nous noterons $\mu \in B_\nu(q)$. Si $\nu(q)<\infty$, $B_\nu(q)$ est vaguement compact car $q \in C_\delta$. Si ξ et $\eta \in B_\nu(q)$ et $\nu(q)<\infty$, on a pour tout $p \in C_\delta$:

$$(\xi \curlywedge \eta)(p)=\operatorname{Inf}\left\{ \xi(u)+\eta(v) \quad \begin{matrix} u+v=p \\ u,\, v \in C_\delta \end{matrix} \right\},$$

donc $(\xi \curlywedge \eta)\,(q)=\nu\,(q)$ et par suite $\xi \curlywedge \eta \in B_\nu(q)$.

Alors $B_\nu(q)$ a un plus petit élément, soit $\tilde{\nu}$.

On note $\delta(q)$ et on appelle « support fin » de q l'ensemble des $x \in X$ tels que $\varepsilon_x = \tilde{\varepsilon}_x$.

8° THÉORÈME. — *$\delta(q)$ est un fermé fin presque borélien, et c'est le plus petit tel fermé fin F pour lequel on a $q = R_q^F$ ou aussi $q = S^q(F)$. Si de plus $q \in C$, $\delta(q)$ est un fermé fin régulier, c'est-à-dire que $R_p^{\delta(q)}$ est excessive pour tout $p \in C$.*

Démonstration. — On a d'abord $\tilde{\tilde{\mu}} = \tilde{\mu}$ dès que $\mu(q) < \infty$. En suivant maintenant une idée de La Pradelle, considérons la résolvante S_t^q associée au noyau S^q. Si $\nu(q) < \infty$, la relation $\mu \prec \nu$ modulo q équivaut à « $\mu \prec \nu$ et $\mu S_t^q = \nu S_t^q$ pour tout $t > 0$ ». Si $p \in C$, posons $p' = \sup t S_t^q p$, et $\mu'(p) = \mu(p')$: cela définit une mesure $\mu' \in B_\mu$, et $\mu'(q) \geqslant \overline{\mathrm{Lim}}_{t \to \infty} \mu t S_t^q q = \mu(q)$ car $\mu \rightsquigarrow \mu(q)$ est s. c. s. sur tout B_θ. Donc $\mu' \prec \mu$ modulo q, puis $\tilde{\mu} \prec \mu' \prec \mu$ modulo q.

On en déduit :

$$\tilde{\mu}' = \mu'' = \mu' \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mu} = \tilde{\tilde{\mu}} \prec \tilde{\mu}' \prec \tilde{\mu},$$

donc $\mu' = \tilde{\mu}$.

Si p est un potentiel strict, on voit alors que $F = \delta(q) = \{p = p'\}$ est un fermé fin p. b. car $p' \in S$ est finement s. c. s. et $p' \leqslant p$.

De plus, on a $p' = p$ sur F pour tout $p \in C$, donc $p' \geqslant R_p^F$, et $\mu^F \prec \tilde{\mu}$ pour toute μ intégrant q. On a toujours $\tilde{\mu}(p) = \tilde{\tilde{\mu}}(p) = \tilde{\mu}(p')$, donc $\tilde{\mu}$ est concentrée sur F et par suite $\tilde{\mu} \prec \mu^F$ puis $\tilde{\mu} = \mu^F$ et $p' = R_p^F$ pour tout $p \in C$. Enfin $\mu(R_q^F) = \mu^F(q) = \tilde{\mu}(q) = \mu(q)$, donc $q = R_q^F$. Si K est compact disjoint de F et $q_1 = S^q(K)$, on a $q_1 = R_{q_1}^K$ et $q_1 = R_{q_1}^F$, donc $\delta(q_1) \subset K \cap F = \emptyset$, puis $q_1 = 0$. Ainsi $S^q(X \setminus F) = 0$ et $q = S^q(F)$.

Si H est fermé fin p. b. et $q = S^q(H)$, alors d'abord $q = R_q^H$, puis $\mu^H \prec \mu$ modulo q pour toute μ intégrant q, donc $\mu^F = \tilde{\mu} \prec \mu^H$ et $F \subset H$.

Si $q \in C$, alors $R_p^F = \mathrm{Sup}_t\, t S_t^q p$ est excessive, et F est régulier.

COROLLAIRE. — *Si $q \in C_\delta$ et si H est fermé fin, alors $S^q(H) = q \curlywedge R_q^H$.*

Posons en effet $u = S^q(H)$ et $v = q \curlywedge R_q^H$: u et v sont dans C_δ, $\delta(u) \subset H$ implique $u = R_u^H \prec R_q^H$ donc $u \prec q \curlywedge R_q^H = v$, et $\delta(v) \subset H$ implique $v = S^v(H) \prec S^q(H) = u$, car S^q est additif en q.

DÉFINITION. — *Nous appellerons potentiel diffus tout potentiel $p \in C$ ne chargeant aucun point, i. e. $S^p(\{a\}) \equiv 0$ pour tout $a \in X$.*

PROPOSITION. — *Si p est un potentiel diffus, son support $\delta(p)$ est finement parfait.*

En effet, si a est isolé dans $\delta(p)$, $\delta(p)\setminus\{a\}$ est un fermé fin F tel que $S^p(F)=p$, donc $F\supset\delta(p)$, ce qui est absurde.

VI. Points réguliers, ensembles dérivés, et ensembles presque-semi-polaires

Un point $a\in X$ est dit régulier si $R_1^a\in C$, et irrégulier ou semi-polaire dans le cas contraire $\widehat{R}_1^a(a)<1$.

PROPOSITION. — *L'ensemble Y des points irréguliers est un $G_{\delta\sigma}$ (ordinaire), son complémentaire Z est donc un $F_{\sigma\delta}$.*

Démonstration. — On considère sur $X\times X$ le noyau de Hunt :

$$Wf(x, y)=\int f(z, y)\,V^x(dz).$$

Soit Δ la diagonale. Si p est un potentiel >0 appartenant à $\mathscr{C}_0(X)$ et si :

$$\alpha(y)>0, \qquad \alpha\in\mathscr{C}_0(X),$$

alors :

$$q(x, y)=p(x)\,\alpha(y)$$

est un potentiel sur $X\times X$, et :

$$Y=\{x\in X/\widehat{R}_q^\Delta(x, x)<1\}.$$

R_q^Δ est s. c. s. et tend vers zéro à l'infini, donc $\widehat{R}_q^\Delta=\sup_n n\,W_n R_q^\Delta$ est enveloppe supérieure d'une suite de fonctions ψ_n s. c. s. sur $X\times X$.

Par suite, $Y=\bigcup_\varepsilon\bigcap_n\{\psi_n(x)+\varepsilon<1\}$ est un $G_{\delta\sigma}$ et Z un $F_{\sigma\delta}$.

L'ensemble dérivé d'un ensemble E est défini par :

$$E'=\{x\in E/p(x)>R_p^{E\setminus x}(x)\},$$

où p est un potentiel strict $\in\mathscr{C}_0(X)$.

PROPOSITION. — *Si E est analytique (resp. p.a.), E' l'est aussi.*

Démonstration. — $x\in E'$ si et seulement si (x, x) appartient à $E\times X$ et vérifie $R_q^{(E\times X)\setminus\Delta}(x, x)=q(x, x)$ où q est le potentiel sur $X\times X$ de la démonstration précédente. La fonction $R_q^{(E\times X)\setminus\Delta}$ est analytique sur $X\times X$, donc E' est analytique par projection. Si E est seulement p. a., on fixe $\theta\in\mathscr{M}^+$, et on écrit $A\subset E\subset A\cup P$ où A est analytique et P un borélien θ-polaire. On a $A'\subset E'\subset A'\cup\overline{P}$, mais $\overline{P}$ est lui aussi θ-polaire. Donc E' est p. a. Si E est de plus fermé fin, E' l'est aussi, alors $E\setminus E'$ est p. b. ouvert fin relatif. Si E est seulement p. a., on a $E'=E\cap(\overline{E})'$ donc est bien p. a., mais aussi $E\setminus E'=E\setminus(\overline{E}\setminus\overline{E}')$ puisque $\overline{E}\setminus\overline{E}'$ est p. b.

DÉFINITION. — *Un ensemble E est semi-polaire s'il s'écrit* $(f\neq\hat{f})$ *où* $f\in S$, *il est presque semi-polaire si pour toute* $\theta\in\mathcal{M}^+$, *il est égal* θ*-quasi-partout à un ensemble semi-polaire.*

Il est clair que les points irréguliers sont les points semi-polaires, et que tout ensemble presque semi-polaire est inclus dans Y.

VII. Noyaux parfaits et noyaux réguliers

Si $p\in C$, on notera $c_\theta^p(E)=\theta(R_p^E)$ pour toute $\theta\in\mathcal{M}^+$, $c_x^p(E)=R_p^E(x)$ pour $x\in X$. Le théorème 9° qui suit identifie le dérivé fin E' d'un ensemble p. a. E avec tous ses dérivés fins dans les différentes θ-quasi-topologies.

9° THÉORÈME. — *Si E est presque analytique, on a pour toute mesure* $\theta\in\mathcal{M}^+$ *et pour tout* $p\in C$:

$$c_\theta^p(E')=\operatorname{Sup}\{\,c_\theta^p(K)/K \textit{ compact }\subset E,\ K \textit{ finement rare sur } E\,\}.$$

Remarquons que l'on a $K\subset E'$ dès que K est finement rare sur E, et qu'il suffit de montrer que l'ensemble des R_p^K qui est croissant est adjacent à la fonction $R_p^{E'}$. Commençons par un lemme dont je reproduis une démonstration de Mokobodzki (comparer aussi avec [F 4])

LEMME. — *On suppose que dans E tout compact finement rare est* θ*-polaire* (θ *fixée*). *Alors* E' *est* θ*-polaire.*

D'abord, si des K_i sont compacts disjoints dans E, ils sont égaux θ-q. p. à leurs intérieurs fins relatifs. On en déduit (propriété de Lindelöf, [F 1]) qu'ils sont θ-polaires sauf au plus une infinité dénombrable d'entre eux. Cela signifie que E est un ensemble θ-mince au sens de (D). Il existe alors une mesure $\mu\in B_\theta$, concentrée sur E et n'y négligeant que les θ-polaires. Raisonnons alors comme dans (DFM) : soit k un entier $\geqslant 1$, et soit A un ouvert (ordinaire) relatif dans E et maximal sous la condition $c_\mu^p(A)\geqslant k\,\mu(A)$. On a $c_\mu^p(A\cup B)\leqslant k\,\mu\ (A\cup B)$ pour B p. a. $\subset E\setminus A$ et $B\neq\emptyset$, et par suite $c_\mu^p\ (A\cup B)-c_\mu^p(A)\leqslant k\,\mu(B)$: cela vaut aussi pour $B=\emptyset$. Comme les c_μ^p sont fortement sous-additives, la capacité $B\rightsquigarrow\gamma_\mu(B)=c_\mu^p\,(A\cup B)-c_\mu^p(A)$ est sous-additive, à variation bornée, et $\gamma_\mu(B)=\displaystyle\int\gamma_x(B)\,d\mu(x)$. On en déduit comme dans (DFM) que μ-presque toute capacité γ_x est à variation bornée. Soit $x \in E \setminus \overline{A}$ un point où cette propriété a lieu. On a :

$$R_p^{A \cup B}(x) = c_x^p(A \cup B) = c_x^p(A) + \gamma_x(B) = R_p^A(x) + \gamma_x(B) < p(x),$$

pour $x \notin A$ et $\gamma_x(B)$ assez petit. En prenant pour B la trace sur $E \setminus (x)$ d'un voisinage de x, on voit que x est finement isolé dans E. On a donc $E' \subset \overline{A}$ $\theta - q.\,p.$ Mais $E \cap \overline{A} \setminus A$ est finement rare sur E donc θ-polaire et par suite $\mu(E') = \mu(A) \leqslant c_\mu^p(E)/k$. En faisant varier k, on trouve $\mu(E') = 0$, donc E' est θ-polaire.

Terminons la démonstration du théorème : fixons $\theta \in \mathscr{M}^+$, par la deuxième propriété de Lindelöf [F 2], p. 195), il existe une suite de compacts $K_n \subset E$, finement rares sur E, et telle qu'en posant $A = \bigcup_n K_n$ on ait $K \subset \overline{A}$ θ-q. p. pour tout compact $K \subset E$ et finement rare sur E. On a bien sûr $A \subset E'$, donc $E \cap \overline{A} \subset E'$. Posons $B = E \setminus \overline{A}$: c'est un p. a., et tout compact $K \subset B$ et finement rare sur B l'est *a fortiori* sur E, donc est inclus dans $\overline{A}$ θ-q. p. et est par suite θ-polaire. D'après le lemme, B' est θ-polaire. Or, la relation $E \subset \overline{A} \cup B$ implique $E' \subset \overline{A} \cup B'$, puis $E' = E \cap \overline{A}$ θ-q. p. Alors $R_p^A = R_p^{E'}$ θ-q. p.

C.Q.F.D.

La proposition suivante introduit les propriétés de dichotomie :

PROPOSITION. — *Si E est presque G_δ fin, et si $E = E'$ θ-q.p. (θ fixée), alors E contient une famille indénombrable d'ensembles disjoints ayant tous même c_θ^p-capacité que E* (cf. *aussi* [*F* 4]).

D'après la démonstration du théorème 9°, il existe un ensemble $A \subset E$, de type F_σ, finement maigre sur E et tel que $c_\theta(E \setminus \overline{A}) = 0$. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille maximale de tels ensembles, disjoints. Il suffit de montrer que I est indénombrable : au cas contraire, $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ serait un F_σ finement maigre sur E tel que c_θ $(E \setminus \overline{A}) = 0$. Alors $B = E \setminus A$ serait presque G_σ fin, $\overline{B}$ contiendrait E θ-q. p. grâce au théorème de Baire (pour la θ-quasi-topologie fine), donc $c_\theta^p(B) = c_\theta^p(E)$ et $B = B'$ θ-q. p., mais alors B contiendrait un F_σ finement maigre et de même capacité, ce qui contredirait le caractère maximal de la famille $(A_i)_{i \in I}$.

Rappelons que l'épaisseur $e_\theta^p(E)$ d'un ensemble E par rapport à la capacité c_θ^p est la borne supérieure des $t \geqslant 0$ pour lesquels il existe une famille indénombrable de compacts disjoints inclus dans E tous de c_θ^p-capacité $> t$: donc E est θ-mince lorsque $e_\theta^p(E) = 0$ (p est supposé > 0). Pour l'énoncé suivant, on suppose que $p \in C$ est un potentiel strict.

10° THÉORÈME. — *Soit E un ensemble presque analytique. L'ensemble croissant :*

$$\mathscr{A}=\{\, q\in C,\ q\,\text{diffus}/q\leqslant p,\ \delta(q)\subset E\,\}$$

est adjacent à une fonction excessive u. L'ensemble $\tilde{E}$ *défini par :*

$$\tilde{E}=\{\, x\in E/u(x)=p(x)\,\}.$$

est indépendant de p (strict), c'est le « noyau de condensation fine » de E. On a :

$$u(x)=R_p^{\tilde{E}}(x)=c_x^p(\tilde{E})=e_x^p(E)=e_x^p(\tilde{E})$$

et plus généralement $c_\theta^p(\tilde{E})=e_\theta^p(E)$ *pour toute* $\theta\in m^+$, *donc* $\tilde{\tilde{E}}=\tilde{E}$.
L'ensemble $E\setminus\tilde{E}$ *est θ-mince pour toute mesure* $\theta\in m^+$.

De plus, si E est presque G_δ *fin,* $\mathscr{A}$ *est aussi adjacent à l'ensemble décroissant* $\mathscr{B}=\{\, R_p^{E^\xi}/\xi<\aleph_1\,\}$ *où les* E^ξ *sont les dérivés fins successifs de E, et alors* $\tilde{E}$ *vaut* $\bigcap_{\xi<\aleph_1}E^\xi$ *et est aussi le noyau finement parfait de E.*

Démonstration. — Si $q\in\mathscr{A}$, on a $q\leqslant R_p^{E^\xi}$ pour tout $\xi<\aleph_1$, car le support fin de q est finement parfait. Donc toujours $\mathscr{A}\leqslant\mathscr{B}$.

Supposons d'abord que E soit presque G_δ fin, et montrons qu'alors $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont adjacents. Fixons $\theta\in\mathscr{M}^+$: on doit chercher $\xi<\aleph_1$ et $q\in\mathscr{A}$ tels que $\theta(R_p^{E^\xi}-q)<\varepsilon$, ε fixé. Il existe $\xi<\aleph_1$ tel que $R_p^{E^\xi}=R_p^{E^\eta}$ θ-q. p. pour tout ordinal $\eta>\xi$ d'après ([F 2], p. 191). On a donc $E^\xi=E^{\xi+1}$ θ-q. p., donc $c_\theta^p(E^\xi)=e_\theta^p(E^\xi)$ par la proposition précédente. Soit $a<c_\theta^p(E^\xi)$. Rappelons que l'épaisseur e_θ^p se calcule aussi à l'aide des schémas de Cantor (DFM). Un tel schéma est une famille de compacts disjoints $(K_t)_{t\in I}$ où T est l'ensemble de Cantor, et où le graphe $\{\,(x,\ t)/x\in K_t\,\}$ est compact dans $X\times T$. Le noyau $K=\bigcup_{t\in T}K_t$ est alors compact. Il existe selon (DFM) un schéma de noyau $K\subset E^\xi$ et tel que $a<\int c_\theta^p(K_t)\,dt$ où dt est la mesure de Cantor. Si l'on pose $q_K(x)=\int R_p^{K_t}(x)\,dt$, on aura $\theta(q_K)>a$ par le théorème de Fubini. Il suffit donc de prouver que q_K appartient à $\mathscr{A}$. D'abord, si p est continu (ce que l'on suppose) q_K est s. c. s. et minore p, donc appartient à C_δ. On a aussi

$\delta(q_K) \subset K \subset E$ de manière évidente. Calculons q_K : par le théorème de Fubini, on a :

$$q_K(x) = \sup_n n\, V_n q_K(x) = \int \widehat{R_p^{K_t}}(x)\, dt.$$

On a $\widehat{R_p^{K_t}}(x) = R_p^{K_t}(x)$ sauf peut-être pour une valeur de t au plus ([F 2], p. 187) car les K_t sont disjoints. Mais dt est diffuse, donc $\hat{q}_K = q_K$ et q_K est un potentiel régulier. Montrons qu'il est diffus : fixons $b \in X$, on a :

$$S^q(b) \quad q_K = \sum_{k=1}^{2^n} q_k \qquad \text{avec} \quad q_k = \int_{T_k} R_p^{K_t}\, dt$$

où les T_k sont les portions fondamentales de T, de dt-mesure 2^{-n}. Or, $S^q(b)$ est à support ponctuel, donc étranger à tous les q_k sauf peut-être un au plus, d'où $S^q(b) \prec q_k \leqslant 2^{-n} p$. Comme cela vaut pour tout n, on a $S^q(b) \equiv 0$. Ainsi $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont adjacents et la fonction limite u est p. b. et dans S (th. 4°).

On a bien sûr $u(x) = \sup_K q_K(x) = e_x^p(E)$, mais aussi $u(x) = \operatorname{Inf}_\xi R_p^{E^\xi} \geqslant R_p^{\tilde{E}}$. Pour θ fixée, on a $u = R_p^{E^\xi}$ θ-q. p. pour un certain $\xi < \aleph_1$ dépendant de θ, donc $\tilde{E} = E^\xi$ θ-q. p. En faisant varier θ on trouve alors $u = R_p^{\tilde{E}}$. On a aussi $(\tilde{E})' = E^{\xi+1} = \tilde{E}$ θ-q. p., pour θ arbitraire, donc E est finement parfait. Si A est finement parfait inclus dans E, on a par récurrence $A \subset E^\xi$ pour $\xi < \aleph_1$ et $A \subset \tilde{E}$, ce qui prouve que $\tilde{E}$ est le noyau finement parfait de E et est par suite indépendant du potentiel p choisi.

Passons au cas où E est seulement presque analytique. L'ensemble $\mathscr{A}$ relatif à E est visiblement la réunion des ensembles $\mathscr{A}_F$ relatifs aux fermés fins p. b. F inclus dans E, donc son enveloppe $u(x)$ vaut $\sup\{e_x^p(F)/F$ fermé fin p. b. $\subset E\}$ soit encore $\sup\{e_x^p(K)/K$ compact $\subset E\}$, et cette dernière expression vaut $e_x^p(E)$ d'après un résultat général de (D) sur les épaisseurs.

Si E est analytique, $u(x) = e_x^p(E)$ l'est aussi d'après (DFM) et :

$$\theta(u) = \int e_x^p(E)\, d\theta(x) = e_\theta^p(E)$$

(intégration des épaisseurs), donc :

$$\theta(u) = e_\theta^p(E) = \operatorname{Sup}\{e_\theta^p(K)/K \text{ compact} \subset E\} = \operatorname{Sup}\{\theta(q)/q \in \mathscr{A}\},$$

cela prouve que $\mathscr{A}$ est adjacent à la fonction u, qui se trouve ainsi fortement surmédiane p. b. d'après le théorème 4°, et même excessive car :

$$\hat{u}(x) \geqslant \operatorname{Sup}\{q(x)/q \in \mathscr{A}\} = u(x).$$

Si E est seulement p. a., on écrit pour chaque mesure $A \subset E \subset A \cup P$ où A est analytique et P θ-polaire, donc :

$$e_x^p(A) \leqslant e_x^p(E) \leqslant e_x^p(A) + c_x^p(P),$$

d'après l'additivité des épaisseurs (DFM), mais comme $c_x^p(P)$ vaut 0 θ-q. p., on est ramené au cas d'un ensemble analytique.

On a bien sûr $u \geqslant R_p^{\tilde{E}}$, mais $e^p(F) = R_p^F \leqslant R_p^{\tilde{E}}$ pour tout fermé fin p. b. E, donc $u \leqslant R_p^{\tilde{E}}$.

Si K est un compact inclus dans $E \setminus \tilde{E}$, on a $\tilde{K} \subset K \cap \tilde{E} = \emptyset$, et K est θ-mince pour toute mesure θ.

Ainsi $E \setminus \tilde{E}$ est lui-même mince. Comme $E \setminus \tilde{E}$ est aussi p. a. (p. b. relatif dans E) on en tire $e_x^p(\tilde{E}) = e_x^p(E)$ (sous-additivité des épaisseurs), et le théorème est entièrement démontré.

Remarque. — On vérifie facilement que pour chaque $\theta \in \mathcal{M}^+$, $E \setminus \tilde{E}$ est à un polaire près le plus grand ouvert fin relatif dans E qui soit θ-mince.

Définissons maintenant par récurrence transfinie :

$$E_1 = \{ x \in E / p(x) = \widehat{R_p^E}(x) \}, \qquad E_{\xi+1} = (E_\xi)_1,$$

et si η est un ordinal limite $< \aleph_1$: $E_\eta = \bigcap_{\xi < \eta} E_\xi$.

LEMME. — *$E = E' \cup (E \cap Z)$ et pour $\xi < \aleph_1$: $E_\xi = E^\xi \cup (\overline{E \cap Z}^E)$ (3) où E^ξ désigne la suite des dérivés fins pour $\xi < \aleph_1$.*

Démonstration du lemme. — Pour $a \in X$, on a toujours :

$$R_p^{E \setminus a}(a) = \widehat{R_p^{E \setminus a}}(a) \leqslant \widehat{R_p^E}(a),$$

à cause de la relation de Mertens $R\varphi = \operatorname{Max}(\varphi, \widehat{R\varphi})$.

Si $a \in E'$, on a $p(a) = R_p^{E \setminus a}(a) \leqslant \widehat{R_p^E}(a)$, donc $a \in E_1$, et $E' \subset E_1$. Il est clair que $E \cap Z \subset E_1$ puisque $f = \hat{f}$ sur Z pour toute $f \in S$. Si l'on a (3) pour tout $\xi < \eta$: on l'a aussi pour η si η est limite.

Si η est de la forme $\xi + 1$, on a $\overline{E \cap Z}^E \subset E_{\xi+1}$ car $E_{\xi+1}$ est relativement fermé, et évidemment $E^{\xi+1} \subset E_{\xi+1}$ donc (3) dans un sens. On a :

$$E_{\xi+1} = (E_\xi)' \cup (E \cap Z) \qquad \text{et} \qquad (E_\xi)' \subset E^{\xi+1} \cup (\overline{E \cap Z}^E),$$

et la formule (3) pour $\eta = \xi + 1$.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant qui est la réplique du théorème 10° :

11° THÉORÈME. — *Soit E un ensemble presque analytique. L'ensemble croissant :*

$$\mathscr{A}_1 = \{ q \in C / q \leqslant p,\ \delta(q) \subset E \}$$

est adjacent à une fonction excessive v. L'ensemble $\hat{E}$ défini par :

$$\hat{E} = \{ x \in E / v(x) = p(x) \},$$

vaut exactement $\hat{E} = \tilde{E} \cup \{ \overline{E \cap Z}^{E} \}$, et l'on a $\hat{\hat{E}} = \hat{E}$.

E est presque semi-polaire si et seulement si $\hat{E} = \emptyset$.

L'ensemble $E \setminus \hat{E}$ est presque semi-polaire.

De plus, si E est presque G_δ fin, $\mathscr{A}_1$ est aussi adjacent à l'ensemble décroissant $\mathscr{B}_1 = \{ R_p^{E_\xi} / \xi < \aleph_1 \}$.

Démonstration. — Là aussi, supposons d'abord que E soit presque G_δ fin, et posons *a priori* :

$$\hat{E} = \bigcap_\xi E_\xi = \tilde{E} \cup (\overline{E \cap Z}^{E}).$$

Pour θ fixée, $E_\xi \setminus \hat{E} \subset E^\xi \setminus \tilde{E}$ est θ-polaire pour un certain $\xi < \aleph_1$. On en déduit :

$$\widehat{R_p^{\hat{E}}} = \widehat{R_p^{E_\xi}} \geqslant R_p^{E_{\xi+1}} \geqslant R_p^{\hat{E}}, \quad \theta\text{-q. p.}$$

Ainsi $v = R_p^{\hat{E}} = \widehat{R_p^{\hat{E}}}$ est excessive, vaut $\operatorname{Inf}_\xi R_p^{E_\xi}$ et est adjacente à $\mathscr{B}_1$. E est régulier, et si A est régulier $\subset E$, on a par récurrence $A \subset E_\xi$, donc $A \subset \hat{E}$: $\hat{E}$ est le noyau régulier de E. En particulier, si $q \in \mathscr{A}_1$, $\delta(q)$ est régulier, donc $\subset \hat{E}$, et par suite $\mathscr{A}_1 \leqslant \mathscr{B}_1$. Fixons de nouveau θ, et soit q'_n une suite croissante de potentiels réguliers convergeant vers $R_p^{\tilde{E}}$ et à supports $\delta(q'_n)$ inclus dans $\tilde{E}$ (théorème précédent). Il existe aussi une suite croissante q''_n de la forme $R_p^{K_n}$ avec $K_n \subset E \cap Z$ convergeant vers $R_p^{E \cap Z}$ θ-q. p. ([F 2], p. 191). On a $q''_n = \widehat{q''_n}$ sur $K_n \subset Z$ donc sur X ([F 2], p. 187). Alors la suite $q_n = R\,(q'_n \vee q''_n)$ converge en croissant vers $R_p^{\hat{E}}$ θ-q. p. et appartient à $\mathscr{A}_1$. Ainsi $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{B}_1$ sont adjacents. Si $\hat{E} = \emptyset$, E est presque semi-polaire comme chaque $E_\xi \setminus E_{\xi+1}$.

Si E est seulement p. a., on raisonne comme au théorème 10° : $\mathscr{A}_1$ est la réunion des ensembles $\mathscr{A}_{1,F}$ relatifs aux fermés fins p. b. inclus dans E, donc son enveloppe v vaut $\operatorname{Sup}\{ R_p^{\hat{F}} / F$ fermé fin p. b. $\subset E \} \leqslant R_p^{\hat{E}}$ avec $\hat{E} = \tilde{E} \cup \overline{E \cap Z}^{E}$. Mais alors on voit comme ci-dessus que $\mathscr{A}_1$ est adjacent à

$R_p^{\hat{E}}$, donc $v=R_p^{\hat{E}}$, et E est régulier. Pour $q\in\mathscr{A}_1$, on a en fait $\delta(q)=\widehat{\delta(q)}$ d'après le début de la démonstration puisque $\delta(q)$ est fermé fin, donc $\delta(q)\subset\hat{E}$, ce qui entraîne $\hat{\hat{E}}=\hat{E}$. Si $\hat{E}=\emptyset$, on a d'abord $\tilde{E}=\emptyset$, donc E est θ-mince pour toute mesure θ, puis c'est alors un ensemble presque F_σ ([FI], p. 214), donc $E=(\bigcup_n K_n)\cup P$ où P est θ-polaire et où les K_n sont compacts. Mais chaque K_n est presque semi-polaire puisque $\widehat{K_n}=\emptyset$, donc E l'est aussi.

Enfin, en général $E\setminus\hat{E}$ est p. a. car p. b. relatif dans E. On a $\widehat{E\setminus\hat{E}}\subset\hat{E}\cap(E\setminus\hat{E})=\emptyset$, donc $E\setminus\hat{E}$ est presque semi-polaire.

Remarques. — Pour chaque θ, $E\setminus\hat{E}$ est à un θ-polaire près le plus grand ouvert fin relatif dans E qui soit θ-semi-polaire.

Si E n'est pas presque G_δ fin on peut avoir $\hat{E}=\emptyset$, alors que E est régulier. de même que l'on peut avoir $\tilde{E}=\emptyset$ alors que E est finement dense en soi.

VIII. Remarques diverses

On a toujours obtenu la convergence de nos suites transfinies E^ξ et E_ξ par la technique des ensembles adjacents. Il est intéressant de remarquer qu'à l'aide d'un théorème de Dellacherie sur les dérivations analytiques (D 2), on peut conclure quand E est analytique à l'analyticité des ensembles $\bigcap_{\xi<\aleph_1} E^\xi$ et $\bigcap_{\xi<\aleph_1} E_\xi$, et passer de là au cas de E p. a. Cela fournit le noyau finement dense en soi de E et son noyau régulier, et les deux suites transfinies $R_p^{E^\xi}$ et $R_p^{E_\xi}$ sont là aussi adjacentes à leur borne inférieure qui est excessive.

D'autre part, si E est analytique, Mokobodzki sait démontrer directement que E est analytique, mais cela résulte aussi de la formule $\hat{E}=\tilde{E}\cup(\overline{E\cap Z}^E)$.

Si l'on s'intéresse aux ensembles de la tribu engendrée par les excessives, on voit que toutes nos constructions peuvent se faire en restant dans cette tribu, puisque $\tilde{E}$ et $\hat{E}$ sont définis comme des ensembles où coïncident deux excessives.

On peut définir une épaisseur $e_x^f(E)$ en remplaçant p par $f\in S$, f bornée dans les définitions. On constate à l'aide de la propriété de dichotomie de $\tilde{E}$ que $e_x^f(E)$ est toujours égal à $R_f^{\tilde{E}}(x)$.

Signalons qu'à l'aide de l'axiome de Martin MA$(\aleph_1)$ (*cf.* (L)] on peut montrer que toute suite transfinie décroissante de type $\aleph_1$ formée de fonctions de S est adjacente à son enveloppe inférieure f et que f est dans S.

Citons enfin le travail (HA) de Hansen qui repose sur des idées essentiellement différentes.

BIBLIOGRAPHIE

(A) ANCONA (A.). – *Contenance et dichotomie* (à paraître in *Sém. th. potentiel*, Paris, n° 7), Lecture Notes, Springer.

(B 1) BRELOT (M.). – La topologie fine en théorie du potentiel (*Lecture Notes in Math.*, vol. 31, 1967).

(B 2) BRELOT (M.). – Sur le théorème de partition de M^{me} R. M. Hervé, Rocky Mountain, *J. of Math.*, vol. 10, n° 1, 1980, p. 293.

(C) CHOQUET (G.). – Forme abstraite du théorème de capacitabilité. *Ann. Inst. Fourier*, t. IX, vol. 83, 1959.

(D) DELLACHERIE (C.). – Capacités et processus stochastiques, Ergebnisse der Mathematik, n° 67, Springer, 1972.

(D 1) DELLACHERIE (C.). – *La structure des ensembles semi-polaires*, Preprint.

(D 2) DELLACHERIE (C.). – *Théorèmes de capacitabilité, de séparation et d'itération transfinie*, Preprint.

(DFM) DELLACHERIE (C.), FEYEL (D.) et MOKOBODZKI (G.). – *Intégrales de capacités fortement sous-additives* [*Sém. probabilités*, XV1, 1980/81 (*Lecture Notes*, n° 920, Springer)].

(FI) FEYEL (D.). – Ensembles singuliers associés aux espaces de Banach réticulés, *Ann. Inst. Fourier*, t. XXXI, vol. 195, 1981.

(F 2) FEYEL (D.). – Représentation des fonctionnelles surmédianes, Z. f. Wahrscheinlichkeitstheorie, vol. 58, 1981, p. 183, Springer.

(F 3) FEYEL (D.). – Une mesure de l'épaisseur d'un ensemble presque borélien, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 292, série I, 1981, p. 957.

(F 4) FEYEL (D.). – Remarque sur un résultat de Choquet [*Sém. th. potentiel*, Paris, n° 6 (*Lecture Notes*, n° 906, Springer)].

(F 5) FEYEL (D.). – Sur le théorème de partition de Brelot, *C.R. Acad. Royale de Belgique*, 1982, p. 424.

[F 6] FEYEL (D.). – Remarques sur les cônes de potentiels [*Sém. th. potentiel*, Paris, n° 7, (*Lecture Notes*, Springer)].

(FUG) FUGLEDE (B.). – Finely harmonic functions (*Lecture Notes in Math.*, n° 289, Springer, 1972).

(HA) HANSEN (W.). – Semi-polar sets and quasi-balayage, *Math. Annalen*, vol. 257, 1981, p. 495.

(HE) HERVÉ (R. M.). – Recherches axiomatiques en théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, XII, vol. 415, 1962.

(L) LOUVEAU (A.). – Outils de logique pour l'analyse, *Cours de 3e cycle*, Paris, 1976/1977.

(M 1) MERTENS (J. F.). – Théorie des processus stochastiques généraux, application aux surmartingales, Z.f. Wahrscheinlichkeitstheorie, vol. 22, 1972.

(M 2) MERTENS (J. F.). – Stongly supermedian functions and optimal stopping, Z.f. Wahrscheinlichkeitstheorie, vol. 26, 1973.

(ME) MEYER (P. A.). – Probabilités et potentiel, A.s.i., 1318, Paris, Hermann, 1966.

(MO 1) MOKOBODZKI (G.). – Structure des cônes de potentiels, *Sém. Bourbaki*, n° 377, 1969/1970.

(MO 2) MOKOBODZKI (G.). – Ensembles compacts de fonctions fortement surmédianes (*Lect. Notes in Math.*, n° 713, Springer, 1979).

(T) TAYLOR (J. C.). – On the existence of submarkovian resolvents (*Inventiones Math.*, 17, 1972).