BULLETIN DE LA S. M. F.

MOHAMED SALAH KHALGUI

Sur les caractères des groupes de Lie à radical cocompact

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 331-372

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__331_0>

Bull. Soc. math. France
109, 1981, p. 331-372.

SUR LES CARACTÈRES DES GROUPES DE LIE A RADICAL COCOMPACT

PAR

MOHAMED SALAH KHALGUI (*)

RÉSUMÉ. — Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ satisfaisant certaines conditions, par exemple G connexe à radical cocompact. On construit des représentations factorielles de G associées à une G-orbite Ω dans le dual de $\mathscr{G}$. On montre qu'on a une formule du caractère de Kirillov dans le cas où l'orbite Ω est tempérée, fermée, et $\mathscr{G}(l)$ est nilpotent, où $\mathscr{G}(l)$ est le stabilisateur de l dans $\mathscr{G}$ et $l \in \Omega$. Dans le cas où $\mathscr{G}(l)$ n'est pas nilpotent, on montre qu'un tel résultat n'est pas vrai en général, et donc la formule « universelle » de Kirillov n'est probablement pas universelle mais seulement générique.

ABSTRACT. — Let G be a Lie group which satisfies certain conditions, for instance G connected with cocompact radical. We construct factor representations of G associated to a G-orbit Ω in the dual of the Lie algebra $\mathscr{G}$ of G. We prove that we have a Kirillov's character formula when Ω is tempered, closed, and $\mathscr{G}(l)$ is nilpotent, where $\mathscr{G}(l)$ is the stabilizer of l in $\mathscr{G}$, and $l \in \Omega$. When $\mathscr{G}(l)$ is not nilpotent, we prove that a such result is not true generally, and so the "universal" Kirillov's formula is not probably universal but only generic.

PLAN

(*) Texte reçu le 5 juin 1980.

M. S. KHALGUI, Université de Paris-VII, U.E.R. de Mathématiques, Tour 45-55, 2, place Jussieu, 75531 Paris Cedex 05.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037/9484/1981/331/$ 5.00

Tables de notations

T.1. Si G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ agissant dans E et $x \in E$, on note $G(x)$ le stabilisateur de x dans G, et $\mathscr{G}(x)$ son algèbre de Lie.

T.2. Soit V un espace vectoriel réel. On note $V_{\mathbf{C}}$ son complexifié. Si $X \in V_{\mathbf{C}}$, $\overline{X}$ désigne le conjugué de X pour cette complexification. On désigne par V^* le dual de V. Si W est un sous-espace de V, on note $W^{\perp}$ l'orthogonal de W dans V^*.

T.3. Si H est un groupe topologique, on note H_0 sa composante neutre.

T.4. Si $\mathscr{L}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathscr{G}$, et G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$, $\exp(\mathscr{L})$ désigne le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathscr{L}$.

T.5. Si $l \in \mathscr{L}^*$, B_l est la forme bilinéaire définie par $B_l(X, Y) = l([X, Y])$ (X et $Y \in \mathscr{L}$). On note aussi B_l la forme bilinéaire non dégénérée associée par passage au quotient par le noyau.

T.6. Si G est un groupe de Lie, Δ_G est la fonction module associée. Si H est un sous-groupe fermé de G, $\Delta_{H,G} = \Delta_H / \Delta_G$ et $d\mu_{G,D}$ est la « mesure » quotient correspondante à un choix de mesures de Haar sur G et H respectivement ([2], chap. 5).

T.7. Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$, $d\mu_G$ une mesure de Haar à gauche sur G, et dX une mesure de Haar sur $\mathscr{G}$. On dira que $d\mu_G$ et dX se correspondent si :

$$d\mu_G(\exp X) = \det\left(\frac{1 - e^{-adX}}{adX}\right) dX.$$

T.8. Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$, et Ω une G-orbite dans $\mathscr{G}^*$. On note $d\beta_\Omega$ la mesure canonique normalisée comme en [2], chap. 2 (*voir* 7.1).

T.9. Soit U un ouvert dans $\mathscr{G}$ ou dans G. On note $\mathscr{D}(U)$ l'espace des applications de classe C^∞ à support compact dans U.

Introduction

Soit G un groupe de Lie satisfaisant certaines conditions, par exemple G connexe à radical cocompact (*cf.* 1.1). Nous avons montré dans [3] que pour toute forme linéaire l sur l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ de G, il existe une polarisation positive $\mathfrak{h}$ en l, invariante par le stabilisateur $G(l)$ (T.1), et telle que $\mathfrak{h} \cap \mathscr{N}_{\mathbf{C}}$ soit une polarisation en f invariante par $G(f)$, où $\mathscr{N}$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathscr{G}$ et f est la restriction de l à $\mathscr{N}$ (T.1, T.2) (*cf.* 2.2). On suppose que l est admissible i. e. il existe un caractère χ_l de $G(l)_0$ (T.3) de différentielle $il|_{\mathscr{G}(l)} - (1/2) \operatorname{Im} \operatorname{tr}_{\mathscr{G}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}} (\mathrm{ad.})$ (T.1). Soit $Y(l)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations factorielles τ de $G(l)$ dont la restriction à $G(l)_0$ est multiple de χ_l. On construit alors une représentation « induite holomorphe » de G à l'aide d'un triplet $(l, \tau, \mathfrak{h})$. On montre que cette représentation est factorielle, que son commutant est isomorphe à celui de τ, et que sa classe est indépendante du choix de $\mathfrak{h}$. On note $\rho(l, \tau, G)$ la classe de cette représentation. Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des couples (l, τ) où l est admissible, $\mathscr{G}(l)$ est résoluble, et $\tau \in Y(l)$. L'application $(l, \tau) \mapsto \rho(l, \tau, G)$ induit alors une injection de $\mathscr{R}/G$ dans l'ensemble des classes d'équivalence de représentations factorielles de G (*cf.* 3.3).

Dans le cas d'un groupe de Lie connexe, à radical cocompact, et de type I, on peut montrer en utilisant les résultats de L. PUKANSZKY [21] qu'on obtient ainsi toutes les représentations irréductibles de G (ce résultat a été annoncé par R. Lipsman dans une lettre adressée à M. DUFLO).

Ces résultats généralisent les résultats analogues dans le cas nilpotent de A. A. KIRILLOV [13], et dans le cas résoluble de L. AUSLANDER et B. KOSTANT [1], et de L. PUKANSZKY [19], et sont obtenus par des méthodes analogues.

Notre but ici est de calculer le caractère (infinitésimal et global) des représentations $\rho(l, \tau, G)$. Le calcul du caractère infinitésimal est facile. Soient $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbf{C}})$ l'algèbre enveloppante de $\mathscr{G}_{\mathbf{C}}$ (T.2), et $\mathscr{Z}(\mathscr{G}_{\mathbf{C}})$ le centre de $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbf{C}})$. Soient $(l, \tau) \in \mathscr{R}$, et $\rho = \rho(l, \tau, G)$ la représentation factorielle de G associée à (l, τ), ρ_∞ la représentation infinitésimale associée à ρ, et χ_ρ le caractère infinitésimal associé à ρ_∞ défini, pour $z \in \mathscr{Z}(\mathscr{G}_{\mathbf{C}})$, par $\rho_\infty(z) = \chi_\rho(z).\mathrm{Id}$. A la forme il, on associe l'idéal induit de DUFLO $I(il)$ [16] (ceci est possible puisque $\mathscr{G}(l)$ est résoluble, et par conséquent on a une polarisation résoluble en il [3]). L'idéal $I(il)$ dans $\mathscr{U}(\mathscr{G}_{\mathbf{C}})$ est primitif, et en plus pour tout $z \in \mathscr{Z}(\mathscr{G}_{\mathbf{C}})$ il existe un scalaire $C_l(z)$ tel que $z - C_l(z) \in I(il)$. Soit γ l'isomorphisme de $\mathscr{Z}(\mathscr{G}_{\mathbf{C}})$ dans $I(\mathscr{G}_{\mathbf{C}}^*)$ (l'algèbre des polynômes invariants sur $\mathscr{G}_{\mathbf{C}}^*$) défini par M. DUFLO [8]. On a, pour $z \in \mathscr{Z}(\mathscr{G}_{\mathbf{C}})$, $C_l(z)=\gamma(z)(l)$ [8]. Utilisant le lemme 2.1 de [7], on montre alors que $\chi_\rho = C_l$.

Le reste de l'article est consacré au calcul du caractère global. En voici les résultats.

Supposons qu'en plus $\Omega = G.l$ est tempérée $\Big($i. e. il existe un nombre $m \geqslant 0$ et une norme $\|\ \|$ sur $\mathscr{G}^*$ tel que : $\displaystyle\int_\Omega (1+\|l\|)^{-m}\, d\beta_\Omega(l) < \infty$ (T.8)$\Big)$, fermée et telle que $\mathscr{G}(l)$ soit nilpotente $(l \in \Omega)$ (T.1). Supposons aussi que $\tau \in Y(l)$ $(l \in \Omega)$ est irréductible et $\dim \tau < \infty$. L'application $\alpha \mapsto \rho(\alpha)$ $\Big($où $\rho = \rho(l, \tau, G)$, $\rho(\alpha) = \displaystyle\int_G \alpha(x)\, \rho(x)\, d\mu_G(x)$ et $d\mu_G$ est une mesure de Haar à gauche sur $G\Big)$ envoie continûment $\mathscr{D}(G)$ (T.9) dans l'espace des opérateurs à trace. Soit j l'application définie sur $\mathscr{G}$ par :

$$j(X) = \left(\det\left(\frac{\operatorname{sh} \operatorname{ad} X/2}{\operatorname{ad} X/2}\right)\right)^{1/2}.$$

Il existe alors un voisinage V_0 de 0 dans $\mathscr{G}$ sur lequel j est non nulle, de classe C^∞, et telle qu'on ait pour tout $\alpha \in \mathscr{D}(V_0)$ (T.9), $\rho(\alpha)$ traçable et en plus :

$$\operatorname{tr} \rho(\alpha) = \dim \tau . \int_\Omega (\alpha j^{-1})^\wedge (l)\, d\beta_\Omega(l),$$

où $\rho(\alpha) = \displaystyle\int_{\mathscr{G}} \alpha(X)\, \rho(\exp X)\, dX$, dX est une mesure de Haar sur $\mathscr{G}$, et :

$$(\alpha j^{-1})^\wedge (l) = \int_{\mathscr{G}} (\alpha j^{-1})(X)\, e^{i\langle l, X\rangle}\, dX \quad (cf.\ \text{th. } 7.3).$$

Ces résultats généralisent les résultats analogues dans le cas nilpotent de A. A. KIRILLOV [13], dans le cas résoluble de M. DUFLO [6], [2], et de M.S. KHALGUI [12], dans le cas compact de A. A. KIRILLOV [13], et de L. PUKANSZKY [18], et dans le cas réductif de W. ROSSMAN [22]. R. LIPSMAN a obtenu indépendamment des résultats analogues dans le cas particulier des groupes de Lie à radical cocompact et « abélien ou de Heisenberg » [15]. Ces résultats sont conformes à la forme générale de Kirillov telle qu'elle a été exposée par M. DUFLO à l'Université de Maryland [11].

Dans le cas d'un groupe de Lie résoluble, j'ai montré antérieurement [12], que pour une orbite Ω tempérée, il existe une fonction P_Ω de classe C^∞, G-invariante, et un voisinage V_0 de 0 dans $\mathscr{G}$ sur lequel P_Ω est non nulle, et telle qu'on ait pour $\alpha \in \mathscr{D}(V_0)$, $\rho(\alpha)$ traçable et de plus :

$$\operatorname{tr} \rho(\alpha) = \dim \tau . \int_\Omega (\alpha P_\Omega^{-1})\hat{}\ d\beta_\Omega.$$

Un tel résultat n'est pas vrai en général si $\mathscr{G}(l)$ n'est pas nilpotente pour les groupes de Lie considérés ici (*cf.* 1.1), comme le prouve l'exemple dans le paragraphe 8. On montre qu'il n'existe pas une fonction P_Ω de classe C^∞ telle qu'on ait la formule précédente. Cet exemple est intéressant puisqu'il montre que la formule « universelle » de Kirillov n'est probablement pas universelle, mais seulement générique.

Diverses généralisations de ces résultats sont possibles. On peut considérer des caractères semi-invariants, comme dans [9], [17] et [4]. On peut aussi généraliser au cas des représentations factorielles normales considérées dans [20]. Nous espérons revenir là-dessus ultérieurement.

Les résultats de cet article ont été exposés au colloque franco-japonais à Strasbourg (octobre 1980).

Je tiens à remercier le professeur M. Duflo dont l'aide m'a été précieuse au cours de ce travail, et avec qui j'ai eu de nombreuses et utiles discussions.

1. Groupe de type (H), et stabilisateurs

1.1. Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$, $\overline{G}$ l'adhérence de Zariski de $\operatorname{Ad}(G)$ dans le groupe $\mathscr{A}ut(\mathscr{G})$ des automorphismes de $\mathscr{G}$. On dira que G est de type (H) s'il existe un sous-groupe de Lie $\overline{N}$ de $\overline{G}$ invariant, fermé. unipotent et connexe tel que le groupe $\overline{G}/\overline{N}$ soit à centre cocompact.

Remarques. — 1. G est de type (H) si et seulement s'il existe des sous-groupes de Lie fermés de $\mathscr{A}ut(\mathscr{G})$ $\tilde{G}$, $\tilde{R}$, et $\tilde{N}$ tels que :

(a) on ait $\tilde{G} \supset \tilde{R} \supset \tilde{N}$, $\tilde{G} \supset \operatorname{Ad}(G)$;

(b) $\tilde{N}$ soit unipotent et connexe;

(c) on ait $[\tilde{G}, \tilde{R}] \subset \tilde{N}$ et $\tilde{G}/\tilde{R}$ compact

(ceci découle de raisonnement faits dans [3]).

2. Si G est de type (H) alors $\mathscr{G}$ est à radical cocompact. Si G est connexe, G est de type (H) si et seulement si G est à radical cocompact.

3. Tout sous-groupe d'un groupe de type (H) est de type (H).

4. S'il existe un sous-groupe de Lie N fermé nilpotent connexe et invariant dans G tel que G/N soit à centre cocompact alors G est de type (H). La

réciproque est fausse comme le prouve l'exemple suivant. Soient $H_3(\mathbb{Q})$ le groupe de Heisenberg de dimension 3 à coefficients dans $\mathbb{Q}$, et G le produit semi-direct de $H_3(\mathbb{Q})$ par $\mathbb{R}^3$ défini par : $A.X=A(X)$ si $A \in H_3(\mathbb{Q})$ et $X \in \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{Q}$ est le corps des rationnels et $\mathbb{R}$ est le corps des réels). Le groupe G n'est pas à radical cocompact, et il est de type (H). ($N=\mathbb{R}^3$, $G/N=H_3(\mathbb{Q})$ n'est pas à centre cocompact, $\mathrm{Ad}(G)=H_3(\mathbb{Q})$, $\overline{G}=\overline{N}=H_3(\mathbb{R})=$le groupe de Heisenberg à coefficients réels).

5. $\mathrm{Ad}(G)$ n'est pas fermé dans $\overline{G}$ en général comme le prouve l'exemple précédent.

1.2. LEMME 1. — *Soient $\mathscr{G}$ une algèbre de Lie à radical cocompact, et $\mathscr{G}'$ une sous-algèbre de Lie de $\mathscr{G}$, $\mathscr{G}'$ est alors à radical cocompact.*

Démonstration. — Soient $\mathscr{S}'$ une sous-algèbre de Levi de $\mathscr{G}'$, et $\mathscr{S}$ l'image de $\mathscr{S}'$ par l'application canonique de $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{G}/\mathscr{R}$ où $\mathscr{R}$ est le radical de $\mathscr{G}$. Par hypothèse $\mathscr{G}/\mathscr{R}$ est compacte, donc pour tout $X \in \mathscr{S}$, $\mathrm{ad}_{\mathscr{S}} X$ est semi-simple. Comme $\mathscr{S}$ est isomorphe à $\mathscr{S}'$, $\mathscr{S}'$ est alors compacte.

C.Q.F.D.

1.3. Soit $\mathscr{N}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathscr{G}$, N le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathscr{N}$, $f \in \mathscr{N}^*$ (T.2) tel qu'il existe un caractère χ_f de $N(f)$ (T.1) de différentielle $if|_{\mathscr{N}(f)}$ (T.1). On note $q_f=\ker(f|_{\mathscr{N}(f)})$ et Q_f le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie q_f.

LEMME 2. — *Supposons que $\mathscr{G}$ est à radical cocompact. Alors $G(f)_0/Q_f$* (T.1, T.3) *est produit direct d'un groupe de Lie connexe, compact, et semi-simple K_f par un groupe de Lie nilpotent connexe N_f de rang $\leqslant 2$. En plus N_f et K_f sont invariants dans $G(f)/Q_f$.*

Démonstration. — L'orbite $N.f$ étant fermée dans $\mathscr{N}^*$, le groupe $G(f)_0 N/N$ est un sous-groupe fermé de G_0/N (T.3). Comme $\mathscr{G}$ est à radical cocompact, G_0/N est réductif et sa partie semi-simple est compacte. Le groupe $G(f)_0 N/N$ qui est isomorphe à $G(f)_0/N(f)$ est alors réductif et sa partie semi-simple est compacte. On note H_f sa partie semi-simple, et A_f son centre. Il est facile de voir que A_f est un sous-groupe invariant de $G(f)/N(f)$. Notons π l'application canonique de $G(f)/Q_f$ dans $G(f)/N(f)$. Le groupe $N(f)/Q_f$ est central dans $G(f)_0/Q_f$. Le groupe $N_f=\pi^{-1}(A_f)$ est nilpotent, connexe, et il est invariant dans $G(f)/Q_f$. Le groupe $\pi^{-1}(H_f)$ est connexe, réductif et sa partie semi-simple K_f est compacte et isomorphe à H_f. Le groupe $G(f)_0/Q_f$ est produit direct de K_f et de N_f. Ce qui permet d'avoir le lemme 2.

C.Q.F.D.

Remarque. — On note $\mathfrak{k}_f$ l'algèbre de Lie de K_f et $\mathscr{N}_f$ l'algèbre de Lie de N_f. D'après ce qui précède $\mathscr{G}(f)/q_f$ est produit direct de $\mathfrak{k}_f$ et de $\mathscr{N}_f$. En plus $[\mathscr{N}_f, \mathscr{N}_f]$ est inclus dans $\mathscr{N}(f)/q_f$.

1.4. Soient $\mathscr{G}$ une algèbre de Lie à radical cocompact, $l \in \mathscr{G}^*$ (T.2), f la restriction de l à $\mathscr{N}$.

LEMME 3. — $G(l) \cap G(f)_0 = G(l)_0$ (T.1, T.3).

Démonstration. — D'après [21], lemme 2, l'orbite $N(f).l$ coïncide avec l'ensemble $l+(\mathscr{G}(f)+\mathscr{N})^{\perp}$ (T.2). On a alors $G(l)\,N(f)=\{g \in G(f)/g.l_1=l_1\}$ où l_1 est la restriction de l à $\mathscr{G}(f)$. Notons m la forme induite par l_1 sur $\mathscr{G}(f)/q_f$, m_1 la restriction de m à $\mathfrak{k}_f$, et m_2 la restriction de m à $\mathscr{N}_f$ (pour $\mathfrak{k}_f$ et $\mathscr{N}_f$ voir la remarque précédente). D'après le lemme 2, le stabilisateur de m dans $G(f)_0/Q_f$ est le produit direct de $K_f(m_1)$ par $N_f(m_2)$ (T.1), et il est connexe puisque N_f est nilpotent connexe, et K_f est compact connexe. Le groupe $(G(f)_0 \cap (G(l)\,N(f)))/Q_f$ est alors connexe. Le groupe $G(f)_0 \cap (G(l)\,N(f))$ est donc connexe. Comme $N(f)$ est connexe, on a :

$$G(f)_0 \cap (G(l)\,N(f))=(G(f)_0 \cap G(l))\,N(f).$$

Utilisant le fait que $N(l)$ est connexe, on en déduit que $G(l) \cap G(f)_0$ est connexe et par conséquent égal à $G(l)_0$.

C.Q.F.D.

2. Polarisations

2.1. DÉFINITIONS, NOTATIONS ET RAPPELS

Soient $\mathscr{G}$ une algèbre de Lie de dimension finie, $l \in \mathscr{G}^*$ (T.2), B_l la forme bilinéaire sur $\mathscr{G}_{\mathbf{C}}$ (T.2) définie par l (T.5). Une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{C}}$ est dite polarisation en l si $\mathfrak{h}$ vérifie les conditions suivantes :

— $\mathfrak{h}$ est un sous-espace vectoriel totalement isotrope maximal pour B_l;

— $\mathfrak{h}+\overline{\mathfrak{h}}$ est une sous-algèbre de de Lie de $\mathscr{G}_{\mathbf{C}}$ (T.2).

On notera $\mathfrak{e}$ et $\mathfrak{d}$ les sous-algèbres réelles de $\mathscr{G}$ définies par $\mathfrak{e}_{\mathbf{C}}=\mathfrak{h}+\overline{\mathfrak{h}}$ et $\mathfrak{d}_{\mathbf{C}}=\mathfrak{h}\cap\overline{\mathfrak{h}}$.

On dit que $\mathfrak{h}$ est positive si $il\,([X, \overline{X}]) \geqslant 0$ pour tout $X \in \mathfrak{h}$.

On dit que $\mathfrak{h}$ est admissible pour un idéal $\mathscr{I}$ dans $\mathscr{G}$ si $\mathfrak{h} \cap \mathscr{I}_{\mathbf{C}}$ est une polarisation en l' la restriction de l à $\mathscr{I}$.

Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, $\mathfrak{h}$ une polarisation en $l \in \mathcal{G}^*$, $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{e}$ les sous-algèbres associées à $\mathfrak{h}$, D^0 et E^0 les sous-groupes analytiques d'algèbres de Lie $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{e}$ respectivement. Le groupe D^0 est fermé dans G et $D^0.l$ est ouvert dans $l+\mathfrak{e}^{\perp}$ (T.2). Supposons de plus $\mathfrak{h}$ invariante par $G(l)$ (T.1). Soit $D=D^0 G(l)$. Alors D est un sous-groupe fermé de G de composante neutre D^0 ([2], chap. IV, p. 68).

On dira qu'une polarisation $\mathfrak{h}$ vérifie la condition de Pukanszky si $D_0.l=l+\mathfrak{e}^{\perp}$.

2.2. Proposition. — *Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, $\mathcal{N}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathcal{G}$, N le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathcal{N}$. Supposons que $\mathcal{G}$ soit à radical cocompact. Soit $l \in \mathcal{G}^*$. Notons f la restriction de l à $\mathcal{N}$. Soit $\mathfrak{h}$ une polarisation en l, $\mathcal{N}$-admissible. Alors :*

1° $\mathfrak{h}$ *vérifie la condition de Pukanszky;*

2° E^0 *est un sous-groupe fermé dans G;*

3° *si $\mathfrak{h}$ est invariante par $G(l)$, $E=G(l)E^0$ est un sous-groupe fermé dans G.*

Démonstration.

1. Lemme 4. — *Soit $\mathcal{M}$ une algèbre de Lie produit direct d'une algèbre de Lie $\mathcal{M}_1$ compacte par une algèbre de Lie $\mathcal{M}_2$ quelconque. Soient $m \in \mathcal{M}^*$, $m_1=m|_{\mathcal{M}_1}$, $m_2=m|_{\mathcal{M}_2}$, $\mathfrak{p}$ une polarisation en m, $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p} \cap (\mathcal{M}_1)_{\mathrm{C}}$, $\mathfrak{p}_2=\mathfrak{p} \cap (\mathcal{M}_2)_{\mathrm{C}}$. Alors $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_1$ est une polarisation en m_1 et $\mathfrak{p}_2$ est une polarisation en m_2.*

Démonstration du lemme 4. — Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre commutative maximale dans $\mathcal{M}_1(m)=\mathcal{M}_1(m_1)$ (T.1). On a : $\mathcal{A} \subset \mathfrak{p}_1$, $\mathcal{A}$ opère dans $\mathfrak{p}$. L'espace $\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2$ est invariant par $\mathcal{A}$, il existe donc un supplémentaire $\mathfrak{p}'$ de $\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2$ dans $\mathfrak{p}$ invariant par $\mathcal{A}$. Soit $Y \in \mathfrak{p}'$. On a :

$$Y=Y_1+Y_2 \qquad \text{avec} \quad Y_1 \in (\mathcal{M}_1)_{\mathrm{C}} \quad \text{et} \quad Y_2 \in (\mathcal{M}_2)_{\mathrm{C}}.$$

Pour tout $X \in \mathcal{A}$, on a :

$$[X, Y]=[X, Y_1] \in \mathfrak{p}' \qquad \text{et} \qquad [X, Y_1] \in \mathfrak{p} \cap (\mathcal{M}_1)_{\mathrm{C}}=\mathfrak{p}_1.$$

Comme $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{p}_1=\{0\}$, on a : $[X, Y_1]=0$ et alors $Y_1 \in \mathcal{A}_{\mathrm{C}}$, donc $Y_1 \in \mathfrak{p}_1$ et par conséquent $Y_2=Y-Y_1$ est dans $\mathfrak{p} \cap (\mathcal{M}_2)_{\mathrm{C}}=\mathfrak{p}_2$. On a alors $Y=Y_1+Y_2 \in \mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2$. Mais $Y \in \mathfrak{p}'$, et donc on a $Y=0$, et par conséquent $\mathfrak{p}'=\{0\}$. On conclut que $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2$ ce qui démontre le lemme 4.

C.Q.F.D.

2. Revenons aux notations de la proposition. Soient $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathcal{G}(f)_{\mathbb{C}}$, et $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h} \cap \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ (T.1, T.2). D'après [2], chap. 4, p. 64, $\mathfrak{h}_1$ est une polarisation en $l_1 = l|_{\mathcal{G}(f)}$, $\mathfrak{h}_2$ est une polarisation en f, et $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$. Il est facile à voir que $\mathfrak{h}$ est une polarisation en $l|_{\mathcal{G}(f)+\mathcal{N}}$. Pour prouver la proposition, on peut supposer $G = G(f)_0 N$. En effet pour démontrer le 1° de la proposition, il faut prouver que $D^0 . l = l + \mathfrak{e}^{\perp}$. Si cette égalité est vraie dans $\mathcal{G}(f) + \mathcal{N}$, utilisant $N(f).l = l + (\mathcal{G}(f) + \mathcal{N})^{\perp}$ et $N(f) \subset D_0$ on déduit alors qu'elle est valable dans $\mathcal{G}$. De même pour démontrer 3°, vu que $E \subset G(f)N$ et $G(f)N$ fermé dans G, il suffit de prouver que E est fermé dans $G(f)N$, ($\mathcal{G}(f) + \mathcal{N}$ vérifie l'hypothèse de la proposition d'après le lemme 1). Pour montrer que E est fermé dans $G(f)N$, il suffit de montrer que $E \cap (G(f)N)_0$ est fermé dans $(G(f)N)_0 = G(f)_0 N$. Utilisant le lemme 3, on voit que $E \cap (G(f)_0 N)$ est égal à E_0, il suffit donc de prouver que E_0 est fermé dans $G(f)_0 N$. Il en est de même pour le 2°. On peut supposer donc dans la suite que $G = G(f)_0 N$ et $\mathcal{G} = \mathcal{G}(f) + \mathcal{N}$ pour prouver la proposition.

3. D'après le lemme 2, $\mathcal{G}(f)/q_f$ est le produit direct d'une algèbre de Lie k_f compacte semi-simple par une algèbre de Lie $\mathcal{N}_f$ nilpotente. Étant donné que $\mathfrak{h}_1$ est une polarisation en $l_1 = l|_{\mathcal{G}(f)}$, $\tilde{\mathfrak{h}}_1$ l'image de $\mathfrak{h}_1$ par l'application π de $\mathcal{G}(f)_{\mathbb{C}}$ sur $(\mathcal{G}(f)/q_f)_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{k}_f)_{\mathbb{C}} \oplus (\mathcal{N}_f)_{\mathbb{C}}$ est une polarisation en m ($m \circ \pi = l_1$). Soient $\tilde{\mathfrak{h}}'_1 = \tilde{\mathfrak{h}}_1 \cap (\mathfrak{k}_f)_{\mathbb{C}}$ et $\tilde{\mathfrak{h}}''_1 = \tilde{\mathfrak{h}}_1 \cap (\mathcal{N}_f)_{\mathbb{C}}$. D'après le lemme 4, $\tilde{\mathfrak{h}}'_1$ est une polarisation en $m' = m|\mathfrak{k}_f$, $\tilde{\mathfrak{h}}''_1$ est une polarisation en $m'' = m|\mathcal{N}_f$ et $\tilde{\mathfrak{h}}_1 = \tilde{\mathfrak{h}}'_1 + \mathfrak{h}''_1$. On a alors $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}'_1 + \mathfrak{h}''_1$ où $\mathfrak{h}'_1 = \pi^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}}'_1)$ et $\mathfrak{h}''_1 = \pi^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}}''_1)$, $\mathfrak{h}'_1$ est une polarisation en $l|_{\pi^{-1}(\mathfrak{k}_f)}$ et $\mathfrak{h}''_1$ est une polarisation en $l|_{\pi^{-1}(\mathcal{N}_f)}$. D'après le lemme 1, $\mathcal{G}(f)$ est à radical cocompact. Soient $\mathcal{S}_f$ une sous-algèbre de Levi de $\mathcal{G}(f)$, et $\mathcal{R}_f$ son radical. Alors :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(f) + \mathcal{N} = \mathcal{S}_f + \mathcal{R}_f + \mathcal{N}$$

avec $\mathcal{S}_f$ sous-algèbre de Levi de $\mathcal{G} = \mathcal{G}(f) + \mathcal{N}$, et $\mathcal{R} = \mathcal{R}_f + \mathcal{N}$ son radical. Il est facile de voir que :

$$\pi^{-1}(\mathcal{N}_f) = \mathcal{R}_f \qquad \text{et} \qquad \pi^{-1}(\mathfrak{k}_f) = \mathcal{S}_f + \ker f|_{\mathcal{N}(f)}.$$

On a alors $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'_1 + \mathfrak{h}''_1 + \mathfrak{h}_2$, $\mathfrak{h}'_1$ est une polarisation en $l|_{\pi^{-1}(\mathfrak{k}_f)}$, et $\mathfrak{h}_{\mathcal{R}} = \mathfrak{h}''_1 + \mathfrak{h}_2$ est une polarisation en $h = l|_{\mathcal{R}}$, $\mathcal{N}$-admissible. Soient $\mathfrak{d}'_1$, $\mathfrak{e}'_1$ (resp. $\mathfrak{d}_{\mathcal{R}}$, $\mathfrak{e}_{\mathcal{R}}$) les sous-algèbres réelles associées à $\mathfrak{h}'_1$ (resp. $\mathfrak{h}_{\mathcal{R}}$) (2.1). On en déduit que l'on a :

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}'_1 + \mathfrak{d}_{\mathcal{R}}, \qquad \mathfrak{e} = \mathfrak{e}'_1 + \mathfrak{e}_{\mathcal{R}}, \qquad [\mathfrak{d}'_1, \mathfrak{d}_{\mathcal{R}}] \subset \mathfrak{d}_{\mathcal{R}}, \qquad [\mathfrak{e}'_1, \mathfrak{e}_{\mathcal{R}}] \subset \mathfrak{e}_{\mathcal{R}}.$$

Utilisant le fait que $\mathfrak{k}_f$ est une sous-algèbre compacte et que $\mathfrak{h}'_1$ est une polarisation en m', on montre alors que :

$$\mathfrak{h}'_1+\bar{\mathfrak{h}}'_1=(\mathfrak{k}_f)_{\mathbb{C}}=(\tilde{\mathfrak{e}}'_1)_{\mathbb{C}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{h}'_1\cap\bar{\mathfrak{h}}'_1=(\mathfrak{k}_f(m'))_{\mathbb{C}}=(\tilde{\mathfrak{d}}'_1)_{\mathbb{C}}.$$

On a donc :

$$\mathfrak{e}'_1=\pi^{-1}(\mathfrak{k}_f)=\mathcal{S}_f+q_f \quad \text{et} \quad \mathfrak{d}'_1=\pi^{-1}(\mathfrak{k}_f(m'))=\mathcal{S}_f(l|_{\mathcal{S}_f})+q_f.$$

On a alors :

$$\mathfrak{e}=\mathcal{S}_f+\mathfrak{e}_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{d}=\mathcal{S}_f(l|_{\mathcal{S}_f})+\mathfrak{d}_{\mathcal{R}}.$$

Ceci montre que :

$$E^0=S_f E^0_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad D^0=S_f(l|_{s_f})D^0_{\mathcal{R}},$$

où D^0, E^0, $D^0_{\mathcal{R}}$, $E^0_{\mathcal{R}}$, S_f sont les sous-groupes analytiques d'algèbres de Lie $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{d}_{\mathcal{R}}$, $\mathfrak{e}_{\mathcal{R}}$, $\mathcal{S}_f$ respectivement. Soient R et R_f les sous-groupes analytiques d'algèbres de Lie $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_f$ respectivement. On a : $G=G(f)_0 N=S_f R$, et en plus $R_f=R(f)$ est connexe et S_f est compact. D'après le lemme 3, $R(h)$ est connexe (où $h=l|\mathcal{R}$) et par conséquent $\mathfrak{h}_{\mathcal{R}}$ est une polarisation invariante par $R(h)$ et elle est $\mathcal{N}$-admissible. D'après [2], chap. 4, p. 71, $\mathfrak{h}_{\mathcal{R}}$ vérifie la condition de Pukanszky (i.e. : $D^0.h=h+\mathfrak{e}^{\perp}_{\mathcal{R}}\subset\mathcal{R}^*$), et $E_{\mathcal{R}}=E^0_{\mathcal{R}}$ est fermé dans R. Ceci permet de conclure. En effet on a :

$$\mathfrak{e}=\mathcal{S}_f\oplus\mathfrak{e}_{\mathcal{R}}, \qquad \mathcal{G}=\mathcal{G}(f)+\mathcal{N}=\mathcal{S}_f\dot{+}\mathcal{R},$$
$$D^0=S_f(m|_{\mathcal{S}_f})D^0_{\mathcal{R}}, \qquad E^0=S_f E^0_{\mathcal{R}}.$$

Ceci entraîne que d'une part $D^0.l=l+\mathfrak{e}^{\perp}$ et d'autre part, en utilisant S_f compact, que E^0 est fermé dans $G(f)_0 N$.

C.Q.F.D.

Remarque. — Si Γ est un sous-groupe de $G(l)$ contenant $G(l)_0$ (T.3) et stabilisant $\mathfrak{h}$. Les sous-groupes $D_\Gamma=\Gamma D^0$ et $E_\Gamma=\Gamma E^0$ sont fermés dans G (même démonstration).

2.3. Existence de polarisations

Avec les notations de 1.1, on suppose que G est de type (H) (*cf.* 1.1). Soient $l\in\mathcal{G}^*$ et f la restriction de l à $\mathcal{N}$. D'après [3], il existe une polarisation $\mathfrak{h}$ positive en l, invariante par $G(l)$, $\mathcal{N}$-admissible, et telle que $\mathfrak{h}\cap\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ soit invariante par $G(f)$ (T.1). Si en plus $\mathcal{G}(l)$ est résoluble, $\mathfrak{h}$ est résoluble.

D'après la proposition de 2.2, $\mathfrak{h}$ vérifie alors la condition de Pukanszky, et les sous-groupes D et E associés à $\mathfrak{h}$ sont fermés dans G.

Remarque. — Dans [3], on a fait la démonstration de l'existence d'un tel $\mathfrak{h}$ dans le cas où $\mathcal{G}(l)$ est résoluble, mais en fait la même démonstration permet de conclure même si $\mathcal{G}(l)$ n'est pas résoluble.

2.4.1. Soit V un espace vectoriel réel muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée ω. On note $\mathrm{Sp}(\omega)$ le groupe des automorphismes de V laissant invariante la forme ω. Soit $s \in \mathrm{Sp}(\omega)$. On note :

$$\delta_\omega(s) = \frac{\det_{V_{\mathbf{C}}/W}(s)}{|\det_{V_{\mathbf{C}}/W}(s)|},$$

où W est un sous-espace totalement isotrope maximal positif de $V_{\mathbf{C}}$ invariant par s (un tel espace existe d'après [2], chap. 4, p. 82. D'après [2], chap. 4, p. 50, $\delta_\omega(s)$ est indépendant du choix de W. Si en plus s et s' laissent invariant un même W, on a alors $\delta_\omega(ss') = \delta_\omega(s)\,\delta_\omega(s')$. S'il existe un sous-groupe laissant invariant un même W, δ_ω définit un caractère de ce groupe.

2.4.2. Soient $l \in \mathcal{G}^*$, $f = l|_{\mathcal{N}}$, $l_1 = l|_{\mathcal{G}(f)}$, et respectivement B_l, B_f, B_{l_1} les formes bilinéaires non dégénérées associées (T.5). D'après 2.4.1, il existe une fonction $\delta_0 = \delta_{B_l}$ (resp. $\delta = \delta_{B_f}$ et $\delta_1 = \delta_{B_{l_1}}$) définie sur $\mathrm{Sp}(B_l)$ (resp. $\mathrm{Sp}(B_f)$, $\mathrm{Sp}(B_{l_1})$). S'il existe une polarisation positive $\mathfrak{h}$ en l invariante par $G(l)$, $\mathcal{N}$-admissible tel que $\mathfrak{h} \cap \mathcal{N}_{\mathbf{C}}$ soit invariante par $G(f)$, δ_0 (resp. δ, δ_1) est un caractère unitaire de $G(l)$ (resp. $G(f)$, $G(f)(l_1) = G(l)N(f)$) de différentielle θ_0, θ, θ_1 respectivement définis par :

$$\theta_0(X) = \mathrm{Im}(\mathrm{tr}_{\mathcal{G}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(\mathrm{ad}\,X))\ (X \in \mathcal{G}(l)),$$

$$\theta(X) = \mathrm{Im}(\mathrm{tr}_{\mathcal{N}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}\cap\mathcal{N}_{\mathbf{C}}}(\mathrm{ad}\,X))\ (X \in \mathcal{G}(f)),$$

$$\theta_1(X) = \mathrm{Im}(\mathrm{tr}_{\mathcal{G}(f)_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}\cap\mathcal{G}(f)_{\mathbf{C}}}(\mathrm{ad}\,X))\ (X \in \mathcal{G}(l) + \mathcal{N}(f)).$$

Remarquons que si $X \in \mathcal{G}(l)$, on a : $\theta_0(X) = \theta_1(X) + \theta(X)$.

3. Construction de représentations factorielles et énoncé du théorème 3.3

3.1. Orbites admissibles

Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, $l \in \mathcal{G}^*$, $G(l)$ le stabilisateur de l dans G et $\mathcal{G}(l)$ son algèbre de Lie (T.1). On définit un revêtement d'ordre 2, qu'on note $G(l)$, de $G(l)$ comme dans [7], p. 117. Soient π_0 la projection de $\widetilde{G(l)}$ sur $G(l)$, et ε_0 l'élément non trivial du noyau de π_0. On dit que l est admissible s'il existe un caractère $\tilde{\chi}_l$ de $\widetilde{G(l)}^0 = \pi_0^{-1}(G(l)_0)$ (T.3) de différentielle $il|_{\mathscr{G}(l)}$ et tel que $\tilde{\chi}_l(\varepsilon_0) = -1$. Un tel caractère est unique s'il existe. On notera $\mathscr{G}_a^*$ l'ensemble des éléments admissibles dans $\mathscr{G}^*$. Remarquons que $\mathscr{G}_a^*$ est invariant par l'action de G. On dira qu'une G-orbite Ω est admissible si $\Omega \subset \mathscr{G}_a^*$. Si l est admissible, on notera $X(l)$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations factorielles de $\widetilde{G(l)}$ dont la restriction à $\widetilde{G(l)}^0$ est multiple de $\tilde{\chi}_l$.

3.2. REPRÉSENTATIONS « INDUITES HOLOMORPHES »

Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$, $l \in \mathscr{G}_a^*$ (*cf.* 3.1), $\mathfrak{h}$ une polarisation positive en l, invariante par $G(l)$ et vérifiant la condition de Pukansky, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, D, E associés à $\mathfrak{h}$ comme en 2.1. D'après [7], p. 117, $\widetilde{G(l)}$ est muni d'un caractère $\delta_0^{1/2}$ tel que :

$$\delta_0^{1/2}(\varepsilon_0) = -1 \qquad \text{et}\, (\delta_0^{1/2}(x))^2 = \delta_0(\pi_0(x)),$$

pour tout $x \in \widetilde{G(l)}$ (*cf.* 2.4.2). Ce caractère a pour différentielle $(1/2)\theta_0$ (*cf.* 2.4.2). On note χ_l le caractère de $G(l)_0$ induit par $\tilde{\chi}_l \delta_0^{-1/2}$. C'est un caractère de $G(l)$ de différentielle $il|_{\mathscr{G}(l)} - (1/2)\theta_0$. Ce caractère se prolonge de façon unique en un caractère, qu'on notera aussi χ_l, de D_0 de différentielle $il|_{\mathfrak{d}} - (1/2)\theta_0$ où $\theta_0(X) = \operatorname{Im}(\operatorname{tr}_{\mathscr{G}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(\operatorname{ad} X))$ pour $X \in \mathfrak{d}$ (on a ceci puisque la condition de Pukanszky est satisfaite ([2], chap. IV, p. 72)). De plus si $\tilde{\tau} \in X(l)$, $\tilde{\tau}\delta_0^{-1/2}$ induit une représentation τ de $G(l)$ dont la restriction à $G(l)_0$ est multiple de χ_l, et cette représentation se prolonge de façon unique en une représentation τ de $D = G(l)D^0$ dont la restriction à D_0 est multiple de χ_l (ceci découle du fait que $G(l) \cap D_0 = G(l)_0$ ([2], chap. IV, p. 72) et de ce qui a précédé). Notons $Y(l)$ l'espace des classes d'équivalence de représentations factorielles τ de $G(l)$ dont la restriction à $G(l)_0$ est multiple de χ_l. Il est clair alors que $\tilde{\tau} \mapsto \tau$ est une bijection de $X(l)$ sur $Y(l)$ et que $Y(l)$ s'identifie aux classes d'équivalence des représentations factorielles de D dont la restriction à D_0 est multiple de χ_l. Soient $\mathscr{H}(l, \tau, \mathfrak{h}, G)$ le complété de l'espace des fonctions φ de classe C^∞ sur G à valeurs dans l'espace $\mathscr{H}(\tau)$ de τ vérifiant :

(1) $\qquad \varphi(xd) = \Delta_{D,G}(d)^{1/2}\,\tau(d)^{-1}\,\varphi(x) \qquad (x \in G,\ d \in D)$ (T.6),

(2) $\displaystyle\int_{G/D} \|\varphi\|^2\, d\mu_{G.D} < \infty$ (T.6) $\qquad$ (où $\|\ \|$ est la norme dans $\mathscr{H}(\tau)$),

$$(3) \qquad \rho(X)\varphi=\left(-il(X)+\frac{1}{2}\operatorname{tr}_{\mathscr{G}_{\mathbf{C}/\mathfrak{h}}}(\operatorname{ad} X)\right)\varphi \qquad \text{pour} \quad X\in\mathfrak{h},$$

où $\rho(X)$ est le champ de vecteur invariant à gauche défini par X i.e. :

$$(\rho(X)\varphi)(x)=\frac{d}{dt}(\varphi(x \exp t X))|_{t=0} \qquad (x\in G,\ X\in\mathscr{G}).$$

On note $\rho(l, \tau, \mathfrak{h}, G)$ l'action de G par translation à gauche dans $\mathscr{H}(l, \tau, \mathfrak{h}, G)$.

3.3. Théorème. — *Supposons G de type (H) (cf. 1.1).*

1^0 *Soit $l\in\mathscr{G}_a^*$ (cf. 3.1). Il existe alors une polarisation $\mathfrak{h}$ positive en l, invariante par $G(l)$, $\mathscr{N}$-admissible, et telle que $\mathfrak{h}\cap\mathscr{N}_{\mathbf{C}}$ soit invariante par $G(f)$ où $f=l|_{\mathscr{G}}$. Soit $\tau\in X(l)$. La représentation $\rho(l, \tau, \mathfrak{h}, G)$ est factorielle, son commutant est isomorphe à celui de τ, sa classe d'équivalence est indépendante du choix de $\mathfrak{h}$. On note $\rho(l, \tau, G)$ la classe d'équivalence de $\rho(l, \tau, \mathfrak{h}, G)$.*

2° *Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des (l, τ) où $l\in\mathscr{G}_a^*$, $\mathscr{G}(l)$ est résoluble, et $\tau\in X(l)$. L'ensemble $\mathscr{R}$ est invariant par l'action de G. Soient (l, τ) et (l', τ') dans $\mathscr{R}$. Les représentations $\rho(l, \tau, G)$ et $\rho(l', \tau', G)$ sont équivalentes (resp. quasi-équivalentes) si et seulement s'il existe $x\in G$ tel que $x.l=l'$ et $x.\tau=\tau'$ (respectivement $x.\tau$ quasi-équivalente à τ'. Soit $\widehat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations factorielles de G. L'application $(l, \tau)\mapsto\rho(l, \tau, G)$ induit une injection de $\mathscr{R}/G$ dans $\widehat{G}$.*

La démonstration du théorème est donnée plus bas (*cf.* § 6).

4. Extension des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents

4.1. Représentation induite holomorphe d'un groupe de Lie nilpotent

Soient N un groupe de Lie nilpotent connexe d'algèbre de Lie $\mathscr{N}$, $f\in\mathscr{N}_a^*$, $\mathfrak{h}$ une polarisation positive en f, χ_f le caractère de $N(f)$ de différentielle $if|_{\mathscr{N}(f)}$ (T.1).

Soit $\rho(f, \chi_f, \mathfrak{h}, N)$ la représentation de N définie comme en 3.2. Cette représentation est irréductible, et sa classe est indépendante du choix de $\mathfrak{h}$ et égale à $\rho(f)$ où $f\mapsto\rho(f)$ est l'application qui induit l'isomorphisme de Kirillov [1]. Pour f fixé, on note $\sigma=\rho(f)$, $\mathscr{H}$ l'espace de σ, et $\mathscr{H}_{\mathfrak{h}}$ l'espace de $\rho(f, \chi_f, \mathfrak{h}, N)$. Pour toute polarisation positive $\mathfrak{h}$ en f, il existe donc un isomorphisme unitaire $U_{\mathfrak{h}}$ de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}_{\mathfrak{h}}$ qui entrelace σ et $\rho(f, \chi_f, \mathfrak{h}, N)$.

4.2. Prolongement d'une représentation irréductible d'un groupe de Lie nilpotent

4.2.1. Soient en plus un groupe S et un homorphisme j de S dans le groupe des automorphismes de N laissant stable $f \in \mathcal{N}_a^*$. Soit $s \in S$, il existe alors une polarisation positive $\mathfrak{h}$ en f invariante par s ([2], p. 82). Soient $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathfrak{h}}$, $n \in N$.

On pose :

$$(V'_{\mathfrak{h}}(s)\varphi)(n) = |\det_{\mathcal{N}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(s^{-1})|^{1/2}\,\varphi(s^{-1}(n)).$$

D'après [1], l'opérateur unitaire $V'(s) = U_{\mathfrak{h}}^{-1}\,V'_{\mathfrak{h}}(s)\,U_{\mathfrak{h}}$ ne dépend pas de la polarisation $\mathfrak{h}$ stable par s. Il vérifie $V'(s)\,\sigma(n)\,V'(s^{-1}) = \sigma(s(n))$ pour tout $s \in S$ et tout $n \in N$.

4.2.2. L'espace $\mathcal{N}/\mathcal{N}(f)$ est muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée (T.5). On note $\mathrm{Sp}(\mathcal{N}/\mathcal{N}(f))$ le groupe symplectique associé, et $\mathrm{Mp}(\mathcal{N}/\mathcal{N}(f))$ le revêtement connexe d'ordre 2 associé si $\mathcal{N} \neq \mathcal{N}(f)$, et le groupe $\{\pm 1\}$ si $\mathcal{N} = \mathcal{N}(f)$. Soit $\tilde{S}$ le groupe formé des couples (s, x) de $S \times \mathrm{Mp}(\mathcal{N}/\mathcal{N}(f))$ tels que s et x aient la même image dans $\mathrm{Sp}(\mathcal{N}/\mathcal{N}(f))$. Le groupe $\tilde{S}$ est un revêtement d'ordre 2 de S, et on peut l'identifier à l'ensemble des couples (s, θ) de $S \times \mathbf{C}$ tel que :

$$\theta^2 = \delta(s) \qquad \text{où} \quad \delta(s) = \frac{\det_{\mathcal{N}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(s)}{|\det_{\mathcal{N}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(s)|}$$

et $\mathfrak{h}$ est une polarisation positive en f invariante par s (2.4.1). Nous poserons $\delta^{1/2}(s, \theta) = \theta$. On a donc si $s \in \tilde{S}$, $(\delta^{1/2}(s))^2 = \delta(\pi(s))$ où π est la projection de $\tilde{S}$ sur S. Si ε est l'élément non trivial du noyau de π on a, d'après [7], p. 105, $\delta^{1/2}(\varepsilon) = -1$. D'après [7], p. 107, si :

$$V(s) = \delta^{1/2}(s^{-1})\,V'(\pi(s)) \qquad \text{pour} \quad s \in \tilde{S},$$

V est une représentation de $\tilde{S}$ dans $\mathcal{H}$ telle que :

$$V(s)\,\sigma(n)\,V(s^{-1}) = \sigma(s(n))$$

pour tout $n \in N$ et $s \in \tilde{S}$, $(s(n) = \pi(s)(n) = j(\pi(s))(n))$.

On définit alors $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{S} \ltimes_j N$ dans $\mathcal{H}$ qui prolonge σ en posant :

$$\tilde{\sigma}(sn) = V(s)\,\sigma(n) \qquad \text{où} \quad s \in \tilde{S} \quad \text{et} \quad n \in N.$$

Remarque. — Si on a un sous-groupe de $\tilde{S}$ laissant invariant une polarisation positive en f, $\delta^{1/2}$ est alors un caractère de ce groupe.

4.3. Méthode des petits groupes

Soient G un groupe localement compact, N un sous-groupe fermé invariant de G qui soit un groupe de Lie réel nilpotent connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{N}$, $f \in \mathcal{N}_a^*$ (*cf.* 3.1) et σ la représentation irréductible associée à f par l'isomorphisme de Kirillov. Le groupe $K = G(f)N$, (T.1), est le stabilisateur de σ dans G. Soient $\widetilde{G(f)}$ le revêtement d'ordre 2 de $G(f)$ (*cf.* 4.2.2), π la projection de $\widetilde{G(f)}$ sur $G(f)$ et ε l'élément non trivial du noyau de π. Soit $\widetilde{N(f)}=\pi^{-1}(N(f))$. On a $\widetilde{N(f)}=N(f)\cup\varepsilon N(f)$. Soit χ_f le caractère de $N(f)$ dont la différentielle est $if|_{\mathcal{N}(f)}$. Il se prolonge en un caractère $\tilde{\chi}_f$ de $\widetilde{N(f)}$ tel que $\tilde{\chi}_f(\varepsilon)=-1$. Soit μ une représentation factorielle de $\widetilde{G(f)}$ dont la restriction à $\widetilde{N(f)}$ est multiple de $\tilde{\chi}_f$, on prolonge μ trivialement en une représentation du produit semi-direct $\widetilde{G(f)}\ltimes N$. Soit $\tilde{\sigma}$ la représentation canonique de $\widetilde{G(f)}\ltimes N$ prolongeant σ (4.2.2). D'après [7], p. 109, la représentation $\mu\otimes\tilde{\sigma}$ est factorielle et sa restriction à N est multiple de σ, elle induit par passage au quotient par $\{(s, \pi(s))/s\in\widetilde{G(f)}$ tel que $\pi(s)\in N(f)\}$ une représentation de $K=G(f)N$, notée encore $\mu\otimes\tilde{\sigma}$. La représentation $\operatorname{Ind}(\mu\otimes\tilde{\sigma}, G)$ est factorielle, son commutant est isomorphe à celui de μ, et $\mu\mapsto\operatorname{Ind}(\mu\otimes\tilde{\sigma}, G)$ induit une bijection de l'ensemble des classes de représentations factorielles μ de $\widetilde{G(f)}$ telle que $\mu|_{\widetilde{N(f)}}$ soit multiple de $\tilde{\chi}_f$ sur l'ensemble des classes de représentations factorielles T de G telle que la quasi-orbite dans $\hat{N}$ associée à $T|_N$ soit de support $G.\sigma$.

4.4. UN THÉORÈME DE RÉDUCTION DES REPRÉSENTATIONS INDUITES HOLOMORPHES

4.4.1. On suppose que G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, N est un sous-groupe de Lie de G fermé, invariant, nilpotent, connexe, d'algèbre de Lie $\mathcal{N}$. Soient $l\in\mathcal{G}^*_a$ (*cf.* 3.1), $f=l|_{\mathcal{N}}$. On a $f\in\mathcal{N}^*_a$. Supposons qu'il existe une polarisation positive $\mathfrak{h}$ en l, invariante par $G(l)$ et $\mathcal{N}$-admissible. On garde les mêmes notations de 4.3 : $\widetilde{G(f)}$, π, ε, $\delta^{1/2}$, ... On pose :

$$G_1=\widetilde{G(f)},\qquad \mathcal{G}_1=\mathcal{G}(f),\qquad l_1=l|_{\mathcal{G}_1},\qquad \mathfrak{h}_1=\mathfrak{h}\cap\mathcal{G}_{1\mathbf{C}},\qquad \mathfrak{h}_2=\mathfrak{h}\cap\mathcal{N}_{\mathbf{C}}.$$

On a $G_1(l_1)=\pi^{-1}(G(l)N(f))$, et donc $\mathfrak{h}_1$ est une polarisation positive en l_1 invariante par $G_1(l_1)$, et $\mathfrak{h}_2$ est une polarisation positive en f invariante par $G_1(l_1)$. Soient $G(l)$, π_0, ε_0, $\delta_0^{1/2}$, ... correspondants à G (*cf.* 3.2), et de même $G_1(l_1)$, π_1, ε_1, $\delta_1^{1/2}$, ... correspondants à G_1. D'après ce qui précède et la remarque 4.2.2, on a des caractères $\delta^{1/2}$, $\delta_0^{1/2}$, $\delta_1^{1/2}$ de $G_1(l_1)$, $\widetilde{G(l)}$, $\widetilde{G_1(l_1)}$ respectivement vérifiant :

$$(\delta^{1/2}(x))^2=\delta(\pi(x))\qquad (x\in G_1(l_1)).$$
$$(\delta^{1/2}(x))^2=\delta_0(\pi_0(x))\qquad (x\in\widetilde{G(l)}),$$
$$(\delta_1^{1/2}(x))^2=\delta_1(\pi(x))\qquad (x\in\widetilde{G_1(l_1)})$$

et de différentielles respectivement $(1/2)\theta$, $(1/2)\,\theta_0$, $(1/2)\,\theta_1$ (*cf.* 2.4.2).

4.4.2. Si l est admissible, l_1 est admissible. En effet l étant admissible, il existe un caractère $\tilde{\chi}_l$ de $\widetilde{G(l)}^0$ de différentielle $il|_{\mathfrak{g}(l)}$ et tel que $\chi_l(\varepsilon_0)=-1$ (*cf.* 3.1). Le caractère χ_l de $G(l)_0$ induit par $\delta_0^{-1/2}\,\tilde{\chi}_l$ est de différentielle $il|_{\mathfrak{g}(l)}-(1/2)\theta_0$ (*cf.* 2.4.2). On peut prolonger χ_l de façon unique en un caractère de $G(l)_0 N(f)$ qu'on notera aussi χ_l tel que $\chi_l|_{N(f)}=\chi_f$. Le caractère $\chi'_{l_1}=\chi_l\circ\pi_1$ de $G_1(l_1)_0$ est de différentielle $il_1|_{\mathfrak{g}_1(l_1)}-(1/2)\theta_0$. Soit alors $\chi_{l_1}=\chi'_l\ \delta^{1/2}$, c'est un caractère de $G_1(l_1)_0$ de différentielle :

$$il|_{\mathfrak{g}_1(l_1)}-\frac{1}{2}\theta_0+\frac{1}{2}\theta=il|_{\mathfrak{g}_1(l_1)}-\frac{1}{2}\theta_1 \qquad (cf.\ 2.4.2).$$

On pose $\tilde{\chi}_{l_1}=\delta_1^{1/2}(\chi_{l_1}\circ\pi_1)$. On obtient alors un caractère de $\widetilde{G_1(l_1)}^0$ de différentielle $il_1|_{\mathfrak{g}_1(l_1)}$ et tel que $\tilde{\chi}_l(\varepsilon_1)=-1$ où $\widetilde{G_1(l_1)}^0=\pi_1^{-1}(G_1(l_1)_0)$. La forme l_1 est alors admissible. Réciproquement si l_1 est admissible, l est alors admissible.

4.4.3. Soit $\tau\in Y(l)$ (*cf.* 3.2). La représentation τ se prolonge de façon unique en une représentation τ de $G(l)N(f)$ dont la restriction à $G(l)_0 N(f)$ est multiple de χ_l. La représentation $\tau'_1=\tau\circ\pi_1$ de $G_1(l_1)$ est factorielle et sa restriction à $G_1(l_1)_0$ est multiple de χ'_{l_1} défini en 4.4.2. La représentation $\tau_1=\delta^{1/2}\ \tau'_1$ de $G_1(l_1)$ est factorielle et sa restriction à $G_1(l_1)_0$ est multiple de χ_{l_1}. L'application $\tau\mapsto\tau_1$ est une bijection de $Y(l)$ sur $Y(l_1)$ où $Y(l_1)$ est l'ensemble des classes d'équivalence des représentations factorielles de $G_1(l_1)$ dont la restriction à $G_1(l_1)_0$ est multiple de χ_{l_1}.

4.4.4. Soient $\rho=\rho(l,\tau,\mathfrak{h},G)$ et $\rho_1=\rho(l_1,\tau_1,\mathfrak{h}_1,G_1)$ les représentations induites holomorphes de G et G_1 respectivement (*cf.* 3.2). La représentation $\tau_1|_{\widetilde{N(f)}}$ est multiple de $\tilde{\chi}_f$, et donc $\rho_1|_{\widetilde{N(f)}}$ est aussi multiple de $\tilde{\chi}_f$. Soient $\sigma=\rho(f)$ et $\tilde{\sigma}$ la représentation canonique de $\widetilde{G(f)}\ltimes N$ qui la prolonge (*cf.* 4.2.2). On peut donc construire d'après 4.3 la représentation $\operatorname{Ind}(\rho_1\otimes\tilde{\sigma},G)$. On a alors :

THÉORÈME. — *Les représentations* ρ *et* Ind $(\rho_1\otimes\tilde{\sigma},G)$ *sont équivalentes.*

Démonstration. — C'est la même démonstration que celle de M. DUFLO ([7], p. 110-118]) en tenant compte des modifications suivantes. On remplace le caractère χ par une représentation τ vérifiant les mêmes hypothèses, le caractère χ_1 par la représentation τ_1 associée à τ de la même façon qu'est associée χ_1 à χ, et les fonctions ψ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par les fonctions ψ à valeurs dans $\mathscr{H}(\tau)$ (=espace de τ) vérifiant les mêmes conditions.

C.Q.F.D.

5. Représentations induites holomorphes d'un groupe de Lie compact

Soient Γ un groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie γ, $k \in \gamma_a^*$ (*cf.* 3.1), et $\mathfrak{h}$ une polarisation positive en k. Comme $\Gamma(k)$ est connexe, $\mathfrak{h}$ est invariante par $\Gamma(k)$. Il est facile de voir que $\mathfrak{h}$ est la sous-algèbre de $\gamma_{\mathbf{C}}$ contenant $\gamma(k)_{\mathbf{C}}$ et les espaces de racines correspondants aux racines α dans le système de racines associé à $(\gamma_{\mathbf{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbf{C}})$ et vérifiant $(ik, \alpha) < 0$, $\mathfrak{t}$ étant une sous-algèbre de Cartan contenue dans $\gamma(k)$ (ceci est indépendant du choix de $\mathfrak{t}$ dans $\gamma(k)$ car deux telles sous-algèbres sont conjuguées par un élément de $\Gamma(k)$). Soit $\tilde{\chi}_k$ le caractère de $\widetilde{\Gamma(k)}$ de différentielle $ik|_{\gamma(k)}$ ($\tilde{\chi}_k$ existe et est unique puisque k est admissible et $\widetilde{\Gamma(k)} = \widetilde{\Gamma(k)}^0 = \pi_0^{-1}(\Gamma(k))$ (*cf.* 3.1). Soit alors $\rho(k)$ la représentation induite holomorphe associée à $(k, \tilde{\chi}_k, \mathfrak{h})$ (*cf.* 3.2).

PROPOSITION. — *La représentation $\rho(k)$ est irréductible. L'application $k \mapsto \rho(k)$ est une surjection de γ_a^* sur $\hat{\Gamma}$ (classes d'équivalence des représentations irréductibles de Γ). Sa restriction à l'ensemble γ_{ar}^* des éléments admissibles et réguliers de γ^* induit une bijection de l'espace des Γ-orbites admissibles régulières sur $\hat{\Gamma}$.*

Démonstration. — Comme la sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est invariante par $\Gamma(k)$, il existe un caractère $\delta_0^{1/2}$ de $\widetilde{\Gamma(k)}$ vérifiant $(\delta_0^{1/2}(x))^2 = \delta_0(x)$ avec :

$$\delta_0(x) = \det(\mathrm{Ad}_{\gamma_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(x)) \quad (x \in \Gamma(k)), \qquad \text{et} \qquad \delta_0^{1/2}(\varepsilon_\omega) = -1.$$

Soit χ_k le caractère de $\Gamma(k)$ induit par $\tilde{\chi}_k \delta_0^{-1/2}$. Sa différentielle est $ik|_{\gamma(k)} - (1/2)\,\mathrm{tr}_{\gamma_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(\mathrm{ad.})$. L'espace de $\rho(k)$ est alors l'espace des fonctions φ de classe C^∞ de Γ dans $\mathbf{C}$ telles que :

$$\varphi(xy) = \chi_k(y)^{-1}\,\varphi(x) \qquad (x \in \Gamma,\ y \in \Gamma(k))$$

et :

$$\rho(X)\varphi = (-ik(X) + (1/2)\,\mathrm{tr}_{\gamma_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(\mathrm{ad}\,X))\varphi \qquad \text{pour} \quad X \in \mathfrak{h}$$

(*cf.* 3.2). Utilisant le théorème de Borel Weil, on voit alors que $\rho(k)$ est équivalente à la représentation irréductible de plus haut poids :

$$(ik - (1/2)\,\mathrm{tr}_{\gamma_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}(\mathrm{ad.}))|_{\mathfrak{t}_{\mathbf{C}}},$$

où $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre de Cartan dans $\gamma(k)$ (*voir* par exemple la démonstration du lemme 5 de [21]). L'application $k \mapsto \rho(k)$ est une surjection de γ_a^* sur $\hat{\Gamma}$, et c'est même une surjection de γ_{ar}^* sur $\hat{\Gamma}$, qui induit une bijection de $\gamma_{ar/\Gamma}^*$ sur $\hat{\Gamma}$. C.Q.F.D.

6. Démonstration du théorème 3.3

Supposons que G est de type (H) (*cf.* 1.1). Soient $l \in \mathscr{G}_a^*$, $f = l \mid \mathscr{N}$. Il existe alors une polarisation $\mathfrak{h}$ en l positive, $\mathscr{N}$-admissible, invariante par $G(l)$ et tel que $\mathfrak{h} \cap \mathscr{N}_{\mathbf{C}}$ soit invariante par $G(f)$ (*cf.* 2.3). De plus le sous-groupe E associé à $\mathfrak{h}$ est fermé dans G (*cf.* 2.3 et proposition 2.2).

6.1. Soient $\tau \in Y(l)$, $l_{\mathfrak{e}} = l\,|_{\mathfrak{e}}$. On a vu que χ_l se prolonge à D_0 en un caractère χ_l de différentielle :

$$il\,|_{\mathfrak{d}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}_{\mathscr{G}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{h}}\,(\mathrm{ad.}) = il\,|_{\mathfrak{d}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\ \mathfrak{e}_{\mathbf{C}/\mathfrak{h}}\,(\mathrm{ad.}),$$

et τ se prolonge à D en une représentation, notée τ, dont la restriction à D_0 est multiple de χ_l (*cf.* 3.2). En remarquant que $D = E(l_{\mathfrak{e}})$, on conclut alors que $l_{\mathfrak{e}}$ est admissible et $\tau \in Y(l_{\mathfrak{e}})$. Soient $\rho_E = \rho(l_{\mathfrak{e}}, \tau, \mathfrak{h}, E)$, et $\mathscr{H}_E$ l'espace de ρ_E.

PROPOSITION. — 1. *Les éléments de $\mathscr{H}_E$ sont les φ de classe C^∞ de E dans $\mathscr{H}(\tau)$ vérifiant :*

– $\varphi(xd) = \tau(d)^{-1}\,\varphi(x)$, $\quad (x \in E,\ d \in D)$;

– $\displaystyle\int_{E/D} \|\varphi\|^2\,d\mu_{E,D} < \infty$;

– $\rho(Y)\varphi = [-il(Y) + (1/2)\ \mathrm{tr}\ \mathfrak{e}_{\mathbf{C}/\mathfrak{h}}\,(\mathrm{ad}\ Y)]\,\varphi$, $\quad (Y \in \mathfrak{h})$.

2. *Soit K un sous-groupe fermé de G contenant E d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, et tel que $D = E(l_{\mathfrak{e}}) \supset K(l_{\mathfrak{k}})$ où $l_{\mathfrak{k}} = l\,|_{\mathfrak{k}}$. Alors $l_{\mathfrak{k}}$ est admissible, $\tau_K = \tau\,|_{K(l_{\mathfrak{k}})} \in Y(l_{\mathfrak{k}})$. Soit $\rho(l_k, \tau_K, \mathfrak{h}, K)$ la représentation induite holomorphe associée à $l_{\mathfrak{k}}$, τ_K, $\mathfrak{h}$. Alors la représentation $\rho(l, \tau, \mathfrak{h}, G)$ est équivalente à la représentation induite par $\rho(l_{\mathfrak{k}}, \tau_K, \mathfrak{h}, K)$.*

Démonstration. — 1. Comme dans la remarque 4.3.4, p. 115 de [2], on prouve que si $\varphi \in \mathscr{H}_E$ alors $\varphi\,|_{E_0}$ est C^∞ de E^0 dans $\mathscr{H}(\tau)$. On peut alors conclure qu'on a le 1. de la proposition, en effet soit $x \in E$ et U un voisinage de l'élément neutre de E tel que $U \subset E_0$. On a $x = x_2\,x_1$ avec $x_1 \in G(l)$ et $x_2 \in E_0$ et alors $\varphi(ux) = \tau(x_1)^{-1}\,\varphi(ux_2)$ pour tout u dans U. On en déduit alors que $u \mapsto \varphi(ux)$ de U dans $\mathscr{H}(\tau)$ est C^∞, et donc que φ est C^∞.

2. On a $\mathfrak{e} \subset \mathfrak{k} \subset \mathscr{G}$. Utilisant ceci, et la dualité entre $\mathfrak{e}$ et $\mathfrak{d}$, on en déduit que $\mathfrak{k}(l_{\mathfrak{k}}) \subset \mathfrak{e}(l_{\mathfrak{e}}) = \mathfrak{d}$. On a alors $G(l)_0 \subset K(l_{\mathfrak{k}})_0 \subset D_0$. On a alors $l_{\mathfrak{k}}$ admissible et $\tau_K = \tau\,|_{K(l_{\mathfrak{k}})} \in Y(l_k)$. La démonstration de $\rho(l, \tau, \mathfrak{h}, G)$ équivalente à l'induite de $\rho(l_{\mathfrak{k}}, \tau_K, \mathfrak{h}, K)$ est exactement celle de la proposition 4.3.5, p. 115 de [2].

C.Q.F.D.

6.2. Soient $\mathfrak{h}_1=\mathfrak{h}\cap\mathscr{G}(f)_{\mathbf{C}}$, $\mathfrak{h}_2=\mathfrak{h}\cap\mathscr{N}_{\mathbf{C}}$, $G_1=\widetilde{G(f)}$, $\mathscr{G}_1=\mathscr{G}(f)$, $l_1=l|_{\mathscr{G}_1}$. Soit $\tau\in Y(l)$. On associe à (l, χ_l, τ), comme en 4.4.2 et 4.4.3 $(l_1, \chi_{l_1}, \tau_1)$ où χ_{l_1} est un caractère de $G_1(l_1)_0=\pi^{-1}(G(l)_0 N(f))_0$ dont la différentielle est $il_1|_{\mathscr{G}_1(l_1)}-(1/2)\theta_1$, et τ_1 est une représentation factorielle de $G_1(l_1)$ dont la restriction à $G_1(l_1)_0$ est multiple de χ_{l_1}. D'après le théorème 4.4.4, $\rho(l, \tau, \mathfrak{h}, G)$ et l'induite à G de $\rho(l_1, \tau_1, \mathfrak{h}_1, G_1)\otimes\tilde{\sigma}$ sont équivalentes, σ étant $\rho(f)$. Il suffit donc de prouver que $\rho(l_1, \tau_1, \mathfrak{h}_1, G_1)$ est indépendante du choix de $\mathfrak{h}_1$ pour en déduire la même chose pour $\rho(l, \tau, \mathfrak{h}, G)$. Vu que N est de type I et utilisant le théorème de Mackey, il suffit de prouver que $\rho(l_1, \tau_1, \mathfrak{h}_1, G_1)$ est factorielle et que son commutant est isomorphe à celui de τ_1 pour en déduire la même chose pour $\rho(l, \tau, \mathfrak{h}, G)$. Comme $\rho(l_1, \tau_1, \mathfrak{h}_1, G_1)|_{\widetilde{N(f)}}$ est multiple de $\tilde{\chi}_f$, si π est l'application canonique de $\widetilde{G(f)}$ sur $\widetilde{G(f)}/Q_f$ (Q_f étant la composante neutre du noyau de $\tilde{\chi}_f$), on aura :

$$\rho(l_1, \tau_1, \mathfrak{h}_1, G_1)=\rho(\bar{l}_1, \bar{\tau}_1, \bar{\mathfrak{h}}_1, \bar{G}_1)\circ\pi,$$

où :

$$\bar{l}_1\circ\pi=l_1, \qquad \bar{\tau}_1\circ\pi=\tau_1, \qquad \pi(\mathfrak{h}_1)=\bar{\mathfrak{h}}_1, \qquad \pi(G_1)=\bar{G}_1.$$

D'après le 2. de la proposition 4.1, $\rho(\bar{l}_1, \bar{\tau}_1, \bar{\mathfrak{h}}_1, \bar{G}_1)$ et l'induite de $\rho(\bar{l}_1, \bar{\tau}_1, \bar{\mathfrak{h}}, \bar{G}_1(\bar{l}_1)(\bar{G}_1)_0)$ sont équivalentes. D'après le lemme 2 de 1.4, on a $(\bar{G}_1)_0=K_1\times N_1$ produit direct d'un groupe K_1 compact connexe par un groupe N_1 nilpotent connexe, et en plus ces deux groupes sont invariants dans $\bar{G}_1$. Soient $\mathfrak{k}_1$ et $\mathscr{N}_1$ les algèbres de Lie de K_1 et N_1 respectivement. L'algèbre Lie $\bar{\mathscr{G}}_1$ de $\bar{G}_1$ est égale à $\mathfrak{k}_1\times\mathscr{N}_1$. Soient :

$$k_1=\bar{l}_1|_{\mathfrak{k}_1} \qquad \text{et} \qquad f_1=\bar{l}_1|_{\mathscr{N}_1}.$$

Soit $\sigma_1=\rho(f_1)$ la représentation irréductible de N_1 associée à f_1 ($\bar{l}_1$ étant admissible, f_1 est alors admissible, et par conséquent on peut lui associer σ_1). On note :

$$\mathscr{G}_2=\bar{\mathscr{G}}_1(f_1)=\mathfrak{k}_1\times\mathscr{N}_1(f_1), \qquad f_2=\bar{l}_1|_{\mathscr{G}_2},$$
$$G_2=\bar{G}_1(\bar{l}_1)(\bar{G}_1)_0(f_1)=\bar{G}_1(\bar{l}_1)(K_1\times\{e\}), \qquad \mathfrak{h}'_2=\bar{\mathfrak{h}}_1\cap(\mathscr{G}_2)_{\mathbf{C}}.$$

On a $G_2(l_2)=\bar{G}_1(\bar{l}_1)$. Soient χ_{l_2} et $\tau_2\in Y(l_2)$ associées à $\chi_{\bar{l}_1}$ et $\bar{\tau}_1$ comme en 4.4.2 et 4.4.3. Les représentations $\rho(\bar{l}_1, \bar{\tau}_1, \bar{\mathfrak{h}}_1, \bar{G}_1(\bar{l}_1)(\bar{G}_1)_0)$ et $\rho(l_2, \tau_2, \mathfrak{h}'_2, \tilde{G}_2)\otimes\tilde{\sigma}_1$ sont équivalentes d'après le théorème de 4.4.4, où $\tilde{G}_2$ est le revêtement d'ordre 2 de $G_2=(\bar{G}_1(\bar{l}_1)(\bar{G}_1)_0)(f_1)$. La polarisation $\overline{\mathfrak{h}}_1 \cap (\mathcal{N}_1)_C$ est invariante par $\tilde{G}_2$. On a donc un caractère $\delta_2^{1/2}$ de $\tilde{G}_2$ tel que :

$$(\delta_2^{1/2}(x))^2 = \delta_2(\pi_2(x)) \quad (x \in \tilde{G}_2) \qquad \text{et} \qquad \delta_2^{1/2}(\varepsilon_2) = -1,$$

avec π_2 la projection de $\tilde{G}_2$ sur G_2, ε_2 l'élément non trivial du noyau de π_2, et δ_2 le caractère de G_2 défini comme dans (4.2.2). Soient τ_2' et ρ_2' respectivement les représentations de $G_2(l_2)$ et G_2 induites par $\delta_2^{1/2}\tau_2$ et $\delta_2^{1/2}\rho(l_2, \tau_2, \mathfrak{h}_2', G_2)$ respectivement. Soit $\rho(k_1)$ la représentation irréductible de K_1 associée à k_1 (k_1 est admissible puisque $\bar{l}_1$ l'est), (*cf*, § 5). Soit $\tau_2' \otimes \rho(k_1)$ le produit tensoriel de τ_2' par $\rho(k_1)$ défini sur le produit direct de $G_2(l_2)$ par K_1. Cette représentation passe au quotient par $\{(s, s^{-1})/s \in K_1(k_1)\}$. On note $\tau_2' \otimes \rho(k_1)$ la représentation ainsi obtenue. Par une démonstration analogue à celle du lemme 4.3.6 de [2], chapitre 5, on montre que ρ_2' et $\tau_2' \otimes \rho(k_1)$ sont équivalentes. On en déduit alors que $\rho(\bar{l}_1, \bar{\tau}_1, \overline{\mathfrak{h}}_1, \overline{G}_1)$ est équivalente à l'induite de $(\tau_2' \otimes \rho(k_1)) \otimes \tilde{\bar{\sigma}}_1$. Utilisant le théorème de Mackey appliqué au sous-groupe $(\overline{G}_1)_0 = K_1 \times N_1$ qui est de type I, on en déduit que $\rho(\bar{l}_1, \bar{\tau}_1, \overline{\mathfrak{h}}_1, \overline{G}_1)$ est indépendante du choix de $\overline{\mathfrak{h}}_1$, elle est factorielle, et son commutant est isomorphe à celui de τ_2' et donc à celui de $\bar{\tau}_1$. La représentation $\rho(l, \tau, \mathfrak{h}, G)$ est donc factorielle, son commutant est isomorphe à celui de τ, et sa classe est indépendante du choix de $\mathfrak{h}$. On note alors $\rho(l, \tau, G)$ la classe de $\rho(l, \tau, \mathfrak{h}, G)$. On a alors la partie 1 du théorème 3.3.

6.3. Soit $x \in G$, il est facile de voir que $\rho(l, \tau, G)$ et $\rho(x.l, x.\tau, G)$ sont équivalentes. Réciproquement soient (l, τ) et (l', τ') dans $\mathcal{R}$ tels que $\rho(l, \tau, G)$ et $\rho(l', \tau'\ G)$ soient équivalentes. Leurs restrictions à N ont des quasi-orbites portées par une même G-orbite dans $\hat{N}$ (*cf.* 4.3). Par conséquent il existe $x \in G$ tel que :

$$f' = x.f \qquad \text{avec} \quad f = l|_{\mathcal{N}}, \qquad \text{et} \quad f' = l'|_{\mathcal{N}}.$$

On peut donc supposer que $f' = f$. Soit alors $G_1 = \widetilde{G(f)}$, et soient $\rho(l_1, \tau_1, \mathfrak{h}_1, G_1)$ et $\rho(l_1', \tau_1', \mathfrak{h}_1', G_1)$ construites comme plus haut. D'après 4.3, ces deux représentations sont factorielles, et équivalentes. Leurs restrictions à $(G_1)_0$ sont respectivement multiples de $\rho(l_1, \chi_{l_1}, \mathfrak{h}_1, (G_1)_0)$ et $\rho(l_1', \chi_{l_1'}, \mathfrak{h}_1', (G_1)_0)$. Ces deux dernières représentations sont donc quasi équivalentes d'une part, et d'autre part, d'après la démonstration de 6.2, elles sont irréductibles, et par conséquent elles sont équivalentes. En passant au quotient par $Q_f=(\operatorname{Ker}\chi_f)_0$, on voit alors que $\rho(\bar{l}_1, \chi_{\bar{l}_1}, \bar{\mathfrak{h}}_1, (\bar{G}_1)_0)$ et $\rho(\bar{l}'_1, \chi_{\bar{l}'_1}, \bar{\mathfrak{h}}'_1, (\bar{G}_1)_0)$ sont équivalentes. Utilisant comme plus haut le fait que $(\bar{G}_1)_0=K_1\times N_1$, on voit alors que :

$$\rho(\bar{l}_1, \chi_{\bar{l}_1}, \bar{\mathfrak{h}}_1, (\bar{G}_1)_0)=\rho(k_1)\otimes\rho(f_1)$$

et :

$$\rho(\bar{l}'_1, \chi_{\bar{l}'_1}, \bar{\mathfrak{h}}'_1, (\bar{G}_1)_0)=\rho(k'_1)\otimes\rho(f'_1),$$

où k'_1 et f'_1 sont associés à $\bar{l}'_1$ comme l'ont été k_1 et f_1 à $\bar{l}_1$. Utilisant la proposition du paragraphe 5 pour K_1, on voit alors qu'il existe $y_1\in K_1$ tel que $k'_1=y_1.k_1$ ($\mathscr{G}(l)$ et $\mathscr{G}'(l)$ résolubles entraînent le fait que k_1 et k'_1 soient réguliers et donc l'existence de y_1 tel que $k'_1=y_1.k_1$). Utilisant les résultats de 4.1 pour N_1, on voit qu'il existe $x_1\in N_1$ tel que $f'_1=x_1.f_1$. Il existe alors x dans $(G_1)_0$ tel que $x.l_1=l'_1$, et donc il existe $x\in G(f)$ tel que $x.l_1=l'_1$. Utilisant $N(f).l=l+(\mathscr{G}(f)+\mathscr{N})^{\perp}$, on voit alors que, quitte à changer x par xy avec $y\in N(f)$, on a $x.l=l'$. On peut donc supposer dans la suite que $l=l'$. On a alors $\rho(l, \tau, \mathfrak{h}, G)$ et $\rho(l, \tau', \mathfrak{h}, G)$ équivalentes et on veut alors montrer que $\tau=\tau'$. Utilisant la démonstration en 6.2, on voit que $\rho(l, \tau, \mathfrak{h}, G)$ est équivalente à l'induite de $\rho_1\otimes\tilde{\sigma}$, ρ_1 par passage au quotient par Q_f donne $\bar{\rho}_1$, et $\bar{\rho}_1$ est équivalente à l'induite à $\bar{G}_1$ de $((\tau_2\otimes\rho(k_1))\otimes\tilde{\sigma}_1)$. De même $\rho(l, \tau', \mathfrak{h}, G)$ est équivalente à l'induite de $\rho'_1\otimes\tilde{\sigma}$, ρ'_1 passe au quotient par Q_f, et donne une représentation $\bar{\rho}'_1$ de $\bar{G}_1$, et cette dernière est équivalente à l'induite de $(\tau'_2\otimes\rho(k_1))\otimes\tilde{\sigma}_1$. D'après le théorème de Mackey appliqué à N et σ, on a alors ρ_1 équivalente à ρ'_1, et par conséquent $\bar{\rho}_1$ et $\bar{\rho}'_1$ sont équivalentes. Une deuxième application du théorème de Mackey à $(\bar{G}_1)_0=K_1\times N_1$ et $\rho(k_1)\otimes\rho(f_1)$ permet de conclure que τ_2 et τ'_2 sont équivalentes. Ce sont des représentations de $G_2(l_2)=\bar{G}_1(\bar{l}_1)$ associées à τ et τ' respectivement. Vu la façon dont elles sont associées à τ, τ', on en déduit que τ et τ' sont équivalentes. De la même façon, si on suppose $\rho(l, \tau, G)$ quasi équivalente à $\rho(l', \tau', G)$, on montre qu'il existe $x\in G$ tel que $x.l=l'$ et $x.\tau$ soit quasi équivalente à τ'. Ceci termine la démonstration du théorème 3.3.

C.Q.F.D.

7. Formule du caractère

7.1. Soit G un groupe de Lie de type (H) (*cf.* 1.1). Soient $d\mu_G$ une mesure de Haar à gauche sur G, et dX la mesure de Haar correspondante sur $\mathscr{G}$ (T.7). On note $S(X)$ la série formelle :

$$S(X)=\frac{\operatorname{sh} X/2}{X/2},$$

et $S'(X)$ la série formelle :

$$S'(X)=\frac{1-e^{-X}}{X}.$$

Pour $X\in\mathcal{G}$, on pose $j(X)=(\det S(\mathrm{ad}\,X))^{1/2}$. Pour tout ouvert U de $\mathcal{G}$ ou de G, on note $\mathcal{D}(U)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans U. Si U est un ouvert de $\mathcal{G}$ contenant 0, et si l'application exponentielle est un difféomorphisme de U sur un ouvert $\exp U$ de G, on pose pour $\psi\in\mathcal{D}(U)$,

$$\varphi(\exp X)=(\det S'(\mathrm{ad}\,X))^{-1}\,\psi(X)\qquad\text{pour}\quad X\in U.$$

Alors $\varphi\in\mathcal{D}(\exp U)$. Si T est une représentation de G, on a alors :

$$T(\varphi)=T(\psi)\qquad\text{où}\quad T(\varphi)=\int_G\varphi(x)\,T(x)\,d\mu_G(X)$$

et :

$$T(\psi)=\int_{\mathcal{G}}\psi(X)\,T(\exp X)\,dX.$$

Soit Ω une G-orbite dans $\mathcal{G}$(T.2) pour l'action de la représentation coadjointe. La forme bilinéaire $B_l:(X,Y)\mapsto l([X,Y])$ $(l\in\Omega)$ induit sur $\mathcal{G}/_{\mathcal{G}(l)}$ (T.1) une forme bilinéaire alternée non dégénérée (T.5). Comme l'application $X\mapsto X.l$ induit un isomorphisme de $\mathcal{G}/\mathcal{G}(l)$ sur l'espace tangent à Ω au point l, la forme B_l définit sur cet espace une 2-forme ω_l. Soit ω la 2-forme sur Ω dont la valeur en chaque point $l\in\Omega$ est ω_l. C'est une 2-forme fermée partout non dégénérée et G-invariante. Soit $2d$ la dimension de Ω. On pose $\beta_\Omega=(2\pi)^{-d}(d\,!)^{-1}\,\omega\wedge\ldots\wedge\omega$ (d facteurs). Cette forme est de degré maximal, G-invariante. On note aussi β_Ω la mesure qui lui est associée sur Ω ([2], chap. 2). L'orbite Ω est dite tempérée s'il existe une norme $\|\ \|$ sur $\mathcal{G}^*$ et un nombre $m\geqslant 0$ tels que :

$$\int_\Omega(1+\|l\|)^{-m}\,d\beta_\Omega(l)<\infty.$$

Si l'orbite Ω est admissible (*cf.* 3.1) et $l\in\Omega$, on note $X^{\mathrm{irr}}(l)$ les représentations irréductibles de $X(l)$, et $\rho=\rho(l,\tau,G)$ pour τ fixé dans $X^{\mathrm{irr}}(l)$. On sait déjà d'après le théorème 3.3 que ρ est irréductible.

7.2. LEMME. — *Supposons que l'orbite Ω est admissible, fermée, tempérée, et telle que $\mathcal{G}(l)$ soit nilpotente $(l\in\Omega)$ (c'est le cas si Ω est de dimension* *maximale* ([2], chap. 2)). *Supposons en plus que* $\dim \tau < \infty$. *Alors il existe un voisinage ouvert* V *de* 0 *dans* $\mathcal{G}$ *tel qu'on ait pour* $\psi \in \mathcal{D}(V)$:

1° *Si* $\rho(\psi)$ *est un opérateur positif, alors* $\rho(\psi)$ *est traçable.*

2° *Si* $\rho(\psi)$ *est traçable, on a :*

$$\operatorname{tr} \rho(\psi) = \dim \tau . \int_\Omega (\psi j^{-1})\hat{}\ (l')\, d\beta_\Omega(l'),$$

où :

$$(\psi j^{-1})\hat{}\ (l') = \int_{\mathcal{G}} \psi(X)\, j^{-1}(X)\, e^{i\langle l', X\rangle}\, dX.$$

Démonstration du lemme. — On démontre ce lemme par récurrence sur la dimension de $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ est de dimension 1, on a : $\mathcal{G} = \mathcal{G}(l) = \mathcal{N}$. Par conséquent $G_0 = G(l)_0 = N \subset G(l) \subset G$, et $\rho = \operatorname{ind}_{G(l)\nearrow G} \tau$. Le lemme en découle alors facilement. On suppose dans la suite que $\dim \mathcal{G} > 1$. On va distinguer plusieurs cas.

1^er^ *cas :* On suppose qu'il existe un idéal abélien $\mathcal{A}$ tel que :

$$\dim(\mathcal{G}(m)/\operatorname{Ker} m) < \dim \mathcal{G} \qquad \text{où} \quad m = l|_{\mathcal{A}}.$$

On pose :

$$\mathcal{A}_1 = \operatorname{Ker} m, \qquad \mathcal{G}_1 = \mathcal{G}(m), \qquad \mathcal{G}' = \mathcal{G}_1/\mathcal{A}_1, \qquad l_1 = l|_{\mathcal{G}_1},$$

l' la forme linéaire induite par l_1 sur $\mathcal{G}'$,

$$A = \exp(\mathcal{A}), \qquad A_1 = \exp(\mathcal{A}_1) \quad (\text{T}.4),$$
$$G_1 = G(l)\, G(m)_0 \quad (\text{T}.3), \qquad G' = G_1/A_1.$$

Remarquons que G étant de type (H), G_1 est alors de type (H), et par conséquent G' l'est aussi. On choisit une polarisation $\mathfrak{h}$ en l positive invariante par $G(l)$, $\mathcal{N}$-admissible, et telle que $\mathfrak{h} \cap \mathcal{N}_{\mathbf{C}}$ soit invariante par $G(f)$ où $f = l|_{\mathcal{N}}$ ([3] ou 2.3). On peut choisir $\mathfrak{h}$ telle qu'elle soit $\mathcal{A}$-admissible en plus (ceci se voit dans la démonstration dans [3] par exemple). On a alors $\mathfrak{h} \subset \mathcal{G}(m)_{\mathbf{C}} = (\mathcal{G}_1)_{\mathbf{C}}$. D'après le 2° de la proposition en 6.1, on a $\rho = \operatorname{ind} \rho_1$ où $\rho_1 = \rho(l_1, \tau_1, \mathfrak{h}, G_1)$ et τ_1 est la représentation de $G_1(l_1) = G(l)A$ prolongeant la représentation induite par τ sur $G(l)$ et dont la restriction à $G_1(l_1)_0 = G(l)_0 A$ est multiple du caractère de $G(l)_0 A$ prolongeant le caractère χ_l de $G(l)_0$ associée à l'élément admissible l de $\mathcal{G}^*$ et le caractère χ_m de A dont la différentielle est im. On a $\tau_1 \in Y^{\text{irr}}(l_1, G_1)$ et $\dim \tau_1 = \dim \tau < \infty$. Notons π l'application canonique de G_1 sur $G' = G_1/A_1$. On a alors une représentation ρ' de G' telle que :

$$\rho' \circ \pi = \rho_1 \qquad \text{et} \qquad \rho' = \rho' = \rho(l', \tau', \mathfrak{h}', G'),$$

où :

$$\tau' \circ \pi = \tau, \qquad d\pi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}',$$

$d\pi$ étant l'application canonique de $\mathscr{G}_1$ sur $\mathscr{G}'$. On choisit une mesure de Haar sur $\mathscr{G}_1$ et une mesure de Haar sur $\mathscr{A}_1 = \operatorname{Ker} m$. On en déduit des mesures de Haar sur $\mathscr{G}/\mathscr{G}_1$ et sur $\mathscr{G}'$. Sur $\mathscr{G}_1^{\perp}$(T.2), on choisit la mesure duale de celle de $\mathscr{G}/\mathscr{G}_1$. On note ω l'orbite de l_1 sous l'action de G_1. On identifie l'orthogonal de $\mathscr{A}_1$ dans $\mathscr{G}_1^*$ au dual de $\mathscr{G}'$. Alors ω est aussi l'orbite de l' sous l'action de G'. Comme dans [10], p. 278, on en déduit que ω est tempérée, fermée, et $\mathscr{G}'(l')$ nilpotente. Appliquons l'hypothèse de récurrence à G', ρ', ω. Il existe alors un voisinage V'_0 de 0 dans $\mathscr{G}'$ tel qu'on ait pour $\psi' \in \mathscr{D}(V'_0)$:

1° Si $\rho'(\psi')$ est un opérateur positif, alors il est traçable.

2° Si $\rho'(\psi')$ est traçable, alors on a :

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tr} \rho'(\psi') = \dim \tau . \int_{\omega} (\psi' j'^{-1})\hat{}\; d\beta_{\omega},$$

où $d\beta_{\omega}$ est la mesure canonique sur ω (T.8), et j' est définie sur $\mathscr{G}'$ par :

$$j'(X') = (\det S(\operatorname{ad}_{\mathscr{G}'} X'))^{1/2} \qquad (X' \in \mathscr{G}').$$

Notons V(resp. V_1, V') l'ouvert de $\mathscr{G}$ (resp. $\mathscr{G}_1, \mathscr{G}'$) des $X \in \mathscr{G}$ (resp. $\mathscr{G}_1, \mathscr{G}'$) tels que $|\operatorname{Im} x| < \pi$ pour toute valeur propre x de ad X. D'après [2], chap. 1, p. 4, on a :

$$(\exp_G V) \cap G(m) \subset \exp_G(V \cap \mathscr{G}(m)).$$

On a alors :

$$(\exp_G V) \cap G_1 \subset \exp_G(V \cap \mathscr{G}_1) \subset \exp_{G_1} V_1$$

et :

$$\pi(\exp_{G_1} V_1) \subset \exp_{G'} V'.$$

On peut supposer V'_0 inclus dans V', et l'application $\exp_{G'}$ un difféomorphisme de V'_0 sur $\exp_{G'}(V'_0)$. On peut aussi choisir $V_0 \subset V$ tel que $\exp_G$ soit un difféomorphisme de V_0 sur $\exp_{G'}(V'_0)$ et $\pi((\exp_G V_0) \cap G_1) \subset \exp_{G'}(V'_0)$. Soit $\psi \in \mathscr{D}(V_0)$, et $\varphi \in \mathscr{D}$ $(\exp_G V_0)$ associée à ψ comme en 7.1. On a alors $\rho(\psi) = \rho(\varphi)$. Supposons $\rho(\psi)$ traçable, alors d'après [2], chap. 5, p. 107, pour presque tout x dans G/G_1, $K(x, x)$ est traçable et on a :

(2) $$\operatorname{tr} \rho(\varphi)=\int_{G/G_1} tr\, K(x, x)\, d\mu_{G, G_1}(x) \quad (\mathrm{T}.6),$$

où le noyau K est défini par :

$$K(x, y)=\int_{G_1} \Delta_G(x)^{-1}\, \Delta_{G_1, G}(u)^{-1/2}\, \varphi(xuy^{-1})\, \rho_1(u)\, d\mu_{G_1}(u),$$

pour x et y dans $G(\mathrm{T}.6)$.

On a $K(x, x)=\Delta_G(x)^{-1/2}\, \rho_1(\chi^{-1/2}\, \varphi_1^x)$ où χ est défini par :

$$\chi(u)=\Delta_{G_1, G}(u)=\det(\mathrm{Ad}_{\mathscr{G}/\mathscr{G}_1}(u)) \qquad (u \in G_1),$$

et φ_1^x est défini par :

$$\varphi_1^x(u)=\varphi(xux^{-1}) \qquad (u \in G_1).$$

Soit $(\varphi_1^x)'$ défini sur G' par :

$$(\varphi_1^x)'(u)=\int_{\mathscr{A}_1} \varphi_1^x(u \exp X)\, dX.$$

Avec les choix qu'on a fait, on a :

$$\varphi_1^x \in \mathscr{D}(\exp(V_0 \cap \mathscr{G}_1)) \qquad \text{et} \qquad (\varphi_1^x)' \in \mathscr{D}(\exp V_0').$$

Soit $(\psi_1^x)'$, la fonction de $\mathscr{D}(V_0')$ associée à $(\varphi_1^x)'$:

(3) $$(\psi_1^x)'(X)=(\varphi_1^x)'(\exp X).\det S'(\mathrm{ad}_{\mathscr{G}'}(X)) \quad (X \in V_0').$$

On a alors :

$$K(x, x)=\Delta_G(x)^{-1}\rho'(\chi^{-1/2} \times (\varphi_1^x)')=\Delta_G(x)^{-1}\, \rho'(\chi^{-1/2}(\exp .) \times (\psi_1^x)').$$

D'après (1), on aura alors pour presque tout x :

$$\operatorname{tr} K(x, x)=\Delta_G(x)^{-1} \dim \tau \int_{\omega} (\chi^{-1/2}(\exp .).j'^{-1}.(\psi_1^x)')^{\wedge}\, d\beta_\omega \quad (\mathrm{T}.8).$$

Utilisant (3), et :

$$\det S'(\mathrm{ad}_{\mathscr{G}'} X)=j'(X')^2 \,.\left(\det \mathrm{Ad}_{\mathscr{G}'}\left(\exp\left(-\frac{X}{2}\right)\right)\right),$$

on obtient :

tr $K(x, x)=$

$$\Delta_G(x)^{-1} \dim \tau \cdot \int_\omega (\chi^{-1/2}(\exp.) \times j' \times (\det \mathrm{Ad}_{\mathscr{G}'}(\exp.))^{-1/2} \times (\varphi_1^{x\prime}(\exp.))^\wedge \, d\beta_\omega.$$

Posons :

$$q(X)=\det S'(\mathrm{ad}_{\mathscr{A}_1} X) \qquad (X \in \mathscr{G}_1)$$

et :

$$t(X)=(\det S(\mathrm{ad}_{\mathscr{G}_1/\mathscr{A}_1} X))^{1/2}=j'(X') \qquad (X \in \mathscr{G}_1)$$

(où X' est l'image de $X \in \mathscr{G}_1$ dans $\mathscr{G}'=\mathscr{G}_1/\mathscr{A}_1$).

Par un calcul direct ou d'après le lemme 7 de [10] p. 276, on aura alors :

tr $K(x, x)=$

$$\Delta_G(x)^{-1} \dim \tau \, . \int_\omega (q \times t)\chi^{-1/2}(\exp.) \times (\det \mathrm{Ad}_{\mathscr{G}'}(\exp.))^{-1/2} \times \varphi_1^x(\exp.))^\wedge \, d\beta_\omega.$$

Soit T_1 la distribution dans $\exp(V_0 \cap \mathscr{G}_1)=(\exp V_0) \cap G_1$ définie par :

$$T_1(\varphi_1)=\int_\omega (t.q.\varphi_1(\exp.))^\wedge \, d\beta_\omega \qquad \text{pour} \quad \varphi_1 \in \mathscr{D}(\exp(V_0 \cap \mathscr{G}_1)).$$

On a alors d'après ce qui précède pour presque tout x :

(4) $\quad \operatorname{tr} K(x, x)=\Delta_G(x)^{-1} \cdot \dim \tau \cdot T_1(\chi^{-1/2} \cdot (\det \mathrm{Ad}_{\mathscr{G}'}.)^{-1/2} \cdot \varphi_1^x).$

D'autre part on a :

$$\int_\Omega (j^{-1}\psi)^\wedge \, d\beta_\Omega=\int_\Omega (j^{-1} \cdot \det S'(\mathrm{ad}_{\mathscr{G}}.) \cdot \varphi(\exp.))^\wedge \, d\beta_\Omega$$

$$=\int_\Omega (j \, . (\det . \mathrm{Ad}(\exp.))^{-1/2} \, . \, \varphi(\exp.))^\wedge \, d\beta_\Omega.$$

Utilisant [10], formule 5, p. 280, on obtient :

(5) $\quad \displaystyle\int_\Omega (j^{-1}\psi)^\wedge \, d\beta_\Omega$

$$=\int_{G/G_1} \Delta_G(x)^{-1} \, T_1(\chi^{-1/2}(\det \mathrm{Ad}_{\mathscr{G}}(.))^{-1/2} \varphi_1^x) \, d\mu_{G,G_1}(x) \quad (\mathrm{T}.6)$$

(en fait dans [10] on suppose que $\mathscr{G}(l)$ est abélienne, mais le résultat est valable même si $\mathscr{G}(l)$ est nilpotente). La forme $(X, Y)\mapsto l([X, Y])$ induit sur $\mathscr{G}/\mathscr{G}_1 \times \mathscr{A}/_{\mathfrak{t}}$ (où $\mathfrak{t}=\mathscr{G}(l)\cap \mathscr{A}$) une forme bilinéaire non dégénérée ([10], p. 279). On a alors pour $X\in \mathscr{G}_1$:

$$\det \mathrm{Ad}_{\mathscr{G}/\mathscr{G}_1}(\exp X)=\det \mathrm{Ad}_{\mathscr{A}/\mathfrak{t}}(\exp -X).$$

Ceci entraîne :

$$\det \mathrm{Ad}_{\mathscr{G}}(\exp X)=\det \mathrm{Ad}_{\mathscr{G}_1}(\exp X) \cdot \det \mathrm{Ad}_{\mathscr{A}}(\exp -X)\times \det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{t}}(\exp X)$$
$$=\det \mathrm{Ad}_{\mathscr{G}'}(\exp X)\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{t}}(\exp X).$$

Soit $\mathfrak{k}=\{X\in \mathscr{G}(m) \text{ tel que } \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{t}} X)=0\}$. Alors $\mathfrak{k}$ est un idéal de $\mathscr{G}(m)$ contenant $\mathscr{G}_1(l_1)=\mathscr{G}(l)+\mathscr{A}$ (puisque $\mathscr{G}(l)$ est nilpotent et $\mathscr{A}$ est abélien). On a, pour tout $X\in\mathfrak{k}$, $\det \mathrm{Ad}_{\mathfrak{t}}(\exp X)=1$. Utilisant le lemme 6 de [10], on en déduit que :

(6) $T_1(\chi^{-1/2}\cdot(\det \mathrm{Ad}_{\mathscr{G}}(.))^{-1/2})\varphi_1^x)=T_1(\chi^{-1/2}\cdot(\det \mathrm{Ad}_{\mathscr{G}'}(.))^{-1/2}\,.\,\varphi_1^x)$.

Utilisant (2), (4), (5) et (6), on obtient :

$$\mathrm{tr}\,\rho(\psi)=\dim \tau.\int_\Omega (j^{-1}\psi)\hat{}\ d\beta_\Omega$$

ce qui termine la démonstration du 2° du lemme.

Si $\rho(\psi)=\rho(\varphi)$ est positif, $K(x, x)$ est alors positif pour presque tout x ([2], chap. 5, p. 107). D'après l'hypothèse de récurrence, $K(x, x)$ est alors traçable pour presque tout x, et utilisant (4) et (5), on en déduit alors que $\rho(\psi)$ est traçable ([2], chap. 5, p. 107). Ceci termine la démonstration du lemme dans ce cas.

2ᵉ *cas :* On suppose que l'idéal $\mathscr{N}$ est une algèbre d'Heisenberg de dimension $2p+1$ avec $p>0$. On suppose en plus que le centre $\mathscr{Z}$ de $\mathscr{N}$ est égal au centre de $\mathscr{G}$, et que $l\,|\mathscr{Z}\neq 0$. Soient $f=l|_{\mathscr{N}}$, $\mathscr{M}=\mathrm{Ker}\,f$, $\mathscr{G}_1=\mathscr{G}(f)$, $l_1=l|_{\mathscr{G}_1}$, $G_1=\widetilde{G(f)}$ (4.3). Alors $\mathscr{G}=\mathscr{M}\oplus\mathscr{G}_1$ de sorte que l'on peut identifier $\mathscr{G}^*$ et $\mathscr{M}^*\oplus\mathscr{G}_1^*$ ([6], lemme 1.5, p. 31).

(*a*) Supposons de plus que G soit simplement connexe. Alors d'après Kirillov ([6], p. 31), $G(f)$ est connexe, et simplement connexe. De plus, si $\Omega=G.l$ et $\Omega_1=G_1.l_1=G(f).l_1$, on a $\Omega\cap\mathscr{G}_1^*=\Omega_1$ et l'application $(X, g_1)\mapsto \exp(\mathrm{ad}\,X).g_1$ de $\mathscr{M}\times\Omega_1$ dans $\mathscr{G}^*$ est une bijection de $\mathscr{M}\times\Omega_1$ sur Ω. Soit T une représentation unitaire irréductible de G telle que $T|_Z$ soit multiple de $\chi_f(Z=N(f))$. Il existe alors une représentation irréductible T_1 de $G_1=\widetilde{G(f)}$ telle que $T=T_1\otimes\tilde{\sigma}$ où $\sigma=\rho(f)$ (*cf.* 4.3). Supposons qu'il existe un voisinage V_1 de 0 dans $\mathscr{G}$, G_1-invariant tel que l'application exponentielle de G_1 soit un difféomorphisme de V_1 sur un ouvert W_1 de G_1, et une fonction analytique P_1 dans $\mathscr{G}_1$ G_1-invariante, non nulle sur V_1, telle qu'on ait pour $\psi_1 \in \mathscr{D}(V_1)$:

1° Si $T_1(\psi_1)$ est positif, alors $T_1(\psi_1)$ est traçable.

2° Si $T_1(\psi_1)$ est traçable, on a :

$$\operatorname{tr} T_1(\psi_1) = \int_{\Omega_1} (\psi_1 p_1^{-1})\hat{}\, d\beta_{\Omega_1} \quad \text{(T.8).}$$

Soit V l'ensemble des $X+Y$; $X \in \mathscr{M}$ et $Y \in V_2$, où V_2 est l'ensemble des $Y \in V_1$ tel que $|\operatorname{Im} x| < \pi$ pour toute valeur propre x de $\operatorname{ad}_{\mathscr{M}} Y$.

Posons :

$$P(X+Y) = P_1(Y).\left(\det\left(\frac{\operatorname{sh} \operatorname{ad}_{\mathscr{M}} Y/2}{\operatorname{ad}_{\mathscr{M}} Y/2}\right)\right)^{1/2} \quad \text{pour} \quad X \in \mathscr{M} \quad \text{et} \quad Y \in \mathscr{G}_1.$$

Alors V est un voisinage, G-invariant, de 0 dans $\mathscr{G}$ et P est une fonction de classe C^∞ sur $\mathscr{G}$, G-invariante, non nulle sur V. De plus, si $\psi \in \mathscr{D}(V)$, on a :

1° Si $T(\psi)$ est positif, alors $T(\psi)$ est traçable.

2° Si $T(\psi)$ est traçable, on a :

$$\operatorname{tr} T(\psi) = \int_{\Omega} (\psi P^{-1})\hat{}\, d\beta_{\Omega}$$

(ce résultat est prouvé dans [14]; *cf.* aussi [6], p. 37).

(*b*) Revenons au cas initial. Soit $G' = G(l)G_0$ (T.1, T.3).

On a : $\Omega' = G'.l = G_0.l = \Omega_0$. Soit $\rho' = \rho(l, \tau, \mathfrak{h}, G')$ (*cf.* 3.2). On a d'après 6.1, $\rho = \operatorname{ind}_{G' \nearrow G} \rho'$. De plus on a $\rho'|_{G_0} = \dim \tau . \rho_0$ où $\rho_0 = \rho(l, \chi_l, \mathfrak{h}, G_0)$ $(G_0(l) = G(l)_0$ puisque $G(f)_0 \cap G(l) = G(l)_0$ (lemme 3, de 1.4) et $G_0 = G(f)_0 \exp(\mathscr{M}) = G(f)_0 N)$. Pour conclure, il suffit de prouver la proposition dans le cas de G_0 et ρ_0. On peut donc supposer que G est connexe dans ce cas. Il est facile de voir que l'on peut supposer aussi que G est simplement connexe. On est alors dans les conditions de (*a*).

En effet $\rho = \rho_1 \otimes \tilde{\sigma}$ où $\rho_1 = \rho(l_1, \chi_{l_1}, \mathfrak{h}_1, G_1)$ (*cf.* 4.4.4), et on a :

$$j(X+Y) = j_1(X).\left(\det\left(\frac{\operatorname{sh} \operatorname{ad}_{\mathscr{M}} X/2}{\operatorname{ad}_{\mathscr{M}} X/2}\right)\right)^{1/2} \quad \text{pour} \quad X \in \mathscr{G}_1 \quad \text{et} \quad Y \in \mathscr{M},$$

où :

$$j_1(X)=\left(\det\left(\frac{\operatorname{sh}\operatorname{ad}_{\mathscr{G}_1} X/2}{\operatorname{ad}_{\mathscr{G}_1} X/2}\right)\right)^{1/2}.$$

L'orbite $\Omega_1=G_1.l_1$ est tempérée, fermée, et $\mathscr{G}_1(l_1)$ est nilpotente ($\Omega_1=\Omega\cap\mathscr{G}_1^*$). D'après l'hypothèse de récurrence (dim $\mathscr{G}_1<$dim $\mathscr{G}$), on a alors pour $\psi_1\in\mathscr{D}(V_1)$, ($V_1$ et W_1 associées à $\mathscr{G}_1$ et G_1 comme dans 7.1) :

1° Si $\rho_1(\psi_1)$ est positif, $\rho_1(\psi_1)$ est traçable.

2° Si $\rho_1(\psi_1)$ est traçable, on a :

$$\operatorname{tr}\rho_1(\psi_1)=\int_{\Omega_1}(j_1^{-1}\psi_1)^{\wedge}\,d\beta_{\Omega_1}.$$

D'après les résultats de (a), le lemme est alors vrai dans ce cas.

3^e *cas :* On suppose que le centre $\mathscr{Z}$ de $\mathscr{G}$ est non nul et facteur direct dans $\mathscr{G}$. Il existe alors un idéal $\mathscr{G}_1$ tel que $\mathscr{G}=\mathscr{G}_1\oplus\mathscr{Z}$. Soient $l_1=l|_{\mathscr{G}_1}$, G_1 le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathscr{G}_1$, Z le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathscr{Z}$, $\Omega_1=G_1.l_1$. On a $G_0=G_1\times Z$, $G_0(l)=G_1(l_1)\times Z$, $\chi_l=\chi_{l_1}\otimes\chi_m$ où $m=l|_{\mathscr{Z}}$. Soit $\tau_0\in Y^{\mathrm{irr}}(l, G_0)$, il existe alors τ_1 dans $Y^{\mathrm{irr}}(l_1, G_1)$ telle que $\tau_0=\tau_1\otimes\chi_m$. Soient :

$$\rho_0=\rho(l,\tau_0,\mathfrak{h},G_0)\qquad\text{et}\qquad\rho_1=\rho(l_1,\tau_1,\mathfrak{h}_1=\mathfrak{h}\cap(\mathscr{G}_1)_{\mathbf{C}},G_1).$$

On a $\rho_0=\rho_1\otimes\chi_m$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à G_1,Ω_1,ρ_1, on a alors pour $\psi_1\in\mathscr{D}(V_1)$:

1° Si $\rho_1(\psi_1)$ est positif, $\rho_1(\psi_1)$ est traçable.

2° Si $\rho_1(\psi_1)$ est traçable, alors on a :

$$\operatorname{tr}\rho_1(\psi_1)=\dim\tau_1.\int_{\Omega_1}(\psi_1 j_1^{-1})^{\wedge}\,d\beta_{\Omega_1}\quad(\mathrm{T}.8)$$

où j_1 est définie sur $\mathscr{G}_1$ par :

$$j_1(X)=\left(\det\left(\frac{\operatorname{sh}\operatorname{ad}_{\mathscr{G}_1} X/2}{ad_{\mathscr{G}_1} X/2}\right)\right)^{1/2}.$$

Ceci entraîne alors pour $\psi\in\mathscr{D}(V)$:

1° Si $\rho_0(\psi)$ est positif, $\rho_0(\psi)$ est traçable.

2° Si $\rho_0(\psi)$ est traçable, on a :

$$\operatorname{tr}\rho_0(\psi)=\dim\tau_0.\int_{\Omega_0}(\psi j^{-1})^{\wedge}\,d\beta_{\Omega_0}\quad(\mathrm{T}.8),$$

où $\Omega_0=G_0.l(\mathrm{T}.3)$.

Soit $G'=G(l)\,G_0$ et $\rho'=\rho(l, \tau, \mathfrak{h}, G')$. On a d'après 6, $\rho=\mathrm{ind}\ \rho'$. De plus on a :

$$\tau\,|_{G_0(l)}=\tau_1\oplus\ldots\oplus\tau_p \qquad \text{et} \qquad \rho'\,|_{G_0}=\rho_0^1\oplus\ldots\oplus\rho_0^p,$$

avec $\tau_i\in Y^{\mathrm{irr}}(l, G_0)$

et :

$$\rho_0^i=\rho(l, \tau_i, \mathfrak{h}, G_0) \qquad (i=1, \ldots, p).$$

Pour $\psi\in\mathscr{D}(V)$, on a :

$$\rho'(\psi)=\rho_0^1(\psi)\oplus\ldots\oplus\rho_0^p(\psi),$$

et on a : $\dim\tau=\sum_{i=1}^p \dim\tau^i$.

On en déduit, d'après les résultats obtenus plus haut, que :

1° Si $\rho'(\psi)$ est positif, $\rho'(\psi)$ est traçable.

2° Si $\rho'(\psi)$ est traçable, on a :

$$\mathrm{tr}\ \rho'(\psi)=\dim\tau.\int_{\Omega_0}(j^{-1}\psi)\hat{}\ d\beta_{\Omega_0} \quad (\mathrm{T}.8).$$

Utilisant $\rho=\mathrm{ind}\ \rho'$, on conclut alors dans ce cas.

4ᵉ *cas :* Si on n'est pas dans l'un des cas précédents, $\mathscr{G}$ est semi-simple compacte, et G_0 est semi-simple compact. Soit ρ_0 la représentation irréductible associée à l (*cf.* § 5). On a alors d'après Kirillov [13] :

$$\mathrm{tr}\ \rho_0(\psi)=\int_{\Omega_0}(\psi j^{-1})\hat{}\ d\beta_{\Omega_0} \quad (\mathrm{T}.8),$$

où $\Omega_0=G_0.l$. Soit $\rho'=\rho(l, \tau, \mathfrak{h}, G')$ où $G'=G(l)\,G_0$. On a : $\rho=\mathrm{ind}\ \rho'$ (*cf.* 6.1), et $\rho'\,|_{G_0}=\dim\tau.\rho_0$, $(G_0(l)=G(l)_0)$. On a donc $\rho'(\psi)=\dim\tau.\rho_0(\psi)$ et donc $\mathrm{tr}\ \rho'(\psi)=\dim\tau.\int_{\Omega_0}(\psi j^{-1})\hat{}\ d\beta_{\Omega_0}$, et par conséquent en utilisant $\rho=\mathrm{ind}\ \rho'$ on obtient :

$$\mathrm{tr}\ \rho(\psi)=\dim\tau.\int_{\Omega}(\psi j^{-1})\hat{}\ d\beta_{\Omega}.$$

Ceci termine la démonstration du lemme 7.2.

C.Q.F.D.

7.3. Théorème. — *Soient G un groupe de Lie de type (H), Ω une G-orbite tempérée, fermée, telle que $\mathscr{G}(l)$ soit nilpotente $(l\in\Omega)$ $(T.1)$, et admissible. Pour $l\in\Omega$, soit $\tau\in X^{\mathrm{irr}}(l)$ tel que* $\dim\tau<\infty$, *et soit $\rho=\rho(l, \tau, G)$ la représentation irréductible associée à (l, τ)* (*cf.* th. 3.3).

1° *L'application* $\varphi \mapsto \rho(\varphi)$ *envoie continûment l'espace* $\mathscr{D}(G)$, (T.9), *dans l'espace des opérateurs à trace dans l'espace de* ρ.

2° *Il existe un voisinage ouvert* V *de* 0 *dans* $\mathscr{G}$ *tel qu'on ait* j *non nulle sur* V, *de classe* C^∞ *sur* V, *et pour tout* $\psi \in \mathscr{D}(V)$, $\rho(\psi)$ *est traçable et :*

$$\operatorname{tr} \rho(\psi) = \dim \tau . \int_\Omega (\psi j^{-1})\hat{}\; d\beta_\Omega \quad (\mathrm{T}.9).$$

Démonstration du théorème. — (*a*) D'après [5], théorème 3.1, si $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ et $\mathscr{U}$ est un ouvert de G, φ est somme finie de termes de la forme $\varphi_1 \star \varphi_2$ avec $\operatorname{supp}(\varphi_1) \subset \mathscr{U}$ et $\operatorname{supp}(\varphi_2) \subset \operatorname{supp}(\varphi)$.

(*b*) Ce résultat permet d'avoir une proposition plus générale que la proposition 3.2.2 de [2], chap. 9 :

PROPOSITION. — *Soit* $\mathscr{U}$ *un voisinage ouvert de* 1 *dans* G *et* T *une représentation unitaire de* G *tels que* $T(\varphi)$ *soit un opérateur de Hilbert-Schmidt pour tout* $\varphi \in \mathscr{D}(\mathscr{U})$. *Alors l'application* $\varphi \mapsto T(\varphi)$ *envoie continûment* $\mathscr{D}(G)$ *dans l'espace des opérateurs à trace dans l'espace de* T.

Démonstration de la proposition. — Utilisant (*a*), on montre que pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$, $T(\varphi)$ est de Hilbert-Schmidt, et ensuite que pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$, $T(\varphi)$ est un opérateur à trace, et donc l'application $\varphi \mapsto T(\varphi)$ est bien définie de $\mathscr{D}(G)$ dans l'espace des opérateurs à trace. Utilisant le théorème du graphe fermé, on montre alors que cette application envoie continûment $\mathscr{D}(G)$ dans l'espace des opérateurs à trace (cette remarque est due à J. Dixmier).

C.Q.F.D.

(*c*) Utilisant la proposition de (*b*), on voit alors que la démonstration du théorème 7.3 se réduit au lemme de 7.2. Comme dans [2], chap. 9, p. 250 ou dans [12].

C.Q.F.D.

8. Remarque et exemple

Le théorème 7.3 est prouvé dans le cas où l'orbite Ω est telle que $\mathscr{G}(l)$ soit nilpotente ($l \in \Omega$). Dans le cas des groupes de Lie résolubles, j'ai prouvé que pour une orbite Ω tempérée correspondante à ρ, il existe une fonction P_Ω de C^∞, G-invariante, et un voisinage V de 0 dans $\mathscr{G}$ sur lequel P_Ω est non nulle telle que :

$$\operatorname{tr} \rho(\psi) = \dim \tau . \int_\Omega (\psi p_\Omega^{-1})\hat{}\; d\beta_\Omega,$$

pour $\psi \in \mathscr{D}(V)$ [12]. Dans le cas des groupes de Lie de type (H), un tel résultat n'est pas vrai en général si $\mathscr{G}(l)$ n'est pas nilpotente ($l \in \Omega$) comme le prouve l'exemple suivant.

Soit K un groupe de Lie connexe, compact, semi-simple, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Soit G le produit semi-direct de K par $\mathfrak{k}_2 = \mathfrak{k}$ considéré comme algèbre de Lie abélienne défini par $x.X = \mathrm{Ad}(x)X$ ($x \in K$, $X \in \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{k}$). L'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ de G est le produit semi-direct de $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}$ (compacte semi-simple) par $\mathfrak{k}_2 = \mathfrak{k}$ (abélienne). On a alors :

$$(x, X)(x', X') = (xx', X + x.X') \qquad \text{pour} \quad x, x' \in K \quad \text{et} \quad X, X' \in \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{k}\,.$$

On a aussi :

$$(x, X).(X_1, X_2) = (x.X_1, x.X_2 + [X, x.X_1]),$$

si $(x, X) \in G$ et $(X_1, X_2) \in \mathscr{G}$. Le dual $\mathscr{G}^*$ de $\mathscr{G}$ est $\mathfrak{k}_1^* \times \mathfrak{k}_2^*$. Si $(f_1, f_2) \in \mathscr{G}^*$, on a alors :

$$(x, X).(f_1, f_2) = (x.f_1 + X.(x.f_2), x.f_2) \qquad ((x, X) \in G).$$

A. Soient T un sous-groupe de Cartan dans K, $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie T qui est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$ un supplémentaire de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{k}$ invariant par l'action de $\mathfrak{t}$. Soient K' l'ouvert (dense) des points réguliers dans K, et $T' = K' \cap T$. On a $K' = \bigcup_{a \in K} a T' a^{-1}$. Soient dk la mesure de Haar sur K de masse totale 1, dt la mesure de Haar sur T de masse totale 1, dK et dT les mesures de Haar correspondantes sur $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{t}$ respectivement (T.7). Rappelons qu'on a :

1° L'application $(k, t) \mapsto ktk^{-1}$ de $K/T \times T'$ dans K' est régulière, et c'est un revêtement d'ordre $|W|$ où $|W|$ est le cardinal du groupe de Weyl $W = {}^{N_G(\mathfrak{t})}/T$, où $N_G(\mathfrak{t})$ est le normalisateur de $\mathfrak{t}$ dans G. L'application $(k, T) \mapsto k.T$ de $K/T \times \mathfrak{t}'$ dans $\mathfrak{k}'$ est régulière, et c'est un revêtement d'ordre $|W|$, avec $\mathfrak{k}'$ l'ensemble des points réguliers dans $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{t}' = \mathfrak{k}' \cap \mathfrak{t}$.

2° Pour $\varphi \in \mathscr{D}(K)$ (T.9), on a :

$$(1) \qquad \int_{K'} \varphi(k)\,dk = \frac{1}{|W|} \int_T \left(\int_{K/T} O(t)\,\varphi(ktk^{-1})\,d\dot{k} \right) dt,$$

où $d\dot{k}$ est la mesure quotient sur K/T associée à dk et dt, et :

$$O(t) = |\det(1 - \mathrm{Ad}\,t)|_{\mathfrak{t}/\mathfrak{t}}.$$

On a aussi pour $\psi \in \mathscr{D}(\mathfrak{k})$:

$$\int_{k} \psi(K)\,dK = \frac{1}{|W|}\int_{t'}\left(\int_{K/T} \Pi(T)\,\psi(k.T)\,d\dot{k}\right)dT,$$

où $\Pi(T) = |\det(\mathrm{ad}T)|_{\mathfrak{k}/\mathfrak{t}}$.

(Pour ces résultats, *voir* par exemple le livre de Wallach [23], p. 101.)

B. FORMULES INTÉGRALES

LEMME 1. — *L'application :*

$$\varphi : \ (x, X, t, T) \mapsto (x, x.X)(t, T)(x. x.X)^{-1} = (xtx^{-1}, x.X - xt.X + x.T)$$

de $K/T \times \mathfrak{p} \times T' \times \mathfrak{t}$ dans $K' \ltimes \mathfrak{k}$ est un revêtement d'ordre $|W|$, régulier. L'application :

$$\psi : \ (x, X, T_1, T_2) \mapsto (x, x.X).(T_1, T_2) = (x.T_1, x.T_2 + [x.X, x.T_1])$$

de $K/T \times \mathfrak{p} \times \mathfrak{t}' \times \mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{k}' \ltimes \mathfrak{k}$ est aussi un revêtement régulier d'ordre $|W|$. De plus, si $dg = dk \times dK$ et $dX = dX_1\,dX_2$ sont les mesures de Haar sur G et $\mathscr{G}$ respectivement, on a :

$$(3) \quad \int_G f(g)\,dg = \frac{1}{|W|}\int_{K/T}\int_{\mathfrak{p}}\int_{T}\int_{\mathfrak{t}} f((x, x.X)(t, T)(x, x.X)^{-1})\,O(t)^2\,d\dot{x}\,dX\,dt\,dT,$$

pour $f \in \mathscr{D}(G)$, et :

$$(4) \quad \int_{\mathscr{G}} f(X)\,dX = \frac{1}{|W|}\int_{K/T}\int_{\mathfrak{p}}\int_{\mathfrak{t}'}\int_{\mathfrak{t}} f((x, x.X).(T_1, T_2))\,\Pi(T_1)^2\,d\dot{x}\,dX\,dT_1\,dT_2,$$

pour $f \in \mathscr{D}(\mathscr{G})$.

Démonstration du lemme 1. — Il n'est pas difficile de voir que φ et ψ sont bien définies, sont surjectives, et que l'image réciproque d'un point par φ ou par ψ est de cardinal $|W|$ et formé de points W-conjugués. Montrons que φ est régulière. Soit (x_0, X_0, t_0, T_0) fixé dans $K/T \times \mathfrak{p} \times T' \times \mathfrak{t}$. On a :

$$(d\varphi)_{(x_0, X_0, t_0, T_0)}(X', X, T', T) = (x_0(t_0^{-1}-1).X' + x_0.T', [X', X_0]$$
$$-[x_0.X', t_0.X_0] + [X', T_0] + x_0 t_0.[T', X_0]$$
$$+ x_0.X - x_0 t_0.X + x_0.T).$$

pour (X', X, T', T) dans $\mathfrak{k}/\mathfrak{t} \times \mathfrak{p} \times \mathfrak{t}' \times \mathfrak{t}$. On aura alors :

$$\det((d\varphi)_{(x_0, X_0, t_0, T_0)}) = \det((X, T) \mapsto (x_0.X - x_0 t_0.X + x_0.T))$$
$$\times \det((X', T') \mapsto x_0(t_0^{-1}-1).X' + x_0.T')$$
$$= \det(X \mapsto x_0(1-t_0).X) \times \det(T \mapsto x_0.T)$$
$$\times \det(X' \mapsto x_0(t_0^{-1}-1).X') \times \det(T' \mapsto x_0.T')$$
$$= \det(1-t_0)_{\mathfrak{p}} \times \det(t_0^{-1}-1)_{\mathfrak{p}}.$$

D'où $|\det(d\varphi)_{(x_0, X_0, t_0 T_0)}| = O(t_0)^2$ et si t_0 est régulier on a $O(t_0) \neq 0$, donc φ est régulière.

De la même façon, on démontre que :

$$|\det(d\psi)_{(x_0, X_0, T_1^0, T_2^0)}| = \Pi(T_1^0)^2,$$

et on en déduit que si T_1^0 est régulier on a $\Pi(T_1^0) \neq 0$ et alors ψ est régulière.

Pour prouver (3) et (4), il suffit d'utiliser les formules (1) et (2), et le théorème de Fubini.

C.Q.F.D.

Soient $f_2 \in \mathfrak{t}^*$, $K_2 = K(f_2)$, W_2 le groupe de Weyl de K_2, $K_2' = K' \cap K_2$, $\mathfrak{k}_2' = \mathfrak{k}' \cap \mathfrak{k}_2$.

LEMME 2. — *Les applications* φ_2 *de* $K_2/T \times \mathfrak{p} \times T' \times \mathfrak{t}'$ *dans* $K_2' \times \mathfrak{k}$ *qui a* (x, X, t, T) *associe* $(x, x.X)(t, T)(x, x.X)^{-1}$ *et* ψ_2 *de* $K_2/T \times \mathfrak{p} \times \mathfrak{t}' \times \mathfrak{t}$ *dans* $\mathfrak{k}_2' \times \mathfrak{k}$ *qui à* (x, X, T_1, T_2) *associe* $(x, x.X).(T_1, T_2)$ *sont des revêtements d'ordre* $|W_2|$ *réguliers. De plus, on a :*

$$(5) \quad \int_{K_2' \times \mathfrak{k}} f(g)\,dg =$$
$$\frac{1}{|W_2|} \int_{K_2/T} \int_{\mathfrak{p}} \int_{T'} \int_{\mathfrak{t}'} f((x, xX)(t, T)(x, x.X)^{-1})$$
$$\times O(t)\,O_2(t)\,d\dot{x}\,dX\,dt\,dT,$$

pour $f \in \mathscr{D}(K_2' \times \mathfrak{k})$ où :

$$O(t) = |\det(1-t)|_{\mathfrak{k}/\mathfrak{t}} \quad \text{et} \quad O_2(t) = |\det(1-t)|_{\mathfrak{k}_2/\mathfrak{t}},$$

et on a aussi :

$$(6) \quad \int_{\mathfrak{k}_2' \times \mathfrak{k}} f(X)\,dX =$$

$$\frac{1}{|W_2|} \int_{K_2/T}\int_{\mathfrak{p}}\int_{\mathfrak{t}'}\int_{\mathfrak{t}} f((x, x.X).(T_1, T_2)) \times \Pi_2(T_1)\Pi(T_1)\,d\dot{x}\,dX\,dT_1\,dT_2,$$

pour $f \in \mathscr{D}(\mathfrak{k}_2' \times \mathfrak{k})$ où :

$$\Pi(T) = |\det(\operatorname{ad} T)|_{\mathfrak{k}/\mathfrak{t}} \qquad \text{et} \qquad \Pi_2(T) = |\det(\operatorname{ad} T)|_{\mathfrak{k}_2/\mathfrak{t}}.$$

Démonstration. — De la même façon que dans le lemme 1, on prouve que φ_2 et ψ_2 sont régulières, puisque :

$$|(\det(d\varphi_2)_{(x, X, t, T)}| = O(t)\,O_2(t) \neq 0$$

pour t régulier, et :

$$|(d\psi_2)_{(x, X, T_1, T_2)}| = \Pi(T_1)\,\Pi_2(T_1) \neq 0$$

pour T_1 régulier. Pour les formules (5) et (6), on les prouve de la même façon que (4) et (5) en utilisant les formules (1) et (2) dans le cas du groupe K_2.

C.Q.F.D.

C. Fonction caractère

Soient $f_2 \in \mathfrak{t}^*$ non régulier, $f_1 \in \mathfrak{t}^*$ régulier et $f = (f_1, f_2)$. On a alors :

$$K(f_1) = T \subset K(f_2) = K_2,$$

$$G(f_2) = K_2 \ltimes \mathfrak{k} \qquad \text{et} \qquad G(f) = K(f_1) \ltimes \mathfrak{k}(f_2).$$

Le groupe $G(f)$ est connexe et $\mathscr{G}(f)$ est résoluble non nilpotente (ceci est dû au fait que f_2 est non régulier). Supposons qu'en plus f est G-admissible. Soit ρ la représentation irréductible associée à f (th. 3.3). Soit $\mathfrak{h}$ une polarisation positive en f, $\mathfrak{k}_2$-admissible ([3] ou 2.3). Il est facile de voir que $\mathfrak{h} = \mathfrak{b} \ltimes \mathfrak{k}_{\mathbf{C}} \subset (\mathfrak{k}_2)_{\mathbf{C}} \ltimes \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ où $\mathfrak{b}$ est l'unique sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{k}(f_2)_{\mathbf{C}}$ qui est une polarisation positive en $f_1|_{\mathfrak{k}(f_2)}$. On a :

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{k}(f_2) \ltimes \mathfrak{k}, \qquad \mathfrak{d} = \mathfrak{k}(f_1) \times \mathfrak{k},$$

$$E = K(f_2) \ltimes \mathfrak{k}, \qquad D = K(f_1) \times \mathfrak{k}.$$

On a en plus $\rho=\mathrm{ind}_{E\nearrow G}\,\rho_E$ où ρ_E est définie sur E par translation à gauche sur l'espace $\mathscr{H}(\rho_E)$ des fonctions φ de classe C^∞ de E dans $\mathbb{C}$ telles que :

1° $\varphi(x\,d)=\chi_f(d)^{-1}\,\varphi(x)$, $(x\in E,\ d\in D)$.

2° $X.\varphi=(-if(X)+(1/2)\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{e}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(\mathrm{ad}\,X))\,\varphi$, $(X\in\mathfrak{h})$

(où χ_f est le caractère de D associé à f de différentielle $if-(1/2)\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{e}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}(\mathrm{ad}(\,.\,))$.
Soit σ la représentation irréductible de $K_2=K(f_2)$ (compact connexe) associée à $f_1|_{\mathfrak{k}(f_2)}$. L'espace $\mathscr{H}(\sigma)$ est l'espace des ψ de classe C^∞ de K_2 dans $\mathbb{C}$ telles que :

1° $\psi(x\,d)=\chi_f(d)^{-1}\,\psi(x)$, $(x\in K_2,\ d\in K(f_1)=T)$.

2° $X.\psi=(-if_1(X)+(1/2)\,\mathrm{tr}_{(\mathfrak{k}_2)_{\mathbb{C}}/\mathfrak{b}}(\mathrm{ad}\,X))\,\psi$ si $(X\in\mathfrak{b})$.

Soit A défini de $\mathscr{H}(\sigma)$ dans $\mathscr{H}(\rho_E)$ qui à ψ associe φ défini par :

$$\varphi(x,\,X)=e^{-if_2(X)}\,\psi(x)\qquad (x\in K_2,\ X\in\mathfrak{k}).$$

C'est un isomorphisme de $\mathscr{H}(\sigma)$ sur $\mathscr{H}(\rho_E)$. En identifiant ces deux espaces, on aura alors :

$$\rho_E(x,\,X)=e^{if_2(X)}\,\sigma(x)\qquad (x\in K_2,\ X\in\mathfrak{k}).$$

La représentation ρ_E est alors de dimension finie. On note η_f la fonction caractère associée à ρ_E. On note aussi $\omega=(K_2\ltimes\mathfrak{k})(f\,|\,\mathfrak{e})\subset\mathfrak{e}^*$, et $\mathscr{O}_f$ la fonction sur $\mathfrak{e}$ définie par :

$$\mathscr{O}_f(X_1,\,X_2)=\int_\omega e^{i\langle l,\,(X_1,\,X_2)\rangle}\,d\beta_\omega(l),$$

où $d\beta_\omega$ est la mesure canonique sur ω (T. 8).

Utilisant la formule du caractère de Kirillov appliquée à K_2, σ, $\omega_1=K_2(f_1\,|\,\mathfrak{k}_2)$, et le fait que $\omega=\omega_1\times\{f_2\}$, on obtient alors :

$$\eta_f(\exp X_1,\,X_2)=j_{K_2}^{-1/2}(X_1)\,\mathscr{O}_f(X_1,\,X_2),$$

pour $(X_1,\,X_2)\in\mathfrak{e}=\mathfrak{k}_2\ltimes\mathfrak{k}$ où j_{K_2} est définie par :

$$j_{K_2}(X_1)=\det\left(\frac{\mathrm{sh}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{k}_2}X_1/2)}{\mathrm{ad}_{\mathfrak{k}_2}X_1/2}\right)\qquad (X_1\in\mathfrak{k}_2).$$

Soit $\alpha\in\mathscr{D}(G)$. Comme G/E est compact, et ρ est l'induite d'une représentation de dimension finie de E, des raisonnements standards montrent que $\rho(\alpha)$ est traçable, et que donc :

$$\mathrm{tr}(\rho(\alpha))=\int_{G/K_2\ltimes\mathfrak{k}}\left(\int_{K_2\ltimes\mathfrak{k}}\alpha(g\,x\,g^{-1})\,\eta_f(x)\,dx\right)d\dot{g}.$$

D'après (5), on a :

$$\operatorname{tr}\rho(\alpha)=$$

$$\frac{1}{|W_2|}\int_{K/K_2}\int_{K_2/T}\int_{\mathfrak{p}}\int_{T'}\int_{\mathfrak{t}}\alpha((k,0)(x,x.X)(t,T)(x,x.X)^{-1}(k,0)^{-1}$$
$$\times\eta_f(t,T)O_2(t)O(t)\,d\dot{k}\,d\dot{x}\,dX\,dt\,dT$$

(on a utilisé le fait que $G/K_2 \ltimes \mathfrak{k}$ et K/K_2 sont isomorphes, et le fait que :

$$\eta_f((x,x.X)(t,T)(x,x.X)^{-1})=\eta_f(t,T)).$$

On définit Θ_f sur $T'\times\mathfrak{t}$ par la formule :

$$\Theta_f(t,T)=\frac{1}{O(t)}\sum\nolimits_{\omega\in W/W_2}\eta_f(\omega t,\omega T)O_2(\omega t).$$

En utilisant le lemme 1, on prolonge Θ_f en une fonction Θ_f invariante par conjugaison définie sur l'ouvert dense $K'\ltimes\mathfrak{k}$. Il est facile de voir en utilisant (3) que :

$$\operatorname{tr}\rho(\alpha)=\int_G\alpha(g)\Theta_f(g)\,dg.$$

La formule (3) permet de montrer que la fonction Θ_f est localement intégrable, et que l'on a pour tout $\alpha\in\mathscr{D}(G)$:

$$\operatorname{tr}\rho(\alpha)=\int_G\alpha(g)\Theta_f(g)\,dg.$$

D. TRANSFORMÉE DE FOURIER DE L'ORBITE $\Omega=G.f$

D'après le lemme 3.3.4 de [2], chap. 9, on a pour $\psi\,d\beta_\Omega$-intégrable (T.8) :

$$\int_\Omega\psi\,d\beta_\Omega=\int_{G/K_2\ltimes\mathfrak{k}}\left(\int_\omega\left(\int_{\mathfrak{e}^\perp}\psi(x.(l+\sigma))\,d\mathscr{S}(\sigma)\right)d\beta_\omega(l)\right)d\dot{x},$$

où $d\mathscr{S}$ est la mesure sur $\mathfrak{e}^\perp$ induite par la mesure quotient de $\mathscr{G}/\mathfrak{e}$, $d\beta_\omega$ la mesure canonique sur ω (T.8), et $d\dot{x}$ la mesure quotient sur $G/K_2\ltimes\mathfrak{k}$.

Il est facile de voir que l'on a aussi :

$$\int_\Omega\psi\,d\beta_\Omega=\int_{K/K_2}\left(\int_\omega\left(\int_{\mathfrak{e}^\perp}\psi((k,0).(l+\sigma)\,d\mathscr{S}(\sigma)\right)d\beta_\omega(l)\right)d\dot{k}.$$

Utilisant cette formule, il est facile de voir que l'orbite Ω est tempérée. Vu le choix de $d\mathscr{S}$, on a pour $\Theta \in \mathscr{D}(\mathscr{G})$:

$$\int_{\mathfrak{e}} \Theta(X)\,dX = \int_{\mathfrak{e}^{\perp}} \left(\int_{\mathscr{G}} \Theta(X)\, e^{i\langle \sigma, X\rangle}\, dX \right) d\mathscr{S}(\sigma).$$

Soit $\beta \in \mathscr{S}(\mathscr{G})$ et soit $\hat{\beta}$ définie sur $\mathscr{G}$ par :

$$\hat{\beta}(l) = \int_{\mathscr{G}} \beta(X)\, e^{i\langle l, X\rangle}\, dX.$$

On a alors, d'après ce qui précède, $\hat{\beta}$ intégrable sur Ω, et alors :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \hat{\beta}\, d\beta_{\Omega} &= \int_{K/K_2} \left(\int_{\omega} \left(\int_{\mathfrak{e}^{\perp}} \left(\int_{\mathscr{G}} \beta(X) \right.\right.\right. \\ &\qquad \left.\left.\left. \times e^{i\langle l+\sigma,\, (k,0)^{-1}.X\rangle}\, dX \right) d\mathscr{S}(\sigma) \right) d\beta_{\omega}(l) \right) d\dot{k} \\ &= \int_{K/K_2} \left(\int_{\omega} \left(\int_{\mathfrak{e}} \beta(X)\, e^{i\langle l,\, (k,0)^{-1}.X\rangle}\, dX \right) d\beta_{\omega}(l) \right) d\dot{k} \\ &= \int_{K/K_2} \left(\int_{\omega} \left(\int_{\mathfrak{e}} \beta((k,0).X)\, e^{i\langle l, X\rangle}\, dX \right) d\beta_{\omega}(l) \right) d\dot{k}.\end{aligned}$$

L'orbite ω étant compacte (puisque $\omega = \omega_1 \times \{ f_2 \}$), on a :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \hat{\beta}\, d\beta_{\Omega} &= \int_{K/K_2} \left(\int_{\mathfrak{e}} \beta((k,0).X) \left(\int_{\omega} e^{i\langle l, X\rangle}\, d\beta_{\omega}(l) \right) dX \right) d\dot{k} \\ &= \int_{K/K_2} \left(\int_{\mathfrak{e}} \beta((k,0).X)\, \mathcal{O}_f(X)\, dX \right) d\dot{k},\end{aligned}$$

où $\mathcal{O}_f$ est définie par $\mathcal{O}_f(X) = \displaystyle\int_{\omega} e^{i\langle l, X\rangle}\, d\beta_{\omega}(l)$.

Utilisant $\mathfrak{e} = \mathfrak{k}_2 \ltimes \mathfrak{k}$, et la formule (6), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \hat{\beta}\, d\beta_{\Omega} &= \\ &\frac{1}{|W_2|} \int_{K/K_2} \int_{K_2/T} \int_{\mathfrak{p}} \int_{\mathfrak{t}'} \int_{\mathfrak{t}} \beta((k,0)(k', k'.X).(T_1, T_2)) \\ &\qquad \times \mathcal{O}_f(T_1, T_2) \times \Pi_2(T_1)\, \Pi(T_1)\, d\dot{k}\, d\dot{k}'\, dX\, dT_1\, dT_2 \\ &= \frac{1}{|W_2|} \int_{K/T} \int_{\mathfrak{p}} \int_{\mathfrak{t}'} \int_{\mathfrak{t}} \beta((k, k.X).(T_1, T_2)) \\ &\qquad \times \mathcal{O}_f(T_1, T_2)\, \Pi_2(T_1)\, \Pi(T_2)\, d\dot{k}\, dX\, dT_1\, dT_2.\end{aligned}$$

On définit Ξ_f sur $\mathfrak{t}' \times \mathfrak{t}$ par la formule :

$$\Xi_f(T_1, T_2) = \frac{1}{\Pi(T_1)} \sum_{\omega \in W/W_2} \mathcal{O}_f(\omega T_1, \omega T_2) \Pi_2(\omega T_1)$$

$$\text{pour} \quad (T_1, T_2) \in \mathfrak{t}' \times \mathfrak{t}.$$

En utilisant les résultats du lemme 1, cela permet de prolonger Ξ_f en une fonction sur $\mathfrak{k}' \times \mathfrak{k}$, invariante par conjugaison. Utilisant la formule (4), on obtient :

$$\int_\Omega \hat{\beta}\, d\beta_\Omega = \int_{\mathcal{G}} \beta(X) \Xi_f(X)\, dX$$

pour tout $\beta \in \mathcal{D}(\mathcal{G})$, ce qui prouve en particulier que Ξ_f est localement intégrable sur $\mathcal{G}$.

E. Soit P_f la fonction définie par :

$$P_f(X) = \frac{\Theta_f(\exp X)}{\Xi_f(X)}.$$

La fonction P_f est bien définie et continue au voisinage de 0 dans $\mathcal{G}$, mais elle n'est pas de classe C^2 en général comme le prouve l'exemple suivant. On choisit $f_1 = i\rho_1$, où ρ_1 est la demi-somme des racines α dans Δ_2, positives pour un certain ordre dans Δ. La représentation σ de K_2 associée à f_1 est alors triviale. Ceci montre que :

$$\eta_f(x, X) = e^{i\langle f_2, X\rangle} \qquad ((x, X) \in K_2 \ltimes \mathfrak{k}),$$

et par conséquent que :

$$\mathcal{O}_f(X_1, X_2) = j_{K_2}^{1/2}(X_1) e^{i\langle f_2, X_2\rangle} \qquad \text{pour} \quad (X_1, X_2) \in \mathfrak{k}_2 \ltimes \mathfrak{k}.$$

On a alors :

$$P_f(T_1, T_2) = \frac{\Pi(T_1)}{O(\exp T_1)} \frac{\sum_{\omega \in W/W_2} O_2(\exp \omega T_1) e^{i\langle f_2, \omega T_2\rangle}}{\sum_{\omega \in W/W_2} \Pi_2(\omega T_1) j_{K_2}^{1/2}(\omega T_1) e^{i\langle f_2, \omega T_2\rangle}}.$$

Considérons le cas particulier $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(3)$, la sous-algèbre de Cartan :

$$\mathfrak{t} = \left\{ H = \begin{pmatrix} ia & & 0 \\ & ib & \\ 0 & & -i(a+b) \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

On a alors $\Delta=\{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm\alpha_3\}$ où $\alpha_1(H)=i(a-b)$, $\alpha_2(H)=i(2a+b)$, $\alpha_3(H)=i(2b+a)$. Soit f_2 l'élément de $\mathfrak{t}^*$ défini par $f_2(H)=a+b$. On voit facilement que f_2 est admissible et f_2 n'est pas régulier. En fait $\Delta_2=\{\pm\alpha_1\}$. On a si :

$$T=\begin{pmatrix} ia & & 0 \\ & ib & \\ 0 & & -i(a+b) \end{pmatrix},$$

$$\Pi_2(T)=(a-b)^2, \qquad O_2(\exp T)=4\sin^2\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

$$\Pi(T)=(a-b)^2(2a+b)^2(2b+a)^2,$$

$$O(\exp T)=4^3\sin^2\left(\frac{a-b}{2}\right)\times\sin^2\left(\frac{2a+b}{2}\right)\times\sin^2\left(\frac{2b+a}{2}\right),$$

$$j_{K_2}(T)=\left[\frac{\sin(a-b)/2}{(a-b)/2}\right]^2.$$

Il en résulte que l'on a :

$$P_f(T_1, T_2)=\frac{(a-b)^2(2a+b)^2(2b+a)^2}{4^3\sin^2((a-b)/2)\times\sin^2(a+b)/2}$$

$$\times\frac{[\sin^2((a-b)/2)\times e^{i(c+d)}+\sin^2((2a+b)/2)\times e^{id}+\sin^2((2b+a)/2)\times e^{ic}]}{\left\{\begin{array}{l}2[(a-b)\times\sin((a-b)/2)\times e^{i(c+d)} \\ \quad +(2a+b)\times\sin((2a+b)/2)\times e^{id}+(a+2b)\times\sin((a+2b)/2)\times e^{ic}]\end{array}\right\}},$$

où :

$$T_1=\begin{pmatrix} ia & & 0 \\ & ib & \\ 0 & & -i(a+b) \end{pmatrix},$$

et :

$$T_2=\begin{pmatrix} ic & & 0 \\ & id & \\ 0 & & -i(c+d) \end{pmatrix}.$$

Il suffit de prouver que $T_1\mapsto P_f(T_1, 0)$ n'est pas de classe C^2 à l'origine, pour en déduire que P_f n'est pas de classe C^2 à l'origine. Utilisant le fait que $x\mapsto\sin x/x$ est de classe C^∞ et non nulle en tout point, on se ramène à la fonction :

$$(a, b)\mapsto\frac{\sin^2((a-b)/2)+\sin^2((2a+b)/2)+\sin^2((2b+a)/2)}{(a-b)\sin((a-b)/2)+(2a+b)\sin((2a+b)/2)+(2b+a)\sin((2b+a)/2)}.$$

Le changement de variable $(a, b) \mapsto (x=(a-b)/2,\ y=(2b+a)/2)$, permet alors de se ramener à l'étude de :

$$\varphi :\quad (x, y) \mapsto \frac{\sin^2(x)+\sin^2(y)+\sin^2(x+y)}{x\sin x+y\sin y+(x+y)\sin(x+y)}.$$

La fonction φ n'est pas de classe C^2 en $(0, 0)$ car (par exemple) $\partial^2\varphi/\partial x^2$ n'est pas continue en $(0, 0)$. On peut montrer que φ est de classe C^1. Ce qui précède montre qu'il n'existe pas en général une fonction P_Ω *de classe* C^∞ tel qu'on ait la formule du caractère. En effet si une telle fonction existe, on aura : $P_\Omega = P_f$ au voisinage de l'origine, et le fait que P_f n'est pas de classe C^∞ à l'origine permet de conclure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUSLANDER (L.) and KOSTAN (B.). – Polarizations and unitary representation of solvable Lie groups, *Inventiones Math.*, t. 14, 1971, p. 255-354.

[2] BERNAT (P.) et coll. – *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Dunod, 1972.

[3] CHARBONNEL (J. Y.) et KHALGUI (M. S.). – Polarisations pour un certain type de groupes de Lie, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 287, série A, 1978, p. .

[4] CHARBONNEL (J. Y.). *Sur les semi-caractères des groupes de Lie résolubles* (preprint).

[5] DIXMIER (J.) et MALLIAVIN (P.). – Factorisations de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 102, 1978, p. 305-330.

[6] DUFLO (M.). – Caractères des groupes et des algèbres de Lie résolubles, *Ann. scient. Ec. Norm. sup.*, t. 3, 1970, p. 23-74.

[7] DUFLO (M.). – Sur les extensions des représentations des groupes de Lie nilpotents, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, t. 5, 1972, p. 73-119.

[8] DUFLO (M.). – Construction of Primitive Ideals in an Envelopping Algebra, In *Lie groups and their representations*, Adam Hilger Ltd, London, 1975.

[9] DUFLO (M.) et RAÏS (M.). – Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie résolubles, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 9, 1976, p. 107-144.

[10] DUFLO (M.). – Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 10, 1977, p. 265-288.

[11] DUFLO (M.). – Parametrisation of the set of regular orbits of the coadjoint representation of a Lie group, *Lectures at the University of Maryland*, décembre 1978.

[12] KHALGUI (M. S.). – *Sur les caractères des groupes de Lie résolubles*, Publication de Paris-VII, vol. 2, 1978, p. 7-44.

[13] KIRILLOV (A. A.). – The characters of unitary representations of Lie groups, *Functional analysis and its applications*, vol. 2, 1968, p. 40-55.

[14] KIRILLOV (A. A.). – Characters of unitary representations of Lie groups, *Functional analysis and its applications*, vol. 3, 1969, p. 36-47.

[14] KIRILOV (A. A.). – Characters of unitary representations of Lie groups, *Functional analysis and its applications*, vol. 3, 1969, p. 36-47.

[15] LIPSMAN (R.). — *Orbit theory and harmonic analysis on Lie groups with cocompact nilradical* (preprint).

[16] MOEGLIN (C.). — Idéaux primitifs dans les algèbres enveloppantes, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 288, 1979, série A, p. 709-712.

[17] PEDERSON (N. V.). — Semi-characters and solvable Lie groups, *Math. Ann.*, t. 247, 1980, p. 191-244.

[18] PUKANSZKY (L.). — On the charactersand Plancheral formula of nilpotent groups, *J. Funct. Analysis*, vol. 1, 1967, p. 255-280.

[19] PUKANSZKY (L.). — Unitary representations of solvable Lie groups, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 4, 1971, p. 457-608.

[20] PUKANSZKY (L.). — Characters of connected Lie groups, *Acta. Math.*, t. 133, 1974, p. 81-137.

[21] PUKANSZKY (L.). — Unitary representation of cocompact radical Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 236, 1978, p. 1-50.

[22] ROSSMAN (W.). — Kirillov's character Formula for reductible Lie groups, *Inv. Math.*, t. 48, 1978, p. 207-220.

[23] WALLACH (N.). — *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, Dekker, New York, 1973.