BULLETIN DE LA S. M. F.

ERIC REYSSAT

Approximation algébrique de nombres lies aux fonctions elliptiques et exponentielle

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 47-79
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__47_0>

Bull. Soc. math. France,
108, 1980, p. 47-79.

APPROXIMATION ALGÉBRIQUE DE NOMBRES LIÉS AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES ET EXPONENTIELLE

PAR

ÉRIC REYSSAT (*)

RÉSUMÉ. — Une étude systématique est faite des mesures de transcendance les plus précises possible de nombres liés à une fonction $\wp$ de Weierstrass d'invariants algébriques et à la fonction exponentielle, nombres dont la transcendance résulte de théorèmes de T. SCHNEIDER.

ABSTRACT. — Some numbers connected with a Weierstrass $\wp$-function and the exponential function were known to be transcendental by results of T. SCHNEIDER, but had no (or only poor) known transcendence measures. We study here systematically sharp transcendence measures (and in particular transcendence types) for these numbers.

I. — Introduction

Parmi les premières preuves de transcendance de nombres liés aux fonctions elliptiques figurent celles données par Th. SCHNEIDER [S] qui a montré d'une façon générale les résultats suivants; on note $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2, g_3 algébriques, (ω_1, ω_2) une base du réseau des périodes de $\wp$, et η_1, η_2 les quasi-périodes correspondantes de la fonction ζ associée à $\wp$. Si a, b, u sont trois nombres complexes tels que $|a|+|b|\neq 0$ et u non pôle de $\wp$, alors :

(A) *l'un des quatre nombres* $a, b, \wp(u), au+b\zeta(u)$ *est transcendant;*

(B) *l'un des deux nombres* $e^u, \wp(u)$ *est transcendant.*

(*) Texte reçu le 4 janvier 1979, révisé le 17 mai 1979.

Éric REYSSAT, Mathématiques, U.E.R. 47, Tour 46, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

Le problème étudié ici est de donner des mesures de transcendance (ou plus exactement d'approximation) de nombres dont la transcendance découle du résultat précédent.

Pour commencer, rappelons brièvement les travaux précédents sur les mesures de transcendance de ces nombres. Les premiers résultats, dus à N. I. FEL'DMAN, concernent l'approximation des points algébriques de $\wp$ [F1] et l'approximation simultanée de deux périodes indépendantes de $\wp$ [F2].

Les résultats d'indépendance linéaire sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques des nombres $1, \omega_1, \eta_1$ et des nombres ω_1 et π qui résultent respectivement de (A) et (B) ont été progressivement généralisés à l'indépendance linéaire des nombres $1, \omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, 2i\pi$, grâce aux travaux de A. BAKER, J. COATES, et de D. MASSER qui a prouvé le résultat suivant (*cf.* [M], théorèmes II, III, IV) : l'espace vectoriel engendré sur $\overline{\mathbb{Q}}$ par les six nombres $1, \omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, 2i\pi$, est de dimension 4 ou 6 suivant que $\wp$ admet ou non multiplication complexe, et $(1, \omega_1, \eta_1, 2i\pi)$ est une famille linéairement libre. De plus, on considère une forme linéaire

$$\Lambda=\alpha_0+\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2+\beta_1\eta_1+\beta_2\eta_2+\gamma 2i\pi,$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ sont des nombres algébriques de degrés inférieurs à d et de hauteurs inférieures à $H>e$. On suppose que α_0 n'est pas nul. Alors, pour tout nombre réel $\varepsilon>0$, il existe une constante c_1 ne dépendant que de ω_1, ω_2, d et ε, telle que

$$|\Lambda|>c_1 \exp(-(\log H)(\log\log H)^{7+\varepsilon}),$$

et on peut remplacer $7+\varepsilon$ par $4+\varepsilon$ si $\alpha_2=\beta_1=\beta_2=0$.

Dans le cas où α_0 est nul, N. I. FEL'DMAN [F3] a donné une mesure d'approximation de ω_2/ω_1 lorsque $\wp$ est sans multiplication complexe : pour tout nombre algébrique α de degré d et de hauteur $H>e^e$,

$$\left|\frac{\omega_2}{\omega_1}-\alpha\right|>\exp\{-c_2 d((\log H)^3+d^3(\log d)^3)\}.$$

Nous avons donné dans [R] des mesures d'approximation de ω_1/η_1 et ω_1/π, ainsi que des analogues de ces nombres lorsqu'on remplace les périodes de $\wp$ et de l'exponentielle par des points algébriques de ces fonctions.

Ce papier-ci contient une étude systématique des mesures de transcendance des nombres dont la transcendance découle des résultats (A) et (B) de SCHNEIDER. Nous avons pris soin de donner des résultats aussi précis que possible à la fois comme fonction du degré et de la hauteur des nombres algébriques intervenant dans les approximations. Cela fournit en particulier des types de transcendance pour les nombres étudiés. Les résultats principaux, rassemblés dans le théorème 1, sont commentés ensuite en détail.

Notons enfin deux résultats récents non publiés :

D. BROWNAWELL et D. MASSER ont montré que les nombres a, b, $\wp(u)$, $au+b\zeta(u)$ ne peuvent être approchés simultanément mieux qu'à $\exp(-c_3 (\log H)^{\varkappa})$ près par des nombres algébriques de hauteurs inférieures à H, où $\varkappa$ est une constante absolue, et c_3 ne dépend pas de H. Par ailleurs, si u est un point algébrique de $\wp$, ξ un nombre algébrique non nul, α un nombre algébrique de hauteur inférieur à H. alors :

$$|u-\alpha|>\exp\{-c_4(\log H)^{1+\varepsilon}\},$$
$$|u-\alpha \log \xi|>\exp\{-c_4 (\log H)^3\},$$

où c_4 ne dépend pas de H.

G. V. CHOODNOVSKY a obtenu une mesure de transcendance très fine de $\wp(\gamma)$ (où γ est algébrique) dans le cas où $\wp$ admet une multiplication complexe; il obtient la minoration

$$|P(\wp(\gamma))|>H^{-cd},$$

pour tout polynôme non nul $P\in$. $[X]$ de degré d et hauteur inférieure à H, pourvu que $H>c' d^3$.

On étudie, au paragraphe III, le cas où la fonction $\wp$ admet une multiplication complexe, qui permet d'obtenir aisément de nouveaux résultats. Les preuves des inégalités du théorème 1 étant assez similaires, on n'a détaillé que l'une d'elles (§ IV), qui utilise la majeure partie des techniques nécessaires aux démonstrations des résultats présentés. On n'a donné pour les autres que leurs caractéristiques essentielles (§ V).

Je remercie ici M. WALDSCHMIDT qui m'a guidé dans ce travail, et D. MASSER pour les nombreuses suggestions qu'il m'a faites.

II. — Résultats dans le cas général

Nous donnons d'abord les notations utilisées dans la suite. On désigne par $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass d'invariants g_2, g_3 algébriques (ω_1, ω_2) une base du réseau des périodes de $\wp$, et η_1, η_2 les quasi-périodes correspondantes de la fonction ζ associée à $\wp$. On note γ et ξ deux nombres algébriques tels que $\xi \neq 0, 1$. On désigne par u un point algébrique de $\wp$, c'est-à-dire un nombre complexe tel que $\wp(u)$ soit algébrique, et par v un nombre complexe tel que $\zeta(v)+\gamma v$ soit algébrique.

Par ailleurs, on note ω une période de $\wp$, de module inférieur à un nombre $r \geqslant 1$, η la quasi-période correspondante de ζ; α, α_1, α_2 sont des nombres algébriques de degrés respectifs d, d_1, d_2 et de hauteurs respectivement inférieures à H, H_1, H_2, où $\min(H, H_1, H_2) > e^e$ (la hauteur d'un nombre algébrique étant par définition le maximum des modules des coefficients dans le polynôme minimal de ce nombre). On note

$$D=[\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2):\mathbb{Q}]; \qquad h=\log H; \qquad h'=D\left(\frac{\log H_1}{d_1}+\frac{\log H_2}{d_2}\right).$$

Enfin, si w est un nombre complexe, $\tau(w)$ désigne le type de transcendance du corps $\mathbb{Q}(w)$. On notera $\log^+ d=\max(\log d, 1)$.

Avec ces notations, nous obtenons le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Il existe une constante effectivement calculable C, ne dépendant que de $\wp$, ω_1, ω_2, γ, ξ, u, v, vérifiant les minorations*

$$(1) \qquad |\omega_1-\alpha|>\exp\{-Cd^2(h(\log h)^2+d(\log d)^3)\},$$

$$(2) \qquad |u-\alpha|>\exp\{-Cd^4(\log^+ d)^{-4}(h(\log h)^2+d(\log d)^3)\},$$

$$(3) \qquad |\omega-\alpha\eta|>\exp\{-Cr^2d(h(\log h)+r^2d^2(\log d)^3+r^2d^2(\log r)^3)\},$$

$$(4) \qquad |u-\alpha\zeta(u)|>\exp\{-Cd^4(\log^+ d)^{-4}(h(\log h)^2+d^3(\log d)^3)\}.$$

$$(5) \qquad |\wp(\gamma)-\alpha|>\exp\{-Cd^3(h+hd(\log d)/(\log h)+d^2)\}.$$

$$(6) \qquad |\eta_1-\alpha|>\exp\{-Cd^2(h(\log h)^2+d^2(\log d)^4)\}.$$

$$(7) \qquad |\zeta(u)-\alpha|>\exp\{-Cd^4(\log^+ d)^{-4}(h(\log h)^2+d^3(\log d)^2)\}.$$

$$(8) \qquad |\wp(v)-\alpha| >\exp\{-C(h^7(\log h)^{-6}+h^2d^5(\log h)^{-1}+d^7(\log^+ d)^{-1})\}.$$

$$(9) \qquad |\omega_1-\alpha_1\eta_1-\alpha_2|>\exp\{-CD^3(h'(\log h')^3+D^2(\log D)^5)\}.$$

$$(10) \qquad |u-\alpha_1\zeta(u)-\alpha_2| >\exp\{-CD^4(\log^+ D)^{-4}(h'(\log h')^3+D^3(\log D)^3)\}.$$

$$(11) \qquad |\eta_1-\alpha_1|+|\eta_2-\alpha_2|>\exp\{-CD(h'(\log h')+D(\log D)^2)\}.$$

$$(12) \qquad |\pi-\alpha\omega|>\exp\{-Cr^3(h^2+d^2(\log d)^2+d^2(\log r)^2)\}.$$

$$(13) \qquad |(\log\xi)-\alpha\omega_1|>\exp\{-Cd(h^4+d^4(\log d)^4)\}.$$

$$(14) \qquad |(\log\xi)-\alpha u|>\exp\{-Cd^2(\log^+ d)^{-5}(h^4+d^4(\log d)^4)\}.$$

(15) $|e^u-\alpha|$

$$>\exp\{-Cd^5((h(\log h)^4(\log^+ d)^{-5}+h(\log d)^4(\log h)^{-5}+((\log d)/(\log^+\log^+ d))^5)\}.$$

(16) $|\mathfrak{p}(\log\xi)-\alpha|>\exp\{-Cd^5(\log^+ d)^{-5}(h(\log h)^4+d(\log d)^4)\}.$

(17) $|(\omega_1/\eta_1)-\alpha_1|+|(\pi/\eta_1)-\alpha_2|$

$$>\exp\{-CD^{1/2}(h'(\log h')^{1/2}+D(\log D)^{3/2}\}.$$

On en déduit les majorations suivantes de types de transcendance

w	π/ω	$\omega_1, \omega/\eta$	η_1	$u, \mathfrak{p}(\gamma)$	$(\log\xi)/\omega_1$
$\tau(w)$	$2+\varepsilon$	$3+\varepsilon$	$4+\varepsilon$	5	$5+\varepsilon$

w	$(\log\xi)/u, e^u, \mathfrak{p}(\log\xi)$	$u/\zeta(u), \zeta(u), \mathfrak{p}(v)$
$\tau(w)$	6	7

Remarques.

(a) Les inégalités (1) et (2) améliorent des résultats de N. I. Fel'dman (*cf.* [F1]). Dans le cas de multiplication complexe, M. Anderson a trouvé récemment une version un peu plus faible de l'inégalité (5), avec une dépendance en h du type $\exp(-h(\log h))$, et introduit dans la démonstration une idée nouvelle qui nous a permis de prouver (5). On peut remarquer que la dépendance en h dans cette dernière inégalité est la meilleure possible. C'est le premier exemple de nombre relié aux fonctions elliptiques dont on connaisse une mesure de transcendance de ce type.

(b) On suppose que l'hypothèse suivante est vérifiée :

(H1) *Il existe une constante b_1 effectivement calculable ne dépendant que de $\mathfrak{p}, u, \omega_1, \omega_2$ telle que, pour tout couple (p, q) d'entiers rationnels non tous deux nuls, on ait*

$$|p(\omega_1\zeta(u)-\eta_1 u)+q(\omega_2\zeta(u)-\eta_2 u)|>\exp\{-b_1A^{8/3}(\log A)^{1/3}\},$$

où

$$A=\max(|p|, |q|).$$

Alors l'inégalité (4) peut être raffinée de la manière suivante :

(4′) $|u-\alpha\zeta(u)|>\exp\{-Cd^4(\log^+ d)^{-4}(h(\log h)^2+d^3(\log d)^2)\}.$

En particulier, cette minoration est vérifiée si

$$(\omega_1 \zeta(u) - \eta_1 u)/(\omega_2 \zeta(u) - \eta_2 u)$$

n'est pas réel.

(c) Lorsque $\gamma = 0$, la minoration (8) peut être remplacée par la suivante plus fine

$$(8') \quad |\wp(v) - \alpha| > \exp\{-C(h^7 (\log h)^{-6} + h^3 d^4 (\log h)^{-2} + d^7 (\log^+ d)^{-2})\}.$$

(d) Lorsqu'on fixe $\alpha_1 = \gamma$, il est possible et avantageux de remplacer les minorations (9) et (10) par les suivantes :

$$(9') \quad |\omega_1 - \gamma\eta_1 - \alpha| > \exp\{-C(d^2 h (\log h)^2 + d^{10/3} (\log d)(h^{2/3} (\log h)^{10/3} + d^{4/3} (\log d)^{14/3}))\},$$

$$(10') \quad |u - \gamma\zeta(u) - \alpha| > \exp\{-C(d^4 (\log d)^{-4} h (\log h)^2 + d^{17/3} (\log d)^{-1} (h^{2/3} + d^2))\},$$

où C dépend de $\wp$, ω_1, u, et γ.

(e) Lorsque $\log \xi$ est imaginaire pur ou que la fonction $\wp$ admet une multiplication complexe, on peut remplacer l'inégalité (13) par

$$(13') \quad |(\log \xi) - \alpha\omega_1| > \exp\{-C d (h^3 + d^3 (\log d)^3)\}.$$

En particulier, $\tau((\log \xi)/\omega_1) \leqslant 4 + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(f) Lorsque $\log h > (\log d)^3$, on peut avantageusement remplacer l'inégalité (15) par

$$(15') \quad |e^u - \alpha| > \exp\{-C d^5 (h (\log h)^3 (\log d)^{-2} + d (\log h)^4)\}.$$

(g) On peut remplacer l'inégalité (16) par

$$(16') \quad |\wp(\log \xi) - \alpha| > \exp\{-C (d/\log d)^6 (h (\log h)^3 + d^2 (\log d)^2)\},$$

qui est meilleure que (16) dès que $\log h > d (\log d)^{-1}$.

(h) L'intérêt principal des raffinements (4'), (8'), (9'), (10'), (15'), (16') réside dans leurs démonstrations dont la méthode diffère légèrement de celles des inégalités (4), (8), (9), (10), (15), (16) correspondantes. C'est pourquoi nous détaillerons, au paragraphe IV, les démonstrations de (4) et (4'). Seule l'inégalité (13') permet un gain appréciable par rapport à (13).

(i) La relation $\omega_1/\pi=(\omega_1/\eta_1)(\eta_1/\pi)$ montre que la minoration (17) fournit en fait une minoration pour toute approximation simultanée de deux quelconques des trois nombres ω_1/π, ω_1/η_1, η_1/π, par des nombres algébriques.

(j) Plusieurs résultats du théorème 1 peuvent être améliorés en utilisant une technique récente due à D. BROWNAWELL et D. MASSER, reposant dans un cas particulier sur le fait suivant (comparer avec le lemme 4.4 plus bas) : on note a_i, $b_i (i=1, \ldots, n)$ des nombres complexes, b_i non-pôle de $\mathfrak{p}$. On suppose que, pour $i=1, \ldots, n$, la fonction

$$F_i(z)=P(a_i+f(z), \mathfrak{p}(z))$$

admet un zéro d'ordre k_i au point b_i, où $f(z)=z-\alpha\zeta(z)$, et $P\in\mathbb{C}[X, Y]\setminus\{0\}$. Si l'une des fonctions $z_1+f(z_2)$ et $\mathfrak{p}(z_2)$ sépare les points $(z_1, z_2)=(a_i, b_i)$ alors :

$$k_1+\ldots+k_n\leqslant c\{(1+\deg_X P)(1+\deg_Y P)+n(\deg_X P+\deg_Y P)\}.$$

On obtient des variantes de ce résultat en remplaçant f par la fonction z, ou par une fonction exponentielle (en changeant dans ce cas $a_i+f(z)$ en $a_i f(z)$, et $z_1+f(z_2)$ en $z_1 f(z_2)$).

En employant cette méthode, on obtient alors les minorations suivantes (avec les notations du tableau présenté à la fin de l'article) :

$\exp\{-CMK\}$ pour les cas (9), (9'), (13);

$\exp\{-CMK\log^+ d\}$ pour (2), (4), (4'), (7), (14), et pour (16) et (16') lorsque ξ n'est pas une racine de l'unité;

$\exp\{-CMK(\log hd)\}$ pour (5), (8), (8');

$\exp\{-CMK\log E\}$ pour (15) et (15').

III. – Le cas de multiplication complexe

On garde les notations du paragraphe II, et on suppose dans ce paragraphe que la fonction $\mathfrak{p}$ admet une multiplication complexe. Il est alors possible de prouver, outre le raffinement (13') de (13) cité plus haut, de nouvelles inégalités en utilisant les relations de dépendance linéaire sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et de dépendance algébrique liant les nombres $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, 2i\pi$. C'est ainsi que de la relation $\omega_2=\tau\omega_1$, où τ est algébrique, et de la mesure d'approximation simultanée des périodes ω_1 et ω_2 due à N. I. FEL'DMAN (*cf.* [F 2]), on déduit que l'inégalité (1) du théorème 1 peut être remplacée dans ce cas par la suivante :

$$(1') \qquad |\omega_1-\alpha|>\exp\{-Cd(h(\log h)+d(\log d)^2)\}.$$

En particulier, $\tau(\omega_1)\leqslant 2+\varepsilon$ pour tout $\varepsilon>0$.

Nous donnons ici d'autres exemples.

THÉORÈME 2. — *Il existe une constante effectivement calculable C_1 ne dépendant que de $\mathfrak{p}$, ω_1, ω_2 telle que*

$$|\omega_2-\alpha\eta_1|>\exp\{-C_1 d(h(\log h)+d^2(\log d)^3)\};$$

Si de plus le produit $g_2 g_3$ est non nul, alors :

$$|\eta_1-\alpha\eta_2|>\exp\{-C_1 d(h(\log h)+d^2(\log d)^3)\}.$$

THÉORÈME 3. — *Pour tout réel strictement positif ε, il existe une constante effectivement calculable C_2 ne dépendant que de $\mathfrak{p}$, ω_1, d et ε, telle que*

$$|\pi-\alpha\omega_1|>\exp\{-C_2 h(\log h)^{4+\varepsilon}\}.$$

Pour démontrer la première assertion du théorème 2, il suffit de remarquer que

$$|\omega_2-\alpha\eta_1|=|\tau|\left|\omega_1-\frac{\alpha}{\tau}\eta_1\right|, \qquad \text{où} \quad \tau=\omega_2/\omega_1,$$

et d'utiliser le fait que τ est algébrique. Le résultat s'obtient en appliquant la minoration (3), avec $|\omega|=|\omega_1|=\mathrm{Cte}$.

La deuxième assertion peut être démontrée de manière analogue à la minoration (3). Mais on peut également la déduire de cette minoration. En effet, dans le cas de multiplication complexe, D. MASSER d'une part, et D. BROWNAWELL et K. K. KUBOTA de l'autre, ont démontré indépendamment qu'il existait deux entiers rationnels non nuls A et B et un élément $\varkappa$ du corps $Q(\tau, g_2, g_3)$ tels que

$$(3.1) \qquad A\eta_1-B\tau\eta_2=\varkappa\omega_2$$

(*cf.* [M], lemme 3.1, et [B-K], théorème 8).

Il en résulte que

$$|\eta_1-\alpha\eta_2|=\left|\frac{\varkappa}{A}\omega_2+\left(\tau\frac{B}{A}-\alpha\right)\eta_2\right|,$$

ce qui permet encore d'appliquer la minoration (3) pourvu que $\varkappa$ soit non nul. Or, une condition nécessaire et suffisante pour que le nombre $\varkappa$ soit non nul est que le produit $g_2 g_3$ soit non nul, ou encore que le rapport η_2/η_1 soit transcendant (*cf.* [M], lemme 3.2), ce qui prouve la deuxième assertion du théorème 2.

Enfin, d'après la relation (3.1) et la formule de Legendre, on peut écrire

$$|\pi-\alpha\omega_1| = |\omega_1/2| \left| 2i\alpha - \frac{\varkappa}{B}\omega_1 + \left(\frac{A}{B\tau} - \tau\right)\eta_1 \right|.$$

Puisqu'on peut supposer que α est non nul, on obtient l'inégalité du théorème 3 en minorant le second membre de l'inégalité précédente grâce aux arguments de la démonstration du théorème IV de [M].

IV. — Un exemple de démonstration

Les inégalités du Théorème 1 et des remarques qui suivent sont données dans un ordre logique de démonstration. Pour $n=2$, 4, 7, 10, 14, la démonstration de l'inégalité (n) utilise ($n-1$) afin de pouvoir supposer que u est sans torsion. De même (10′) utilise (9′), et (13′) utilise (12). Enfin on se sert de (3) pour démontrer (9′) et (10′), et de (12) pour (15) et (16).

Les différences qui apparaissent dans les diverses démonstrations des inégalités du théorème 1 sont essentiellement techniques, mis à part l'emploi de deux arguments très distincts permettant d'obtenir la conclusion. Nous donnons ici un exemple de preuve de chaque type. Le premier est celui de l'inégalité (4), et le second est celui de son raffinement (4′) lorsque l'hypothèse (H1) du paragraphe II est vérifiée.

L'inégalité (3) permet de supposer que u est un point sans torsion. On supposera de plus que $g_2/4$, $g_3/4$ et $\wp(u)$ sont des entiers algébriques, ce qui ne fait perdre aucune généralité puisque pour tout nombre complexe non nul c, la fonction $z \mapsto c^2 \wp(cz)$ est la fonction elliptique de Weierstrass d'invariants $c^4 g_2$ et $c^6 g_3$.

Les constantes $c_1, \ldots, c_{36}$ ne dépendent que de $\wp$ et u. En particulier, elles ne dépendent pas de h et d.

Rappelons enfin que la maison d'un nombre algébrique θ, notée $\overline{|\theta|}$, désigne le maximum des modules des conjugués de θ.

(A) Quelques lemmes auxiliaires

Nous donnons ici quelques lemmes généraux relatifs aux nombres algébriques et aux fonctions elliptiques. Dans les deux lemmes qui suivent, nous emploierons les notations suivantes. Soit $\mathbb{K}$ une extension finie fixée de $\mathbb{Q}$ de degré δ, et $\mathbb{O}_{\mathbb{K}}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{K}$. Soit n un entier rationnel $\geqslant 1$, et, pour $i=1, \ldots, n$, soit α_i un nombre algébrique variable de degré exact d_i et de hauteur H_i. Enfin, on note d le degré du corps $\mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sur $\mathbb{Q}$.

LEMME 4.1. — *Si $P \in \mathbb{O}_{\mathbb{K}}[X_1, \ldots, X_n]$ est un polynôme de degré $\leqslant N_i$ en X_i, dont les coefficients ont une maison $\leqslant B$, alors ou bien $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est nul, ou bien*

$$|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| > \{c_{\mathbb{K}} B \textstyle\prod_{i=1}^{n}(1+N_i)(H_i(1+d_i))^{N_i/d_i}\}^{-d\delta},$$

où $c_{\mathbb{K}}$ est une constante positive ne dépendant que de $\mathbb{K}$.

Démonstration. — Si $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$, c'est le lemme 4.4 de [Ci]. Le cas général s'y ramène facilement (la constante $c_{\mathbb{K}}$ est aisément calculable, par exemple en fonction d'un système de générateurs de $\mathbb{K}$ sur $\mathbb{Q}$; *voir* par exemple la démonstration du lemme 1.6 de [M]).

LEMME 4.2. — *Soient K et L deux entiers $\geqslant 1$ et*

$$Q_{l,k} \in \mathbb{O}_{\mathbb{K}}[X_1, \ldots, X_n] \quad (0 \leqslant l < L, 0 \leqslant k < K),$$

des polynômes de degré au plus N_i en X_i, et dont les coefficients ont une maison inférieure à B.

Si $L > K d\delta$, les équations linéaires

$$\textstyle\sum_{l=0}^{L-1} x_l Q_{l,k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0 \qquad (0 \leqslant k < K),$$

ont une solution en entiers rationnels non tous nuls $x_0, \ldots, x_{L-1}$ de valeur absolue majorée par

$$1 + \{c'_{\mathbb{K}} BL \textstyle\prod_{i=1}^{n}(1+N_i)(H_i(1+d_i))^{N_i/d_i}\}^{d\delta K/(L-d\delta K)},$$

où $c'_{\mathbb{K}}$ est une constante positive ne dépendant que de $\mathbb{K}$.

Démonstration. — De même que dans le lemme précédent, on se ramène aisément au cas où $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$. Le résultat est alors une conséquence immédiate du lemme 4 de [M-W], avec $c'_{\mathbb{Q}}=2$.

Les deux lemmes qui suivent sont à la base des arguments employés pour conclure la démonstration. Le premier permet d'estimer les coefficients d'un polynôme en fonction des valeurs de ce polynôme, méthode employée par N. I. FEL'DMAN. Le second, dû à D. BROWNAWELL et D. MASSER, majore l'ordre des zéros de certaines fonctions.

LEMME 4.3. — *Soit L un entier strictement positif, et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré L et de hauteur $H(P)$. Si $x_0, \ldots, x_L$ sont des nombres complexes tels que*

$$\min_{i \neq j} |x_i - x_j| \geqslant \delta \quad et \quad \max_i |x_i| \leqslant S \qquad où \quad \delta \leqslant 1 \leqslant S,$$

alors :

$$H(P) \leqslant (c_1 S/\delta)^L \max_i |P(x_i)|.$$

Démonstration. — *Cf.* [M], lemme 1.3.

LEMME 4.4. — *Soit $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ un polynôme non nul de degré $\leqslant L$ en X et de degré $\leqslant M$ en Y, avec $M \geqslant 1$. Soient α un nombre complexe, et f la fonction définie par $f(z) = z - \alpha\zeta(z)$. Alors l'ordre d'un zéro quelconque de la fonction $F(z) = P(\wp(z), f(z))$ est inférieur ou égal à $8LM + 4M + 1$.*

Démonstration. — Soit a un nombre complexe. Puisque l'ordre du zéro a de la fonction $\wp(z) - \wp(a)$ est inférieur ou égal à 2, il est clair que, pour tout polynôme H dans $\mathbb{C}[X]$, $\wp(a)$ est zéro de H de multiplicité au moins $1/2 \operatorname{ord}_a H(\wp(z))$. Ainsi, si $\deg_Y P = 0$, alors $\operatorname{ord}_a F(z) \leqslant 2L$. On suppose maintenant $\deg_Y P \geqslant 1$. On suppose que

$$\Omega = \operatorname{ord}_a F \geqslant 8LM + 4M + 2.$$

Alors, par dérivation, on en déduit que

$$\operatorname{ord}_a \{ \wp'(z) P'_X(\wp(z), f(z)) + (1 + \alpha\wp(z)) P'_Y(\wp(z), f(z)) \} = \Omega - 1,$$

et par suite,

$$\operatorname{ord}_a \{ \wp'^2(z) P'^2_X(\wp(z), f(z)) - (1 + \alpha\wp(z))^2 P'^2_Y(\wp(z), f(z)) \} \geqslant \Omega - 1.$$

Ainsi, si on définit le polynôme $Q(X, Y)$ par

$$Q(X, Y) = (4X^3 - g_2 X - g_3) P'^2_X(X, Y) - (1 + \alpha X)^2 P'^2_Y(X, Y),$$

alors

$$\operatorname{ord}_a Q(\wp(z), f(z)) \geqslant \Omega - 1.$$

Si $R(X)$ est le résultant par rapport à Y de P et Q, on a donc

$$\operatorname{ord}_a R(\wp(z)) \geqslant \Omega - 1$$

et par suite $\wp(a)$ est zéro de R d'ordre au moins $(\Omega - 1)/2$.

Par ailleurs, le degré de R vérifie :

$$\deg R \leqslant \deg_X P \deg_Y Q + \deg_Y P \deg_X Q \leqslant 2M(2L+1) < (\Omega - 1)/2,$$

et par suite $R=0$. On suppose d'abord que P est irréductible, et on note $A(z)$ le coefficient dominant du polynôme $P(\wp(z), Y)$. Alors il existe un ouvert simplement connexe U tel que, pour $z \in U$, $A(z)$ soit non nul et que le polynôme unitaire $P(\wp(z), Y)/A(z)$ n'admette que des racines simples. Ainsi, puisque $\deg_Y P \geqslant 1$, l'équation $P(\wp(z), g(z))=0$ définit implicitement une fonction g (au moins) analytique sur U. Par dérivation, on obtient :

$$\wp'(z) P'_X(\wp(z), g(z)) + g'(z) P'_Y(\wp(z), g(z)) = 0$$

et donc

$$(\star) \qquad \wp'^2(z) P'^2_X(\wp(z), g(z)) - g'^2(z) P'^2_Y(\wp(z), g(z)) = 0.$$

Comme on a supposé P irréductible, Q est divible par P (puisque $R=0$), d'où $Q(\wp(z), g(z))=0$ sur U, soit :

$$(\star\star) \qquad \wp'^2(z) P'^2_X(\wp(z), g(z)) - (1+\alpha\,\wp(z))^2 P'^2_Y(\wp(z), g(z)) = 0.$$

Les relations $(\star)$ et $(\star\star)$ prouvent que $g'^2(z)=(1+\alpha\,\wp(z))^2$. Il en résulte que les fonctions g et f sont algébriquement dépendantes, et il en est donc de même de f et $\wp$, ce qui est absurde. Enfin, dans le cas où P n'est pas irréductible, on peut le décomposer en produit de facteurs irréductibles $P=\prod_{i=1}^{n} P_i$, où $P_i(X, Y)$ est de degré $\leqslant L_i$ en X et de degré $\leqslant M_i$ en Y. On a vu plus haut que si $\deg_Y P_i=0$, alors :

$$\operatorname{ord}_a P_i(\wp(z), f(z)) \leqslant 2 L_i.$$

On montre de même que si $L_i=0$, alors :

$$\operatorname{ord}_a P_i(\wp(z), f(z)) \leqslant 3 M_i.$$

Enfin, en utilisant la majoration

$$\operatorname{ord}_a P_i(\wp(z), f(z)) \leqslant 8 L_i M_i + 4 M_i + 1$$

lorsque $\deg_X P_i \deg_Y P_i \neq 0$, et

$$\operatorname{ord}_a F = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ord}_a P_i(\wp(z), f(z)),$$

on obtient le résultat.

Dans le lemme suivant, de nature analytique, nous utilisons la notation classique

$$|f|_R = \max_{|z|=R} |f(z)|.$$

LEMME 4.5. — *Soient R et R_1 deux nombres réels tels que $2 < R_1 < R/4$. Soient f une fonction analytique dans le disque complexe $|z| \leqslant R$, et E un sous-*

ensemble du disque $|z|\leqslant R_1$ contenant N points à une distance mutuelle supérieure à $\delta\leqslant 1$. On pose $i=1$ si ces points sont alignés, et $i=2$ sinon. Alors, pour tout couple (r, t) d'entiers positifs ou nuls,

$$|f^{(r)}|_{R_1}\leqslant r!\left\{2|f|_R\left(\frac{4R_1}{R}\right)^{Nt}+\frac{2N}{R_1}\left(\frac{33R_1}{\delta N^{1/i}}\right)^{Nt}\max_{x\in E, 0\leqslant\tau\leqslant t-1}\left|\frac{f^{(\tau)}(x)}{\tau!}\right|\right\}.$$

Démonstration. — Lorsque $i=1$ et $r=0$, la démonstration est essentiellement celle du lemme 2 de [Cl-W]. Posons $Q(z)=\prod_{x\in E}(z-x)^t$; alors, d'après la formule d'interpolation de Hermite,

$$f(z)=\frac{Q(z)}{2i\pi}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{Q(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z}-\frac{Q(z)}{2i\pi}\sum_{x\in E}\sum_{\tau=0}^{t-1}\frac{f^{(\tau)}(x)}{\tau!}\int_{\Gamma_x}\frac{(\zeta-x)}{Q(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z},$$

pour $|z|=2R_1$, où Γ et Γ_x sont les cercles $S(O, R)$ et $S(x, \delta/2)$. Or, pour $|z|=2R_1$ et $|\zeta|=R$, on a

$$\left|\frac{Q(z)}{Q(\zeta)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right|\leqslant\left(\frac{3R_1}{R-R_1}\right)^{Nt}|f|_R\frac{1}{R-2R_1}.$$

Par suite le premier terme du second membre dans la formule donnant $f(z)$ est majoré par $2|f|_R(4R_1/R)^{Nt}$.

Par ailleurs, lorsque $|z|=2R_1$ et $|\zeta-x|=\delta/2$, alors $1/|\zeta-z|\leqslant 2/R_1$.

De plus, si les points de E sont rangés par ordre de distance à ζ croissante, alors le n-ième point est à une distance de ζ supérieure à $n^{1/i}(\delta/4)$, d'où

$$|Q(\zeta)|\geqslant(\delta/4)^{Nt}(N!)^{t/i}\geqslant(\delta N^{1/i}/11)^{Nt},$$

ce qui prouve le lemme lorsque $r=0$. Le cas général s'en déduit par la formule de Cauchy.

Les six résultats suivants concernent la fonction $\mathfrak{p}$ et la fonction ζ associée à $\mathfrak{p}$.

LEMME 4.6. — *Pour tout couple (j, k) d'entiers positifs ou nuls.*

$$(\mathfrak{p}^j(z))^{(k)}=\sum u\,\mathfrak{p}^t(z)\,\mathfrak{p}'^{t'}(z)\,\mathfrak{p}''^{t''}(z),$$

où la sommation est prise sur les entiers positifs ou nuls t, t', t'' tels que $2t+3t'+4t''\leqslant 2j+k$, et où $u=u(j, k, t, t', t'')$ est un entier de valeur absolue $\leqslant k!\,c_2^{j+k}$.

Démonstration. — *Cf.* [Ba], lemme 2.

LEMME 4.7. — *Soit f une fonction analytique en un point z, telle que $f''(z) = -\wp'(z)$. Alors, pour tout couple (j, k) d'entiers positifs ou nuls,*

$$(f^j(z))^{(k)} = \sum u\, f^{\tau}(z)\, f'^{\tau'}(z)\, \wp'^{t}(z)\, \wp''^{t'}(z)\, \wp'''^{t''}(z),$$

où la sommation est prise sur les entiers positifs ou nuls τ, τ', t, t', t'' tels que $\tau + 2\tau' + 2t + 3t' + 4t'' = j + k$ et $\tau + \tau' \leqslant j$, et où $u = u(j, k, \tau, \tau', t, t', t'')$ est un entier de valeur absolue inférieure à $k!\, c_3^{j+k}$.

Démonstration. — *Cf.* [Co], lemme 5.

LEMME 4.8. — *Pour tout entier naturel $m > 0$, il existe des polynômes A_m, B_m à coefficients dans $[g_2/4, g_3]$, vérifiant les propriétés suivantes :*

1° *On a les égalités*

$$\wp(mz) = A_m(\wp(z))/B_m(\wp(z)), \tag{4.1}$$

$$\zeta(mz) = m\zeta(z) + (\wp'(z)\, B'_m(\wp(z)))/2m\, B_m(\wp(z)); \tag{4.2}$$

2° *si on affecte respectivement X, g_2, g_3 des poids $1, 2, 3$, alors A_m et B_m sont isobares de poids respectifs m^2 et $m^2 - 1$;*

3° *si u n'est pas un point de m-torsion de $\wp$, alors $B_m(\wp(u)) \neq 0$;*

4° *chacun des polynômes A_m, B_m, B'_m, $2m B_m$ a une longueur dans $[g_2/4, g_3, X]$ inférieure à $\exp(m^2)$.*

Démonstration. — Cette démonstration est due à M. WALDSCHMIDT. On note σ la fonction sigma de Weierstrass associée à $\wp$. Soient S_1 un système de représentants de $(1/m)L \setminus (1/2)L$ modulo L, et S un système de représentants de S_1 modulo l'involution $z \mapsto -z$.

On note

$$\psi_m(X, Y) = m \prod_{s \in S} (X - \wp(s)) \qquad \text{si } m \text{ est impair},$$

$$\psi_m(X, Y) = (m/2)\, Y \prod_{s \in S} (X - \wp(s)) \qquad \text{si } m \text{ est pair},$$

et

$$B_m(X) = m^2 \prod_{0 \leqslant h_i < m, (h_1, h_2) \neq (0, 0)} (X - \wp((h_1 \omega_1 + h_2 \omega_2)/m)).$$

On a alors

$$B_m(\wp(z)) = \psi_m^2(\wp(z), \wp'(z))$$

et

$$\sigma(mz) = (-1)^{m-1} \sigma(z)^{m^2} \psi_m(\wp(z), \wp'(z))$$

(*cf.* [Fr], p. 184).

En dérivant cette relation logarithmiquement, on obtient

$$m\zeta(mz) = m^2 \zeta(z) + \frac{(d/dz)\, \psi_m(\wp(z), \wp'(z))}{\psi_m(\wp(z), \wp'(z))}, \tag{$\star\star\star$}$$

d'où la formule (4.2).

En dérivant la relation (★★★), et en remarquant que $\wp(mz)$ est paire, on obtient la formule (4.1).

Il est clair sur la définition de B_m que si u n'est pas point de m-torsion de $\wp$, alors $B_m(\wp(u))$ est non nul.

Enfin les formules d'addition de la fonction $\wp$ prouvent que

$$A_{2m}=A_m^4+2T_2A_m^2B_m^2+2T_3A_mB_m^3+T_2^2B_m^4,$$

$$B_{2m}=4A_m^3B_m-4T_2A_mB_m^3-T_3B_m^4,$$

$$\begin{aligned}A_{2m+1}=&-X(A_{m+1}B_m-A_mB_{m+1})^2\\&+2A_{m+1}^2A_mB_m+2A_m^2A_{m+1}B_{m+1}-2T_2A_mB_mB_{m+1}^2\\&-2T_2A_{m+1}B_m^2B_{m+1}-T_3B_m^2B_{m+1}^2,\end{aligned}$$

$$B_{2m+1}=(A_{m+1}B_m-A_mB_{m+1})^2,$$

où

$$T_2=g_2/4, \qquad T_3=g_3.$$

On en déduit aussitôt que A_m, $B_m\in\mathbb{Z}[g_2/4, g_3, X]$, et l'assertion (2). Par ailleurs, les formules précédentes prouvent que si

$$L_m=\max(L(A_m), L(B_m))$$

alors

$$L_{2m}\leqslant 9L_m^4 \qquad \text{et} \qquad L_{2m+1}\leqslant 13L_m^2L_{m+1}^2.$$

On en déduit que

$$L_m<\exp(m^2-m+1) \qquad \text{pour} \quad m\leqslant 5,$$

puis une récurrence prouve que cette majoration est également vérifiée pour $m>5$, ce qui prouve l'assertion (4) pour $m\geqslant 4$; le cas $m\leqslant 3$ est obtenu en explicitant les polynômes étudiés grâce aux relations de récurrence précédentes.

LEMME 4.9. — *Soit m un entier rationnel non nul. On suppose toujours que $g_2/4, g_3/4$ et $\wp(u)$ sont des entiers algébriques, et que u est sans torsion. Alors les nombres $\wp(mu)$, $\wp'(mu)$, $\wp''(mu)$ et $\zeta(mu)-m\zeta(u)$ sont algébriques de maison et de dénominateur inférieurs à $c_5^{m^2}$ et contenus dans un corps de degré inférieur à c_6.*

Démonstration. — D'après le lemme 4.8, il est clair que $A_m(\wp(u))$ et $B_m(\wp(u))$ sont des entiers algébriques de $\mathbb{Q}(\wp(u), g_2, g_3)$ de maison inférieure à $c_7^{m^2}$. Puisque $B_m(\wp(u))$ est non nul, le lemme 4.1 appliqué aux différents conjugués de $B_m(\wp(u))$ montre que $\left|\overline{1/B_m(\wp(u))}\right|\leqslant c_8^{m^2}$, d'où l'on déduit

$|\overline{\mathfrak{p}(mu)}| \leqslant c_5^{m^2}$. Enfin, puisque la norme de $B_m(\mathfrak{p}(u))$ est un entier naturel d inférieur à $c_9^{m^2}$, et que $d\,\mathfrak{p}(mu)$ est un entier algébrique, on en déduit la majoration annoncée du dénominateur de $\mathfrak{p}(mu)$.

D'après la relation (4.2), on obtient les estimations analogues pour $\zeta(mu)-m\zeta(u)$. La différentiation de la relation (4.1) et l'équation différentielle vérifiée par $\mathfrak{p}$ montrent que $\mathfrak{p}'(mu)$ et $\mathfrak{p}''(mu)$ appartiennent au corps $\mathbb{Q}(g_2, g_3, \mathfrak{p}(u), \mathfrak{p}'(u))$. Les estimations de la maison et du dénominateur de $\mathfrak{p}'(mu)$ et $\mathfrak{p}''(mu)$ se déduisent des estimations analogues pour $\mathfrak{p}(mu)$ et de l'équation différentielle vérifiée par $\mathfrak{p}$.

LEMME 4.10. — *Soit M un entier $\geqslant 1$; u désigne toujours un point algébrique de $\mathfrak{p}$. Il existe une constante $c_{10}=c_{10}(\mathfrak{p}, u)>0$ telle que parmi les points mu vérifiant $0<m\leqslant M$, il en existe au moins $M/2$ dont la distance aux pôles de $\mathfrak{p}$ soit supérieure à c_{10}.*

Démonstration. — Si c_{10} désigne la moitié de la distance de u aux pôles de $\mathfrak{p}$, alors, pour tout entier positif m, l'un des deux points mu et $(m+1)u$ est à une distance supérieure à c_{10} des pôles de $\mathfrak{p}$. En effet, dans le cas contraire, il existerait deux pôles ω et ω' de $\mathfrak{p}$ tels que $|mu-\omega|<c_{10}$ et $|(m+1)u-\omega'|<c_{10}$. Par différence, le point u serait à une distance inférieure à $2c_{10}$ du point $(\omega'-\omega)$ qui est encore un pôle de $\mathfrak{p}$, ce qui est absurde. Le résultat en découle aussitôt.

Nous terminons par un lemme permettant d'utiliser de manière précise la remarque suivante, attribuée à A. BAKER et J. COATES, employée dans [*M*] (*cf.* lemme 7.7) : Soit $F(z)=R(\mathfrak{p}(z))$ une fraction rationnelle en $\mathfrak{p}(z)$ à coefficients algébriques. Alors, multiplier la variable z par un entier m revient essentiellement à multiplier la taille A (définie convenablement) de R par m^2, et dériver k fois la fonction F revient à ajouter $k(\log k)$ à cette taille. Après les deux transformations, la taille devient $Am^2+k(\log k)$ ou $(A+k(\log k))m^2$ suivant l'ordre dans lequel on opère. Ainsi, il est avantageux, pour étudier $F^{(k)}(mu)$, de renverser l'ordre des opérations en utilisant la relation

$$F^{(k)}(mu)=m^{-k}\frac{d^k}{dz^k}F(mz)\Big|_{z=u}.$$

LEMME 4.11. — *On garde les notations du lemme 4.8. On note $f_0(z)=z$, $f_1(z)=e^z$. Soit Q un polynôme de $\mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$ de degré $\leqslant L_i$ en X_i, de hauteur $\leqslant A$. Alors, pour $j=0, 1$, et pour m et k entiers tels que $m>0$ et $k\geqslant 0$, il existe un polynôme*

$$Q_{j,m,k}\in\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{10}]$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1° *on note* a_1, a_2, a_3, a_4 *des nombres complexes*, $f(z)=a_1 z+a_2\zeta(z)$,

$$F(z)=Q(\mathfrak{p}(z),\ a_3+f(z),f_j(a_4 z))$$

et

$$\psi_m(z)=(2m)^{L_2} B_m^{L_1+L_2}(\mathfrak{p}(z))\,F(mz);$$

alors :

$$\psi_m^{(k)}(z)=Q_{j,m,k}(\mathfrak{p}(z),\ \mathfrak{p}'(z),\ \mathfrak{p}''(z),a_3+mf(z),f_j(a_4 z),\ a_1,\ a_2,\ a_4,\ g_2/4,\ g_3);$$

2° $\deg_{X_n} Q_{j,m,k}\leqslant N_n$ *avec* $N_1, N_2, N_3\leqslant(L_1+L_2)m^2+k$;

$$N_4, N_6, N_7\leqslant L_2;\qquad N_5\leqslant L_3(1+jm);$$

$$N_8\leqslant L_3+jk;\qquad N_9, N_{10}\leqslant(L_1+L_2)m^2;$$

3° $H(Q_{j,m,k})\leqslant A\exp\{c_{11}((L_1+L_2)m^2$

$$+k(\log k)+(L_3+jk)\operatorname{Log}(mL_3))\}.$$

Démonstration. — D'après le lemme 4.8, on a

$$f(mz)=mf(z)+a_2\,\mathfrak{p}'(z)\,B'_m(\mathfrak{p}(z))/2m\,B_m(\mathfrak{p}(z)).$$

Ce lemme montre donc que $\psi_m(z)$ est un polynôme en $\mathfrak{p}(z)$, $\mathfrak{p}'(z)$, $a_3+mf(z)$, $f_j(a_4 z)$, a_2, $g_2/4$, g_3, et fournit une majoration des degrés de ce polynôme et de sa hauteur. Le résultat s'en déduit en utilisant les lemmes 4.6 et 4.7.

(B) Construction de la fonction auxiliaire

On désigne par ν un entier suffisamment grand ne dépendant que de $\mathfrak{p}$ et de u. On définit les paramètres

$$M=\nu\,[d(\log(dh))/\log(d+1)],$$

$$L_1=\nu^3\,[(h+dM^2)/\log(d+1)],$$

$$L_2=\nu^3\,[dM^2/\log(d+1)],\qquad K=\nu^2\,[dML_1/\log(d+1)].$$

On suppose par l'absurde que le nombre $\rho=|u-\alpha\zeta(u)|$ satisfait ou bien l'inégalité

(4.3) $$\rho<\rho_1=\exp\{-\nu^5\,dMK\},$$

si l'hypothèse (H1) est vérifiée, ou bien l'inégalité

(4.4) $$\rho<\rho_2=\exp\{-\nu^2(\log d)\,ML_1L_2\}$$

dans le cas général.

Il suffit d'obtenir une contradiction pour en déduire les minorations (4) et (4').

Pour $0 \leqslant \lambda_1 < L_1$ et $0 \leqslant \lambda_2 < L_2$, on note

$$F_{\lambda_1, \lambda_2}(z) = \wp(z)^{\lambda_1}(z - \alpha\zeta(z))^{\lambda_2}.$$

Si de plus m est un entier >0, on pose

$$\psi_{m, \lambda_1, \lambda_2}(z) = (2m)^{L_2} B_m^{L_1+L_2}(\wp(z)) F_{\lambda_1, \lambda_2}(mz),$$

avec les notations du lemme 4.8.

Alors, d'après le lemme 4.11 (avec $L_3 = 0$), pour tout entier k positif ou nul,

$$\psi_{m, \lambda_1, \lambda_2}^{(k)}(z) = P_{m, k, \lambda_1, \lambda_2}(\wp(z), \wp'(z), \wp''(z), m(z - \alpha\zeta(z)), \alpha),$$

où $P_{m, k, \lambda_1, \lambda_2}$ est un polynôme de degré inférieur à $k + L_1 m^2$ en les trois premières variables, inférieur à L_2 en les deux dernières, et dont les coefficients sont des entiers de $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(g_2, g_3)$ de maison majorée par $\exp(c_{12}(k(\log k) + L_1 m^2))$.

Le point u étant sans torsion, on définit

$$\Phi_{m, k, \lambda_1, \lambda_2} = P_{m, k, \lambda_1, \lambda_2}(\wp(u), \wp'(u), \wp''(u), 0, \alpha).$$

LEMME 4.12. — *Le système*

$$\sum_{\lambda_1=0}^{L_1-1} \sum_{\lambda_2=0}^{L_2-1} \sum_{\mu=0}^{d-1} x_{\lambda_1, \lambda_2, \mu} \alpha^\mu \Phi_{m, k, \lambda_1, \lambda_2} = 0$$

$$0 \leqslant k < K, \quad 0 < m \leqslant M$$

admet une solution non triviale $(x_{\lambda_1, \lambda_2, \mu}) \in {}^{dL_1L_2}$ *vérifiant :*

$$\max|x_{\lambda_1, \lambda_2, \mu}| \leqslant c_{13}^{K \log K}. \tag{4.5}$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme 4.2, en utilisant les polynômes $X_1^\mu P_{m, k, \lambda_1, \lambda_2}(X_2, X_3, X_4, O, X_1)$, à coefficients dans l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(g_2, g_3)$, en remarquant que $L_1 L_2 \geqslant \nu KM$.

On choisit alors une telle solution, et on pose

$$F(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{L_1-1} \sum_{\lambda_2=0}^{L_2-1} p(\lambda_1, \lambda_2) F_{\lambda_1, \lambda_2}(z),$$

où

$$p(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{\mu=0}^{d-1} x_{\lambda_1, \lambda_2, \mu} \alpha^\mu.$$

Pour m et k entiers $\geqslant 0$, avec $m \neq 0$, on note

$$\Phi_{m,k} = \sum_{\lambda_1=0}^{L_1-1} \sum_{\lambda_2=0}^{L_2-1} p(\lambda_1, \lambda_2) \Phi_{m,k,\lambda_1,\lambda_2},$$

de sorte que $\Phi_{m,k}=0$ pour $0<m\leqslant M$ et $0\leqslant k<K$ par construction.

LEMME 4.13. — *On a*

$$\max |p(\lambda_1, \lambda_2)| > c_{14}^{-dK \log K}.$$

Démonstration. — Il existe un triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \mu)$ tel que $x_{\lambda_1,\lambda_2,\mu} \neq 0$, et par suite $p(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$ puisque α est de degré exact d. Le lemme 4.1 avec $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ et $n=1$ achève la démonstration.

LEMME 4.14. — *Soient k et m des entiers, $k\geqslant 0$, $m>0$. Si $\Phi_{m,k}$ est non nul, alors :*

$$|\Phi_{m,k}| > c_{15}^{-d(k'(\log k') + L_1 m^2)}, \qquad \textit{où} \quad k' = \max(K, k).$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme 4.1 au polynôme

$$\sum_{\lambda_1=0}^{L_1-1} \sum_{\lambda_2=0}^{L_2-1} \sum_{\mu=0}^{d-1} x_{\lambda_1,\lambda_2,\mu} X_1^{\mu} P_{m,k,\lambda_1,\lambda_2}(X_2, X_3, X_4, O, X_1),$$

à coefficients dans l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(g_2, g_3)$.

Pour tout entier $m>0$, on note

$$H_m(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{L_1-1} \sum_{\lambda_2=0}^{L_2-1} p(\lambda_1, \lambda_2) \wp(z)^{\lambda_1} (mw + z - \alpha\zeta(z))^{\lambda_2},$$

où $w = \alpha\zeta(u) - u$.

On pose $G_m(z) = H_m(mz)$, et

$$\theta_m(z) = (2m)^{L_2} B_m^{L_1+L_2}(\wp(z)) G_m(z).$$

Il résulte alors du lemme 4.8 que, pour $m>0$ et $k\geqslant 0$,

$$\theta_m^{(k)}(z) = P_{m,k,\lambda_1,\lambda_2}(\wp(z), \wp'(z), \wp''(z), m(w+z-\alpha\zeta(z)), \alpha),$$

et par suite

$$(4.6) \qquad \theta_m^{(k)}(u) = \Phi_{m,k}.$$

On dira qu'un entier $m>0$ est spécial si la distance du point mu aux pôles de $\wp$ est supérieure à la constante c_{10} du lemme 4.10.

LEMME 4.15. — *Si m et k sont des entiers positifs, m spécial, on a*

$$|G_m^{(k)}(u) - m^k F^{(k)}(mu)| < \rho c_{16}^{k'(\log k' + \log m)}$$

où $k' = \max(k, K)$.

Démonstration. — En effet,

(4.7) $G_m^{(k)}(u) - m^k F^{(k)}(mu)$

$$= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} p(\lambda_1, \lambda_2) \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (\wp(mz)^{\lambda_1})^{(p)}$$
$$\times ((mz - \alpha\zeta(mz))^{\lambda_2} - (mz - \alpha\zeta(mz) + mw)^{\lambda_2})^{(k-p)} \big|_{z=u}.$$

Or,

$$(4.8) \qquad \frac{d^p}{dz^p}(\wp(mz)^{\lambda_1})\big|_{z=u} = m^p (\wp(z)^{\lambda_1})^{(p)}\big|_{z=mu} \leq c_{17}^{k'(\log k' + \log m)}$$

d'après le lemme 4.6 et le fait que m est spécial.

Par ailleurs,

$$(mz - \alpha\zeta(mz))^{\lambda_2} - (mz - \alpha\zeta(mz) + mw)^{\lambda_2} = mw\, P(mz - \alpha\zeta(mz), mw)$$

où $P \in \mathbb{Z}[X, Y]$ est un polynôme de degré $\leq \lambda_2$, et de hauteur $\leq 2^{\lambda_2}$.

Il en résulte que

$$(4.9) \quad ((mz - \alpha\zeta(mz))^{\lambda_2} - (mz - \alpha\zeta(mz) + mw)^{\lambda_2})^{(k-p)}\big|_{z=u} \leq \rho\, c_{18}^{k'(\log k' + \log m)}$$

d'après le lemme 4.7 et le fait que m est spécial.

Le résultat découle alors des formules (4.7), (4.8) et (4.9), et de la majoration (4.5).

LEMME 4.16. — *Soient m et k_0 des entiers vérifiant $k_0 \geq K$ et m spécial $< k_0$. On suppose que $\Phi_{m,k}$ est nul pour $0 \leq k < k_0$. Alors :*

$$|F^{(k)}(mu)| < \rho\, c_{19}^{k_0 \log k_0} \qquad \textit{pour} \quad 0 \leq k < k_0.$$

Démonstration. — D'après la relation (4.6), l'hypothèse prouve que $\theta_m^{(k)}(u) = 0$ pour $0 \leq k < k_0$. On en déduit aussitôt, par récurrence, que $G_m^{(k)}(u) = 0$ pour $0 \leq k < k_0$ grâce à la formule de Leibnitz. Le résultat découle alors du lemme 4.15.

On définit les deux nouveaux paramètres

$$K_1 = \nu^2 [d^{1/2} K / (\log(d+1))^{1/2}] \qquad \text{et} \qquad K_2 = \nu L_1 L_2.$$

On note i un élément de l'ensemble $\{1, 2\}$, et on suppose désormais $\rho < \rho_i$. Pour tout entier $j \geq K$, on note

$$N_j = [j/K] M \qquad \text{si} \quad i = 1$$

et

$$N_j = M \qquad \text{si} \quad i = 2.$$

On note enfin $N_{K-1} = M$.

LEMME 4.17. — *Soient m et j des entiers tels que $K \leqslant j \leqslant K_i$ et m spécial $\leqslant N_{K_i}$. On suppose que, pour $0 \leqslant k < j$, on a*

$$|F^{(k)}(mu)| < \nu^{-d(j\log j + L_1 m^2)}.$$

Alors $\Phi_{m,k}$ est nul pour $0 \leqslant k < j$.

Démonstration. — D'après l'hypothèse, le lemme 4.14 prouve que

$$|G_m^{(k)}(u)| < 2\,\nu^{-d(j\log j + L_1 m^2)} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant k < j.$$

D'après la formule de Leibnitz et les estimations du lemme 4.8 pour le polynôme B_m, on en déduit que

$$|\theta_m^{(k)}(u)| < \nu^{-(d/2)(j\log j + L_1 m^2)}$$

pour $0 \leqslant k < j$, d'où la même majoration pour $|\Phi_{m,k}|$.

Cette majoration contredit le lemme 4.13 à moins que $\Phi_{m,k}$ ne soit nul, d'où le résultat.

(C) Interpolation.

Afin d'appliquer le lemme d'interpolation 4.5 donnant des propriétés de fonctions entières, on pose $F_1 = FF_2$, où $F_2 = \sigma^{3L_1}$, σ étant la fonction sigma de Weierstrass associée à $\mathfrak{p}$. Ainsi, F_1 est une fonction entière.

LEMME 4.18. — *Soit j un entier tel que $K \leqslant j \leqslant K_i$. On suppose que $\Phi_{m,k}$ est nul pour $0 \leqslant k < j$ et m spécial $\leqslant N_{j-1}$. Alors, pour tout entier r tel que $0 \leqslant r \leqslant j$, on a*

$$|F_1^{(r)}|_{R_j} \leqslant c_{20}^{-jN_j \log d} \qquad \textit{où} \quad R_j = 2|u|N_j.$$

Démonstration. — D'après la formule de Leibnitz, on a, pour $0 \leqslant k < j$ et m spécial $\leqslant N_{j-1}$,

$$F_1^{(k)}(mu) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} F_2^{(l)}(mu)\, F^{(k-l)}(mu). \tag{4.10}$$

D'après l'hypothèse, le lemme 4.16 montre que

$$|F^{(k-l)}(mu)| < \rho\, c_{21}^{j\log j}. \tag{4.11}$$

Par ailleurs, puisque σ est d'ordre 2, la formule de Cauchy prouve que

(4.12) $$|F_2^{(l)}(mu)| \leqslant c_{22}^{j \log j + L_1 N_{j-1}^2}.$$

Il résulte des formules (4.10), (4.11) et (4.12) que

$$|F_1^{(k)}(mu)| \leqslant \rho\, c_{23}^{j \log j + L_1 N_{j-1}^2}.$$

On applique alors le lemme 4.5 à la fonction F_1, en prenant

$$E = \{ mu;\ m \text{ entier spécial } < N_{j-1} \},\ t = j,\ \delta = \min(1, |u|).$$

Les nombres R_1 et R du lemme 4.5 sont ici R_j et $8\, R_j d^{1/2}$. Les fonctions σ, $\wp$ et $z - \alpha\zeta(z)$ étant d'ordre 2, la majoration (4.5) montre que

$$|F_1|_R \leqslant |F|_R\, |F_2|_R \leqslant c_{24}^{K \log K + L_1 R^2}.$$

Le lemme 4.5 prouve alors que

$$|F_1^{(r)}|_{R_1} \leqslant j\,!\, \{ c_{25}^{K \log K + R^2 L_1 - jN_{j-1} \log d} + \rho\, c_{26}^{j \log j + L_1 N_{j-1}^2 + jN_{j-1}} \} \leqq c_{20}^{-jN_j \log d},$$

d'où le résultat.

LEMME 4.19. — *Si $0 \leqslant k < K_i$ et m est entier spécial $< N_{K_i}$, alors $\Phi_{m,k}$ est nul.*

Démonstration. — On procède par récurrence. Soit j un entier vérifiant $K \leqslant j \leqslant K_i$. On suppose que $\Phi_{m,k}$ est nul pour $0 \leqslant k < j$ et pour m entier spécial $\leqslant N_{j-1}$ (ce qui est vérifié si $j = K$ d'après la construction du lemme 4.12). Soit m_0 un entier spécial $\leqslant N_j$. On cherche à montrer que Φ_{m_0, k_0} est nul pour $0 \leqslant k_0 \leqslant j$.

Les dérivées d'ordre k_0 de F et de F_1 sont liées par la relation

$$|F^{(k_0)}(m_0 u)| = \frac{1}{|F_2(m_0 u)|} \times \left| F_1^{(k_0)}(m_0 u) - \sum_{p=1}^{k_0} \binom{k_0}{p} F_2^{(p)}(m_0 u) F^{(k_0 - p)}(m_0 u) \right|$$

Or, m_0 étant spécial, on a $|F_2(m_0 u)| > c_{27}^{-L_1 m_0^2}$. Par ailleurs, le fait que la fonction σ soit d'ordre 2 et la formule de Cauchy prouvent que

$$|F_2^{(p)}(m_0 u)| \leqslant c_{28}^{j \log j + L_1 m_0^2}.$$

Enfin, l'hypothèse de récurrence permet d'appliquer le lemme 4.16 qui montre que

$$|F^{(k_0 - p)}(m_0 u)| \leqslant \rho\, c_{19}^{j \log j}.$$

Ainsi,

$$(4.13)\qquad |F^{(k_0)}(m_0 u)| \leqslant c_{27}^{L_1 m_0^2}\{|F_1^{(k_0)}(m_0 u)| + \rho\, c_{29}^{j\log j + L_1 m_0^2}\}.$$

L'hypothèse de récurrence permet par ailleurs d'appliquer le lemme 4.18, d'où

$$(4.14)\qquad |F_1^{(k_0)}(m_0 u)| \leqslant c_{20}^{-jN_j \log d}.$$

Les relations (4.13) et (4.14), et l'hypothèse $\rho < \rho_i$ prouvent que

$$|F^{(k_0)}(m_0 u)| \leqslant c_{30}^{-jN_j \log d}.$$

Cette majoration étant vraie pour tout entier $k_0 \leqq j$, le lemme 4.17 permet de conclure que $\Phi_{m_0,\, k_0}$ est nul pour $0 \leqslant k_0 \leqslant j$, ce qu'il fallait prouver.

LEMME 4.20. – *Pour tout entier r tel que $0 \leqslant r \leqslant K_i$, on a*

$$|F_1^{(r)}|_R \leqslant c_{31}^{-NK_i \log d} \quad \textit{où} \quad N = N_{K_i} \quad \textit{et} \quad R = R_{K_i}.$$

Démonstration. – Le lemme 4.19 permet en effet d'appliquer la majoration du lemme 4.18 avec $j = K_i$.

(D) Contradiction

Deux méthodes permettent de déduire une contradiction d'une majoration du type du lemme 4.20. La première utilise une majoration des coefficients d'un polynôme en fonction des valeurs de ce polynôme en certains points (lemme 4.3), ce qui permet de contredire la minoration du lemme 4.13. La seconde utilise le fait que des fonctions polynômes en $\wp(z)$ et $z - \alpha\zeta(z)$ ne peuvent pas avoir de zéro de multiplicité très élevée (lemme 4.4), ce qui contredit le fait que r peut être choisi grand dans le lemme 4.20.

Les résultats les plus précis sont obtenus par l'emploi de la première méthode dans le cas où l'hypothèse (H1) est vérifiée (c'est-à-dire le cas $i = 1$), et de la deuxième dans le cas général ($i = 2$). Nous donnons ici ces démonstrations.

Nous supposons d'abord $i = 1$.

Pour r_1, r_2, r_3 entiers rationnels vérifiant :

$$0 \leqslant r_2, \qquad r_3 \leqslant 2L_2^{1/2}, \qquad 0 \leqslant r_1 \leqslant L_1,$$

on pose

$$z(r_1, r_2, r_3)=\frac{\omega_1}{4}+r_2\omega_1+r_3\omega_2+\frac{r_1}{\nu L_1},$$

où (ω_1, ω_2) est le couple fondamental de périodes de $\wp$ apparaissant dans l'hypothèse (H1). Puisque $z(r_1, r_2, r_3)$ est proche de $\omega_1/4$ modulo le réseau des périodes de $\wp$, on a

$$(4.15)\qquad |F_2(z(r_1, r_2, r_3))|\geqslant c_{32}^{-L_1L_2}.$$

Par ailleurs, puisque $|z(r_1, r_2, r_3)|\leqslant R_{K_1}$, le lemme 4.20 et la formule (4.15) prouvent que

$$|F(z(r_1, r_2, r_3))|\leqslant c_{33}^{-\nu^4 dMK}.$$

Or,

$$F(z,(r_1, r_2, r_3))=\sum_{\lambda_2=0}^{L_2-1} q_{r_1}(\lambda_2)f(z(r_1, r_2, r_3))^{\lambda_2},$$

où

$$f(z)=z-\alpha\zeta(z)$$

et

$$q_{r_1}(\lambda_2)=\sum_{\lambda_1=0}^{L_1-1} p(\lambda_1, \lambda_2)\wp(z(r_1, r_2, r_3))^{\lambda_1};$$

en particulier, les nombres $q_{r_1}(\lambda_2)$ ne dépendent pas de r_2 et r_3, grâce à la périodicité de $\wp$. Fixons alors r_1. Si $(r_2, r_3)\neq(r'_2, r'_3)$, on peut écrire

$$|f(z(r_1, r_2, r_3))-f(z(r_1, r'_2, r'_3))|=|\omega-\alpha\eta|,$$

où $\omega=(r_2-r'_2)\omega_1+(r_3-r'_3)\omega_2$, et η est la quasi-période correspondante. Or,

$$|\omega-\alpha\eta|\geqslant\frac{1}{|\zeta(u)|}|(r_2-r'_2)(\omega_1\zeta(u)-\eta_1 u)$$
$$+(r_3-r'_3)(\omega_2\zeta(u)-\eta_2 u)|-|\alpha-u/\zeta(u)||\eta|.$$

Il en résulte que si u vérifie l'hypothèse (H1), alors :

$$|\omega-\alpha\eta|\geqslant\exp\{-c_{34}L_2^{4/3}(\log L_2)^{1/3}\}\geqslant\exp\{-\nu^3 dMKL_2^{-1}\}.$$

On peut ainsi appliquer le lemme 4.3 à $F(z(r_1, r_2, r_3))$, ce qui prouve que

$$\max_{\lambda_2}|q_{r_1}(\lambda_2)|\leqq c_{35}^{-\nu^4 dMK}.$$

Enfin, on applique à nouveau le lemme 4.3 à $q_{r_1}(\lambda_2)$ en remarquant que, si $r_1 \neq r'_1$, alors :

$$|\mathfrak{p}(z(r_1, r_2, r_3)) - \mathfrak{p}(z(r'_1, r_2, r_3))| \geqslant \frac{1}{\nu^2 L_1},$$

d'après le développement de Taylor de $\mathfrak{p}$ au voisinage de $\omega_1/4$. On en déduit que

$$\max_{\lambda_1, \lambda_2} |p(\lambda_1, \lambda_2)| < c_{36}^{-\nu^4 dMK},$$

ce qui contredit le lemme 4.13, et achève la démonstration de l'inégalité (4′) lorsque l'hypothèse (H1) est vérifiée.

Nous supposons maintenant $i=2$, et démontrons l'inégalité (4). La démonstration du lemme 4.10 montre que l'entier 1 est spécial. Ainsi, le lemme 4.19 et la relation (4.6) prouvent que u est un zéro d'ordre $\geqslant K_2$ de $\theta_1(z) = G_1(z)$. Or, G_1 est un polynôme en $\mathfrak{p}$ et $z - \alpha\zeta(z)$ de degrés partiels inférieurs à L_1 et L_2, ce qui contredit le lemme 3.4 puisque $K_2 = \nu L_1 L_2$. La démonstration de l'inégalité (4) est ainsi terminée.

V. — Indications sur la preuve des autres minorations

Les autres inégalités du théorème 1 et des remarques qui suivent se démontrent essentiellement de manière analogue aux inégalités (4) et (4′), excepté les minorations (5) et (16) dont la démonstration nécessite un nouvel argument technique, déjà utilisé par M. Anderson (*cf.* [A]). Nous indiquons ici, pour chaque inégalité, les caractéristiques principales de sa démonstration. Nous renvoyons à [R] pour les démonstrations détaillées de (3), (12), (13) et d'une forme affaiblie de (14).

La démonstration de la minoration (1) de $|\omega_1 - \alpha|$ utilise une fonction auxiliaire du type $F(z) = P(z, \mathfrak{p}(z))$, où P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}[\alpha]$. On étudie la fonction F et ses dérivées aux points de la forme $(m+1/2)\omega_1$, où $m \in \mathbb{Z}$. La périodicité de la fonction $\mathfrak{p}$ permet d'écrire $F^{(k)}((m+1/2)\omega_1)$ comme valeur d'un polynôme $P_k(X, Y)$ indépendant de m au point

$$(\mathfrak{p}(\omega_1/2), (m+1/2)\omega_1).$$

La contradiction est obtenue par la méthode des points d'interpolation, utilisée pour la démonstration de (4′), en choisissant des points de la forme

$$z(r_1, r_2, r_3) = \omega_1/4 + r_1\omega_1 + r_2\omega_2 + r_3\varepsilon$$

où ε est petit.

On emploie une fonction auxiliaire du même type pour démontrer la minoration (2) de $|u-\alpha|$. On construit une telle fonction ayant des petites valeurs, ainsi que ses dérivées, aux points mu ($m \in \mathbb{Z}$, $|m|<M$). On utilise ici le lemme 4.11, en mettant à profit le lien entre $F^{(k)}(mu)$ et $(d/dz)F(mz)|_{z=u}$. On termine la démonstration comme dans le cas précédent.

La minoration (3) de $|\omega-\alpha\eta|$ est obtenue avec une fonction auxiliaire du type $P(\wp(z), z-\alpha\zeta(z))$, qu'on étudie aux points de la forme $(m+1/2)\omega$, en supposant que ω est une période primitive, ce qui n'est pas restrictif. Le fait que ω soit une période de $\wp$ et de $z-(\omega/\eta)\zeta(z)$ permet de montrer que $F^{(k)}((m+1/2)\omega)$ est une fonction polynomiale de $m|\omega-\alpha\eta|$, ce qui explique en partie la bonne dépendance en h de la minoration. On termine la démonstration en employant la méthode des multiplicités des zéros de polynômes elliptiques utilisée pour démontrer (4). Dans le cas où $r=|\omega|$ est fixé, on obtient le même résultat par la méthode des points d'interpolation.

Pour la démonstration de la minoration (5) de $|\wp(\gamma)-\alpha|$, on procède comme pour (2), en employant cependant la remarque suivante, due à M. Anderson : au lieu d'écrire $\wp^{(k)}(u)$ comme polynôme de degré k en $\wp(u)$, $\wp'(u)$, $\wp''(u)$ (*cf.* lemme 4.6), il est parfois avantageux d'utiliser la relation

$$\wp^{(k)}(u)=(d^k/dz^k)\wp(z+u)|_{z=0},$$

et de remarquer que, d'après le théorème d'addition de $\wp$, cette dernière expression est une fraction rationnelle en $\wp(u)$, $\wp'(u)$, $\wp(\omega/2)$, $\wp''(\omega/2)$ (où ω est période fondamentale de $\wp$) les deux premières variables apparaissant avec un degré inférieur à une constante. De manière plus précise, on utilise d'abord le résultat suivant :

Lemme 5.1. — *Pour tout nombre complexe u, il existe deux polynômes S, T dans $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_5]$ de hauteurs et degrés inférieurs à une constante absolue, tels que*

$$\wp(z+u)=\frac{S}{T}(\wp(z+\omega/2), \wp'(z+\omega/2), \wp(u), \wp'(u), \wp(\omega/2))$$

comme fonction méromorphe de z, et que

$$T(\wp(\omega/2), \wp'(\omega/2), \wp(u), \wp'(u), \wp(\omega/2))\neq 0.$$

On choisit alors u voisin de γ tel que $\wp(u)=\alpha$, et on utilise une version du lemme 4.11 modifiée comme suit :

LEMME 5.2. — *On garde les notations du lemme* 4.8, *et on pose*

$$f_0(z)=z, \qquad f_1(z)=e^z.$$

Soit Q un polynôme de $\mathbb{Z}[X_1, X_2]$ de degré $\leqslant L_i$ en X_i, de hauteur $\leqslant A$. Alors, pour $j=0,1$, et pour k et m entiers tels que $k\geqslant 0$ et $m>0$, il existe un polynôme $Q_{j,m,k}\in\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_7]$ vérifiant les propriétés suivantes :

1° *on note*

$$F(z)=Q(\wp(z), f_j(z)),$$
$$\psi_m(z)=B_m^{L_1}(\wp(z))F(mz)$$

et

$$\Psi_m(z)=T^{L_1 m^2}(\wp(z+\omega/2), \wp'(z+\omega/2), \wp(u), \wp'(u), \wp(\omega/2))\psi_m(z+u);$$

alors :

$$\Psi_m^{(k)}(z)=Q_{j,m,k}(\wp(z+\omega/2), \wp'(z+\omega/2), \wp''(z+\omega/2), \wp(u), \wp'(u), \wp(\omega/2), f_j(z+u)).$$

2° *Le degré en X_n de $Q_{j,m,k}$ est inférieur à N_n, avec*

$$N_1, N_2, N_3\leqslant c(L_1 m^2+k);$$
$$N_4, N_5, N_6\leqslant c L_1 m^2; \qquad N_7\leqslant L_2(1+jm);$$
$$H(Q_{j,m,k})\leqslant A \exp\{c(L_1 m^2+k\log k+(L_2+jk)\log(mL_2))\},$$

où c est une constante absolue.

La mesure d'approximation de η_1 donnée par (6) utilise une fonction auxiliaire du type $P(\wp(z), \zeta(z))$, petite aux points $(m+1/2)\omega_1$. On utilise ici encore la périodicité de $\wp$. La contradiction s'obtient par la méthode des points d'interpolation de la forme

$$z(r_1, r_2, r_3)=(\omega_1/4)+r_1\omega_1+r_2\omega_2+r_3\varepsilon.$$

Une fonction auxiliaire du même type que précédemment est employée pour obtenir l'inégalité (7). Les valeurs de ses dérivées aux points mu sont étudiées grâce à la remarque précédant le lemme 4.11. La méthode des points d'interpolation fournit le résultat.

La minoration (8) de $|\wp(v)-\alpha|$ utilise une fonction auxiliaire $F(z)=P(\wp(z), \zeta(z)+\gamma z)$, dont on étudie encore les valeurs aux points mv par la relation entre $F^{(k)}(mv)$ et $(d^k/dz^k)F(mz)|_{z=v}$. La démonstration fait intervenir les valeurs de $\wp'$ et $\wp''$ au point v, On remarque alors que si $\wp(v)$ est très proche de α, il existe une racine carrée β de $4\alpha^3 - g_2\alpha - g_3$ telle que $|\mathfrak{p}'(v)-\beta|$ et $|\mathfrak{p}''(v)-\alpha^2+g_2/2|$ soient du même ordre de grandeur que $|\mathfrak{p}(v)-\alpha|$. De plus, les nombres β et $\alpha^2 - g_2/2$ ont une hauteur et un degré également de l'ordre de grandeur de la hauteur et du degré de α. La contradiction est obtenue par la méthode des multiplicités des zéros de polynômes elliptiques. Lorsque $\gamma=0$, la méthode des points d'interpolation fournit la minoration (8').

Pour la minoration (9) de $\omega_1 - \alpha_1 \eta_1 - \alpha_2$, la fonction auxiliaire est de la forme $F(z)=P(\mathfrak{p}(z), z-\alpha_1\zeta(z))$, où P est un polynôme à coefficients dans l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$. On utilise la périodicité de $\mathfrak{p}$ pour étudier les valeurs des dérivées de F aux points de la forme $(m+1/2)\omega_1$, où $m \in \mathbb{Z}$. C'est ici la méthode des multiplicités de zéros qui fournit la contradiction dans le cas général.

Lorsque α_1 est fixé, il est avantageux d'utiliser la méthode des points d'interpolation, qui sont ici de la forme

$$z(r_1, r_2, r_3)=(\omega_1/4)+r_1\omega_1+r_2\omega_2+r_3\varepsilon.$$

Une difficulté apparaît dans l'application de cette méthode. Il faut en effet montrer que la fonction $f(z)=z-\alpha_1\zeta(z)$ prend des valeurs sensiblement distinctes lorsque r_1 et r_2 varient et que r_3 est fixé. Or,

$$|f(z(r_1, r_2, r_3))-f(z(r'_1, r'_2, r_3))|=|\omega-\alpha_1\eta|,$$

où $\omega=(r_1-r'_1)\omega_1+(r_2-r'_2)\omega_2$ et η est la quasi-période de ζ associée à ω. On minore alors $|\omega-\alpha_1\eta|$ grâce à la mesure d'approximation de ω/η (inégalité (3)), en utilisant de manière essentielle la dépendance en $r=|\omega|$ de cette mesure. Le nombre optimal R_1 (resp. R_2) de valeurs données à l'entier r_1 (resp. r_2) est établi de la manière suivante : l'application de la méthode des points d'interpolation impose que le produit $R_1 R_2$ soit supérieur au degré L_2 du polynôme P en la deuxième variable. Ce produit étant fixé, deux contraintes opposées apparaissent :

(a) le point $z(r_1, r_2, r_3)$ doit appartenir à un disque de rayon assez petit pour que l'on connaisse une bonne majoration de $|F(z(r_1, r_2, r_3))|$, ce qui impose de prendre R_1+R_2 aussi petit que possible;

(b) la minoration de $|f(z(r_1, r_2, r_3))-f(z(r'_1, r'_2, r_3))|$ fait intervenir de manière essentielle le module de la période

$$\omega=(r_1-r'_1)\omega_1+(r_2-r'_2)\omega_2.$$

Il semble donc que cette contrainte porte encore sur la somme R_1+R_2, et ainsi que le choix optimal serait obtenu pour $R_1=R_2$. Cependant, on a tout avantage à dissymétriser le problème grâce à la remarque suivante : les nombres ω_1, ω_2, η_1, η_2, et α_1 étant fixés, le nombre

$$|\omega-\alpha_1\eta|=|(r_1-r'_1)(\omega_1-\alpha_1\eta_1)+(r_2-r'_2)(\omega_2-\alpha_1\eta_2)|$$

est minoré de manière triviale si $r_1-r'_1$ et $r_2-r'_2$ ne sont pas du même ordre de grandeur (puisque $\omega_i-\alpha_1\eta_i\neq 0$). Ainsi, on peut toujours supposer que $|\omega|$ est majoré, à une constante près, par $\inf(R_1, R_2)$. La contrainte (b) porte donc en fait sur $\inf(R_1, R_2)$. En pratique les paramètres R_1 et R_2 sont effectivement choisis différents. Ce raisonnement fournit l'inégalité (9′).

On démontre l'inégalité (10) en utilisant une fonction auxiliaire du même type que précédemment. On étudie la valeur de cette fonction et de ses dérivées aux points mu en utilisant le lien entre $F^{(k)}(mu)$ et $(d^k/dz^k)F(mz)|_{z=u}$. On conclut dans le cas général par la méthode des multiplicités de zéros. Dans le cas où α_1 est fixé, la méthode des points d'interpolation peut être utilisée grâce à la mesure d'approximation (3) de ω/η, de même que pour démontrer (9′), ce qui fournit l'inégalité (10′).

Le résultat (11) d'approximation simultanée de η_1 et η_2 s'obtient en considérant les valeurs d'une fonction du type P ($\wp(z)$, $\zeta(z)$) aux points $(m_1+1/2)\omega_1+(m_2+1/2)\omega_2$, en utilisant la périodicité de la fonction $\wp$. Le polynôme P est à coefficients dans l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$. On obtient la contradiction par la méthode des points d'interpolation de la forme

$$z(r_1, r_2, r_3)=(\omega_1/4)+r_1\omega_1+r_2\omega_2+r_3\varepsilon.$$

Pour démontrer la mesure d'approximation (12) de π/ω, on utilise une fonction auxiliaire du type

$$F(z)=P(\wp(z), \exp(2i\pi z/\omega)),$$

dont on regarde les valeurs aux points $(m+1/2)\omega$, en utilisant le fait que ω est une période commune aux deux fonctions $\wp(z)$ et $\exp(2i\pi z/\omega)$. Le degré de P en la première variable est petit devant le degré en la seconde, grâce à la croissance modérée de la fonction exponentielle. La contradiction peut être obtenue par la méthode des multiplicités de zéros, en utilisant un lemme, analogue au lemme 4.4, majorant la multiplicité d'un zéro de $P(\wp(z), \exp(tz))$. Lorsque $r=|\omega|$ est fixé, on obtient le même résultat par la méthode des points d'interpolation en utilisant les points

$$z(r_1, r_2)=(\omega_1/4)+r_1\omega_2+r_2\varepsilon \qquad (\text{avec } \omega=\omega_1)$$

où r_1 est du signe de Im (ω_1/ω_2), de sorte que, si $r_1 \neq r'_1$, alors

$$|\exp(2 i \pi r_1 \omega_2/\omega_1) - \exp(2 i \pi r'_1 \omega_2/\omega_1)|$$

est minoré par une constante.

La démonstration de la minoration (13) de $|(\log \xi) - \alpha\omega_1|$ utilise la fonction auxiliaire $F(z) = P(\wp(z), \exp(z(\log \xi)/\omega_1))$, dont on étudie les valeurs aux points de la forme $(m+1/2)\omega_1$, en se servant de la périodicité de $\wp$. La méthode des multiplicités de zéros est employée pour terminer la démonstration dans le cas général. Dans certains cas particuliers, la méthode des points d'interpolation permet d'obtenir l'inégalité plus fine (13'). Considérons en effet les points

$$z(r_1, r_2, r_3) = (\omega_1/4) + r_1 \omega_1 + r_2 \omega_2 + r_3 \varepsilon.$$

On peut appliquer la méthode des points d'interpolation à condition de savoir minorer les quantités

$$|\exp((r_1 + r_2 \tau)(\log \xi)) - \exp((r'_1 + r'_2 \tau)(\log \xi))|,$$

où $\tau = \omega_2/\omega_1$ et $(r_1, r_2) \neq (r'_1, r'_2)$. Or, $|e^x - e^y|$ est essentiellement minoré par $|\mathrm{Re}(x-y)| + \|(x-y)/2 i \pi\|$, où $\| \;\; \|$ désigne la distance à l'entier le plus proche. Cette minoration s'applique en particulier dans le cas où $\log \xi$ est imaginaire pur. En effet, si $r_2 \neq r'_2$, alors :

$$|\mathrm{Re}((r_1 + r_2 \tau - r'_1 - r'_2 \tau)(\log \xi))| = |(r'_2 - r_2)\,\mathrm{Im}(\log \xi)\,\mathrm{Im}\,\tau|$$

est minoré par une constante, et si $r_2 = r'_2$ alors pour tout entier k,

$$|(r_1 + r_2 \tau - r'_1 - r'_2 \tau)(\log \xi) - 2 k i \pi| = |(r_1 - r'_1)(\log \xi) - 2 k i \pi|;$$

on peut supposer que $\log \xi$ et $i\pi$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants, car, dans le cas contraire, la minoration (13) peut être améliorée directement grâce à la mesure d'approximation (12) de π/ω. Ainsi, on peut minorer $|(r_1 - r'_1)(\log \xi) - 2 k i \pi|$ en utilisant une mesure d'approximation de $(\log \xi)/2 i \pi$ (*cf.* par exemple [*W*], théorème 4.4); une minoration assez grossière du type

$$|q(\log \xi) - p\, 2 i \pi| > \exp\{-c(\xi)\, q^{1/2}\}$$

est suffisante pour prouver l'inégalité (13'). Enfin, lorsqu'on suppose que $\log \xi$ est quelconque, mais que $\wp$ admet une multiplication complexe, alors on peut minorer

$$\|(r_1 - r'_1 + r_2 \tau - r'_2 \tau)(\log \xi)/2 i \pi\|$$

en utilisant une mesure d'approximation de $(\log \xi)/2i\pi$. Ici encore, une mesure assez grossière suffit.

Pour démontrer (14), on emploie la fonction auxiliaire

$$F(z)=P(\wp(z), \exp(z(\log \xi)/u)).$$

On étudie les valeurs aux points mu de cette fonction et de ses dérivées en utilisant le lemme 4.11. La méthode des multiplicités de zéros permet d'achever la démonstration.

L'inégalité (15) est prouvée en utilisant une fonction auxiliaire du type $F(z)=P(\wp(z), e^z)$. On emploie le lemme 4.11 pour étudier les valeurs des dérivées de F aux points mu, et on achève la démonstration par la méthode des multiplicités de zéros. L'inégalité (15') est obtenue en employant la méthode des points d'interpolation, avec les points de la forme

$$z(r_1, r_2, r_3)=(\omega_1/4)+r_1\omega_1+r_2\omega_2+r_3\varepsilon$$

en s'assurant que

$$|\exp(z(r_1, r_2, r_3))-\exp(z(r'_1, r'_2, r_3))|$$

ne peut être trop petit grâce à la minoration (12).

Une fonction auxiliaire du même type que précédemment est employée dans la preuve de (16). On utilise ici l'argument de M. ANDERSON et le lemme 5.2. La méthode des multiplicités de zéros fournit le résultat. On obtient (16') par la méthode des points d'interpolation, avec

$$z(r_1, r_2)=(\omega_1/4)+r_1 2i\pi+r_2\varepsilon,$$

et en utilisant l'inégalité (12) pour minorer $|\wp(z(r_1, r_2))-\wp(z(r'_1, r_2))|$.

Enfin, l'inégalité (17) peut être démontrée avec la fonction auxiliaire $F(z)=P(\wp(z), z-(\omega_1/\eta_1)\zeta(z))$, où les coefficients de P sont des entiers de $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$. On utilise le fait que ω_2 (resp. ω_1) est une période de $\wp$ (resp. de $\wp$ et de $z-(\omega_1/\eta_1)\zeta(z)$) et la relation de Legendre pour étudier les valeurs de F aux points de la forme $(\omega_1/2)+m_1\omega_1+m_2\omega_2$, où $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. La méthode des multiplicités de zéros permet de terminer la démonstration.

Pour terminer, nous avons rassemblé en un tableau les valeurs des principaux paramètres utilisés pour la démonstration des inégalités du théorème 1 et des remarques qui le suivent. Tous ces paramètres sont donnés à une constante multiplicative près. Les notations sont les suivantes : la fonction auxiliaire utilisée est toujours de la forme $F(z)=P(\wp(z), f(z))$, où $P\in\mathbb{C}[X, Y]$ est un polynôme de degré $\leqslant L_1$ en X et $\leqslant L_2$ en Y. On impose,

N°	M	L_1	L_2	K	R	K_1
(1) . . .	$d\log dh$	$h+d\log M$	M^2	$L_1 M$	M	K
(2) . . .	$d\frac{\log dh}{\log^+ d}$	$\frac{h+d\log M}{\log^+ d}$	$\frac{dM^2}{\log^+ d}$	$\frac{dL_1 M}{\log^+ d}$	$L_2^{1/2}$	$\frac{dL_1 R}{\log^+ d}$
(3) . . .	$d\log drh$	$(h+Mr^2)/M$	Mr^2	$r^2 L_1 M$	Mr	K
(4) . . .	$d\frac{\log dh}{\log^+ d}$	$\frac{h+dM^2}{\log^+ d}$	$\frac{dM^2}{\log^+ d}$	$\frac{dL_1 M}{\log^+ d}$	M	$L_1 L_2$
(4') . . .	$d\frac{\log dh}{\log^+ d}$	$\frac{h+dM^2}{\log^+ d}$	$\frac{dM^2}{\log^+ d}$	$\frac{dL_1 M}{\log^+ d}$	$L_2^{1/2}$	$\frac{dL_1 R}{\log^+ d}$
(5) . . .	d	$1+\frac{d\log d}{\log hd}$	$d^2\frac{h+d}{\log hd}$	$L_1 L_2/d$	M	$L_1 L_2$
(6) . . .	$d\log dh$	$h+M^2$	M^2	$L_1 M$	M	K
(7) . . .	$d\frac{\log dh}{\log^+ d}$	$\frac{h+dM^2}{\log^+ d}$	$\frac{dM^2}{\log^+ d}$	$\frac{dL_1 M}{\log^+ d}$	$L_2^{1/2}$	$\frac{dL_1 R}{\log^+ d}$
(8) . . .	$d+\frac{h}{\log dh}$	$\frac{(h+d)M^2}{\log dh}$	L_1	$L_1 L_2/M$	M	$L_1 L_2$
(8') . . .	$d+\frac{h}{\log dh}$	$\frac{(h+d)M^2}{\log dh}$	L_1	$L_1 L_2/M$	$L_2^{1/2}$	$RL_1\frac{h+d}{\log dh}$
(9) . . .	$D\log Dh'$	$h'+M^2$	M^2	$L_1 M$	M	$L_1 L_2$
(9') . . .	$d\log dh$	$h+M^2$	M^2	$L_1 M$	R_1	$L_1 R$
(10) . . .	$D\frac{\log Dh'}{\log^+ D}$	$\frac{h'+dM^2}{\log^+ D}$	$DM^2/\log^+ D$	$\frac{DL_1 M}{\log^+ D}$	M	$L_1 L_2$
(10') . . .	$d\frac{\log dh}{\log^+ d}$	$\frac{h+dM^2}{\log^+ d}$	$dM^2/\log^+ d$	$\frac{dL_1 M}{\log^+ d}$	R_2	$\frac{dL_1 R}{\log^+ d}$
(11) . . .	$D\log Dh'$	$h'+M$	M	$h'+M$	$M^{1/2}$	K
(12) . . .	$h+d\log drh$	r	Mr^2	Mr^3	Mr	$L_1 L_2$
(13) . . .	$h+d\log dh$	dM	M^2	dM^2	M	$L_1 L_2$
(13') . . .	$h+d\log dh$	dM	M^2	dM^2	M	K
(14) . . .	$\frac{h+d\log dh}{\log^+ d}$	$dM/\log d$	ML_1	L_1^2	M	$L_1 L_2$
(15) . . .	$d\frac{\log dh}{\log^+ E}$	$M\frac{h+\log d}{\log^+ E}$	$\frac{dM^2}{\log^+ E}$	$L_1 L_2/M$	M	$L_1 L_2$
(15') . . .	$d\frac{\log dh}{\log^+ E}$	$M\frac{h+\log d}{\log^+ E}$	$\frac{dM^2}{\log^+ E}$	$L_1 L_2/M$	$L_2^{1/2}$	$\frac{dL_1 R}{\log^+ E}$
(16) . . .	$d\frac{\log dh}{\log^+ d}$	$dM/\log^+ d$	$M_2\frac{h+d}{\log^+ d}$	$L_1 L_2/M$	M	$L_1 L_2$
(16') . . .	$d\frac{\log dh}{\log^+ d}$	$dM/\log^+ d$	$M^2\frac{h+d}{\log^+ d}$	$L_1 L_2/M$	L_1	$RL_1\frac{h+d}{\log^+ d}$
(17) . . .	$D\log Dh'$	$\frac{h'+M}{M^{1/2}}$	$M^{1/2}$	L_1	$M^{1/2}$	K

par le lemme de Siegel (lemme 3.2), des conditions aux valeurs des K premières dérivées de F, en M points. Une interpolation permet de majorer sur un disque de rayon R les K_1 premières dérivées de F.

Pour des raisons typographiques évidentes nous notons

$$E = \min(d^{1/2};\ h + \log d);$$

$$R_1 = L_2^{1/2} + L_2 (L_1 L_2)^{-1/6} (\log L_1 L_2)^{1/2};$$

$$R^2 = L_2^{1/2} + L_2 (dL_1 L_2 / \log d)^{-1/6} (\log (dL_1 L_2 / \log d))^{1/2}.$$

REFERENCES

[A] ANDERSON (M.). – Ph. D. thesis, University of Nottingham, 1978.

[Ba] BAKER (A.). – On the periods of the Weierstrass p-function, *Symposia Mathematica*, vol. IV, p. 155-174. – London, New York, Academic Press, 1970.

[B-K] BROWNAWELL (D. W.) and KUBOTA (K. K.). – The algebraic independence of Weierstrass functions and some related numbers, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 33, 1977, p. 111-149.

[Ci] CIJSOUW (P. L.). – *Transcendence measures*, Thesis, University of Amsterdam, 1972.

[Ci-W] CIJSOUW (P. L.) and WALDSCHMIDT (M.). – Linear forms and simultaneous approximations, *Compos. Math.*, Groningen, t. 34, 1977, p. 173-197.

[Co] COATES (J.). – The transcendence of linear forms in $\omega_1, \omega_2, \eta_1, \eta_2, 2i\pi$, *Amer. J. of Math.*, t. 93, 1971, p. 385-397.

[F1] FEL'DMAN (N. I.). – Approximation de certains nombres transcendants (en russe) *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R.*, Ser. Mat., t. 15, 1951, p. 53-74, 153-176; [en anglais] *Amer. math. Soc. Transl.*, Series 2, t. 59, 1966, p. 224-270.

[F2] FEL'DMAN (N. I.). – Approximation simultanée des périodes d'une fonction elliptique par des nombres algébriques [en russe] *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R.*, Ser. Mat., t. 22, 1958, p. 563-576; [en anglais] *Amer. math. Soc. Transl.*, Series 2, t. 59, 1966, p. 271-284.

[F3] FEL'DMAN (N. I.). – Sur les périodes des fonctions elliptiques [en russe] *Acta Arithm.* Warszawa, t. 24, 1974, p. 477-489.

[Fr] FRICKE (R.). – *Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen*. Band 2. – Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1916.

[M] MASSER (D. W.). – *Elliptic functions and transcendence*. – Berlin, Springer-Verlag, 1975 (*Lecture Notes in Mathematics*, 437).

[M-W] MIGNOTTE (M.) and WALDSCHMIDT (M.). – Linear forms in two logarithms and Schneider's method, *Math. Annalen*, t. 267, 1978, p. 231-241.

[R] REYSSAT (E.). – Mesures de transcendance de nombres liés aux fonctions exponentielles et elliptiques, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 285, 1977, série A, p. 977-980; et *Mesures de transcendance de nombres liés aux fonctions elliptiques*, Thèse 3e cycle, Université Pierre-et-Marie-Curie, 1977.

[S] SCHNEIDER (T.). – *Einführung in die transzendenten Zahlen*. – Berlin, Springer-Verlag. 1957 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 81).

[W] WALDSCHMIDT (M.). – Transcendence measures for exponentials and logarithms, *J. Austral. math. Soc.*, Ser. A, t. 25, 1978, p. 445-465.