

# BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-LUC SAUVAGEOT

**Sur le type du produit croisé d'une algèbre de von Neumann par un groupe localement compact**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 105 (1977), p. 349-368

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1977\\_\\_105\\_\\_349\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1977__105__349_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LE TYPE DU PRODUIT CROISÉ  
D'UNE ALGÈBRE DE VON NEUMANN  
PAR UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT**

PAR

JEAN-LUC SAUVAGEOT

[Paris, Université Pierre-et-Marie-Curie]

---

**RÉSUMÉ.** — On étudie le produit croisé  $W^*(G, \mathcal{A})$ , où  $G$  est un groupe localement compact opérant continûment dans l'algèbre de von Neumann  $\mathcal{A}$ . Généralisant une construction de M. TAKESAKI, à tout poids normal semi-fini fidèle  $\varphi$  sur  $\mathcal{A}$  on associe un poids « dual »  $\tilde{\varphi}$  dont on explicite le groupe modulaire. Puis on suppose que  $G$  agit librement dans le centre de  $\mathcal{A}$  : un théorème de commutant relatif permet de calculer l'invariant «  $T$  » et le « flot des poids » du produit croisé  $W^*(G, \mathcal{A})$ , et de donner un critère simple de semi-finitude pour  $W^*(G, \mathcal{A})$ .

**ABSTRACT.** — We study the crossed product  $W^*(G, \mathcal{A})$ , where  $G$  is a locally compact group acting continuously on the von Neumann algebra  $\mathcal{A}$ . By a generalization of a construction of M. TAKESAKI, to any faithful normal semifinite weight  $\varphi$  on  $\mathcal{A}$  is associated a « dual » weight  $\tilde{\varphi}$  on  $W^*(G, \mathcal{A})$  whose modular group is explicited. Under the assumption that the action of  $G$  is free in the center of  $\mathcal{A}$ , a relative commutant theorem allows us to compute the invariant “ $T$ ” and the “flow of weights” of the crossed product, and to give a simple criterium for  $W^*(G, \mathcal{A})$  to be semifinite.

### Introduction

Le produit croisé d'une algèbre de von Neumann  $\mathcal{A}$  par un groupe continu d'automorphismes  $G$  a été étudié par J. DIXMIER [5] lorsque  $\mathcal{A}$  est commutative, puis par M. TAKESAKI [14] qui développe une théorie de la dualité en supposant  $G$  commutatif. Généralisant à la fois l'algèbre quasi-unitaire de [5] et le poids dual de [14], nous associons en toute généralité à un poids  $\varphi$  sur  $\mathcal{A}$  un poids « dual »  $\tilde{\varphi}$  sur le produit croisé  $W^*(G, \mathcal{A})$ , dont le groupe modulaire s'exprime simplement en fonction de celui de  $\varphi$  et des dérivées de Radon-Nikodym ( $Dg\varphi : D\varphi$ ) (proposition 1.1).

La différence essentielle entre le produit croisé discret et le produit croisé continu réside dans l'absence, dans le second cas, d'une espérance conditionnelle de  $W^*(G, \mathcal{A})$  sur l'image de  $\mathcal{A}$  (comme le met en évidence la démon-

tration de la proposition 3.5). Toutefois, des hypothèses de liberté sur l'action de  $G$ , analogues à celles de [5], conduisent à un théorème de commutant relatif (§ 2) qui permet, au paragraphe 3, de calculer l'invariant  $T$  du produit croisé, et de donner des critères pour que  $W^*(G, \mathcal{A})$  soit une algèbre semi-finie ou finie. Une application des méthodes cohomologiques du chapitre III de [8] permet de caractériser l'existence sur  $\mathcal{A}$  de traces relativement invariantes sous l'action de  $G$ .

Par rapport à une rédaction antérieure (cf. [13]), une modification mineure de la preuve permet de supprimer toute hypothèse de séparabilité dans la construction du poids dual, et nous donnons ici la version définitive de cette construction, telle qu'elle a été exposée au Séminaire « Algèbres d'opérateurs » de l'Université d'Orléans, en avril 1974. Nous avons en outre rajouté un exemple d'application de ce poids dual au produit croisé discret (propositions 3.9 et 3.10) et un paragraphe (§ 4) consacré à la décomposition continue et au flot des poids du produit croisé.

### 1. Poids dual sur le produit croisé

Soit  $(\mathcal{A}, G)$  un système dynamique (non commutatif) :  $\mathcal{A}$  est une algèbre de von Neumann, et  $G$  un groupe localement compact opérant dans  $\mathcal{A}$  par automorphismes; l'action de  $G$  est continue pour la topologie de la convergence simple ultrafaible de  $\text{Aut}(\mathcal{A})$ . On en déduit, d'après le corollaire 3.11 de [9], que, si on munit  $\mathcal{A}$  de sa topologie ultraforte, l'application  $G \times \mathcal{A} \ni (g, a) \mapsto ga \in \mathcal{A}$  est continue.

Soit  $\varphi$  un poids normal semi-fini fidèle (p. n. s. f. f.) sur  $\mathcal{A}$  :  $\mathcal{N}_\varphi$  est l'idéal à gauche  $\{a \in \mathcal{A}; \varphi(a^*a) < \infty\}$ ,  $H$  l'espace de Hilbert complété de  $\mathcal{N}_\varphi$  pour le produit scalaire induit par  $\varphi$ , et on identifiera  $\mathcal{A}$  à son image canonique dans  $L(H)$ . Le produit croisé  $W^*(G, \mathcal{A})$  sera l'algèbre de von Neumann d'opérateurs de l'espace de Hilbert  $L^2(G, H, dg)$  (où  $dg$  est une mesure de Haar à gauche sur  $G$  fixée une fois pour toutes), engendrée par les opérateurs  $\pi(a)$  ( $a \in \mathcal{A}$ ), et  $\lambda_g$  ( $g \in G$ ) définis respectivement ainsi : si  $\xi (G \ni \gamma \mapsto \xi(\gamma) \in H)$  désigne l'élément générique de  $L^2(G, H, dg)$ , alors :

$$\pi(a)\xi(\gamma) = \gamma^{-1}a.\xi(\gamma),$$

$$\lambda_g\xi(\gamma) = \xi(g^{-1}\gamma).$$

L'action de  $G$  dans  $\pi(\mathcal{A})$  est unitairement implémentée par la représentation unitaire continue  $\lambda$  de  $G$  :  $\forall a \in \mathcal{A}, \forall g \in G, \pi(ga) = \lambda_g \pi(a) \lambda_g^*$ .

Le paragraphe entier, qui généralise une construction de M. TAKESAKI, est consacré à la démonstration de la proposition suivante (cf. [14], proposition 5.15).

PROPOSITION 1.1. — *Quel que soit le poids n. s. f. f.  $\varphi$  sur  $\mathcal{A}$ , il existe un poids n. s. f. f.  $\tilde{\varphi}$  sur  $W^*(G, \mathcal{A})$  vérifiant, pour tout  $t$  de  $\mathbf{R}$ ,*

$$(i) \forall a \in \mathcal{A}, \sigma_t^{\tilde{\varphi}}(\pi(a)) = \pi(\sigma_t^\varphi(a));$$

$$(ii) \forall g \in G, \sigma_t^{\tilde{\varphi}}(\lambda_g) = \delta(g)^{it} \lambda_g \pi((Dg^{-1} \varphi : D\varphi)_t),$$

où  $\delta(\cdot)$  désigne la fonction modulaire du groupe  $G$ ,  $\sigma_t^{\tilde{\varphi}}$  (resp.  $\sigma_t^\varphi$ ) le groupe modulaire de  $W^*(G, \mathcal{A})$  (resp. de  $\mathcal{A}$ ) associé au poids  $\tilde{\varphi}$  (resp.  $\varphi$ ), et  $(Dg \varphi : D\varphi)$  la dérivée par rapport à  $\varphi$  (au sens de A. CONNES [2], lemme 1.2.2) du poids  $g \varphi$  défini par  $g \varphi(a) = \varphi(g^{-1}a)$ ,  $\forall a \in \mathcal{A}_+$ .

Démonstration. — On notera  $\mathcal{K}(G, \mathcal{A})$  l'ensemble des applications \*-ultrafortement continues, à support compact de  $G$  dans  $\mathcal{A}$ . Si  $X(G \ni g \mapsto X(g) \in \mathcal{A})$  est un élément de  $\mathcal{K}(G, \mathcal{A})$ , on pose

$$\|X\|_1 = \int_G \|X(g)\| dg,$$

$$\|X\|_2 = \left\{ \int_G \varphi(X(g)^* X(g)) dg \right\}^{1/2}.$$

Les formules

$$X \cdot Y(g) = \int_G \gamma X(g\gamma) Y(\gamma^{-1}) d\gamma,$$

$$X^*(g) = \delta(g)^{-1} g^{-1} X(g^{-1})^*,$$

définissent sur  $\mathcal{K}(G, \mathcal{A})$  une structure d'algèbre involutive, et on a l'inégalité (dans  $\mathbf{R}$ ) :

$$(1) \quad \forall X, Y \in \mathcal{K}(G, \mathcal{A}), \quad \|X \cdot Y\|_2 \leq \|X\|_1 \|Y\|_2.$$

On posera

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{ X \in \mathcal{K}(G, \mathcal{A}); \quad \|X\|_2 < \infty \quad \text{et} \quad \|X^*\|_2 < \infty \}.$$

D'après (1),  $\tilde{\mathcal{U}}$  est une sous-algèbre involutive de  $\mathcal{K}(G, \mathcal{A})$  et, muni de la norme  $\|\cdot\|_2$ , c'est un espace préhilbertien séparé, le produit scalaire correspondant étant

$$\langle X, Y \rangle = \int_G \varphi(Y(g)^* X(g)) dg, \quad (X, Y \in \tilde{\mathcal{U}}).$$

Si  $X \in \tilde{\mathcal{U}}$ , pour presque tout  $g$  de  $G$ ,  $X(g) \in \mathcal{N}_\varphi$ . En notant  $\Lambda_\varphi$  l'injection naturelle de  $\mathcal{N}_\varphi$  dans  $H$ , et en posant  $\tilde{\Lambda}(X)(g) = \Lambda_\varphi(X(g))$  ( $g \in G$ ), on définit une isométrie  $\tilde{\Lambda}$  de  $\tilde{\mathcal{U}}$  dans  $L^2(G, H, dg)$ . En utilisant les méthodes du lemme 5.6 de [14], et en tenant compte du fait que, si  $f \in \mathcal{K}(G)$ ,  $x, y \in \mathcal{N}_\varphi$ , l'application  $G \ni g \mapsto f(g)g^{-1}x^*.y$  définit un élément de  $\mathcal{U}$ , on montre sans difficulté

$$(2) \quad \tilde{\Lambda}(\tilde{\mathcal{U}}) \text{ est dense dans } L^2(G, H, dg).$$

(1) et (2) permettent de construire une \*-représentation  $\Pi_I$  de  $\tilde{\mathcal{U}}$  dans l'algèbre des opérateurs bornés de  $L^2(G, H, dg)$ , caractérisée par

$$\Pi_I(X)\tilde{\Lambda}(Y) = \tilde{\Lambda}(X.Y), \quad \forall X, Y \in \tilde{\mathcal{U}}.$$

Un calcul simple montre que, pour tout  $X(g \rightarrow X(g))$  de  $\tilde{\mathcal{U}}$ , on a

$$(3) \quad \Pi_I(X) = \int_G \lambda(g)\pi(X(g))dg.$$

En particulier, si  $X(g) = f(g)g^{-1}x^*.y$ ,  $\forall g \in G$  ( $f \in \mathcal{K}(G)$ ,  $x, y \in \mathcal{N}_\varphi$ ),

$$(4) \quad \Pi_I(X) = \pi(x)^*\lambda(f)\pi(y).$$

De (3), on déduit  $\Pi_I(X^*) = \Pi_I(X)^*$ , soit

$$(5) \quad \langle X.Y, Z \rangle = \langle Y, X^*.Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \tilde{\mathcal{U}}.$$

Pour prouver le théorème, on va montrer que :

(A)  $\tilde{\mathcal{U}}$  est une algèbre hilbertienne à gauche;

(B) l'algèbre de von Neumann à gauche  $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{U}})$  s'identifie naturellement au produit croisé  $W^*(G, \mathcal{A})$ ;

(C) après cette identification, le poids  $\tilde{\varphi}$  sur  $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{U}})$ , canoniquement associé à  $\tilde{\mathcal{U}}$  par F. COMBES [1], vérifie les conclusions du théorème.

La démonstration de (A) exige un lemme préliminaire.

LEMME 1.2. — Soit  $\alpha$  un automorphisme de  $\mathcal{A}$ . Le sous-espace vectoriel  $\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{N}_\varphi \cap \alpha^{-1}\mathcal{N}_\varphi^*$  de  $\mathcal{N}_\varphi$  est dense pour sa topologie préhilbertienne, et l'application

$$\Lambda_\varphi(\mathcal{U}_\alpha) \ni \Lambda_\varphi(x) \rightarrow \Lambda_\varphi(\alpha.x^*) \in \Lambda_\varphi(\mathcal{U}_{\alpha^{-1}})$$

est préfermée.

Soit  $t_\alpha$  sa fermeture,  $t_\alpha = v_\alpha T_\alpha^{1/2}$  la décomposition polaire de  $t_\alpha$  (cf. [7], § XII.7). On aura dans  $H$  :

(a)  $v_\alpha = J u_\alpha$ , où  $J$  est l'involution associée à  $\varphi$ , et  $u_\alpha$  l'implémentation canonique de  $\alpha$  au sens de [9], théorème 3.2;

(b)  $\forall t \in \mathbf{R}, T_\alpha^{it} = (D \alpha^{-1} \varphi : D \varphi)_t \Delta_\varphi^{it}$ .

*Démonstration.* — Soit  $F$  un facteur de type  $I_2$ , défini par un système d'unités matricielles  $(e_{i,j}), i, j = 1, 2$ . Le poids  $\theta$ , défini sur  $\mathcal{A} \otimes F$  par

$$\theta(\sum x_{i,j} \otimes e_{i,j}) = \varphi(x_{1,1}) + \varphi(\alpha x_{2,2}) \quad \text{si } \sum x_{i,j} \otimes e_{i,j} \geq 0,$$

est un poids n. s. f. f. Son idéal associé est

$$\mathcal{N}_\theta = \{ \sum x_{i,j} \otimes e_{i,j}; x_{1,1}, x_{2,1} \in \mathcal{N}_\varphi, x_{1,2}, x_{2,2} \in \alpha^{-1} \mathcal{N}_\varphi \},$$

et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\theta \cap \mathcal{N}_\theta^* &= \{ \sum x_{i,j} \otimes e_{i,j}; \\ & x_{1,1} \in \mathcal{N}_\varphi \cap \mathcal{N}_\varphi^*, x_{1,2} \in \alpha^{-1} \mathcal{U}_{\alpha^{-1}}, x_{2,1} \in \mathcal{U}_\alpha, x_{2,2} \in \alpha^{-1} (\mathcal{N}_\varphi \cap \mathcal{N}_\varphi^*) \}. \end{aligned}$$

L'application  $\rho$  :

$$\sum x_{i,j} \otimes e_{i,j} \rightarrow (x_{1,1}, \alpha x_{1,2}, x_{2,1}, \alpha x_{2,2})$$

est une bijection de  $\mathcal{N}_\theta \cap \mathcal{N}_\theta^*$  sur  $(\mathcal{N}_\varphi \cap \mathcal{N}_\varphi^*) \times \mathcal{U}_{\alpha^{-1}} \times \mathcal{U}_\alpha \times (\mathcal{N}_\varphi \cap \mathcal{N}_\varphi^*)$ , isométrique pour les normes préhilbertiennes respectives de  $\mathcal{N}_\theta$  et  $\mathcal{N}_\varphi^4$ . La transmuée par  $\rho$  de l'application

$$\sum x_{i,j} \otimes e_{i,j} \rightarrow (\sum x_{i,j} \otimes e_{i,j})^*$$

est l'application

$$(x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}) \rightarrow (x_{1,1}^*, \alpha x_{2,1}^*, \alpha^{-1} x_{1,2}^*, x_{2,2}^*).$$

Cette application étant préfermée, ainsi que l'application

$$(x_{1,1}, x_{2,2}) \rightarrow (x_{1,1}^*, x_{2,2}^*),$$

l'application  $(x_{1,2}, x_{2,1}) \rightarrow (\alpha x_{2,1}^*, \alpha^{-1} x_{1,2}^*)$  est préfermée dans  $\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{U}_{\alpha^{-1}}$ . L'opérateur  $\mathcal{U}_\alpha \ni x \rightarrow \alpha x^* \in \mathcal{U}_{\alpha^{-1}}$  est donc préfermé, et sa fermeture  $t_\alpha$  dans  $H$  est bien définie.

Notons  $\Lambda_\theta$  l'injection canonique de  $\mathcal{N}_\theta$  dans l'espace de Hilbert complété  $H_\theta$ . Si  $x \in \mathcal{U}_\alpha, x \otimes e_{2,1} \in \mathcal{N}_\theta \cap \mathcal{N}_\theta^*$  et, en posant  $\Lambda_\varphi(x) = \xi$ , on voit que

$$\Lambda_\theta(\Lambda_\theta(x \otimes e_{2,1})) = \Lambda_\theta(\Lambda_\varphi^{-1}(T_\alpha \xi) \otimes e_{2,1}),$$

car, après transport par  $\rho$ , l'application  $\#$  associée à  $\theta$  se décompose ainsi dans  $H^4$  :

$$\begin{aligned} & (\xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \xi_{2,1}, \xi_{2,2}) \\ & \xrightarrow{\Delta_\theta^{1/2}} (\Delta_\phi^{1/2} \xi_{1,1}, T_\alpha^{1/2} \xi_{1,2}, T_\alpha^{1/2} \xi_{2,1}, \Delta_\phi^{1/2} \xi_{2,2}) \\ & \xrightarrow{J_\theta} (\xi_{1,1}^\#, t_\alpha \xi_{2,1}, t_\alpha^{-1} \xi_{1,2}, \xi_{2,2}^\#). \end{aligned}$$

De l'égalité ci-dessus, on déduit :

$$\Delta_\theta^{it} (\Lambda_\theta(x \otimes e_{2,1})) = \Lambda_\theta(\Lambda_\phi^{-1}(T_\alpha^{it} \xi) \otimes e_{2,1}).$$

Or :

$$\begin{aligned} \Delta_\theta^{it} (\Lambda_\theta(x \otimes e_{2,1})) &= \Lambda_\theta(\sigma_t^0(x \otimes e_{2,1})) \\ &= \Lambda_\theta(\sigma_t^0(1 \otimes e_{2,1}) \sigma_t^0(x \otimes e_{1,1})) \\ &= (D\alpha^{-1} \varphi : D\varphi)_t \otimes e_{2,1} \Lambda_\theta(\Lambda_\phi^{-1}(\Delta_\phi^{it} \xi) \otimes e_{1,1}) \\ &= \Lambda_\theta(\Lambda_\phi^{-1}((D\alpha^{-1} \varphi : D\varphi)_t \Delta_\phi^{it} \xi) \otimes e_{2,1}), \end{aligned}$$

d'où le résultat (b) :

$$T_\alpha^{it} = (D\alpha^{-1} \varphi : D\varphi)_t \Delta_\phi^{it} \quad \text{si } t \in \mathbf{R}.$$

Reste à démontrer (a). L'opérateur  $\#$  de  $\mathcal{N}_\theta \cap \mathcal{N}^*$  étant la fermeture de sa restriction à  $(\mathcal{N}_\theta \cap \mathcal{N}_\theta^*)^2$ , il suffit de démontrer que, si  $x, y \in \mathcal{N}_\phi$ ,

$$\langle J u_\alpha \alpha^{-1} x^* \Lambda_\phi(y), \alpha y^* \Lambda_\phi(x) \rangle \geq 0.$$

Or le premier membre de l'inégalité est égal à

$$\begin{aligned} \langle J x^* u_\alpha \Lambda_\phi(y), \alpha y^* \Lambda_\phi(x) \rangle &= \langle \alpha y J x^* J u_\alpha J \Lambda_\phi(y), \Lambda_\phi(x) \rangle \\ &= \langle \alpha y u_\alpha J \Lambda_\phi(y), J x J \Lambda_\phi(x) \rangle \\ &= \langle u_\alpha y J \Lambda_\phi(y), x J \Lambda_\phi(x) \rangle, \end{aligned}$$

expression qui est positive, d'après la définition du cône  $P$  (§ 1) et de l'implémentation canonique (théorème 3.2) dans l'article de U. HAAGERUP [9].

Pour démontrer (A), en reprenant les notations de l'introduction de [1], il faut vérifier quatre axiomes (I), (II) (III) et (IV) :

(I) est notre formule (5) ci-dessus;

(II) découle de l'inégalité (1);

(III) est une conséquence simple de la formule (4), qui assure que  $\Pi_1(\tilde{\mathcal{U}})$  possède une unité approchée;

(IV), enfin, provient du lemme 1.2. Il faut montrer que l'opérateur  $(X \rightarrow X^*)$  de  $\tilde{\mathcal{U}}$  est fermable; on définit un opérateur (non borné)  $\tilde{t}$  de  $L^2(G, H, dg)$  de la manière suivante : son domaine  $D$  est l'ensemble des  $\xi, (g \rightarrow \xi(g))$  tels que :

(i) pour presque tout  $g$  de  $G, \xi(g)$  appartient au domaine de l'opérateur  $t_g$  associé par le lemme 1.2 à l'automorphisme  $g$  de  $\mathcal{A}$ ;

(ii) l'application  $G \ni g \rightarrow \delta(g)^{-1} t_{g^{-1}}(\xi(g^{-1}))$  est borélienne et de carré intégrable; si  $\xi \in D, \tilde{t}\xi$  est l'élément  $(g \rightarrow \delta(g)^{-1} t_{g^{-1}}(\xi(g^{-1})))$  de  $L^2(G, H, dg)$ .

L'opérateur  $(X \rightarrow X^*)$  est manifestement contenu dans  $\tilde{t}$ , et on vérifie sans peine que  $\tilde{t}$  est fermé.

*Démontrons (B).* Via l'injection isométrique  $\tilde{\Lambda}, L^2(G, H, dg)$  s'identifie naturellement à l'espace de Hilbert, complété de  $\tilde{\mathcal{U}}$ , et l'algèbre de von Neumann à gauche  $\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{U}})$  n'est autre que  $\Pi_1(\tilde{\mathcal{U}})''$ . D'après l'égalité (3) ci-dessus, on a

$$\tilde{\Pi}_1(\mathcal{U})'' \subset W^*(G, \mathcal{A}).$$

D'après l'égalité (4), comme  $\lambda(\mathcal{K}(G))$  et  $\pi(\mathcal{N}_\varphi)$  admettent des unités approchées, on aura

$$\pi(y) \in \Pi_1(\tilde{\mathcal{U}})'', \quad \forall y \in \mathcal{N}_\varphi \quad \text{et} \quad \lambda(f) \in \Pi_1(\tilde{\mathcal{U}})'', \quad \forall f \in \mathcal{K}(G),$$

d'où l'inclusion inverse.

On a montré ainsi  $\Pi_1(\tilde{\mathcal{U}})'' = W^*(G, \mathcal{A})$ , soit (B).

*Reste à démontrer (C).* Soit  $\tilde{\varphi}$  le poids sur  $W^*(G, \mathcal{A})$  canoniquement associé à  $\tilde{\mathcal{U}}$  (cf. F. COMBES [1], théorème 2.11) :  $\tilde{\varphi}$  est un poids n. s. f. f. qui vérifie les conclusions de la proposition 1.1.

En effet, l'opérateur modulaire  $\tilde{\Delta}$  associé à  $\tilde{\varphi}$  est défini par

$$\tilde{\Delta}\xi(g) = \delta(g) T_g \xi(g), \quad \xi \in L^2(G, H, dg).$$

(Pour tout  $g$ , les opérateurs  $t_g$  et  $T_g^{1/2}$  ont même domaine. L'opérateur  $\tilde{\Delta}^{1/2} = \int_G^\oplus \delta(g)^{1/2} T_g^{1/2} dg$  est bien défini et a même domaine que  $\tilde{t}$ . Il est fermé, et son carré est un opérateur fermé de domaine dense.)

Calculons :

$$\begin{aligned} (\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(\pi(a))\xi)(g) &= \delta(g)^{it} T_g^{it} g^{-1} a T_g^{-it} \delta(g)^{-it} \xi(g) \\ &= (Dg^{-1}\varphi : D\varphi)_t \sigma_t^{\varphi}(g^{-1}a) (Dg^{-1}\varphi : D\varphi)_t^* \xi(g) \\ &= \sigma_t^{g^{-1}\varphi}(g^{-1}a)\xi(g) = g^{-1} \sigma_t^{\varphi}(a)\xi(g) \\ &= (\pi(\sigma_t^{\varphi}(a))\xi)(g), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(\lambda_g)\xi)(\gamma) &= \delta(g)^{it} T_{\gamma}^{it} T_g^{-it} \xi(g^{-1}\gamma) \\ &= \delta(g)^{it} D(\gamma^{-1}\varphi : D\varphi)_t (D\gamma^{-1}g\varphi : D\varphi)_t^* \xi(g^{-1}\gamma) \\ &= \delta(g)^{it} \gamma^{-1}g (Dg^{-1}\varphi : D\varphi)_t \xi(g^{-1}\gamma) \\ &= \delta(g)^{it} (\lambda_g \pi(Dg^{-1}\varphi : D\varphi)_t \xi)(\gamma). \end{aligned}$$

La démonstration de la proposition 1.1 est terminée.

**COROLLAIRE 1.3.** — *S'il existe une trace normale semi-finie fidèle  $\tau$  sur  $\mathcal{A}$  telle que, pour tout  $g$  de  $G$ ,  $g\tau = \delta(g)\tau$ , alors le produit croisé  $W^*(G, \mathcal{A})$  est semi-fini.*

*Démonstration.* — Le poids  $\tilde{\tau}$ , associé à  $\tau$  par la proposition 1.1, vérifie  $\sigma_t^{\tilde{\tau}} = 1$ ,  $\forall t \in \mathbf{R}$ , et est donc une trace.

*Remarques.* — 1° Le poids  $\tilde{\varphi}$  est « dual » de  $\varphi$  dans le sens suivant : si  $X \in \tilde{\mathcal{U}}$ , si  $Y = X^*.X$  et si on pose  $A = \Pi_t(Y)$ , alors  $\tilde{\varphi}(A) = \varphi(Y(e))$  ( $e$  élément neutre de  $G$ ).

2° La réciproque du corollaire 1.3 est fautive en toute généralité : M. TAKESAKI ([14], lemme 8.2) a montré que le produit croisé d'une algèbre de type III par le groupe modulaire d'un poids n. s. f. f. était semi-fini; toutefois, on en connaît deux réciproques partielles :

— lorsque  $G$  est dénombrable et  $W^*(G, \mathcal{A})$  est fini, il existe sur  $\mathcal{A}$  une trace n. s. f. f. invariante (ZELLER-MEIER [15], proposition 8.16);

— lorsque  $G$  est dénombrable et agit librement dans le centre de  $\mathcal{A}$ , ou bien, sans hypothèse de séparabilité sur  $G$ , lorsque  $\mathcal{A}$  est commutative, la réciproque du corollaire 1.3 est vraie (cf. ZELLER-MEIER, *op. cit.*, et J. DIXMIER [5], théorème 7 et proposition 12).

Les paragraphes suivants donneront d'autres réciproques partielles du même type.

3° La partie (a) du lemme 1.4 permet d'explicitier l'opérateur d'involution  $\tilde{J}$  associé au poids  $\tilde{\varphi}$  :

$$\tilde{J}\xi(g) = \delta(g)^{-1/2} J u_g^{-1} \xi(g^{-1}), \quad \forall \xi \in L^2(G, H, dg).$$

On peut définir une représentation  $\pi'$  du commutant  $\mathcal{A}'$  de  $\mathcal{A}$  dans  $H$ , et une représentation  $\lambda'$  de  $G$  dans  $L^2(G, H, dg)$ , en posant, si  $\xi$  est l'élément générique de  $L^2(G, H, dg)$ ,

$$\begin{aligned} \pi'(a')\xi(g) &= a' \cdot \xi(g), & \forall a' \in \mathcal{A}', \quad \forall g \in G, \\ \lambda'_g \xi(\gamma) &= \delta(g)^{1/2} u_g \xi(\gamma g), & \forall g, \gamma \in G. \end{aligned}$$

Un calcul simple montre que  $\tilde{J}\pi(a)\tilde{J} = \pi'(J a J)$ ,  $\forall a \in \mathcal{A}$ , et  $\tilde{J}\lambda_g\tilde{J} = \lambda'_g$ ,  $\forall g \in G$ .

D'où la proposition suivante.

PROPOSITION. — *Le commutant de  $W^*(G, \mathcal{A})$  dans  $L^2(G, H, dg)$  est engendré par  $\pi'(\mathcal{A}')$  et par  $\lambda'(G)$ .*

4° L'application  $(g, t) \mapsto \sigma_t^{\tilde{\varphi}}(\lambda_g)$  de  $G \times \mathbf{R}$  dans le groupe unitaire de  $L^2(G, H, dg)$  est continue. Donc l'application

$$G \times \mathbf{R} \ni (g, t) \mapsto \delta(g)^{it} \lambda_g \sigma_t^{\tilde{\varphi}}(\lambda_g)^* = \pi((Dg\varphi : D\varphi)_t)$$

est continue. D'où le corollaire de la proposition 1.1.

COROLLAIRE. — *Soit  $G$  un groupe localement compact, opérant continûment dans  $\mathcal{A}$  pour la topologie de la convergence simple ultrafaible de  $\text{Aut}(\mathcal{A})$ . Si  $\varphi$  est un poids n. s. f. sur  $\mathcal{A}$ , l'application  $(g, t) \rightarrow (Dg\varphi : D\varphi)_t$  de  $G \times \mathbf{R}$  dans le groupe unitaire de  $\mathcal{A}$  est continue.*

Signalons que la construction du poids  $\tilde{\varphi}$  a été faite également, indépendamment de nous, par T. DIGERNES [4].

## 2. Actions libres et commutant relatif

Définition. — On dira que  $G$  agit librement dans une algèbre de von Neumann commutative  $\mathcal{C}$  si, à tout projecteur non nul  $c$  de  $\mathcal{C}$  et à tout compact  $K$  de  $G$  ne contenant pas l'élément neutre  $e$  de  $G$ , on peut associer un projecteur non nul  $p$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $p \leq c$  et,  $\forall g \in K$ ,  $gp.p = 0$ .

Si  $G$  est dénombrable à l'infini, on retrouve la notion habituelle d'action libre : si  $\mathcal{C} = L^\infty(X, \mu)$ ,  $G$  agit boréliennement dans  $X$  et, pour presque tout point  $x$  de  $X$ , le stabilisateur  $S_x = (g \in G; gx = x)$  est réduit à  $\{e\}$ .

PROPOSITION 2.1. — *Si  $G$  agit librement dans le centre  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{A}$ , alors :*

$$\pi(\mathcal{C})' \cap W^*(G, \mathcal{A}) = \pi(\mathcal{A}).$$

COROLLAIRE 2.2. — *Si  $G$  agit librement dans le centre  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{A}$ , alors :*

- (i)  $\pi(\mathcal{A})' \cap W^*(G, \mathcal{A}) = \pi(\mathcal{C})$ ;

(ii) le centre de  $W^*(G, \mathcal{A})$  est égal à  $\pi(\mathcal{C}^G)$ ;

(iii)  $W^*(G, \mathcal{A})$  est un facteur si, et seulement si, l'action de  $G$  dans  $\mathcal{C}$  est ergodique;

(iv) soient  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  comme dans l'énoncé de la proposition 1.1; alors le centre du centralisateur  $W^*(G, \mathcal{A})_{\tilde{\varphi}}$  de  $\tilde{\varphi}$  est inclus dans l'image par  $\pi$  du centre du centralisateur  $\mathcal{A}_{\varphi}$  du poids  $\varphi$ .

*Démonstration du corollaire.* — (i), (ii) et (iii) sont des conséquences immédiates de la proposition 2.1. Pour démontrer (iv), on remarque que  $\pi(\mathcal{C})$  est contenu dans  $W^*(G, \mathcal{A})_{\tilde{\varphi}}$ ; un élément du centre de  $W^*(G, \mathcal{A})_{\tilde{\varphi}}$  est donc dans  $\pi(\mathcal{A})$ , et par conséquent dans  $\pi(\mathcal{A}_{\varphi})$ ; en outre, il commute à  $\pi(\mathcal{A}_{\varphi})$ , d'où la conclusion.

*Démonstration de la proposition.* — On identifie  $L^2(G, H, dg)$  à  $L^2(G) \otimes H$ . On notera  $L^{\infty}(G) \otimes 1$  l'ensemble des opérateurs  $(T_f; f \in L^{\infty}(G))$  de  $L^2(G, H, dg)$ , définis par

$$T_f \xi(g) = f(g) \xi(g) (\xi \in L^2(G, H, dg), g \in G).$$

LEMME 2.3. — Si un opérateur  $B$  de  $W^*(G, \mathcal{A})$  commute à  $L^{\infty}(G) \otimes 1$ , il appartient à  $\pi(\mathcal{A})$ .

*Démonstration.* — Soit  $\tilde{J}$  l'involution définie à la fin du paragraphe 1 (remarque 3). Si  $B$  commute à  $L^{\infty}(G) \otimes 1$ ,  $\tilde{J} B \tilde{J}$  commute à  $L^{\infty}(G) \otimes 1$  et à  $W^*(G, \mathcal{A})$ , donc à  $\lambda(G) = \mathcal{M}(G) \otimes 1$  ( $\mathcal{M}(G)$  est l'algèbre de von Neumann engendrée par la représentation régulière gauche de  $G$ ).  $\tilde{J} B \tilde{J}$  commute à  $\mathcal{L}(L^2(G)) \otimes 1$ , et est donc de la forme  $1 \otimes b$ ,  $b \in L(H)$ . Comme  $\tilde{J} B \tilde{J}$  commute à  $\pi(\mathcal{A})$ , on voit facilement que  $b$  appartient à  $\mathcal{A}'$ , soit  $\tilde{J} B \tilde{J} = \pi'(b)$ , et  $B = \pi(J b J) \in \pi(\mathcal{A})$ .

LEMME 2.4. — Si  $G$  agit librement dans le centre de  $\mathcal{A}$ , et si un opérateur  $B$  de  $L^2(G, H, dg)$  commute à  $\pi(\mathcal{C})$  et à  $\pi'(\mathcal{C})$ , alors  $B$  commute à  $L^{\infty}(G) \otimes 1$ .

*Démonstration.* — On adapte ici une démonstration de J. DIXMIER (lemme 26 de [5]).

Si  $K$  est un compact de  $G$ , on appellera  $z(K)$  le projecteur de  $L^2(G, H, dg)$  correspondant à la fonction indicatrice de  $K$  : si  $\xi \in L^2(G, H, dg)$ ,

$$z(K) \xi(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \notin K, \\ \xi(g) & \text{si } g \in K. \end{cases}$$

Pour montrer que  $B$  commute à  $L^{\infty}(G) \otimes 1$ , il suffit de montrer que  $B$  commute aux  $z(K)$ ; ou encore que, si  $K$  et  $K'$  sont des compacts disjoints

de  $G$ ,  $z(K') B z(K) = 0$ ; ou enfin que le support  $c$  de  $z(K') B z(K)$  dans  $\pi'(\mathcal{C})$  est nul.

Supposons  $c \neq 0$  : il existe un projecteur non nul  $p$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $\pi'(p) \leq c$ , et  $g'^{-1} g p \cdot p = 0, \forall g \in K, \forall g' \in K'$ . On pose  $K p = \sup_{g \in K} g p$  : alors  $g'^{-1} K p = 0, \forall g' \in K'$ .

On a alors :

$$\pi(K p) \pi'(p) z(K) = \pi'(p) z(K).$$

En effet, si  $\xi \in L^2(G, H, dg)$ ,

$$\pi(K p) \pi'(p) z(K) \xi(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \notin K, \\ g^{-1} K p \cdot p \cdot \xi(g) = p \cdot \xi(g) & \text{si } g \in K. \end{cases}$$

On aura donc :

$$\pi'(p) z(K') B z(K) = z(K') \pi(K p) \pi'(p) B z(K).$$

On peut calculer :

$$z(K') \pi(K p) \pi'(p) \xi(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \notin K', \\ g^{-1} K p \cdot p \cdot \xi(g) = 0 & \text{si } g \in K'. \end{cases}$$

Donc  $z(K') \pi(K p) \pi'(p) = 0$ , soit  $\pi'(p) z(K') B z(K) = 0$ , ce qui contredit l'hypothèse  $c \neq 0, \pi'(p) \leq c$ . On a donc  $z(K') B z(K) = 0$ , quels que soient  $K$  et  $K'$  disjoints. D'où le lemme.

On achève la démonstration de la proposition 2.1 en remarquant qu'un opérateur de  $W^*(G, \mathcal{A})$  commute à  $\pi'(\mathcal{C})$ ; s'il commute à  $\pi(\mathcal{C})$ , il commute à  $L^\infty(G) \otimes 1$  (lemme 2.4), et appartient donc à  $\pi(\mathcal{A})$  (lemme 2.3).

### 3. L'invariant $T$ du produit croisé

On rappelle (cf. A. CONNES [2], théorème 1.3.2) que, si  $\mathcal{A}$  est une algèbre de von Neumann, et  $\varphi$  un poids normal s. f. f. de  $\mathcal{A}$ , l'invariant  $T(\mathcal{A})$  est l'ensemble des nombres réels  $t$  tels que l'automorphisme  $\sigma_t^\varphi$  de  $\mathcal{A}$  soit intérieur.

PROPOSITION 3.1, et DÉFINITION. — Soit  $(\mathcal{A}, G)$  un système dynamique, et  $\varphi$  un p. n. s. f. f. sur  $\mathcal{A}$ , L'ensemble des nombres réels  $t$  ayant la propriété suivante :

Il existe un élément unitaire  $\beta$  de  $\mathcal{A}$  tel que :

- (i)  $\forall a \in \mathcal{A}, \sigma_t^\varphi(a) = \beta \cdot a \cdot \beta^*$ ,
- (ii)  $\forall g \in G, (Dg \varphi : D\varphi)_t = \delta(g)^{it} g \beta \cdot \beta^*$ ,

est indépendant du choix du poids  $\varphi$ , et sera noté  $\rho(\mathcal{A}, G)$ .

*Démonstration.* — Si  $\psi$  est un autre p. n. s. f. f., et si  $t$  et  $\beta$  vérifient (i) et (ii), on aura

$$\sigma_t^\psi(a) = \beta' \cdot a \cdot \beta'^*, \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

et

$$(Dg\psi : D\psi)_t = \delta(g)^{it} g \beta' \cdot \beta'^*, \quad \forall g \in G,$$

avec  $\beta' = (D\psi : D\varphi)_t \cdot \beta$ .

*Remarques.* — 1° On a  $\rho(\mathcal{A}, G) \subset T(\mathcal{A})$ , et l'unitaire  $\beta$  de la définition ci-dessus appartient nécessairement au centre du centralisateur  $\mathcal{A}_\varphi$ .

2° Si  $\mathcal{A}$  est semi-finie, et si  $\tau$  est une trace n. s. f. f. sur  $\mathcal{A}$ , alors  $t \in \rho(\mathcal{A}, G)$  si, et seulement si, il existe un unitaire  $\beta$  du centre  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $(Dg\tau : D\tau)_t = \delta(g)^{it} g \beta \cdot \beta^*$  pour tout  $g$  de  $G$ .

3°  $\rho(\mathcal{A}, G)$  est un sous-groupe additif de  $\mathcal{R}$ .

4° Si  $\mathcal{A}$  est commutative ( $\mathcal{A} = L^\infty(X, \mu)$ ,  $G$  agissant boréliennement dans  $X$  par permutations mesurables laissant  $\mu$  quasi invariante), et si  $t$  est un nombre réel, alors, en posant  $r = \exp(-2\pi/t)$ , pour  $t \neq 0$ ,  $t \in \rho(\mathcal{A}, G)$  si, et seulement si, il existe une mesure  $\nu$  sur  $X$  équivalente à  $\mu$  telle que, pour tout  $g$  de  $G$ ,

$$\delta(g)^{-1} \frac{dg\nu}{d\nu} \in \{r^n, n \in \mathbf{Z}\} \quad \text{p. s.}$$

En d'autres termes, l'invariant  $\rho(\mathcal{A}, G)$  généralise l'invariant  $\rho$ , introduit par W. KRIEGER dans [11], p. 160 et 175.

PROPOSITION 3.2. — Si  $G$  agit librement dans le centre de  $\mathcal{A}$ , alors :

$$\rho(\mathcal{A}, G) = T(W^*(G, \mathcal{A})).$$

*Démonstration.* — L'inclusion  $\rho(\mathcal{A}, G) \subset T(W^*(G, \mathcal{A}))$  est immédiate.

Réciproquement, soit  $t \in T(W^*(G, \mathcal{A}))$ , et soient  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  comme dans l'énoncé de la proposition 1.1. Il existe un unitaire  $B$  du centre de  $W^*(G, \mathcal{A})_{\tilde{\varphi}}$  tel que :

$$(j) \quad \forall a \in \mathcal{A}, B \pi(a) B^* = \pi(\sigma_t^\varphi(a));$$

$$(jj) \quad \forall g \in G, B \lambda(g) B^* = \delta(g)^{it} \lambda(g) \pi((Dg^{-1}\varphi : D\varphi)_t).$$

D'après l'assertion (iv) du corollaire 2.2, il existe un unitaire  $\beta$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $B = \pi(\beta)$ . Les inégalités (j) et (jj) deviennent :

$$(j') \quad \forall a \in \mathcal{A}, \beta a \beta^* = \sigma_t^\varphi(a),$$

$$(jj') \quad \forall g \in G, \pi((Dg^{-1}(\varphi : D\varphi)_t)) = \delta(g^{-1})^{it} \lambda(g^{-1}) \pi(\beta) \lambda(g) \pi(\beta^*),$$

$$(jj'') \quad \forall g \in G, (Dg\varphi : D\varphi)_t = \delta(g)^{it} g \beta \cdot \beta^*, \quad \text{et } t \in \rho(\mathcal{A}, G).$$

PROPOSITION 3.3. — Si  $G$  agit librement dans le centre de  $\mathcal{A}$ , alors le produit croisé  $W^*(G, \mathcal{A})$  est semi-fini si, et seulement si, il existe sur  $\mathcal{A}$  une trace n. s. f. f.  $\tau$  vérifiant :

$$g\tau = \delta(g)\tau, \quad \forall g \in G.$$

*Démonstration.* — L'implication dans un sens est le corollaire 1.3.

Réciproquement, si  $W^*(G, \mathcal{A})$  est semi-fini, à partir d'un groupe à un paramètre  $(B_t)_{t \in \mathbf{R}}$  d'unitaires de  $W^*(G, \mathcal{A})_{\tilde{\varphi}}$  tels que, pour tout  $t$ ,  $B_t$  implémente  $\sigma_t^{\tilde{\varphi}}$ , comme dans la démonstration de la proposition 3.3 on obtient un groupe à un paramètre  $(\beta_t)_{t \in \mathbf{R}}$  d'unitaires de  $\mathcal{A}$  tels que, pour tout  $a$  de  $\mathcal{A}$ , tout  $t$  de  $\mathbf{R}$  et tout  $g$  de  $G$ , on ait

$$\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(a) = \beta_t a \beta_t^* \quad \text{et} \quad (Dg\varphi : D\varphi)_t = \delta(g)^t g \beta_t \cdot \beta_t^*.$$

En posant  $\beta_t = h^{it}$ ,  $\forall t \in \mathbf{R}$  ( $h \geq 0$  affilié à  $\mathcal{A}$ ), et  $\tau = \varphi(h^{-1})$ , on obtient la trace cherchée.

Pour caractériser la finitude du produit croisé, on peut affaiblir les hypothèses sur la liberté de l'action de  $G$ .

PROPOSITION 3.4. — On suppose que, pour tout  $g \neq e$ , l'automorphisme  $g$  de  $\mathcal{A}$  est libre au sens de R. KALLMAN (cf. [10], définition 1.3). Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $W^*(G, \mathcal{A})$  est une algèbre finie;
- (ii)  $G$  est discret, et il existe sur  $\mathcal{A}$  une trace normale finie fidèle  $G$ -invariante.

*Démonstration.* — Supposons (i). Il existe une espérance conditionnelle normale fidèle  $E$  de  $W^*(G, \mathcal{A})$  sur  $\pi(\mathcal{A})$ . De l'égalité  $\lambda_g \pi(a) = \pi(ga) \lambda_g$ ,  $\forall g \in G, \forall a \in \mathcal{A}$ , on déduit, si  $g \neq e$ ,

$$E(\lambda_g)\pi(a) = \pi(ga)E(\lambda_g), \quad \forall a \in \mathcal{A},$$

donc  $E(\lambda_g) = 0$  par définition d'un automorphisme libre.

Comme  $\lambda_e = 1$ , et comme  $E$  est normale,  $G$  est nécessairement discret. L'équivalence de (i) et (ii) découle alors de proposition 8.16 de [15].

*Remarque.* — En supposant  $G$  à base dénombrable, et  $\mathcal{A}$  à préduel séparable, si  $G$  agit librement dans le centre de  $\mathcal{A}$ , on a l'équivalence des trois propositions :

- (a)  $W^*(G, \mathcal{A})$  est semi-fini;

(b)  $\rho(\mathcal{A}, G) = \mathbf{R}$ ;

(c) il existe sur  $\mathcal{A}$  une trace n. s. f. f.  $\tau$  vérifiant  $g\tau = \delta(g)\tau$ ,  $\forall g \in G$ .  
On va montrer l'équivalence de (b) et (c) sans hypothèse d'action libre.

PROPOSITION 3.5. — Soit  $(\mathcal{A}, G)$  un système dynamique, où  $\mathcal{A}$  est à préduel séparable, et  $G$  métrisable dénombrable à l'infini; soit  $\varphi$  un poids n. s. f. f. sur  $\mathcal{A}$ , et  $\chi$  un homomorphisme de  $G$  dans  $\mathbf{R}^*$ . On suppose que, pour tout  $t$  de  $\mathbf{R}$ , il existe un unitaire  $\beta_t$  de  $\mathcal{A}$  vérifiant :

(i)  $\forall a \in \mathcal{A}$ ,  $\sigma_t^\varphi(a) = \beta_t a \beta_t^*$ ,

(ii)  $\forall g \in G$ ,  $(Dg\varphi : D\varphi)_t = \chi(g^{it})g\beta_t \cdot \beta_t^*$ .

Alors  $\mathcal{A}$  est semi-finie, et il existe une trace normale semi-finie fidèle  $\tau$  sur  $\mathcal{A}$  vérifiant :

$$\forall g \in G, \quad g\tau = \chi(g)\tau.$$

Démonstration. — D'après (i),  $T(\mathcal{A}) = \mathbf{R}$  et  $\mathcal{A}$  est semi-finie (cf. [2], théorème 1.3.4). Soit  $T$  une trace n. s. f. f. sur  $\mathcal{A}$ . En remplaçant  $\beta_t$  par  $(DT : D\varphi)_t \beta_t$ , les hypothèses (i) et (ii) deviennent :

Pour tout  $t$  de  $\mathbf{R}$ , il existe un unitaire  $\beta_t$  du centre  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{A}$  vérifiant :

$$\forall g \in G, \quad (DgT : DT)_t = \chi(g)^{it}g\beta_t \cdot \beta_t^*.$$

Muni de la topologie de la convergence compacte, l'ensemble  $Z^1(G, \mathcal{U}(\mathcal{C}))$  des 1-cocycles de  $G$  dans le groupe unitaire de  $\mathcal{C}$ , est un espace polonais, car  $\mathcal{U}(\mathcal{C})$  est un groupe polonais (cf. [6], lemme 4). A tout  $\beta$  de  $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ , on associe l'élément  $\text{cob } \beta$  ( $G \ni g \mapsto g\beta \cdot \beta^*$ ) de  $Z^1(G, \mathcal{U}(\mathcal{C}))$ ; l'application  $\beta \mapsto \text{cob } \beta$  est continue et définit, par passage au quotient, une application continue et injective de  $\mathcal{U}(\mathcal{C})/\mathcal{U}(\mathcal{C}^G)$  dans  $Z^1(G, \mathcal{U}(\mathcal{C}))$ . On note  $B^1(Z, \mathcal{U}(\mathcal{C}))$  l'ensemble des  $(\text{cob } \beta; \beta \in \mathcal{U}(\mathcal{C}))$ .

$\mathcal{U}(\mathcal{C}^G)$  est un sous-groupe fermé de  $\mathcal{U}(\mathcal{C})$ ; le groupe quotient  $\mathcal{U}(\mathcal{C})/\mathcal{U}(\mathcal{C}^G)$  est donc un groupe polonais. D'après les propriétés générales des espaces boréliens standards,  $B^1(Z, \mathcal{U}(\mathcal{C}))$  est un sous-groupe borélien de  $Z^1(G; \mathcal{U}(\mathcal{C}))$  boréliennement isomorphe à  $\mathcal{U}(\mathcal{C})/\mathcal{U}(\mathcal{C}^G)$ .

D'après un lemme de J. DIXMIER ([6], lemme 3), il existe une application borélienne  $\mathbf{R} \ni t \mapsto \beta'_t \in \mathcal{U}(\mathcal{C})$  telle que,  $\forall t \in \mathbf{R}$ ,  $\beta'_t \beta'_t^* \in \mathcal{U}(\mathcal{C}^G)$ , car l'application  $t \mapsto$  classe de  $\beta_t$  est borélienne. En effet, l'application

$$G \times \mathbf{R} \ni (g, t) \rightarrow g\beta_t \cdot \beta_t^* = \chi(g)^{-it}(DgT : DT)_t \in \mathcal{U}(\mathcal{C})$$

est continue en vertu de la remarque 4 à la fin du paragraphe 1, et l'application  $t \mapsto \text{cob } \beta_t$  de  $\mathbf{R}$  dans  $B^1(G, \mathcal{U}(\mathcal{C}))$  est continue. L'application  $\mathbf{R}^2 \ni (t_1, t_2) \mapsto \beta'_{t_1+t_2} \beta'_{t_2}^* \beta'_{t_1}^*$  est un 2-cocycle borélien de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{U}(\mathcal{C}^G)$

pour l'action triviale de  $\mathbf{R}$  dans ce groupe. D'après le lemme III.1 de [8], il existe une application borélienne  $\mathbf{R} \ni t \mapsto b_t \in \mathcal{U}(\mathcal{C}^G)$  telle que,

$$\forall t_1, t_2 \in \mathbf{R}, \quad \beta'_{t_1+t_2} \beta_{t_2}^* \beta_{t_1}^* = b_{t_1+t_2} b_{t_2}^* b_{t_1}^*.$$

Posons  $\beta_t'' = \beta'_t \cdot b_t^{*'} : t \mapsto \beta_t''$  est un morphisme borélien (donc continu) de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{U}(\mathcal{C})$  vérifiant :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \forall g \in G, \quad (Dg T : DT)_t = \chi(g)^{it} g \beta_t'' \cdot \beta_t''^*.$$

Il existe un opérateur positif inversible  $h$ , affilié à  $\mathcal{C}$ , tel que  $\beta_t'' = h^{it}$ ,  $\forall t \in \mathbf{R}$ . En posant  $\tau = T(h^{-1})$ , on obtient la trace cherchée.

**COROLLAIRE 3.6.** —  $\mathcal{A}$  est à préduel séparable, et  $G$  métrisable dénombrable à l'infini. Soit  $\varphi$  un poids n. s. f. f. sur  $\mathcal{A}$ . On suppose que, pour tout  $t$  de  $\mathbf{R}$ , il existe un unitaire  $\beta_t$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $\sigma_t^\varphi = \text{Ad}(\beta_t)$  et,  $\forall g \in G$ ,  $(Dg \varphi : D\varphi)_t = g \beta_t \cdot \beta_t^*$ .

Alors il existe sur  $\mathcal{A}$  une trace n. s. f. f. invariante par l'action de  $G$ .

**COROLLAIRE 3.7.** —  $\mathcal{A}$  est à préduel séparable, et  $G$  dénombrable à l'infini, métrisable. Les deux propositions sont équivalentes :

- (i)  $\rho(\mathcal{A}, G) = \mathbf{R}$ ;
- (ii) il existe une trace n. s. f. f.  $\tau$  sur  $\mathcal{A}$  telle que  $g \tau = \delta(g) \tau$ ,  $\forall g \in G$ .

Nous terminerons ce paragraphe par deux exemples de calcul de  $T(W^*(G, \mathcal{A}))$  sans hypothèse d'action libre. On suppose en revanche que  $G$  est discret. Dans cette situation, un élément  $b$  de  $W^*(G, \mathcal{A})$  peut être représenté (de manière unique) par une famille  $(b_g; g \in G)$  d'éléments de  $\mathcal{A}$ , de sorte que, si  $\xi$  est l'élément générique de  $l^2(G, H)$ ,

$$b \xi_j(g)_i = \left[ \sum_{\gamma \in jG} \gamma^{-1} b_{\gamma g^{-1}} \xi(\gamma) \right]_i.$$

L'application  $b \mapsto \pi(b_e)$  est une espérance conditionnelle normale fidèle de  $W^*(G, \mathcal{A})$  sur  $\pi(\mathcal{A})$  (cf. [15], proposition 8.4).

**LEMME 3.8.** — On suppose que  $\mathcal{A}$  est un facteur et que  $G$  est discret. Soit  $\varphi$  un poids sur  $\mathcal{A}$ , et  $t$  un nombre réel. Si  $t \in T(W^*(G, \mathcal{A}))$ , alors il existe un élément  $g$  de  $G$  et un unitaire  $\beta$  de  $\mathcal{A}$  tels que :

- (i) la classe de conjugaison de  $g$  est finie;
- (ii)  $\sigma_t^\varphi \circ g = \text{Ad}(\beta)$ ;
- (iii) si  $\gamma \in G$  commute à  $g$ ,  $(D\gamma \varphi : D\varphi)_t = \gamma \beta \cdot \beta^*$ .

*Démonstration.* — Soit  $b = (b_g; g \in G)$  un unitaire de  $W^*(G, \mathcal{A})$  qui implémente  $\tilde{\sigma}_t^\varphi$ . On aura

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathcal{A}, \quad b \pi(a) &= \pi(\sigma_t^\varphi(a)) b, \\ \forall g \in G, \quad b \lambda_g &= \lambda_g \pi((Dg^{-1} \varphi : D\varphi)_t) b, \end{aligned}$$

d'où on déduit :

- (j)  $\forall a \in \mathcal{A}, \forall g \in G, b_g a = \sigma_t^\varphi(ga) b_g,$
- (jj)  $\forall g, \gamma \in G, (D\gamma\varphi : D\varphi)_t b_g = \gamma b_{\gamma^{-1}g\gamma}.$

Soit  $g \in G$  tel que  $b_g \neq 0$ . D'après le corollaire 1.2 de [10], l'égalité (j) implique que  $\sigma_t^\varphi \circ g$  est intérieur, Soit  $\beta$  un unitaire de  $\mathcal{A}$  tel que  $\sigma_t^\varphi \circ g = \text{Ad}(\beta)$  : alors  $b_g = c_g \cdot \beta$ , où  $c_g$  est un scalaire non nul. Si  $\gamma$  commute à  $g$ , (jj) implique  $(D\gamma\varphi : D\varphi)_t = \gamma\beta \cdot \beta^*$ , et on a démontré (ii) et (iii).

(jj) implique également que  $c_g^{-1} \cdot b_{\gamma^{-1}g\gamma}$  est un unitaire de  $\mathcal{A}$  pour tout  $\gamma$  de  $G$ . Soit  $\xi_0$  un vecteur non nul de  $H$ , et  $\xi$  l'élément de  $l^2(G, H)$  défini par  $\xi(e) = \xi_0$  et  $\xi(\gamma) = 0$  si  $\gamma \neq e$ . Écrivons que  $b$  est unitaire, soit  $\|b\xi\|^2 = \|\xi\|^2 = \|\xi_0\|^2$ . Comme  $b\xi(\gamma) = \gamma^{-1} b_{\gamma^{-1}} \xi_0$ , on aura

$$\|\xi_0\|^2 = \sum_{\gamma \in G} \|\gamma b_\gamma \xi_0\|^2,$$

et, comme  $\|\gamma b_\gamma \xi_0\| = |c_g| \|\xi_0\|$  si  $g$  et  $\gamma$  sont conjugués, la classe de conjugaison de  $g$  est nécessairement finie.

**PROPOSITION 3.9.** — *Soit  $\mathcal{A}$  un facteur, et  $G$  un groupe abélien discret agissant dans  $\mathcal{A}$  par automorphismes. Soit  $\varphi$  un poids sur  $\mathcal{A}$  et  $t$  un nombre réel. Les deux propositions sont équivalentes :*

- (a)  $t \in T(W^*(G, \mathcal{A}))$ ;
- (b) il existe un élément  $g$  de  $G$  et un unitaire  $\beta$  de  $\mathcal{A}$  tels que  $\sigma_t^\varphi \circ g = \text{Ad}(\beta)$  et,  $\forall \gamma \in G, (D\gamma\varphi : D\varphi)_t = \gamma\beta \cdot \beta^*$ .

*Démonstration :*

(a)  $\Rightarrow$  (b) : cf. lemme 3.8.

(b)  $\Rightarrow$  (a) : Posons  $b = \pi(\beta) \lambda_{g^{-1}}$  :  $b$  est un unitaire de  $W^*(G, \mathcal{A})$  qui implémente  $\tilde{\sigma}_t^\varphi$ . En effet, si  $a \in \mathcal{A}$  et  $\gamma \in G$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_t^\varphi(\pi(a)) &= \pi(\sigma_t^\varphi(a)) = \pi(\beta) \pi(g^{-1}a) \pi(\beta^*) = \pi(\beta) \lambda_{g^{-1}} \pi(a) \lambda_{g^{-1}} \pi(\beta^*) \\ &= b \pi(a) b^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_t^\varphi(\lambda_\gamma) &= \lambda_\gamma \pi((D\gamma^{-1} \varphi : D\varphi)_t) = \lambda_\gamma \pi(\gamma^{-1} \beta) \pi(\beta^*) = \pi(\beta) \lambda_\gamma \pi(\beta^*) \\ &= b \lambda_\gamma b^*, \quad \text{car } G \text{ est abélien.} \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.10. — Soit  $\mathcal{A}$  un facteur, et  $G$  un groupe discret dont toutes les classes de conjugaison distinctes de celle de l'élément neutre sont infinies.

Alors  $T(W^*(G, \mathcal{A})) = \rho(\mathcal{A}, G)$ .

Démonstration. — L'inclusion dans un sens est immédiate. Réciproquement, si  $t \in T(W^*(G, \mathcal{A}))$ , le lemme 3.8 fournit un élément de  $G$  de classe finie, donc nécessairement l'élément neutre  $e$ , et un unitaire  $\beta$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $\sigma_t^\varphi = \text{Ad}(\beta)$  et,  $\forall \gamma \in G, (D \gamma \varphi : D \varphi)_t = \gamma \beta . \beta^*$  : soit  $t \in \rho(\mathcal{A}, G)$ .

4. Le flot des poids du produit croisé

Dans tout ce paragraphe, on suppose  $\mathcal{A}$  à préduel séparable et proprement infinie. Les définitions sont celles de [3]. On fixe sur  $\mathcal{A}$  un poids n. s. f. f.  $\varphi$ .

Le flot des poids (régulier) de  $\mathcal{A}$  est un morphisme continu  $F^\mathcal{A} (\lambda \rightarrow F_\lambda^\mathcal{A})$  de  $\mathbf{R}_+^*$  dans le groupe des automorphismes d'une algèbre de von Neumann abélienne  $\mathcal{L}_\mathcal{A}$ . Par functorialité, l'action de  $G$  sur  $\mathcal{A}$  induit une action continue ( $G \ni g \rightarrow \hat{g} \in \text{Aut}(\mathcal{L}_\mathcal{A})$ ) de  $G$  sur  $\mathcal{L}_\mathcal{A}$  qui commute avec le flot  $F^\mathcal{A}$ .

PROPOSITION 4.1. — Si  $G$  agit librement dans le centre de  $\mathcal{A}$ , le flot des poids (régulier) de  $W^*(G, \mathcal{A})$  est la restriction du flot des poids de  $\mathcal{A}$  à la sous-algèbre ( $\mathcal{F}^\mathcal{A}$  invariante)  $\mathcal{L}_\mathcal{A}^G$  de  $\mathcal{L}_\mathcal{A}$  :

$$\mathcal{L}_\mathcal{A}^G = \{ z \in \mathcal{L}_\mathcal{A}^\mathcal{A}; \hat{g}(z) = F_{\delta(g)}^\mathcal{A}(z), \forall g \in G \}.$$

Démonstration. — On notera  $\tilde{\mathcal{A}}$  le produit croisé  $W^*(\mathcal{A}, \sigma^\varphi)$  engendré (cf. paragraphe 1) dans l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbf{R}, H) = L^2(\mathbf{R}) \otimes H$  par les opérateurs  $\{ \rho(a), a \in \mathcal{A} \}$  et  $\{ U_t \otimes 1, t \in \mathbf{R} \}$ , où  $(t \rightarrow U_t)$  est la représentation régulière gauche de  $\mathbf{R}$  et, si  $a \in \mathcal{A}$ , on a posé

$$\rho(a) \xi(t) = \sigma_{-t}^\varphi(a) \xi(t), \quad \xi \in L^2(\mathbf{R}).$$

Si  $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ ,  $V_\lambda$  désigne l'opérateur de multiplication par la fonction  $(t \rightarrow \lambda^{it})$  dans  $L^2(\mathbf{R})$ . On a

$$V_\lambda \otimes 1 . \tilde{\mathcal{A}} . V_\lambda^* \otimes 1 = \tilde{\mathcal{A}}$$

et, en notant  $\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{A}}}$  le centre de  $\tilde{\mathcal{A}}$ , le flot  $F^\mathcal{A} (\mathbf{R}_+^* \ni \lambda \rightarrow F_\lambda^\mathcal{A} \in \text{Aut}(\mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{A}}}))$ , défini par

$$F_\lambda^\mathcal{A}(z) = V_\lambda \otimes 1 . z . V_\lambda^* \otimes 1 \quad \text{si } \lambda \in \mathbf{R}_+^*, \quad z \in \mathcal{L}_{\tilde{\mathcal{A}}},$$

est une réalisation du flot des poids de  $\mathcal{A}$ .

La functorialité du flot des poids se traduit de la manière suivante : si  $\mathcal{B}$  est une algèbre de von Neumann, et si  $\alpha$  est un isomorphisme de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{B}$ , il existe un isomorphisme naturel de  $\tilde{\mathcal{A}}$  dans  $\tilde{\mathcal{B}}$ , soit  $\tilde{\alpha}$ , dont la restriction  $\hat{\alpha}$  à  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$  sur  $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$  qui échange  $F^{\mathcal{A}}$  et  $F^{\mathcal{B}}$ . Si  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ ,  $\tilde{\alpha}$  est l'isomorphisme de  $\mathcal{A}$ , caractérisé par

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(\rho(a)) &= \rho(\alpha a), \quad a \in \mathcal{A}, \\ \tilde{\alpha}(U_t \otimes 1) &= \rho((D\alpha\varphi : D\varphi)_t) U_t \otimes 1. \end{aligned}$$

On définit une action  $\beta(g \rightarrow \beta_g)$  de  $G$  dans  $\tilde{\mathcal{A}}$  en posant, si  $x \in \mathcal{A}$ ,  $g \in G$  :

$$\beta_g(x) = V_{\delta(g)}^* \otimes 1 \cdot \tilde{g}x \cdot V_{\delta(g)} \otimes 1,$$

et on veut démontrer que le flot des poids de  $W^*(G, \mathcal{A})$  est la restriction de  $F^{\mathcal{A}}$  à l'algèbre (manifestement invariante) des éléments  $\beta$ -invariants de  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ .

LEMME 4.2. — *Les produits croisés  $W^*(G, \tilde{\mathcal{A}})$  et  $W^*(W^*(G, \mathcal{A}), \sigma^{\varphi})$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* — On réalise ces deux algèbres dans l'espace de Hilbert  $L^2(G \times \mathbf{R}, H)$ , identifié à  $L^2(G) \otimes L^2(\mathbf{R}) \otimes H$ . La première est engendrée par les opérateurs  $\{\tilde{\lambda}(g), g \in G\}$ ,  $\{\tilde{\pi}(a), a \in \mathcal{A}\}$  et  $\{\tilde{U}_t, t \in \mathbf{R}\}$ , définis respectivement ainsi : si  $\xi \in L^2(G \times \mathbf{R}, H)$ ,  $a \in \mathcal{A}$ ,  $t \in \mathbf{R}$ ,  $g \in G$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(g)\xi(\gamma, s) &= \xi(g^{-1}\gamma, s), \\ \tilde{\pi}(a)\xi(\gamma, s) &= \sigma_{-s}^{\varphi}(\gamma^{-1}a)\xi(\gamma, s), \\ \tilde{U}_t\xi(\gamma, s) &= \delta(\gamma)^t \sigma_{-s}^{\varphi}((D\gamma^{-1}\varphi : D\varphi)_t)\xi(\gamma, s-t). \end{aligned}$$

La seconde est engendrée par les opérateurs  $\{\tilde{\tilde{\lambda}}(g), g \in G\}$ ,  $\{\tilde{\tilde{\pi}}(a), a \in \mathcal{A}\}$  et  $\{\tilde{\tilde{U}}_t, t \in \mathbf{R}\}$ , définis par

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\lambda}}(g)\xi(\gamma, s) &= \delta(g)^{-is} \gamma^{-1}g(Dg^{-1}\varphi : D\varphi)_{-s}\xi(g^{-1}\gamma, s), \\ \tilde{\tilde{\pi}}(a)\xi(\gamma, s) &= \gamma^{-1}\sigma_{-s}^{\varphi}(a)\xi(\gamma, s), \\ \tilde{\tilde{U}}_t\xi(\gamma, s) &= \xi(\gamma, s-t). \end{aligned}$$

Si on pose  $F\xi(\gamma, s) = \delta(\gamma)^{-is}(D\gamma^{-1}\varphi : D\varphi)_{-s}\xi(\gamma, s)$ , on vérifie facilement que  $F$  est un unitaire de  $L^2(G \times \mathbf{R}, H)$  qui entrelace les représentations  $\tilde{\tilde{\lambda}}$  et  $\tilde{\tilde{\lambda}}$ ,  $\tilde{\tilde{\pi}}$  et  $\tilde{\tilde{\pi}}$ ,  $\tilde{\tilde{U}}$  et  $\tilde{\tilde{U}}$ . D'où le lemme.

LEMME 4.3. — Si  $G$  agit librement dans le centre de  $\mathcal{A}$ , l'action  $\beta$  est libre dans le centre de  $\tilde{\mathcal{A}}$ .

*Démonstration.* — Le centre de  $\tilde{\mathcal{A}}$  contient l'algèbre  $\rho(\mathcal{C})$  sur laquelle l'action  $\beta$  (transportée par  $\rho$  de l'action de  $G$  sur  $\mathcal{C}$ ) est libre. On vérifie facilement que la liberté de  $\beta$  sur une sous-algèbre de  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$  implique la liberté de  $\beta$  sur  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ .

*Fin de la démonstration de la proposition.* — D'après les lemmes 4.2, 4.3 et le corollaire 2.2, le centre de  $W^*(W^*(G, \mathcal{A}), \sigma^{\tilde{\varphi}})$  est l'image, par l'isomorphisme  $x \rightarrow F x F^*$  (défini dans la démonstration du lemme 4.2), du centre de  $W^*(G, \tilde{\mathcal{A}})$ , lui-même image de l'algèbre  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}^G$  des invariants de  $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$  par l'injection naturelle  $\Pi$  de  $\tilde{\mathcal{A}}$  dans  $W^*(G, \tilde{\mathcal{A}})$  (caractérisée par  $\Pi(a) = \tilde{\pi}(a)$ ,  $\forall a \in \mathcal{A}$  et  $\Pi(U_t \otimes 1) = \tilde{U}_t$ ,  $\forall t \in \mathbf{R}$ ). Si  $\lambda \in \mathbf{R}_+^+$  et  $z \in \mathcal{L}_{\mathcal{A}}^G$ , on vérifie que

$$F \cdot \Pi(F_{\lambda}^{\mathcal{A}}(z)) \cdot F^* = F_{\lambda}^{W^*(G, \mathcal{A})}(F \cdot \Pi(z) \cdot F^*),$$

ce qui achève la démonstration.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] COMBES (F). — Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche, *Compositio Mathematica*, t. 23, 1971, p. 49-77.
- [2] CONNES (A.). — Une classification des facteurs de type III, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4<sup>e</sup> série, t. 6, 1973, p. 133-252.
- [3] CONNES (A.) and TAKESAKI (M.). — The flow of weights on factors of type III (à paraître).
- [4] DIGERNES (T.). — Poids dual sur un produit croisé, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 278, série A, 1974, p. 937-940.
- [5] DIXMIER (J.). — Algèbres quasi unitaires, *Comment. Math. Helvet.*, t. 26, 1952, p. 275-322.
- [6] DIXMIER (J.). — Dual et quasi-dual d'une algèbre de Banach involutive, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 104, 1962, p. 278-283.
- [7] DUNFORD (N.) and SCHWARTZ (J. T.). — Linear operators vol. 2: Spectral theory. Interscience London, New York, Publishers, 1963 (*Pure and applied Mathematics*, Interscience, 7).
- [8] GUICHARDET (A.). — Systèmes dynamiques non commutatifs, *Astérisque* 13-14, 1974.
- [9] HAAGERUP (U.). — *The standard forme of von Neumann algebras* (à paraître).
- [10] KALLMAN (R.). — A generalization of free action, *Duke math. J.*, t. 36, 1969, p. 781-789.
- [11] KRIEGER (W.). — On the Araki-Woods asymptotic ratio-set and non singular transformations of a measure space, "*Contributions to ergodic theory*", p. 158-177. Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lecture Notes in Mathematics*, 160).
- [12] SAKAI (S.). — *C\*-algebras and W\*-algebras*. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Ergebnisse der Mathematik*, 60).

- [13] SAUVAGEOT (J.-L.). — Sur le type du produit croisé d'une algèbre de von Neumann par un groupe localement compact d'automorphismes, *C. R. Acad. Sc.*, t. 278, série A, 1974, p. 941-944.
- [14] TAKESAKI (M.). — Duality for crossed products and the structure of von Neuman algebras of type III, *Acta Math.*, t. 131, 1973, p. 249-310.
- [15] ZELLER-MEIER (G.). — Produits croisés d'une  $C^*$ -algèbre par un groupe d'automorphismes, *J. Math. pures et appl.*, t. 47, 1968, p. 101-239.

(Texte reçu le 20 décembre 1976.)

Jean-Luc SAUVAGEOT,  
Probabilités,  
Tour 56,  
Université Pierre-et-Marie-Curie,  
4, place Jussieu,  
75230 Paris Cedex 05.