

BULLETIN DE LA S. M. F.

PATRICK DELORME

1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus de représentations

Bulletin de la S. M. F., tome 105 (1977), p. 281-336

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1977__105__281_0

© Bulletin de la S. M. F., 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**1-COHOMOLOGIE DES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES
DES GROUPES DE LIE
SEMI-SIMPLES ET RÉSOUBLES.**

PRODUITS TENSORIELS CONTINUS DE REPRÉSENTATIONS

PAR

PATRICK DELORME

[École Polytechnique, Palaiseau]

RÉSUMÉ. — Dans la première partie de ce travail (§ I, IV), nous étudions certaines représentations unitaires d'un groupe de fonctions mesurables d'un espace (X, μ) dans un groupe localement compact G , à savoir celles obtenues par un produit tensoriel continu de représentations. La construction fait apparaître l'intérêt d'étudier la 1-cohomologie continue des représentations unitaires de G . C'est ce que nous faisons dans la deuxième partie (§ V) pour G , groupe de Lie résoluble ou semi-simple, connexe. Au préalable, nous examinons les cas suivants : G possède la propriété (T) de Kazdan; G possède un sous-groupe compact K tel que l'algèbre de Banach $L^1(K \setminus G/K)$ soit commutative.

Table des matières

	Pages
Introduction	281
0. Notations-Définitions	284
I. Champs mesurables de 1-cocycles	285
II. Quelques propriétés des espaces hilbertiens symétriques	288
III. Produits tensoriels continus de représentations	289
IV. Représentations irréductibles de type (S) des groupes de Lie nilpotents connexes ...	297
V. 1-cohomologie des groupes localement compacts.	
(A) Fonctions continues hermitiennes conditionnellement de type positif et 1-cohomologie	301
(B) 1-cohomologie et fonctions sphériques zonales	305
(C) 1-cohomologie des groupes de Lie simples, réels, connexes	313
(D) 1-cohomologie des groupes de Lie résolubles, réels, connexes	323
Annexe	334
Références	335

La notion de produit tensoriel continu (PTC) d'espaces de Banach a été introduite par GUICHARDET [11]. Il existe une difficulté lorsque l'on veut définir un produit tensoriel continu hilbertien d'espaces hilbertiens.

Celui-ci n'existe pas toujours (GUICHARDET-WULFSOHN [17]). ARAKI et WOODS [2] ont montré que le cadre de la théorie des produits tensoriels continus des espaces hilbertiens est celui des espaces hilbertiens symétriques (cf. § 0). La notion de produit tensoriel continu de représentation a été introduite par ARAKI [1]. Précisons un peu ce que nous entendons par PTC de représentations $\otimes_{x \in X} U_x$: on a un groupe localement compact G , un espace borélien X muni d'une mesure positive μ et, pour chaque x , une représentation unitaire U_x de G dans un espace hilbertien H_x ; on note $G^{(X)}$ le groupe des applications boréliennes de X dans G ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Alors $\otimes_{x \in X} U_x$ sera, lorsqu'elle existe, la représentation dans $\otimes_{x \in X} H_x$, définie par

$$\tilde{g} = (g_x) \rightarrow \otimes_{x \in X} U_x(g_x).$$

Mais de même que les PTC d'espaces hilbertiens n'existent pas toujours, les résultats d'ARAKI [1] montrent que le PTC $\otimes_{x \in X} U_x$ n'existe, avec des propriétés raisonnables, que lorsque les U_x sont d'un type particulier (appelé type (S) dans GUICHARDET [14]), tout au moins si μ est non atomique. Disons seulement que la définition d'une représentation de type (S) fait intervenir une représentation A de G et un 1-cocycle continu pour A .

Récemment, VERCHIK, GEL'FAND et GRAIEV ([31], [32]) ont abordé le problème de l'irréductibilité d'un PTC de représentations. Plus précisément, ils ont construit, dans le cas où $G = PSL(2, \mathbf{R})$, un PTC $\otimes_{x \in X} U_x$ qui est irréductible bien que les U_x ne le soient pas; cette construction a été généralisée au cas où $G = SO(n, 1)$ ou $SU(n, 1)$, prenant pour U_x une représentation U indépendante de x et non irréductible mais construite à partir d'un 1-cocycle b non trivial. Ajoutons encore qu'avant ce mémoire de VERCHIK-GEL'FAND-GRAIEV il était connu que $SL(2, \mathbf{R})$ admet 2 représentations irréductibles avec une 1-cohomologie non triviale, et $SL(2, \mathbf{C})$, une seule.

Dans le présent travail, nous étudierons essentiellement les problèmes d'irréductibilité des PTC de représentations (§ I à IV) et de nullité de la 1-cohomologie des représentations (§ V).

Le paragraphe I est consacré à un résultat technique de mesurabilité.

Au paragraphe II, nous étudierons quelques propriétés des espaces hilbertiens symétriques, utiles pour la suite.

Dans le paragraphe III, nous dégageons une condition nécessaire pour qu'un PTC $\otimes_{x \in X} U_x$ soit irréductible; il est en particulier nécessaire que le 1-cocycle b_x , servant à définir U_x , soit non trivial pour presque

tout x . Puis nous donnons, pour les groupes de Lie nilpotents connexes, une condition nécessaire et suffisante d'irréductibilité d'un PTC.

Au paragraphe IV, nous déterminons les représentations irréductibles de type (S) des groupes de Lie nilpotents connexes, simplement connexes : ce sont celles qui sont associées par la méthode de Kirillov aux éléments de \mathfrak{g}^* nuls sur $[\mathfrak{g}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$.

Le paragraphe V traite de la 1-cohomologie des représentations unitaires d'un groupe localement compact, G . On montre d'abord que si G a la propriété (T) de Kazdan, toute représentation unitaire a une 1-cohomologie triviale (résultat démontré par WANG pour les représentations de dimension finie).

On s'intéresse ensuite au cas où G est unimodulaire et admet un sous-groupe compact K tel que $L^1(K \backslash G/K)$ soit commutative.

On montre d'abord que toute représentation irréductible non triviale de G de classe I relativement à K , a une 1-cohomologie triviale (résultat démontré par PINCZON et SIMON [27] dans le cas où G est un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini, et K un sous-groupe compact maximal de G). En utilisant des résultats de GANGOLLI [8] et de FARAUT et HARZALLAH [6] sur un problème proche du nôtre (celui des distances hilbertiennes invariantes sur les espaces homogènes), on montre ensuite que toute représentation irréductible, séparée de la représentation triviale dans \hat{G} , a une 1-cohomologie triviale; enfin que si G est un groupe de Lie semi-simple connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n, 1)$ ou $\mathfrak{su}(n, 1)$, il admet exactement une représentation orthogonale (réelle) irréductible avec 1-cohomologie non nulle; elle est alors de dimension 1. Cela règle complètement le cas des groupes de Lie simples connexes puisque, d'après B. KOSTANT [24] et S. P. WANG [35], tous les autres ont la propriété (T) , tout au moins ceux de centre fini. Mais on s'affranchit facilement de cette restriction dans l'étude de la 1-cohomologie.

Enfin, on détermine la 1-cohomologie des représentations factorielles non triviales d'un groupe de Lie résoluble connexe : tout 1-cocycle est limite de cobords si, et seulement si, U n'est pas quasi équivalente à un quotient de dimension 1, non trivial, de la représentation adjointe de G dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_C$ (\mathfrak{g} algèbre de Lie de G). Si G est exponentiel, un tel quotient n'existe pas.

La difficulté du problème réside dans le fait que, pour la 1-cohomologie continue des représentations unitaires des groupes localement compacts, on n'a pas de lemme de Shapiro, i. e. si K est un sous-groupe fermé de G ,

localement compact, V une représentation unitaire de K , on n'a pas en général de relations entre $H^1(K, V)$ et $H^1(G, \text{ind}_{K \uparrow G} V)$, l'induction étant entendue au sens de Mackey. Toutefois, il existe des résultats dus à PINCZON et SIMON [26] (cas des groupes de Lie) et J. PICHARD [25] (cas général), lorsque K est co-compact. Au moment où ce travail a été rédigé, je savais que B. E. JOHNSON avait déterminé la 1-cohomologie des représentations unitaires irréductibles du groupe des $ax+b$, et que ses résultats avaient été étendus par J. PICHARD à certains produits semi-directs exponentiels de \mathbf{R} par \mathbf{R}^n . Je n'avais toutefois pas eu connaissance de leurs démonstrations. Le cas des groupes résolubles de type R avait été étudié par GUICHARDET [16].

En conclusion, les groupes de Lie connexes, résolubles ou semi-simples, possèdent la propriété (\mathcal{P}) de GUICHARDET [16]. On conjecture que cette propriété est vraie pour tous les groupes localement compacts.

0. Notations-Définitions

(a) 1-cohomologie

Si G désigne un groupe topologique, A une représentation unitaire continue de G dans un espace de Hilbert H , on appelle 1-cocycle continu de G pour A , une application continue $b : G \rightarrow H$ vérifiant $b(gg') = b(g) + A(g)b(g')$. On note $Z^1(G, A)$ l'espace des 1-cocycles continus de G pour A . Pour un vecteur $a \in H$, on définit une application continue de G dans H par $g \mapsto A(g)a - a$ que l'on note $\partial a \in Z^1(G, A)$. ∂a est appelé cobord de a .

L'espace des cobords est noté $B^1(G, A)$. On définit

$$H^1(G, A) = Z^1(G, A)/B^1(G, A).$$

On munit $Z^1(G, A)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de G . $\bar{B}^1(G, A)$ désigne l'adhérence de $B^1(G, A)$ dans $Z^1(G, A)$.

(b) *Espaces hilbertiens symétriques* (cf. GUICHARDET [14]). *Représentations de type (S)*.

Soit H un espace de Hilbert. On appelle espace hilbertien symétrique, SH de H , la somme hilbertienne $\bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n H$, où $S^n H$ est l'espace des tenseurs symétriques de $H^{\otimes n}$. Pour $a \in H$, on définit $\text{Exp } a \in SH$ par la suite (x_n) ,

$$x_n = (n!)^{-1/2} a^{\otimes n} \in S^n H.$$

Les éléments $\text{Exp } a$, $a \in H$, sont totaux dans SH , et linéairement indépendants.

Soit A un opérateur unitaire de H , b un vecteur de H , c un nombre complexe de module 1. Si l'on définit

$$U_{A,b,c} \text{Exp } x = c \exp\left(\frac{-\|b\|^2}{2} - (Ax | b)\right) \text{Exp}(Ax + b),$$

$U_{A,b,c}$ se prolonge en un opérateur unitaire de SH laissant stable la famille de vecteurs $\{\lambda \text{Exp } x; \lambda \in \mathbf{C}, x \in H\}$. Si l'on note \mathcal{G}_H le groupe des opérateurs unitaires de SH laissant stable cette famille, muni de la topologie forte des opérateurs, l'application

$$U(H) \times H \times \mathbf{U} \rightarrow \mathcal{G}_H,$$

définie par $(A, b, c) \rightarrow U_{A,b,c}$ est un homéomorphisme lorsque l'on munit $U(H)$, ensemble des opérateurs unitaires de H , de la topologie forte, H de la topologie normique, et \mathbf{U} (nombres complexes de module 1) de la topologie usuelle.

On appelle représentation unitaire continue de type (S) d'un groupe topologique, une représentation unitaire de G dans un espace hilbertien symétrique, SH , telle que $U(G) \subset \mathcal{G}_H$. Se donner une représentation unitaire continue de type (S) de G dans SH équivaut à se donner une représentation unitaire continue A de G , $b \in Z^1(G, A)$, et une application continue de G dans \mathbf{U} , c vérifiant

$$c(gg') = c(g)c(g') \exp i \text{Im}(b(g) | A(g)b(g')).$$

Une fonction de type positif de type (S) est une fonction de type positif associée à une représentation de type (S) de G et au vecteur $\text{Exp } 0$ de l'espace hilbertien symétrique de cette représentation.

I. Champs mesurables de 1-cocycles

DÉFINITION I.1. — Étant donné un groupe localement compact séparable (en abrégé GLCS), G , un espace borélien X muni d'une mesure μ , un champ mesurable d'espaces hilbertiens séparables $(H^x)_{x \in X}$, et un champ mesurable de représentations $(A^x)_{x \in X}$, on appelle *champ mesurable de 1-cocycle* toute famille $(b^x)_{x \in X}$, où b^x est un 1-cocycle continu pour A^x , telle que, pour tout $g \in G$, le champ de vecteurs $(b^x(g))_{x \in X}$ soit mesurable.

Dans la suite, X sera un espace borélien standard et μ σ -finie.

On a alors le résultat suivant :

LEMME I.1. — Soit (b^x) un champ mesurable de 1-cocycles. On suppose en outre $b^x(G)$ total dans H^x . Alors :

(i) l'ensemble des x tels que $b^x \in B^1(G, A^x)$ est mesurable;

(ii) si l'on suppose que $b^x \in B^1(G, A^x)$ pour tout x , il existe un champ mesurable de vecteurs $(\omega^x)_{x \in X}$ tel que, pour μ presque tout x ,

$$\forall g \in G, \quad b^x(g) = A^x(g)\omega^x - \omega^x.$$

Démonstration. — On désigne par D une partie dénombrable de G partout dense dans G et symétrique (i. e. $g \in D \Rightarrow g^{-1} \in D$). On peut se limiter à prouver (i) et (ii) lorsque le champ (H^x) est constant. On supposera donc $H^x = K$. En outre, on regardera (X, μ) comme un espace localement compact séparable dénombrable à l'infini muni d'une mesure de Radon μ . Soit (ξ_p) une famille dénombrable de vecteurs de K , dense dans K . Alors l'application simultanée du critère de mesurabilité de Lusin aux fonctions mesurables

$$\begin{aligned} x &\rightarrow A^x(g)\xi_p, & p \in \mathbb{N}, \quad g \in D, \\ x &\rightarrow b^x(g) \end{aligned}$$

permet d'écrire $X - N = \bigcup_n X_n$, où (X_n) est une suite de compacts disjoints de X , N un ensemble μ -négligeable tels que les applications $x \rightarrow A^x(g)\xi_p$ et $x \rightarrow b^x(g)$ soient continues sur X_n , ceci pour tout $g \in D$ et tout p, n entiers.

On peut alors se limiter à démontrer (i) et (ii) lorsque X est compact séparable; μ mesure de Radon sur X , $H^x = K$ et, $\forall g \in D$, $x \rightarrow b^x(g)$ continue, $\forall g \in D$, $\forall \xi \in K$, $x \rightarrow A^x(g)\xi$ continue. (Si $x \rightarrow A^x(g)\xi$ est continue pour un ensemble de vecteurs dense dans K , l'uniforme continuité des $A^x(g)$ implique la continuité pour tout ξ dans K .)

Nous supposons ces conditions vérifiées dans la suite. Notons K_f l'espace K muni de la topologie faible, et $\mathcal{C}_s(D, K_f)$ l'ensemble des applications continues de D dans K_f , muni de la topologie de la convergence simple. (D est muni de la topologie induite par celle de G .) Considérons l'application

$$\begin{aligned} \Phi : X \times K_f &\rightarrow \mathcal{C}_s(D, K_f), \\ (x, \xi) &\rightarrow (\Phi(x, \xi) : g \rightarrow A^x(g)\xi - \xi). \end{aligned}$$

Montrons que Φ est continue sur $X \times B$, où B est un borné quelconque de K .

Soient $x_0, x \in X$, $\omega, \xi, \xi_0 \in K$, $g \in D$. On a

$$\begin{aligned} &(A^x(g)\xi - \xi | \omega) - (A^{x_0}(g)\xi_0 - \xi_0 | \omega) \\ &= (\xi_0 - \xi | \omega) + (\xi - \xi_0 | A^{x_0}(g^{-1})\omega) + (\xi | A^x(g^{-1})\omega - A^{x_0}(g^{-1})\omega). \end{aligned}$$

Soit B un borné de K . On munit B de la topologie faible. Alors si (x, ξ) tend vers (x_0, ξ_0) dans $X \times B$ l'expression ci-dessus tend vers zéro.

En effet, $(\xi_0 - \xi \mid \omega)$ et $(\xi - \xi_0 \mid A^{x_0}(g^{-1})\omega)$ tendent vers zéro si ξ tend faiblement vers ξ_0 .

D'autre part, $(\xi \mid A^x(g^{-1})\omega - A^{x_0}(g^{-1})\omega)$ tend vers zéro, car $x \rightarrow A^x(g^{-1})\omega$ est continue de X dans K ($g^{-1} \in D$), et ξ est borné. La continuité de Φ en résulte. D'autre part,

$$\Phi(X \times K_f) = \bigcup_{m \in \mathbf{N}} \Phi(X \times B_m),$$

où B_m est la boule fermée de K de centre 0 de rayon m , B_m est faiblement compacte. Φ étant continue, $\Phi(X \times B_m)$ est compact dans $\mathcal{C}_s(D, K_f)$, et $\Phi(X \times K_f)$ est borélien dans $\mathcal{C}_s(D, K_f)$. Considérons maintenant l'application

$$\begin{aligned} \Theta : X &\rightarrow \mathcal{C}_s(D, K_f), \\ x &\rightarrow b^x \mid_D, \end{aligned}$$

Θ est clairement continue. En effet, $\forall g \in D$, $x \rightarrow b^x(g)$ est fortement continue donc faiblement continue.

Soit $E = \{x \in X; b^x \in B^1(G, A^x)\}$. Montrons $\Theta^{-1}(\Phi(X \times K_f)) = E$. Par définition,

$$\begin{aligned} \Theta^{-1}(\Phi(X \times K_f)) \\ = \{x \in X; (\exists x' \in X)(\exists \xi \in K)(\forall g \in D), b^x(g) = A^{x'}(g)\xi - \xi\}. \end{aligned}$$

Il est clair que $E \subset \Theta^{-1}(\Phi(X \times K_f))$. Réciproquement, soit $x \in \Theta^{-1}(\Phi(X \times K_f))$. Alors :

$$(\exists x' \in X), (\exists \xi \in K), (\forall g \in D), b^x(g) = A^{x'}(g)\xi - \xi.$$

Cette égalité se prolonge à G . Or $b^x(G)$ est total dans K par hypothèse. Comme

$$\forall g, g' \in G, A^x(g')b^x(g) = A^{x'}(g')b^x(g),$$

on en déduit, $\forall g \in G$, $A^x(g) = A^{x'}(g)$. D'où, $\forall g \in G$, $b^x(g) = A^x(g)\xi - \xi$, et l'on a bien $x \in E$. Ce qui prouve :

$$E = \Theta^{-1}(\Phi(X \times K_f)).$$

$\Phi(X \times K_f)$ étant borélien, et Θ continue, E est borélien, et (i) est prouvé.

Prouvons maintenant (ii). Supposons donc $b^x \in B^1(G, A^x)$ pour tout x . Alors $b^x(G)$ total dans K implique : A^x ne contient pas la représentation triviale de G . En effet, la projection orthogonale de $b^x(G)$ sur le sous-

espace des vecteurs invariants par A^x est nulle puisque b^x est un cobord. Alors, pour tout x , il existe $\omega(x)$ unique tel que

$$\forall g \in G, \quad b^x(g) = A^x(g)\omega(x) - \omega(x).$$

On va montrer que le champ de vecteurs $\omega(x)$ est mesurable. Il suffit de montrer que, pour toute boule fermée B de rayon fini de H , $\omega^{-1}(B)$ est mesurable. Or :

$$\omega^{-1}(B) = \{x \in X; (\exists \xi \in B), (\forall g \in G), b^x(g) = A^x(g)\xi - \xi\}.$$

Montrons $\omega^{-1}(B) = \Theta^{-1}(\Phi(X \times B))$. De même que précédemment, on trouve

$$\Theta^{-1}(\Phi(X \times B)) = \{x \in X; (\exists \xi \in B), (\forall g \in D), b^x(g) = A^x(g)\xi - \xi\}.$$

La densité de D dans G et la continuité des cocycles b^x permet de conclure. Or $\Phi(X \times B)$ est un compact de $\mathcal{C}_s(D \times K_f)$, et Θ est continue. Donc $\omega^{-1}(B)$ est borélien. ω est donc mesurable, et (ii) est prouvé.

II. Quelques propriétés des espaces hilbertiens symétriques

LEMME II.1. — Soient H un espace hilbertien complexe, K un sous-espace vectoriel réel de H . Si K est total dans H , $\text{Exp } K$ est total dans SH .

Démonstration. — Soit F le sous-espace de Hilbert de H engendré par $\text{Exp } K$. D'après

$$\frac{d^n}{dt^n} \text{Exp } tx \Big|_{t=0} = (n!)^{1/2} x^{\otimes n},$$

on a

$$\{x^{\otimes n}; x \in K; n \in \mathbb{N}\} \subset F.$$

Alors F contient les éléments de SH de la forme

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)} \quad \text{avec } x_i \in K, 1 \leq i \leq n.$$

n entier positif.

Considérons $(x + iy)^{\otimes n}$, $x, y \in K$. Développant $(x + iy)^{\otimes n}$ en groupant d'abord les termes contenant une puissance paire de y , puis ceux contenant une puissance impaire de y , notant a et ib les sommes respectives de ces 2 groupements dans SH , on voit que a et b sont combinaisons linéaires de vecteurs de la forme

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(n)} x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}, \quad x_i \in K,$$

donc appartiennent à F . Alors F contient les $(x+iy)^{\otimes n} x, y \in K$, et par continuité les $x^{\otimes n}$ avec $x \in H$ puisque $(K+iK)^- = H$. D'où $F = SH$.

LEMME II.2. — Soient H un espace hilbertien complexe, G un groupe topologique, $U = U_{A,b,c}$ une représentation de type (S) de G dans SH . On suppose que A est triviale (de sorte que b est un morphisme continu de G dans H) et que $b(G)$ est un sous-espace vectoriel réel total dans H . Alors les 3 conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) U est irréductible;
- (ii) la fonction de type positif, associée à U et $\text{Exp } 0$, est pure;
- (iii) $b(G)$ est dense dans H .

Démonstration.

(i) \Rightarrow (ii) est évident;

(ii) \Rightarrow (i). Il suffit de montrer que $\text{Exp } 0$ est cyclique pour U . Or, le sous-espace de Hilbert engendré par $\{U(g)\text{Exp } 0; g \in G\}$ contient $\{\text{Exp } x; x \in b(\bar{G})\}$. Or $b(\bar{G})$ est un sous-espace vectoriel réel fermé de H total dans H . Le lemme II.1 permet de conclure que $\text{Exp } 0$ est cyclique pour U .

(i) \Rightarrow (iii). Supposons donc U irréductible. Raisonnons par l'absurde, et supposons que $b(G)$ n'est pas dense dans H . L'orthogonal de $b(G)$ dans H , regardé comme Hilbert réel, est non nul, i. e. $\exists x \in H, x \neq 0$ tel que $\text{Re}(x|b(g)) = 0, \forall g \in G$. Alors $U_{Id_H, ix, 1}$ commute à U et n'est pas scalaire. Contradiction qui achève de prouver (i) \Rightarrow (iii).

(iii) \Rightarrow (i). Supposons $b(G)$ dense dans H . Le bicommutant de $U(G)$ contient les opérateurs $U_{Id_H, x, 1}$ avec $x \in H$, d'après la continuité de l'application $x \rightarrow U_{Id_H, x, 1}$ de H dans $\mathcal{L}(SH)$ (muni de la topologie forte), et la densité de $b(G)$ dans H . L'irréductibilité de la représentation projective de H , dans $SH, x \rightarrow U_{Id_H, x, 1}$ implique que le commutant de $U(G)$ est réduit aux scalaires, ce qui achève la démonstration.

III. Produits tensoriels continus de représentations

Définitions, Notations III.1.

(a) Soient G un groupe topologique, X un espace borélien standard. Soit $\nu = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ une partition borélienne finie. On désigne par G^ν le groupe des fonctions de X dans G constantes sur chaque $X_i (1 \leq i \leq n)$. Muni de la topologie de la convergence uniforme sur X ,

G^v est isomorphe à G^n . Pour μ plus fine que v , on a une injection canonique continue $\varphi_{v\mu} : G^v \rightarrow G^\mu$. C'est un système inductif dans la catégorie des groupes topologiques. On note $G^{(X)}$ la limite inductive de ce système dans la catégorie des groupes topologiques. $G^{(X)}$ est le groupe des fonctions boréliennes de X dans G prenant un nombre fini de valeurs. On note φ_v l'injection canonique $\varphi_v : G^v \rightarrow G^{(X)}$. Un morphisme Ψ de $G^{(X)}$ dans un groupe topologique Γ est continu si, et seulement si, les $\Psi \circ \varphi_v : G^v \rightarrow \Gamma$ sont continus. On voit facilement que si G est connexe, $G^{(X)}$ l'est aussi. De même, G séparé implique $G^{(X)}$ séparé.

(b) Soit μ une mesure σ -finie sur X . Soient $(H^x)_{x \in X}$ un champ mesurable d'espaces hilbertiens (A^x) un champ mesurable de représentations unitaires continues de G , (b^x) un champ mesurable de 1-cocycles continus pour (A^x), (γ^x) un champ d'applications continues de G dans \mathbf{R} tels que :

- pour tout x , $b^x(G)$ est total dans H^x et

$$\gamma_x(gg') = \gamma_x(g) + \gamma_x(g') + \text{Im}(b_x(g) | A_x(g) b_x(g'));$$

- pour tout g , $x \rightarrow b^x(g)$ est de carré μ -intégrable, et $g \rightarrow \int_X^\oplus b^x(g) d\mu(x)$ est continue sur G ;

- pour tout g , $x \rightarrow \gamma^x(g)$ est μ -intégrable, et $g \rightarrow \int_X \gamma^x(g) d\mu(x)$ est continue.

On appellera représentation de type (S) strict d'un groupe topologique G , une représentation continue de type (S), $U_{A,b,c}$, telle que $c = \exp i \gamma$, où γ est une application continue de G dans \mathbf{R} vérifiant :

$$\gamma(gg') = \gamma(g) + \gamma(g') + \text{Im}(b(g) | A(g) b(g')).$$

Alors, pour tout x , on a une représentation U^x continue de type (S) strict de G dans SH^x :

$$g \rightarrow U^x(g) = U_{A^x(g), b^x(g), \exp i\gamma^x(g)}.$$

On désigne par A , la représentation unitaire continue de G dans

$H = \int_X^\oplus H^x d\mu(x)$, définie par

$$A(g) = \int_X^\oplus A^x(g) d\mu(x),$$

et par b le 1-cocycle continu de G pour A :

$$b(g) = \int_X^\oplus b^x(g) d\mu(x).$$

D'autre part, on peut définir une représentation \tilde{U} de type (S) de $G^{(X)}$ dans SH par

$$\tilde{g} \in G^{(X)} \rightarrow \tilde{U}(\tilde{g}) = U_{\tilde{A}(\tilde{g}), \tilde{b}(\tilde{g}), \exp i\tilde{\gamma}(\tilde{g})}.$$

Avec

$$\tilde{A}(\tilde{g}) = \int_x^\oplus A^x(\tilde{g}(x)) d\mu(x),$$

$$\tilde{b}(\tilde{g}) = \int_x^\oplus b^x(\tilde{g}(x)) d\mu(x),$$

$$\tilde{\gamma}(\tilde{g}) = \int_x \gamma^x(\tilde{g}(x)) d\mu(x).$$

Les objets $\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{\gamma}$ sont bien définis, car \tilde{g} ne prend qu'un nombre fini de valeurs. On vérifie aisément que U est une représentation de $G^{(X)}$. D'autre part, la continuité de U équivaut à la continuité de $\tilde{U} \circ \phi_v$ pour tout v , et celle-ci est claire, car $\tilde{A} \circ \phi_v, \tilde{b} \circ \phi_v, \tilde{\gamma} \circ \phi_v$ sont continues sur chaque G^v . De la continuité de \tilde{U} , on déduit la continuité de \tilde{A}, \tilde{b} , et $\exp i\tilde{\gamma}$. Soit \tilde{E} la fonction de type positif de type (S) continue, associée à \tilde{U} et Exp 0. On a

$$\tilde{E}(\tilde{g}) = (\tilde{U}(\tilde{g}) \text{Exp } 0 \mid \text{Exp } 0),$$

soit

$$\tilde{E}(\tilde{g}) = \exp\left(i\tilde{\gamma}(\tilde{g}) - \frac{\|\tilde{b}(\tilde{g})\|^2}{2}\right).$$

En posant $E^x(g) = (U^x(g) \text{Exp } 0 \mid \text{Exp } 0)$, on peut écrire formellement :

$$\tilde{E}(\tilde{g}) = \prod_x E^x(\tilde{g}(x)).$$

DÉFINITION III. 1. — On appellera \tilde{U} le produit tensoriel continu des U^x par rapport à la famille de vecteurs Exp 0, et \tilde{E} le produit continu des E^x ,

Dans la suite, G sera un groupe localement compact, *connexe*, séparable, Tous les espaces de Hilbert définis ci-dessus sont alors séparables d'après l'hypothèse $b^x(G)$ total dans H^x .

REMARQUE III. 1. — Notons X_0 l'ensemble des $x \in X$ tels que $b^x = 0$. Alors, $b^x(G)$ étant total dans H^x , on a $X_0 = \{x \in X; H^x = 0\}$, et X_0 est mesurable. On notera $X_1 = X - X_0$. Alors, dans $S\{0\} = \mathbf{C}$ (par convention), on peut définir une représentation unitaire continue, \tilde{U}_0 , de $G^{(X)}$:

$$\tilde{g} \in G^{(X)} \rightarrow \exp(i\tilde{\gamma}(\tilde{g}_0)) = \tilde{U}_0(\tilde{g}),$$

avec $\tilde{g}_0(x) = \tilde{g}(x), \forall x \in X_0, \tilde{g}_0(x) = e, \forall x \in X_1$, et une fonction de type positif sur $G^{(X)}$, $\tilde{E}_0(\tilde{g}) = \exp(i\tilde{\gamma}(\tilde{g}_0))$. Dans SH , on définit \tilde{U}_1 représentation de $G^{(X)}$:

$$\tilde{g} \in G^{(X)} \rightarrow \tilde{U}(\tilde{g}_1),$$

où $\tilde{g}_1(x) = \tilde{g}(x), \forall x \in X_1, \tilde{g}_1(x) = e, \forall x \in X_0$, et une fonction de type positif sur $G^{(X)}$:

$$\tilde{E}_1(\tilde{g}) = (\tilde{U}(\tilde{g}_1) \text{Exp } 0 | \text{Exp } 0).$$

On vérifie aisément que $\tilde{U} = \tilde{U}_0 \otimes \tilde{U}_1, \tilde{E} = \tilde{E}_0 \cdot \tilde{E}_1$; \tilde{U}_0 étant un caractère, l'irréductibilité de \tilde{U} équivaut à celle de \tilde{U}_1 (resp. \tilde{E} est pure si, et seulement si, \tilde{E}_1 l'est).

THÉORÈME III.1.

(i) Avec les notations définies ci-dessus, et en supposant \tilde{E} pure, l'ensemble des $x \in X_1$ tels que $b^x \in B^1(G, A^x)$ est μ -négligeable.

(ii) Supposons en outre G de type I; notons T_0 l'ensemble des $U \in \hat{G}$ tels que $H^1(G, U) \neq 0$, et $T = T_0 \cup \{\varepsilon_G\}$, où ε_G est la représentation triviale de dimension 1 de G . Alors, pour toute suite (\mathcal{V}_n) de voisinages de T dans \hat{G} , on a

$$S(A^x) \subset (\cap \mathcal{V}_n)^- \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \text{ dans } X_1$$

($S(A^x)$ est le support de A^x dans \hat{G}).

Démonstration. — La remarque III.1 permet de se ramener au cas où $X_0 = \emptyset$ et $X = X_1$.

(i) Supposons \tilde{E} pure. Soit X' l'ensemble des x vérifiant $b^x \in B^1(G, A^x)$. X' est mesurable d'après le lemme I.1. De plus, ce lemme permet d'affirmer

$$b^x(g) = A^x(g) \omega(x) - \omega(x), \quad \forall x \in X',$$

où $\omega(x)$ est un champ de vecteurs μ -mesurable sur X' . Supposons X' de mesure non nulle. Soit Y un sous-ensemble mesurable de mesure non nulle tel que $\omega(x)$, restreint à Y , soit de carré intégrable. Comme pour tout $x \in X', b^x$ est non nul, $\omega(x)$ est non nul et n'est pas invariant par A^x .

On désigne par $\bar{\omega}$ le vecteur de H défini par

$$\begin{aligned} x \rightarrow \bar{\omega}(x), \quad \forall x \in Y, \quad \bar{\omega}(x) &= \omega(x), \\ \forall x \in X - Y, \quad \bar{\omega}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Alors $\bar{\omega}$ est non nul, et n'est pas invariant par \tilde{A} . Posons

$$\begin{aligned} X - Y = Z, \quad H_Y &= \int_Y^\otimes H^x d\mu(x), \quad H_Z = \int_Z^\otimes H^x d\mu(x), \\ \tilde{A}_Y &= \tilde{A}|_{H_Y}, \quad \tilde{A}_Z = \tilde{A}|_{H_Z}, \end{aligned}$$

p_Y, p_Z les projecteurs sur H_Y et H_Z respectivement, $\tilde{b}_Y = p_Y \tilde{b}$, $\tilde{b}_Z = p_Z \tilde{b}$.
On pose

$$\tilde{\gamma}_Y(\tilde{g}) = \text{Im}(\tilde{A}_Y(\tilde{g}) \bar{\omega} | \bar{\omega})$$

et

$$\tilde{\gamma}_Z(\tilde{g}) = \tilde{\gamma}(\tilde{g}) - \tilde{\gamma}_Y(\tilde{g}),$$

et l'on définit \tilde{U}_Y (resp. \tilde{U}_Z), représentations continues de $G^{(X)}$ de type (S) dans SH_Y (resp. SH_Z), par

$$\tilde{U}_Y = \tilde{U}_{\tilde{A}_Y, \tilde{b}_Y, \exp i\tilde{\gamma}_Y}, \quad \tilde{U}_Z = U_{\tilde{A}_Z, \tilde{b}_Z, \exp i\tilde{\gamma}_Z}.$$

D'après les définitions, \tilde{b}_Y est le cobord de $\bar{\omega}$ pour A_Y et est non nul. De plus, $\tilde{E} = \tilde{E}_Y \tilde{E}_Z$ où \tilde{E}_Y (resp. \tilde{E}_Z) est la fonction de type positif associée à \tilde{U}_Y (resp. \tilde{U}_Z) et $\text{Exp } 0$. Or :

$$\tilde{E}_Y(\tilde{g}) = \exp(-(\bar{\omega} | \bar{\omega})) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tilde{A}_Y(\tilde{g}) \bar{\omega} | \bar{\omega})^n}{n!} \right).$$

Comme $\tilde{b}_Y(\tilde{g}) = \tilde{A}_Y(\tilde{g}) \bar{\omega} - \bar{\omega}$ est non identiquement nul, $(\tilde{A}_Y(\tilde{g}) \bar{\omega} | \bar{\omega})$ n'est pas constante.

Alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{A}_Y(\tilde{g}) \bar{\omega} | \bar{\omega})^n}{n!} = \exp(\tilde{A}_Y(\tilde{g}) \bar{\omega} | \bar{\omega}) - 1$$

n'est pas constante.

En effet, si cela est, on a $(\tilde{A}_Y(\tilde{g}) \bar{\omega} | \bar{\omega}) \in 2i\pi\mathbf{Z}$. Or G est connexe, donc $G^{(X)}$ aussi, et $(\tilde{A}_Y(\tilde{g}) \bar{\omega} | \bar{\omega})$ est continue sur $G^{(X)}$. On en déduit $(\tilde{A}_Y(\tilde{g}) \bar{\omega} | \bar{\omega})$ constante, une contradiction qui montre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{A}_Y(\tilde{g}) \bar{\omega} | \bar{\omega})^n}{n!}$$

n'est pas constante. Par suite \tilde{E}_Y n'est pas pure, donc $\tilde{E} = \tilde{E}_Y \tilde{E}_Z$ non plus. Une contradiction qui prouve (i).

(ii) *Supposons \tilde{E} pure et G de type I.* Montrons que toute sous-représentation de $A = \int_x^{\oplus} A^x d\mu(x)$, associée à un projecteur central, a son support non disjoint de T . Raisonnons par l'absurde. Soit p_1 un projecteur central sur H_1 sous-espace de H stable par A , tel que la sous-représentation A_1 de A dans H_1 ne contienne faiblement aucun élément de T . En utilisant la désintégration centrale de A_1 sur \hat{G} , on voit que $p_1 b$, qui

est un 1-cocycle pour A_1 est en fait un cobord; dans la désintégration, il n'intervient que des éléments de \hat{G} pour lesquels $Z^1 = B^1$; leurs multiples ayant la même propriété, on a $Z^1(G, A_1) = \bar{B}^1(G, A_1)$ (cf. GUICHARDET [13], prop. 4); d'autre part, $\varepsilon_G \in T$ implique que A_1 ne contient pas faiblement ε_G ; donc B^1 est fermé dans $Z^1(G, A_1)$ (cf. GUICHARDET [13], th. 1), et b_1 est un cobord, i. e. :

$$b_1(g) = A_1(g)\omega - \omega \quad \text{avec} \quad \omega = \int_X^\oplus \omega(x) d\mu(x) \in H_1.$$

p_1 étant central, on a $p_1 = \int_X^\oplus p(x) d\mu(x)$ où $(p_1(x))$ est un champ mesurable de projecteurs centraux dans H^x . Alors, pour μ presque tout x , on a

$$\forall g \in G, \quad p_1(x)b^x(g) = A^x(g)\omega(x) - \omega(x).$$

On pose $p_2 = 1 - p_1$ et $p_i H = H_i$, $p_i \tilde{b} = \tilde{b}_i$, $\tilde{A}|_{H_i} = \tilde{A}_i$, $i = 1, 2$, et $\tilde{\gamma}_1(\tilde{g}) = \text{Im}(\tilde{A}_1(\tilde{g})\omega|_{\omega})$, $\tilde{\gamma}_2(\tilde{g}) = \tilde{\gamma}(\tilde{g}) - \tilde{\gamma}_1(\tilde{g})$. Alors on a $\tilde{b}_1(\tilde{g}) = \tilde{A}_1(\tilde{g})\omega - \omega$, i. e. \tilde{b}_1 est un cobord. En outre, $\tilde{U} = \tilde{U}_1 \otimes \tilde{U}_2$ et $\tilde{E} = \tilde{E}_1 \times \tilde{E}_2$, où \tilde{U}_i est la représentation continue de $G^{(x)}$ dans SH_i $\tilde{U}_i = U_{\tilde{A}_i, \tilde{b}_i, \text{Exp } \tilde{\gamma}_i}$, $i = 1, 2$, et \tilde{E}_i la fonction de type positif associée à \tilde{U}_i et $\text{Exp } 0$. Comme dans (i), \tilde{b}_1 cobord non nul implique que \tilde{E}_1 n'est pas pure. Une contradiction qui montre que toute sous-représentation de A , associée à un projecteur central, a son support non disjoint de T .

L'annexe I permet de conclure que, pour toute suite de voisinages (\mathcal{V}_n) de T dans \hat{G} , on a

$$S(A) \subset (\bigcap \mathcal{V}_n)^-.$$

Montrons pour terminer que μ -presque tout A^x est faiblement contenu dans $A = \int_X^\oplus A^x d\mu(x)$. Comme dans le lemme I.1, on se ramène au cas où X est localement compact séparable muni d'une mesure de Radon μ avec

$$X - N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n,$$

où N est μ -négligeable, et les X_i des compacts, de telle sorte que $\int_{X_n}^\oplus A^x d\mu(x)$ soit en fait la somme continue des $A^x (x \in X_n)$. Alors A est équivalente à $\bigoplus_n \int_{X_n}^\oplus A^x d\mu(x)$, donc faiblement équivalente à $\{A^x; x \in X - N\}$ (cf. FELL [7], th. 3.1).

LEMME III.1. — *On suppose G connexe. Alors si φ (resp. Φ) est un morphisme continu de G (resp. $G^{(X)}$) dans un espace hilbertien H , $\varphi(G)$ (resp. $\Phi(G^{(X)})$) est un sous-espace vectoriel réel de H .*

Démonstration.

(a) Montrons d'abord que $\varphi(G)$ est un sous-espace vectoriel réel de H . Soit $G_0 = \text{Ker } \varphi$. Alors G/G_0 est un groupe localement compact commutatif connexe. Donc $G/G_0 \simeq K \times \mathbf{R}^n$, où K est un groupe compact commutatif (cf. PONTRJAGIN [28]). Soit φ_0 le morphisme continu de G/G_0 dans H déduit de φ par passage au quotient

$$\varphi(G) = \varphi_0(G/G_0) = \varphi_0(K) + \varphi_0(\mathbf{R}^n),$$

K étant compact $\varphi_0(K) = 0$ car dans un espace hilbertien une suite $(n\omega)$ avec $\omega \neq 0$ n'admet pas de point d'accumulation, et $\varphi(G)$ est un sous-espace vectoriel réel de H .

(b) On a $G^{(X)} = \bigcup_v \varphi_v(G^v)$, où les $\varphi_v(G^v)$ forment une famille filtrante croissante de sous-groupes de $G^{(X)}$. D'autre part, $\Phi \circ \varphi_v(G^v)$ est un sous-espace vectoriel réel de H d'après (a) car G^v est isomorphe à G^n . Donc $\Phi(G^{(X)})$ est un sous-espace vectoriel réel de H comme réunion d'une famille filtrante croissante de sous-espaces vectoriels de H .

Avec les notations du début du paragraphe, on a le théorème suivant.

THÉORÈME III.2. — *On suppose G connexe de type I tel que $H^1(G, V) = 0$ pour toute représentation irréductible non triviale V de G .*

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) \tilde{U} est irréductible;
- (ii) \tilde{E} est pure;
- (iii) U^x est irréductible pour μ presque tout x ;
- (iv) E^x est pure pour μ presque tout x .

De plus les représentations irréductibles de type (S) de G sont exactement les représentations $U_{\varepsilon, b, c}$ où ε est la représentation triviale de G dans un espace hilbertien, b un morphisme continu surjectif de G dans cet espace, et c une application continue de G dans \mathbf{U} (nombres complexes de module 1) vérifiant :

$$c(gg') = c(g)c(g') \exp(i |m(b(g)|b(g'))).$$

Démonstration.

(a) Comme dans le lemme I.1, on se ramène à prouver le théorème lorsque l'ensemble des x tels que $b^x = 0$ est vide.

(b) D'après le théorème III.1, appliqué à $G^{(X)}$ (resp. $G^{(x_0)}$) : où l'on regarde $\{x_0\}$ comme un espace borélien standard muni de la mesure de Dirac en x_0 , si \tilde{E} est pure (resp. E^{x_0}), on a pour μ presque tout x :

$$S(A^x) \subset (\bigcap_n \mathcal{V}_n)^- \quad (\text{resp. } S(A^{x_0}) \subset (\bigcap_n \mathcal{V}_n)^-),$$

où \mathcal{V}_n est une suite quelconque de voisinages de ε_G (représentation triviale de dimension 1 de G) dans \hat{G} . G étant séparable, il existe une base dénombrable de voisinages de ε_G qu'on note encore (\mathcal{V}_n). Alors soit $U \in \bigcap_n \mathcal{V}_n$, et \bar{U} distinct de ε_G . Alors U contient faiblement ε_G , et $H^1(G, U) \neq 0$, car $\bar{B}^1(G, U) \neq B^1(G, U)$. Une contradiction qui prouve que $\bigcap \mathcal{V}_n = \varepsilon_G$. D'autre part, $\{\varepsilon_G\}$ est fermé dans \hat{G} car le noyau de ε_G dans $C^*(G)$ est un idéal primitif maximal. Donc si \tilde{E} (resp. E^x) est pure, \tilde{A} (resp. A^x) est triviale sur H (resp. H^x).

(c) (i) \Rightarrow (ii) et (iii) \Rightarrow (iv) sont évidents.

(i) \Rightarrow (iii) : Supposons \tilde{U} irréductible. Alors \tilde{A} est triviale sur H . \tilde{b} est alors un morphisme continu de $G^{(X)}$ dans H . $\tilde{b}(G^{(X)})$ est un espace vectoriel réel d'après le lemme II.1. U irréductible implique donc $\tilde{b}(G^{(X)})$ dense dans H d'après le lemme II.2.

J'affirme que ceci implique : $b^x(G)$ dense dans H^x pour μ presque tout x .

Les sous-espaces vectoriels fermés (car de dimension finie) $b^x(G) \subset H^x$ forment un champ mesurable (car ils sont engendrés par les $b^x(g_n)$, (g_n dense dans G). L'ensemble des points x tels que $b^x(G) \neq H^x$ est mesurable. S'il était non négligeable, on pourrait trouver un champ de vecteur mesurable non négligeable, ξ^x , tel que

$$\text{Re}(\xi^x | b^x(g)) = 0, \quad \forall x \in X, \quad \forall g \in G,$$

puis un vecteur $\xi \in H$ non nul tel que $\text{Re}(\xi | \tilde{b}(\tilde{g})) = 0$ pour tout $\tilde{g} \in G^{(X)}$. Une contradiction avec la densité de $\tilde{b}(G^{(X)})$ dans H . D'où $b^x(G) = H^x$ pour μ presque tout x , et le lemme II.2 permet de conclure (i) \Rightarrow (iii).

Prouvons (iii) \Rightarrow (i). Supposons E^x pure pour μ presque tout x . Alors A^x est triviale, et $b^x(G) = H^x$ μ p. p. Alors $b(G^{(X)})$ est un sous-espace vectoriel réel dense de H , et le lemme II.2 permet de conclure \tilde{E} pure.

L'équivalence entre (i) et (ii) d'une part, entre (iii) et (iv) d'autre part résulte de la remarque préliminaire (b) et du lemme II.2.

La remarque (b) et le lemme II.2 permettent de conclure que les représentations irréductibles de type (S) strict de G (resp.

les fonctions de type positif, de type (S) *strict*, pures) sont du type $U_{e,b} \exp i\gamma$ (resp. $\exp((i\gamma - \|b(g)\|^2)/2)$, où b est un morphisme continu surjectif de G dans H , et γ vérifie

$$\gamma(gg') = \gamma(g) + \gamma(g') + \operatorname{Im}(b(g) | A(g)b(g')).$$

Mais on peut adapter aisément la démonstration du théorème III.1 au cas où X est réduit à 1 point, et où U^{x_0} est une représentation unitaire de type (S) (non nécessairement stricte) de G . Alors (b) est encore valable, et permet d'achever la démonstration du théorème.

Exemples de groupes satisfaisant les hypothèses du théorème :

- les groupes de Lie nilpotents connexes (*cf.* GUICHARDET [13]);
- les groupes connexes de type I possédant la propriété (T) de Kazdan (*cf.* § V). Pour ces groupes, toute représentation unitaire a une 1-cohomologie nulle. Alors, les seules représentations irréductibles de type S sont les caractères. Par exemple, pour les groupes de Lie réels, simples, connexes, de centre fini, d'algèbre de Lie distincte de $\mathfrak{so}(n, 1)$ ou $\mathfrak{su}(n, 1)$, il n'y a pas de représentation irréductible de type (S) non triviale.

IV. Représentations irréductibles de type (S) des groupes de Lie nilpotents connexes

On considère un groupe de Lie G d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , un espace hilbertien complexe E , un morphisme continu b de G dans E . On note β l'application tangente à b en e . On cherche à quelle condition il existe une application continue de G dans \mathbf{U} (complexes de module 1) vérifiant :

$$(1) \quad c(gg') = c(g)c(g') \exp i \operatorname{Im}(b(g) | b(g')), \quad \forall g, g' \in G,$$

i. e. à quelle condition le 2-cocycle continu $\exp i \operatorname{Im}(b(g) | b(g'))$ est un cobord. Remarquons que si c_1, c_2 vérifient l'équation (1) $c_1 c_2^{-1}$ est un caractère de G . Le résultat suivant était sans doute déjà connu. La 1^{re} partie est en tout cas contenue dans ARAKI ([1], th. 8.7).

LEMME IV.1.

(i) *A toute application continue $c: G \rightarrow \mathbf{U}$ vérifiant (1), s'il en existe, on peut faire correspondre une unique forme linéaire f_c sur \mathfrak{g} telle que $c(\exp X) = \exp i f_c(X)$ pour tout X dans \mathfrak{g} ; f_c vérifie en outre.*

$$(2) \quad f_c([X, X']) = 2 \operatorname{Im}(\beta(X) | \beta(X')).$$

(ii) Si G est connexe et simplement connexe, l'application $c \rightarrow f_c$ est une bijection de l'ensemble des applications continues $G \rightarrow \mathbf{U}$ vérifiant (1) sur l'ensemble des formes linéaires vérifiant (2).

Remarque. — Notons que l'on a par définition :

$$i f_c(X) = \left. \frac{d}{dt} c(\exp tX) \right|_{t=0}.$$

On constate que c est C^1 à l'origine. La relation (2) exprime que $2 \operatorname{Im}(\beta(X) | \beta(X'))$ est le cobord de f_c , pour la cohomologie de l'algèbre de Lie. La difficulté est que l'on ne sait pas *a priori* que c est C^1 à l'origine. On sait seulement que c a des dérivées selon tout vecteur tangent à l'origine (sur chaque sous-groupe à un paramètre c est un caractère).

Démonstration.

(i) cf. ARAKI [1] (th. 8.7).

(ii) On vient de voir que l'on a une application $c \rightarrow f_c$. Supposons maintenant G de Lie, connexe, simplement connexe.

Si c_1, c_2 vérifie (1) et $f_{c_1} = f_{c_2}$. Alors $c_1 c_2^{-1}$ est caractère de G qui vérifie $c_1 c_2^{-1}(\exp X) = 1$. G étant connexe, on en déduit $c_1 = c_2$ et $c \rightarrow f_c$ est injective. Montrons que c'est une surjection sur l'ensemble des formes linéaires vérifiant (2).

Soit donc $f \in \mathfrak{g}^*$ vérifiant (2). On notera \mathfrak{h} le noyau de β . \mathfrak{h} est un idéal de \mathfrak{g} contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]$. Soit \mathfrak{k} le noyau de f restreint à \mathfrak{h} ; f vérifiant (2), \mathfrak{k} contient $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]$, donc $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$, et est un idéal de \mathfrak{g} . Soit $H = \operatorname{Ker} b$ (resp. K) le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie \mathfrak{h} (resp. \mathfrak{k}). K est distingué et contient $[G, H]$ qui est le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]$ (cf. HOCHSCHILD [20], th. XII.3.1), G étant simplement connexe, K et $G_1 = G/K$ sont simplement connexes (même référence que ci-dessus). On notera $H_1 = H/K$. On se ramène alors à prouver l'existence de c_1 , continue de G_1 dans \mathbf{U} , vérifiant :

$$(1') \quad c_1(gg') = c_1(g)c_1(g') \exp i \operatorname{Im}(b_1(g) | b_1(g')), \quad \forall g, g' \in G_1$$

et

$$c_1(\exp X) = f_1(X), \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1,$$

où \mathfrak{g}_1 est l'algèbre de Lie de G_1 ($\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$), et $f_1 \in \mathfrak{g}_1^*$ (resp. b_1) est déduite de f_1 (resp. b) par passage au quotient par \mathfrak{k} (resp. K). \mathfrak{g}_1 est nilpotente car $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}_1) = 0$. G_1 est donc nilpotent (connexe simplement connexe, comme on l'a vu). L'application exponentielle est un difféomorphisme.

On définit alors $c_1(g) = \exp if_1(X)$ (ou $g = \exp X$), c_1 est continue. On vérifie aisément que c_1 satisfait (1') en utilisant la formule de Campbell-Hausdorff et $\mathcal{C}^2(g_1) = 0$. Ce qui achève la démonstration.

Avec les notations du début du paragraphe et du lemme, on a le résultat suivant.

LEMME IV.2. — *On suppose G nilpotent connexe et simplement connexe et $b(G) = E$. Pour toute application c vérifiant (1), la représentation irréductible $U_{\varepsilon,b,c}$ (ε représentation triviale de G dans E) est dans la classe de représentations unitaires irréductibles de G associée à f_c par la méthode de Kirillov.*

Démonstration. — On emploie les notations de la démonstration du lemme (ii). On note τ (resp. τ_1) l'application $g^* \rightarrow \hat{G}$ (resp. $g_1^* \rightarrow G_1$) définie par la méthode de Kirillov.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} g^* & \xrightarrow{\tau} & \hat{G} \\ i \uparrow & & \uparrow j \\ g_1^* & \xrightarrow{\tau_1} & G_1 \end{array}$$

où i et j sont les injections canoniques déduites des projections

$$g \rightarrow g_1 = g/\mathfrak{k}, \quad G \rightarrow G_1 = G/K.$$

Alors, en désignant par ε_1 la représentation triviale de G_1 dans E , il suffit de démontrer que $U_{\varepsilon_1,b_1,c_1}$, représentation de G_1 , est dans la classe $\tau_1(f_{c_1})$, car $i(f_{c_1}) = f_c$ et $j(U_1) = U$, où U_1 (resp. U) désigne la classe de $U_{\varepsilon_1,b_1,c_1}$ (resp. $U_{\varepsilon,b,c}$).

Comme \mathfrak{k} est le noyau d'une forme linéaire sur \mathfrak{h} , on a $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}/\mathfrak{k}$ de dimension 1 ou 0.

(a) Si $\dim \mathfrak{h}_1 = 0$. Alors \mathfrak{h}_1 contient $[g_1, g_1]$, et G_1 est commutatif. $U_{\varepsilon_1,b_1,c_1}$ étant irréductible, on a $E = \{0\}$, $b_1 = 0$ et c_1 caractère de G_1 . D'où $U_{\varepsilon_1,b_1,c_1}(\exp X) = \exp if_{c_1}(X)$ et $\tau_1(f_{c_1}) = U_1$.

(b) Si $\dim \mathfrak{h}_1 = 1$. $U_1 = U_{\varepsilon_1,b_1,c_1}$ est irréductible, donc scalaire sur le centre $Z(G_1)$ de G_1 . Or $U_{A,b,c}$ est scalaire dans SE si, et seulement si, $A = \text{Id}_E$ et $b = 0$. D'où $Z(G_1) \subset H_1 = \text{Ker } b_1$.

D'autre part H_1 est central car

$$[g, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{k} \Rightarrow [g_1, \mathfrak{h}_1] = 0.$$

Donc $Z(G_1) = H_1$. Alors \mathfrak{g}_1 est une algèbre de Lie dont le centre est de dimension 1 et contient $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1]$. C'est une algèbre de Heisenberg, et G_1 est un groupe de Heisenberg (cf. BERNAT et coll. [3], p. 56). D'autre part,

$$\forall X \in \mathfrak{h}_1 = Z(\mathfrak{g}_1), \quad U_{\varepsilon_1, b_1, c_1}(\exp X) = \exp(i f_{c_1}(X)) \cdot \text{Id}_{S_E}.$$

D'après la définition de \mathfrak{f} et l'hypothèse $\dim \mathfrak{h}_1 = 1, f_{c_1}$ est non triviale sur $Z(\mathfrak{g}_1)$. D'après les propriétés des groupes de Heisenberg, on a

$$\tau_1(f_{c_1}) = U_1$$

(les représentations irréductibles des groupes de Heisenberg non triviales sur le centre, sont classées par leurs valeurs sur celui-ci, et cette classification coïncide avec la paramétrisation de Kirillov).

THÉORÈME IV.1. — *Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe, \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Soit U_f la classe de représentations unitaires irréductibles de G associée à $f \in \mathfrak{g}^*$ par la méthode de Kirillov. U_f contient une représentation \mathbb{R} de type (S) si, et seulement si, f est nulle sur $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$.*

Démonstration.

Partie *seulement si* : cela résulte des lemmes IV.1 et IV.2 et du théorème III.2.

Partie *si* : Soit $f \in \mathfrak{g}^*$, nulle sur $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g})$. Soit B_f la forme bilinéaire anti-symétrique définie par $B_f(X, X') = f([X, X'])$, $\mathfrak{g}(f)$ le noyau de B_f . Alors $\mathfrak{g}(f)$ contient $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Soit $E = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ et p la projection canonique. On désigne par b le relèvement de p à G . C'est un morphisme additif de G dans E . On a, par définition, $b(\exp X) = p(X)$.

Soit \tilde{B}_f la forme bilinéaire alternée non dégénérée sur E déduite de B_f par passage au quotient par $\mathfrak{g}(f)$. Soit $(e_1, \dots, e_n, u_1, \dots, u_n)$ une base symplectique de E pour \tilde{B}_f . On définit une structure complexe sur E grâce à l'automorphisme \mathbb{R} -linéaire $JE \rightarrow E$, défini par $Je_i = u_i, Ju_i = -e_i$, qui vérifie $J^2 = -I_{d_E}$. Puis une structure hilbertienne complexe en posant

$$\frac{1}{2}(e_i | e_j) = \delta_{ij}.$$

Alors, on a $(1/2)f([X, X']) = \text{Im}(b(\exp X) | b(\exp X'))$. Soit c la solution de (1) vérifiant $c(\exp X) = \exp if(X)$ pour tout X dans \mathfrak{g} , dont l'existence est assurée par le lemme IV.1. Alors $f_c = f$ et la représentation $U_{\varepsilon, b, c}$ est irréductible et associée à $f = f_c$ par la méthode de Kirillov.

V. 1-Cohomologie des groupes localement compacts

(A) **Fonctions continues hermitiennes conditionnellement de type positifs et 1-cohomologie.** — G désigne un groupe localement compact séparable.

DÉFINITION V.1. — Une fonction continue hermitienne conditionnellement de type positif (en abrégé c. h. c. t. p.) sur G est une fonction ψ continue sur G , à valeurs complexes, vérifiant :

$$(i) \psi(g^{-1}) = \overline{\psi(g)}, \forall g \in G,$$

(ii) $\forall g_1, \dots, g_n \in G, \forall c_1, \dots, c_n \in \mathbf{C}$ vérifiant $\sum_{i=1}^n c_i = 0$, on a

$$\sum c_i \bar{c}_j \psi(g_j^{-1} g_i) \geq 0.$$

REMARQUE V.1. — Si φ est une fonction continue de type positif (en abrégé c. t. p.) alors $\psi : g \mapsto \psi(g) = \varphi(g) - \varphi(e)$ est c. h. c. t. p.

PROPOSITION V.1 (cf. GUICHARDET [14], prop. 4.3). — ψ est c. h. c. t. p. si, et seulement si $\exp t \psi$ est c. t. p. pour tout t réel positif. En particulier, si ψ est nulle en e , ψ est limite uniforme sur tout compact d'une suite de fonctions ψ_n c. h. c. t. p. avec $\psi_n(g) = \varphi_n(g) - \varphi_n(e)$, où φ_n est une suite de fonctions c. t. p.

PROPOSITION V.2. — On considère les quadruplets (H, A, b, γ) , où H est un espace hilbertien complexe, A une représentation unitaire de G dans H , b un 1-cocycle continu à image totale dans H , γ une application continue de G dans \mathbf{R} vérifiant :

$$\gamma(gg') - \gamma(g) - \gamma(g') = \text{Im}(b(g) | A(g) \bar{b}(g')).$$

On dira que deux quadruplets (H, A, b, γ) , (H', A', b', γ') sont isomorphes si $\gamma = \gamma'$ et s'il existe un isomorphisme d'espace de Hilbert $U : H \rightarrow H'$ vérifiant $A(g) = U A'(g) U^{-1}$ et $U b(g) = b'(g)$ pour tout g . Alors :

(i) Si l'on pose $\psi(g) = -(\|b(g)\|^2)/2 + i\gamma(g)$, ψ est c. h. c. t. p. nulle en e . On obtient ainsi une correspondance bijective entre quadruplets (H, A, b, γ) (à isomorphisme près) et fonctions c. h. c. t. p. nulles en e . On a en outre

$$\psi(g'^{-1}g) - \psi(g) - \psi(g'^{-1}) = (b(g) | b(g')).$$

(ii) b est un cobord si, et seulement si, ψ est de la forme $\varphi(g) - \varphi(e) + i\omega(g)$, où ω est un morphisme de G dans \mathbf{R} et φ une fonction c. t. p.

(iii) K étant un sous-groupe compact de G , les conditions suivantes sont équivalentes :

- b nul sur K ;
- ψ nulle sur K ;
- ψ bi-invariante par K .

Démonstration.

(i) Le (i) est démontré dans GUICHARDET [14] (proposition 4.5 et remarque 4.1). Toutefois nous allons donner une réalisation d'un quadruplet (H, A, b, γ) associé à ψ , c. h. c. t. p. nulle en e .

Soit ψ c. h. c. t. p. nulle en e . On considère \mathcal{S} l'espace vectoriel des mesures discrètes sur G de masse nulle

$$\mathcal{S} = \{ \mu; \mu = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{g_i}, c_1, \dots, c_n \in \sum_{i=1}^n c_i = 0 \},$$

où δ_{g_i} est la mesure de Dirac en g_i . On munit \mathcal{S} du semi-produit scalaire

$$\langle \mu, \mu' \rangle = \sum_{1 < i \leq n; 1 \leq j \leq m} c_i \bar{c}'_j \psi(g_j^{-1} g_i),$$

avec $\mu = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{g_i}$, $\mu' = \sum_{j=1}^m c'_j \delta_{g'_j}$, où l'on a

$$\sum_{i=1}^n c_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^m c'_j = 0.$$

On définit, pour tout g dans G , un opérateur dans \mathcal{S} :

$$T_g(\sum_{i=1}^n c_i \delta_{g_i}) = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{gg_i},$$

T_g préserve le semi-produit-scalaire. De plus, on a

$$T_e = \text{Id}_{\mathcal{S}}, \quad T_{gg'} = T_g T_{g'}.$$

Soient H l'espace de Hilbert séparé complété de \mathcal{S} , et Λ l'application canonique de \mathcal{S} dans H . Soit A_g l'opérateur unitaire dans H correspondant à T_g défini par $A_g \Lambda = \Lambda T_g$.

Alors A est une représentation unitaire continue de G . On pose $b(g) = \Lambda(\delta_g - \delta_e)$. On vérifie aisément que b est un 1-cocycle continu pour A , tel que $b(G)$ soit total dans H . On pose $\gamma = \frac{1}{2} \text{Im } \psi$. Alors (H, A, b, γ) est associé à ψ , i. e. :

$$\gamma(gg') - \gamma(g) - \gamma(g') = \text{Im}(b(g) | A(g)b(g'))$$

et

$$-(\|b(g)\|^2)/2 + i\gamma(g) = \psi(g).$$

(ii) (a) Supposons $\psi(g) = \varphi(g) - \varphi(e) + i\omega(g)$, où φ est une fonction c. t. p., et ω un morphisme continu de G dans \mathbf{R} . Soit (H, A, b, γ) un quadruplet associé à ψ . On a

$$\begin{aligned} \|b(g)\|^2 &= -2 \operatorname{Re} \psi(g) \\ &= -2 \operatorname{Re} (\varphi(g) - \varphi(e)). \end{aligned}$$

Or φ est c. t. p., donc bornée. Par suite, b est un 1-cocycle borné. Or un 1-cocycle borné est un cobord (cf. JOHNSON (B.), [21], th. 3.4). Remarquons que A ne contient pas la représentation triviale, la projection orthogonale de b , cobord, sur les vecteurs invariants par A étant nulle.

(b) Réciproquement, si b est le cobord d'un vecteur $a \in H$, une solution continue de

$$\gamma(gg') - \gamma(g) - \gamma(g') = \operatorname{Im}(b(g) | A(g)b(g'))$$

est donnée par $\gamma(g) = \operatorname{Im}(A(g)a | a)$, et toute autre solution diffère de celle-ci par un morphisme continu de G dans \mathbf{R} .

Alors :

$$-\|b(g)\|^2/2 + i\gamma(g) = (A(g)a | a.) - (a | a) + i\omega(g),$$

où ω est un morphisme continu de G dans \mathbf{R} .

(iii) est trivial en utilisant $\operatorname{Re} \psi(g) = -(\|b(g)/2\|^2)$, la relation de cocycle et les propriétés de γ . En particulier, si b est nul sur K , γ , restreint à K , est un morphisme de K dans \mathbf{R} , donc nul puisque K est compact.

REMARQUE V.2. — Si ψ est réelle, un quadruplet associé à ψ , (H, A, b, γ) , vérifie $\gamma = 0$, et l'on a

$$\operatorname{Im}(b(g) | b(g')) = 0.$$

On en déduit une correspondance bijective entre les triplets (H, A, b) à isomorphisme près, où b est un cocycle vérifiant $\operatorname{Im}(b(g) | b(g')) = 0$ et les fonctions c. h. c. t. p. réelles nulles en e donnée par

$$(H, A, b) \rightarrow \psi(g) = -(\|b(g)\|^2)/2.$$

On parlera alors du triplet associé à ψ , c. h. c. t. p. réelle, nulle en e . On le notera (H_ψ, A_ψ, b_ψ) .

REMARQUE V.3. — Soit A représentation de G dans H , b un 1-cocycle continu de G pour A . Alors $\psi(g) = -\|b(g)\|^2$ est c. h. c. t. p. Soit \bar{A} la conjuguée de A dans \bar{H} : on prend $\bar{H} = H$ en tant que groupe additif

avec

$$\lambda \star a = \overline{\lambda a}, \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}, \quad \forall a \in H,$$

et $(a | a')_{\overline{H}} = \overline{(a | a')_H}$. On définit $\overline{A}(g)a = A(g)a$.

L'application $\overline{b} : G \rightarrow \overline{H}$ définie par $g \rightarrow b(g) \in \overline{H}$ est un 1-cocycle pour \overline{A} . Alors (H_ψ, A_ψ, b_ψ) peut être réalisé de la manière suivante : on prend $b_\psi(g) = b(g) + \overline{b}(g) \in H \oplus \overline{H}$, H_ψ le sous-espace de Hilbert $(A \oplus \overline{A})$ -stable engendré par $b_\psi(G)$, et A_ψ la sous-représentation de $A \oplus \overline{A}$, dans H_ψ . Notons que si b_ψ est un cobord, par projection sur H , on en déduit que b est un cobord.

Le théorème suivant généralise un théorème de WANG [34] (th. 1).

THÉORÈME V.1. — *Si G est un groupe localement compact séparable possédant la propriété (T) de Kazdan, aucune représentation unitaire de G ne possède de 1-cocycle non trivial.*

Démonstration. — D'après la remarque V.3 et la proposition V.2 (ii), il suffit de prouver que toute fonction c. h. c. t. p. nulle en e peut se mettre sous la forme $\varphi(g) - \varphi(e)$, où φ est une fonction c. t. p. Or on a, d'après la proposition V.1, $\psi(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(g) - \varphi_n(e)$ uniformément sur tout compact, où (φ_n) est une suite de fonctions c. t. p. On se ramène aisément au cas où $(H_{\varphi_n}, A_{\varphi_n}, a_{\varphi_n})$, associé à φ_n c. t. p., est tel que A_{φ_n} ne contient pas la représentation triviale. Supposons la suite $\varphi_n(e)$ non bornée. Alors il existe une sous-suite, notée encore $\varphi_n(e)$, telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(e) = +\infty.$$

Alors :

$$\frac{\varphi_n(g) - \varphi_n(e)}{\varphi_n(e)} = \frac{\varphi_n(g)}{\varphi_n(e)} - 1$$

converge uniformément vers zéro sur tout compact, i. e. : $\varphi_n(g)/\varphi_n(e)$ converge uniformément vers 1 sur tout compact. La suite de représentations A_{φ_n} converge vers ε_G (représentation triviale de G de dimension 1) dans l'espace \tilde{G} des classes de représentations unitaires de G de dimension inférieure ou égale à \aleph_0 , lorsque \tilde{G} est muni de la topologie de Fell (*inner hull kernel topology*) (cf. DELAROCHE-KIRILLOV [4]). G possédant la propriété (T), ceci n'est possible que si A_{φ_n} contient ε_G à partir d'un certain rang (cf. [4] DELAROCHE-KIRILLOV, lemme 1) : une contradiction qui montre que la suite $(\varphi_n(e))$ est bornée. On peut en extraire une sous-suite convergente qu'on notera encore $\varphi_n(e)$. Alors posant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(e) = l$, on a

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(g) = \psi(g) + l$. Donc $\varphi(g) = \psi(g) + l$ est c. t. p., et $\psi(g) = \varphi(g) - \varphi(e)$, ce qui achève la démonstration.

(B) Cohomologie et fonctions sphériques zonales

NOTATIONS. — Dans ce paragraphe, G désigne un groupe localement compact séparable *unimodulaire*, K un sous-groupe compact, tels que l’algèbre de convolution $L^1(K \backslash G / K)$ des fonctions intégrables sur G , bi-invariantes par K soit commutative.

EXEMPLE. — G groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini, K un sous-groupe compact maximal.

Une fonction sphérique sur G , relativement au couple (G, K) est une fonction continue non nulle sur G , solution de

$$\int_K \omega(xky) dk = \omega(x)\omega(y), \quad \forall x, y \in G,$$

où dk est la mesure de Haar normalisée sur K . Une fonction sphérique zonale est bi-invariante par K , et est égale à 1 en e . On désigne par Ω l’ensemble des fonctions sphériques zonales de type positif. Muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de G , Ω est localement compact (cf. GODEMENT [10]). Ω peut être regardé comme une partie du spectre de l’algèbre de Banach commutative $L^1(K \backslash G / K)$. La topologie de la convergence uniforme sur les compacts de G et la topologie de spectre coïncident sur Ω . En effet, sur l’ensemble des fonctions continues de type positif sur G égales à 1 en e , la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de G et la topologie \star -faible de $L^\infty(G) = (L^1(G))'$ coïncident (cf. DIXMIER [5], th. 13.5.2). Mais si $\omega \in \Omega$, ω est bi-invariante par K et, pour $f \in L^1(G)$, on a

$$\int_G \omega(g) f(g) dg = \int_G \omega(g) {}^0f^0(g) dg,$$

avec ${}^0f^0(g) = \int_{K \times K} f(kgk') dk dk', {}^0f^0 \in L^1(K \backslash G / K)$.

Par conséquent la topologie de spectre de $L^1(K \backslash G / K)$ et la topologie \star -faible coïncident sur Ω : la propriété annoncée en résulte.

A tout élément ω de Ω , on peut associer une représentation unitaire irréductible A_ω de G dans un Hilbert H_ω et un vecteur a_ω dans H_ω tel que

$$(A_\omega(g) a_\omega | a_\omega) = \omega(g) \quad \text{et} \quad A_\omega(k) a_\omega = a_\omega, \quad \forall k \in K.$$

Ω est en correspondance bijective avec les représentations de classe I (i. e. représentations unitaires irréductibles possédant un vecteur non nul par K).

L'application $\theta : \Omega \rightarrow \hat{G}$ est un homéomorphisme de Ω sur son image. Celle-ci est ouverte dans \hat{G} .

Montrons d'abord la deuxième assertion. Munissant l'ensemble, \tilde{K} , des classes de représentations unitaires de K dans des espaces de Hilbert séparables, de la topologie de Fell (*inner hull kernel topology*), l'application de restriction est continue de \hat{G} dans \tilde{K} :

$$R : \hat{G} \rightarrow \tilde{K}.$$

Alors $R^{-1}(F) = \bigcup_{\hat{G}} \theta(\Omega)$, où $F = \{A \in \tilde{K}; A \text{ ne contient pas la représentation triviale de } K\}$. K étant compact, il possède la propriété (T) de Kazdan, et F est fermé. Donc $\theta(\Omega)$ est ouvert.

La continuité de θ est évidente. Montrons qu'elle est bi-continue. Soit $\rho : \theta(\Omega) \rightarrow \Omega$ l'application réciproque de θ .

Soit $E \subset \theta(\Omega)$ et $A \in E^-$ (où $-$ désigne l'opération de fermeture dans $\theta(\Omega)$) muni de la topologie induite par celle de \hat{G} . Alors A est faiblement contenu dans E . Soit $\omega = \theta^{-1}(A) = \rho(A)$.

Il existe une suite généralisée φ_i de fonctions de type positif associées à la famille $E \subset \hat{G}$ (i. e. $\forall i, \exists A_i \in E$ et $\xi_i \in H(A_i)$, tels que $\varphi_i(g) = (A_i(g)\xi_i | \xi_i)$) et $\lim_i \varphi_i = \omega$.

$$\text{Posant } {}^0\varphi_i^0(g) = \int_{K \times K} \varphi_i(kgk') dk dk', \text{ on a}$$

$${}^0\varphi_i^0(g) = (A_i(g)P_i\xi_i | P_i\xi_i),$$

où P_i est le projecteur sur l'espace des vecteurs K invariants dans $H(A_i)$. De plus ${}^0\varphi_i^0$ converge uniformément sur tout compact vers ${}^0\omega^0 = \omega$. A partir d'un certain rang, on a ${}^0\varphi_i^0(e) > 0$, et l'on peut normaliser les $P_i\xi_i$. Alors :

$$\frac{{}^0\varphi_i^0}{{}^0\varphi_i^0(e)} = \rho(A_i) = \omega_i \quad \text{et} \quad \omega_i \in \rho(E) \text{ converge dans } \Omega \text{ vers } \omega.$$

On a donc $\rho(E^-) \subset \text{Adh } \rho(E)$, et ρ est continue. On notera ε_G la représentation triviale de G de dimension 1 et indifféremment I ou 1 la fonction sphérique correspondante (i. e. la constante 1).

PROPOSITION V.3. — *Si A est une représentation unitaire irréductible de G de classe I , non triviale, tout 1-cocycle de G pour A est un cobord.*

PINCZON et SIMON [27] ont démontré cette proposition par une méthode algébrique, pour les groupes de Lie semi-simples connexes de centre fini.

Démonstration. — Soit b un 1-cocycle pour A . $b \mid K$ est le cobord d'un vecteur a . Alors $b - \partial a$ est équivalent à b et nul sur K . On supposera donc b nul sur K . On désigne par $\mathcal{K}(K \backslash G/K)$ l'algèbre de convolution des fonctions continues à support compact bi-invariantes par K . $\mathcal{K}(K \backslash G/K)$ est commutative. On définit une application

$$B : \mathcal{K}(K \backslash G/K) \rightarrow H \quad (H \text{ espace de la représentation } A)$$

par

$$B(f) = \int_G f(g) b(g) dg.$$

On désigne par H^K le sous-espace de dimension 1 de H formé des vecteurs invariants par K , et par P le projecteur sur H^K . On a

$$P = \int_K A(k) dk.$$

Alors, $\forall f, h \in \mathcal{K}(K \backslash G/K)$, on a

$$P.B(f \star h) = \left(\int_G f(g) dg \right) PB(h) + \chi(h) PB(f),$$

où χ est le caractère de $L^1(K \backslash G/K)$ associé à la représentation de classe I, A de G . A n'étant pas triviale, il existe $f \in \mathcal{K}(K \backslash G/K)$ tel que

$$\int_G f(g) dg \neq \chi(f).$$

Utilisant la commutativité de $\mathcal{K}(K \backslash G/K)$, on en déduit

$$PB(h) = \frac{I(h) - \chi(h)}{I(f) - \chi(f)} PB(f), \quad \forall h \in L^1(G),$$

$$\left(I(h) = \int_G h(g) dg \right),$$

i. e. :

$$PB(h) = (I(h) - \chi(h)) a, \quad a \in H^K.$$

Alors posant $b + \partial a = b'$ et $B'(f) = \int_G f(g) b'(g) dg$, on a b' nul sur K et $PB' = 0$. Alors, on a, pour toute fonction continue, h , à support compact dans G ,

$$P \int_G h(g) b'(g) dg = 0.$$

En effet, $P \int_G h(g) b'(g) dg = PB'({}^0h^0)$ (définition de ${}^0h^0$: cf. plus haut),
car

$$PA(k) = A(k)P \quad \text{et} \quad b'(kgk') = A(k)b'(g).$$

D'où $Pb' = 0$. Donc b' n'est pas à image totale. Le sous-espace de Hilbert engendré par b' étant stable par A , irréductible, il est nécessairement nul. Donc $b' = 0$ et $b = -\partial a$ est un cobord.

PROPOSITION V.4. — *Dans la correspondance $(H, A, b, \gamma) \leftrightarrow \psi$ de la proposition V.2, supposant vérifiées les conditions équivalentes de (iii), ψ vérifie $\int_K \psi(xky) dk = \psi(x) + \psi(y)$ si, et seulement si, $A \mid K$ ne contient pas la représentation triviale de K .*

Démonstration. — Par hypothèse, b est nul sur K , et ψ bi-invariante par K . On a alors :

$$\begin{aligned} \int_K (A(k)b(g) \mid b(g')) dk &= \int (b(kg) \mid b(g')) dk \\ &= \int_K [\psi(g'^{-1}kg) - \psi(kg) - \psi(g'^{-1})] dk \\ &= \int_K [\psi(g'^{-1}kg) - \psi(g) - \psi(g'^{-1})] dk. \end{aligned}$$

Or, « $A \mid K$ ne contient pas la représentation triviale de K » équivaut à

$$\left(\int_K A(k) dk = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\forall \xi, \xi' \in H, \int_K (A(k)\xi \mid \xi') dk = 0 \right),$$

et $b(G)$ étant total dans H ,

$$\int_K A(k) dk = 0 \Leftrightarrow \int_K (A(k)b(g) \mid b(g')) dk = 0, \quad \forall g, g' \in G.$$

La proposition en résulte.

Nous utiliserons le théorème suivant, dû à GANGOLLI [8] (th. 3.27, 3.28, 3.30). Avec les notations du début du paragraphe :

THÉORÈME V.2 (GANGOLLI [8]). — *Une fonction c. h. c. t. p. réelle, bi-invariante par K , nulle en e , peut s'écrire d'une et une seule façon sous la forme*

$$\psi(g) = Q(g) + \int_{\Omega - \{1\}} (\omega(g) - 1) d\mu(\omega),$$

où Q est une fonction sur G et μ une mesure sur $\Omega - \{1\}$ vérifiant :

(a) μ est positive σ -finie invariante par l'involution $\omega \rightarrow \bar{\omega}$. La mesure du complémentaire d'un voisinage ouvert quelconque de $\{1\}$ dans Ω est finie.

(b) Si V est un voisinage compact de e dans G vérifiant $KVK \subset V$, et $Q_V(\omega)$ la fonction sur Ω , définie par

$$Q_V(\omega) = \left(\int_V (1 - \operatorname{Re} \omega(g)) dg \right) \left(\int_V dg \right),$$

on a

$$\int_{\Omega} Q_V(\omega) d\mu(\omega) < +\infty.$$

(c) Q est une fonction continue de la forme

$$Q(g) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{U_r} (\omega(g) - 1) d\nu_r(\omega) \quad (g \in G),$$

où U_r est une suite décroissante de voisinages compacts de $\{1\}$ telle que $\bigcap_r U_r = \{1\}$ (Ω étant localement compact, les U_r forment une base de voisinages de $\{1\}$), et ν_r une suite de mesures positives bornées invariantes par $\omega \rightarrow \bar{\omega}$. En outre, si μ vérifie (a), (b), et si Q vérifie (c), on a

$$Q \text{ et } \int_{\Omega - \{1\}} (\omega(g) - 1) d\mu(\omega) \text{ c.h.c.t. p. réelles, nulles en } e,$$

et

$$\int_K Q(xky^{-1}) dk + \int_K Q(xky) dk = 2(Q(x) + Q(y))$$

(à la suite d'une lacune dans la démonstration, le résultat de GANGOLLI est légèrement différent).

REMARQUE V.4. — Posons $\psi_1(g) = \int_{\Omega - \{1\}} (\omega(g) - 1) d\mu(\omega)$. Donnons une réalisation d'un triplet associé à ψ_1 . On considère $\int_{\Omega - \{1\}}^{\oplus} H_{\omega} d\mu(\omega)$ et, pour tout g dans G , posons

$$b(g) = \int_{\Omega - \{1\}}^{\oplus} (A_{\omega}(g) a_{\omega} - a_{\omega}) d\mu(\omega).$$

$b(g)$ est bien défini, car $\omega(g) - 1$ est μ -intégrable. b est un 1-cocycle pour $\int_{\Omega - \{1\}}^{\oplus} A_{\omega} d\mu(\omega)$, continu à l'origine, car ψ_1 est continue. Donc b est

continu sur G . Si l'on désigne par H le sous-espace engendré par $b(G)$, et par A la sous-représentation de $\int_{\Omega-\{1\}}^{\oplus} A_{\omega} d\mu(\omega)$ dans H , (H, A, b) est un triplet associé à ψ_1 .

LEMME V.1. — Soit ψ_0 c. h. c. t. p. réelle, nulle en e . Supposons $\psi_0 = \psi_1 + \psi_2$, où ψ_1 et ψ_2 sont c. h. c. t. p. non nulles, réelles, nulles en e . On désigne par (H_i, A_i, b_i) ($i = 0, 1, 2$) le triplet associé à ψ_i . Alors il existe un opérateur d'entrelacement $T_j : H_0 \rightarrow H_j$ ($j = 1, 2$) non nul entre A_0 et A_j qui envoie b_0 sur b_j , b_j étant total dans H_j , il existe une sous-représentation de A_0 équivalente à A_j .

Démonstration. — On considère $H_1 \oplus H_2$ et l'application $b : G \rightarrow H_1 \oplus H_2$ définie par $b(g) = b_1(g) + b_2(g)$. Alors si H désigne le sous-espace de $H_1 \oplus H_2$ engendré par $b(G)$, et A la sous-représentation de $A_1 \oplus A_2$ dans H , (H, A, b) est associé à ψ_0 , et le lemme en résulte immédiatement.

LEMME V.2. — Soit A une représentation irréductible non triviale de G . S'il existe un 1-cocycle non trivial b de G pour A , que l'on peut supposer nul sur K , la fonction $Q = - \|b(g)\|^2$ vérifie la condition (c) du théorème V.2, et il existe une sous-représentation de $A \oplus \bar{A}$ équivalente à A_Q ((H_Q, A_Q, b_Q) étant un triplet associé à Q).

Démonstration. — D'après la proposition V.3, A n'est pas de classe I. D'autre part, soit b un 1-cocycle non trivial que l'on peut supposer nul sur K et $\psi(g) = - \|b(g)\|^2$. Décomposons ψ en utilisant le théorème V.2. On a $\psi = \psi_1 + Q$. D'après le lemme V.1 et la remarque V.4, si $\psi_1 \neq 0$, une sous-représentation de A_{ψ} est isomorphe à une sous-représentation de $\int_{\Omega-\{1\}} A_{\omega} d\mu(\omega)$. Or A_{ψ} (d'après la remarque V.3) est isomorphe à une sous-représentation de $A \oplus \bar{A}$. Or les sous-représentations de $A \oplus \bar{A}$, pour A irréductible, sont isomorphes à A , \bar{A} , $A \oplus \bar{A}$. Or $\int_{\Omega-\{1\}} A_{\omega} d\mu(\omega)$ est une intégrale hilbertienne de représentations ayant une 1-cohomologie triviale. De plus $\Omega - \{1\}$ est localement compact séparable, donc borélien standard. (Alors, on a $Z^1 = \bar{B}^1$ pour cette représentation. Il en est de même pour A_{ψ_1} qui est équivalente à une sous-représentation de A_{ψ} . Comme $A_{\psi} \simeq A \oplus \bar{A}$ ou A ou \bar{A} , on en déduit aisément que $Z^1(G, A) = \bar{B}^1(G, A)$. Si on a $B^1(G, A) \neq \bar{B}^1(G, A)$, A contient faiblement la représentation triviale (cf. GUICHARDET [14], th. 1). Par restric-

tion, il en est de même pour $A|_K$. Alors $A|_K$ contient la représentation triviale de K , et A est de classe I . Alors $B^1(G, A) = \bar{B}^1(G, A) = Z^1(G, A)$ lorsque $\psi_1 \neq 0$. Donc $\psi = Q$, et une sous-représentation de $A \oplus \bar{A}$ est isomorphe à A_Q d'après la remarque V.3.

LEMME V.3. — Si Q est une fonction vérifiant la condition (c) du théorème V.2, tous les points du support de A_Q dans \hat{G} sont non séparés de ε_G (où l'on désigne par (H_Q, A_Q, b_Q) un triplet associé à Q).

Preuve. — Réalisons, comme dans la proposition V.2 (b), le triplet (H_Q, A_Q, b_Q) . C'est-à-dire : posons \mathcal{S} espace vectoriel complexe des mesures discrètes sur G de masse nulle, H_Q le séparé complété de \mathcal{S} pour le semi-produit scalaire :

$$\begin{aligned} &\langle \sum_{i=1}^n c_i \delta_{g_i}, \sum_{j=1}^m c'_j \delta_{g_j} \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m} c_i c'_j Q(g_j'^{-1} g_i) (\sum_{i=1}^n c_i = \sum_{j=1}^m c'_j = 0), \end{aligned}$$

$\Lambda \mathcal{S} \rightarrow H_Q$ l'application canonique. On définit $T_g \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ par

$$T_g(\sum_{i=1}^n c_i \delta_{g_i}) = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{gg_i}.$$

Alors $A_Q(g) \Lambda = \Lambda T_g$ et $b_Q(g) = \Lambda(\delta_g - \delta_e)$.

On notera encore \mathcal{I} l'image canonique de \mathcal{S} dans H_Q , et μ les éléments de cette image. Avec ces notations, \mathcal{I} est dense dans H_Q . Soit

$$\mu = \sum_{i=1}^n c_i \delta_{g_i} \in \mathcal{I}.$$

Alors :

$$(A_Q(g) \mu | \mu) = \sum_{i, j=1}^n c_i \bar{c}_j Q(g_j^{-1} g g_i).$$

Or :

$$Q(g) = \lim_{r \rightarrow +\infty} (\varphi_r(g) - \varphi_r(e)),$$

où

$$\varphi_r(g) = \int_{U_r} (\omega(g)) d\nu_r(\omega)$$

(avec les notations du théorème V.2), la limite étant uniforme sur tout compact. D'où :

$$\begin{aligned} (A_Q(g) \mu | \mu) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{i, j=1}^n c_i \bar{c}_j (\varphi_r(g_j^{-1} g g_i) - \varphi_r(e)) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{i, j=1}^n c_i \bar{c}_j \varphi_r(g_j^{-1} g g_i), \end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^n c_i = 0$.

La limite est uniforme sur les compacts de G . Désignons par (H_r, A_r, a_r) des triplets associés aux fonctions continues de type positif φ_r . On a

$$\sum_{i=1}^n c_i \bar{c}_j \varphi_r(g_j^{-1} g g_i) = (A_r(g) f_r | f_r),$$

où $f_r = \sum_{i=1}^n c_i A_r(g_i) a_r \in H_r$.

Par suite, $(A_Q(g) \mu | \mu)$ est limite uniforme, sur tout compact de G , de fonctions de type positif associée à la famille $(A_r)_{r \geq n}$ pour tout n . Par suite, pour tout n , A_Q est faiblement contenue dans la famille $(A_r)_{r \geq n}$, puisque \mathcal{S} est dense dans H_Q . Or, pour tout r , A_r est faiblement contenue dans $\text{supp } v_r$, donc dans U_r ($\text{supp } v_r$ et U_r étant regardés comme des parties de \hat{G}). En effet, d'après la remarque V.4, A_r est une sous-représentation de $\int_{\Omega}^{\oplus} A_{\omega} d v_r(\omega)$. Par suite, $(A_r)_{r \geq n}$ est faiblement contenue dans U_n . Donc, pour tout n , A_Q est faiblement contenue dans U_n . En particulier, si A_0 est une représentation irréductible faiblement contenue dans A_Q , A_0 est faiblement contenue dans U_n , pour tout n .

Or la base de filtre $(U_r)_{r \in \mathbb{N}}$ (où les U_r sont regardés comme parties de \hat{G}) converge vers ε_G . En effet, l'injection canonique de Ω dans \hat{G} est continue, et (U_r) converge vers I dans Ω . On va montrer que tout voisinage de ε_G rencontre tout voisinage de A_0 .

Soit donc V (resp. W) un voisinage de ε_G (resp. A_0), dans \hat{G} . Alors $((U_r)$ converge vers ε_G dans \hat{G}) implique $(\exists n \in \mathbb{N}, U_n \subset V)$. D'autre part, A_0 est faiblement contenu dans U_n . D'où $W \cap U_n \neq \emptyset$. Alors $V \cap W \neq \emptyset$ puisque $U_n \cap W \subset V \cap W$.

On déduit alors des lemmes V.2 et V.3, le théorème suivant.

THÉORÈME V.3. — *Si A est une représentation unitaire irréductible de G telle que $H^1(G, A) \neq 0$, alors A est non séparée de ε_G dans \hat{G} , muni de la topologie de Fell.*

En introduisant la propriété (P) de GUICHARDET [14], on en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE V.1. — *La propriété (P) est vraie pour tout G , séparable, unimodulaire, de type I, contenant un sous-groupe compact K telle que $L^1(K \backslash G/K)$ soit commutative.*

PROPOSITION V.5. — *Soient (G_1, K_1) (G_2, K_2) , deux couples vérifiant les hypothèses du début du paragraphe V.B. Soit une représentation unitaire irréductible de $G_1 \times G_2$ du type $A_1 \otimes A_2$ avec A_i représentation unitaire*

irréductible de G_i dans H_i ($i = 1$ et 2). Alors si A_1 et A_2 sont non triviales, on a $H^1(G_1 \times G_2, A_1 \otimes A_2) = 0$.

Démonstration. — Soit donc A_1 (resp. A_2) une représentation irréductible non triviale de G_1 (resp. G_2). Distinguons deux cas :

(a) A_1 est non triviale de classe I . Alors $H^1(G_1, A_1) = 0$, donc $H^1(G_1, A_1 \otimes A_2 |_{G_1}) = 0$. De plus, G_1 est normal dans $G_1 \times G_2$, et $H_1 \otimes H_2$ n'admet pas de vecteur non nul invariant par G_1 . D'où $K^1(G_1 \times G_2, A_1 \otimes A_2) = 0$ (cf. GUICHARDET [13], lemme 1).

(b) Supposons que H_1 ne contienne pas de vecteur non nul invariant par K_1 (i. e. A_1 n'est pas de classe I).

Alors il en est de même de $H_1 \otimes H_2$. Or K_1 est normal dans $K_1 \times G_2$, et K_1 compact implique

$$H^1(K_1, A_1 \otimes A_2 |_{K_1}) = 0.$$

D'où

$$H^1(K_1 \times G_2, A_1 \otimes A_2 |_{K_1 \times G_2}) = 0$$

(cf. GUICHARDET [13], lemme 1). Soit alors $a \in Z^1(G_1 \times G_2, A_1 \otimes A_2)$. Alors $a |_{K_1 \times G_2}$, et *a fortiori* $a |_{G_2}$, est un cobord. G_2 étant normal dans $G_1 \times G_2$, et A_2 ne contenant pas la représentation triviale de G_2 , a est un cobord, et

$$H^1(G_1 \times G_2, A_1 \otimes A_2) = 0.$$

REMARQUE V.5. — Si A_1 est triviale et A_2 non triviale, alors on a

$$H^1(G_1 \times G_2, A_1 \otimes A_2) \simeq H^1(G_2, A_2)$$

(cf. GUICHARDET [13]).

(C) Cohomologie des groupes de Lie semi-simples, réels, connexes

LEMME V.4. — Soit G un groupe de Lie, semi-simple, réel, connexe, de centre $Z = Z(G)$, et A une représentation unitaire irréductible de G dans un Hilbert H telle que $H^1(G, A) \neq 0$. Alors A est triviale sur Z . Notant $G' = G/Z$, et A' la représentation de G' déduite de A , on a un isomorphisme canonique

$$H^1(G, A) \simeq H^1(G', A').$$

Démonstration. — Si $A | Z$ n'est pas triviale, c'est un multiple d'un caractère non trivial de Z . Alors $H^1(Z, A) = 0$. D'où $H^1(G, A) = 0$ car $A | Z$ ne contient pas la représentation triviale, et Z est normal dans G : Une contradiction qui montre que A passe au quotient.

On a alors une suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(G', A') \xrightarrow{W} H^1(G, A) \xrightarrow{W'} \text{Hom}_G(Z, H),$$

où $\text{Hom}_G(Z, H)$ est l'ensemble des morphismes continus $f: G \rightarrow H$ vérifiant

$$f(gzg^{-1}) = f(z) = A(g)f(z), \quad \forall g \in G, \quad \forall z \in Z.$$

Si p désigne la projection $G \rightarrow G/Z$, on définit

$$V: b \in Z^1(G', A') \rightarrow b \circ p \in Z^1(G, A)$$

et

$$V': Z^1(G, A) \rightarrow \text{Hom}_G(Z, H)$$

par restriction. W et W' s'en déduisent par des passages au quotient (cf. GUICHARDET [13]). Si $\text{Hom}_G(Z, H) \neq 0$, A est triviale, et l'on a

$$H^1(G', A') = H^1(G, A) = 0,$$

car G est semi-simple. Si $\text{Hom}_G(Z, H) = 0$, alors W est l'isomorphisme cherché.

REMARQUE V.6. — Le lemme est encore vrai lorsqu'on remplace Z par un de ses sous-groupes.

THÉORÈME V.4. — *Si G est un groupe de Lie simple, réel, connexe, d'algèbre de Lie différente de $\mathfrak{so}(n, 1)$ et $\mathfrak{su}(n, 1)$, toute représentation unitaire irréductible de G admet une 1-cohomologie triviale.*

Démonstration. — Le lemme V.4 permet de se ramener au cas où G est de centre fini. D'après le théorème V.1, il suffit de montrer que G possède la propriété (T). Si G est de rang supérieur ou égal à 2, cela résulte de WANG [33]. Supposons G de rang 1, d'algèbre de Lie distincte de $\mathfrak{so}(n, 1)$, $\mathfrak{su}(n, 1)$. Soient $G = KAN$ une décomposition d'Iwasa de G , \mathfrak{o} l'algèbre de Lie de A , et Ω comme dans le paragraphe V (B) (notations). D'après HELDASON [19], les éléments de Ω sont paramétrés par des éléments de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ (complexifié du dual de \mathfrak{a}); autrement dit, Ω s'identifie à une partie de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$. La topologie de Ω correspondant à la topologie naturelle de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ s'appelle « topologie des paramètres ». D'après WARNER ([36] (vol. 2, p. 337), cette topologie coïncide avec la topologie induite sur Ω par la topologie naturelle sur le spectre de l'algèbre de Banach commutative $L^1(K \backslash G/K)$ (Ω est cette fois regardé comme une partie de spectre de $L^1(K \backslash G/K)$). D'autre part, d'après ce qui a été dit au début du paragraphe V (B), l'application canonique de Ω (muni de cette topologie de

spectre) dans \hat{G} est injective, bicontinue sur son image (ensemble des représentations unitaires irréductibles de classe I) qui est ouverte. Comme KOSTANT [24] montre que la fonction 1 est isolée dans Ω pour la topologie des paramètres, on voit que ε_G est isolé dans \hat{G} . Ceci achève la démonstration.

LEMME V.5. — Si G est simple connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n, 1)$ ou $\mathfrak{su}(n, 1)$, il existe au moins une représentation irréductible, et au plus deux, ayant une 1-cohomologie non triviale. S'il en existe une seule A , elle est isomorphe à sa conjuguée, et $\dim H^1(G, A) \leq 2$. Si A est la complexifiée d'une représentation réelle, on a $\dim H^1(G, A) = 1$. S'il en existe deux, A_1 et A_2 , elles sont conjuguées l'une de l'autre et

$$\dim H^1(G, A_1) = \dim H^1(G, A_2) = 1.$$

Démonstration. — Grâce au lemme V.4, on se ramène au cas où $G = SO_e(n, 1)$ ou $SU(n, 1)$. Si K est un sous-groupe compact maximal de G , le couple (G, K) vérifie les hypothèses du début du paragraphe V(B). FARAUT et HARZALLAH ([6], chap. II, § VII) ont montré qu'il existe une, et une seule, fonction non nulle vérifiant la condition (c) du théorème V.2 (à un scalaire réel positif multiplicatif près) et dans ce cas, Q vérifie

$$\int_K Q(xky) dk = Q(x) + Q(y).$$

Alors si, (H_Q, A_Q, b_Q) est le triplet associé à Q , A_Q ne contient pas la représentation triviale de K d'après la proposition V.4, et b_Q , qui est nul sur K , n'est pas un cobord. b_Q n'est pas non plus limite de cobords. En effet, si $b_Q = \lim_n \partial \xi_n$, $\xi_n \in H_Q$, on a

$$0 = \int_K b_Q(k) dk = \lim_n \int_K A(k) \xi_n - \xi_n dk.$$

Comme H_Q ne contient pas de vecteurs non nuls invariants par K $\int_K A(k) \xi_n dk = 0$, et l'on a $\lim_n \xi_n = 0$. Ce qui implique $b_Q = 0$: une contradiction avec Q non nulle.

Utilisant la désintégration de A_Q sur le dual de G (G est de type I), on voit qu'il existe au moins une représentation irréductible de G telle que $H^1(G, A) \neq 0$. Soit A une telle représentation dans un Hilbert H , A n'est pas de classe I (cf. Prop. V.3). Alors $H^1(G, A) \simeq Z_K^1(G, A)$, où $Z_K^1(G, A)$ désigne l'ensemble des cocycles de G pour A , nuls sur K .

Soit $b \in Z_K^1(G, A)$ non nul. Alors le lemme V.2 montre que $-\|b(g)\|^2$ diffère de Q par un scalaire réel positif multiplicatif. On peut, en multipliant b par un scalaire, supposer $-\|b(g)\|^2 = Q$. Alors la remarque V.3 montre que la sous-représentation V de $A \oplus \bar{A}$ dans le sous-espace E de $H \oplus \bar{H}$, engendré par les $b(g) + \bar{b}(g) = B(g)$, est isomorphe à A_Q , car on a $(E, V, B) \simeq (H_Q, A_Q, b_Q)$. Alors, si A' est une autre représentation unitaire irréductible de G telle que $H^1(G, A') \neq 0$, il existe une sous-représentation de $A' \oplus \bar{A}'$ isomorphe à une sous-représentation de $A \oplus \bar{A}$. Étudiant le commutant de $A \oplus \bar{A}$ (resp. $A' \oplus \bar{A}'$), on voit que les sous-représentations de $A \oplus \bar{A}$ (resp. $A' \oplus \bar{A}'$) sont isomorphes à $A, \bar{A}, A \oplus \bar{A}$ (resp. $A', \bar{A}', A' \oplus \bar{A}'$). Alors nécessairement, on a $A \simeq A'$ ou $\bar{A} \simeq A'$.

Distinguons maintenant deux cas :

(a) $A \not\simeq \bar{A}$.

Alors A_Q qui est autoconjuguée comme complexifiée d'une représentation réelle (cf. construction) est isomorphe à $A \oplus \bar{A}$, et (H_Q, A_Q, b_Q) est isomorphe à $(H \oplus \bar{H}, A \oplus \bar{A}, b \oplus \bar{b})$. Si b' est un autre élément de $Z_K^1(G, A)$, après multiplication de b' par un scalaire, on a

$$(H_Q, A_Q, b_Q) \simeq (H \oplus \bar{H}, A \oplus \bar{A}, b' \oplus \bar{b}').$$

Alors il existe un élément du commutant de $A \oplus \bar{A}$ qui envoie $b \oplus \bar{b}$ sur $b' \oplus \bar{b}'$. Comme $A \not\simeq \bar{A}$ et A irréductible, le commutant de $A \oplus \bar{A}$ est de dimension 2, et est formé des combinaisons linéaires des projecteurs de $K \oplus \bar{K}$ sur K et \bar{H} . D'où $b = \lambda b'$, $\lambda \in G$ et

$$\dim H^1(G, A) = \dim Z_K^1(G, A) = 1;$$

il en est de même pour \bar{A} .

(b) $A \simeq \bar{A}$.

(α) Si $A_Q \simeq A \oplus \bar{A}$, comme dans (a), si b et b' sont deux cocycles non triviaux nuls sur K , il existe un élément du commutant de $A \oplus \bar{A}$ qui envoie $b \oplus \bar{b}$ sur $b' \oplus \bar{b}'$.

(β) Si $A_Q \simeq A \simeq \bar{A}$, on a un isomorphisme entre (E, V, B) et (E', V', B') (cf. notations ci-dessus) et $V \simeq V' \simeq A$. En appelant W (resp. W') la sous-représentation de $A \oplus \bar{A}$ dans E^\perp (resp. dans E'^\perp), on a $W \simeq W' \simeq A$. On peut donc construire un élément C du commutant de $A \oplus \bar{A}$ envoyant $b + \bar{b}$ sur $b' + \bar{b}'$. Si $A \simeq \bar{A}$, un élément du commutant de $A \oplus \bar{A}$ peut

s'écrire comme combinaison linéaire de $P_H, P_{\bar{H}}, I, J$, où P_H (resp. $P_{\bar{H}}$) est le projecteur de $H \oplus \bar{H}$ sur H (resp. \bar{H}), I envoie \bar{H} sur 0, H sur \bar{H} et entrelace A et \bar{A} , et J est défini par les relations $IJ = P_{\bar{H}}, JI = P_H$. Alors dans les deux cas (α) et (β), on a

$$b' = P_H C(b + \bar{b}),$$

$$C = \lambda_1 P_H + \lambda_2 P_{\bar{H}} + \lambda_3 I + \lambda_4 J.$$

D'où $b' = \lambda_1 b + \lambda_4 J \bar{b}$. Et

$$\dim H^1(G, A) = \dim Z_K^1(G, A) \leq 2.$$

Si l'on suppose en outre que A est la complexifiée d'une représentation réelle $A_{\mathbf{R}}$, on a $H = H_{\mathbf{R}} + i H_{\mathbf{R}}$. Soit alors $b \in Z_K^1(G, A)$, $b \neq 0$. Alors $b = b_1 + i b_2$ avec $b_1, b_2 \in Z_K^1(G, A_{\mathbf{R}})$. Supposons $b_1 \neq 0$ par exemple. Alors on voit facilement que (H, A, b_1) est isomorphe à $A_{\mathcal{Q}}$. On est donc dans le cas (b). On peut alors choisir J entrelaçant A et \bar{A} de telle sorte que $J(b_1) = b_1$. Alors tout autre élément de $Z_K^1(G, A)$ s'écrit

$$b' = \lambda_1 b_1 + \lambda_4 (J b_1) = (\lambda_1 + \lambda_4) b_1, \lambda_1, \lambda_4 \in C_1.$$

D'où $\dim H^1(G, A) = 1$.

REMARQUE V.7. — En terme de représentation réelles, il est facile de voir que : si G est d'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(n, 1)$ ou $\mathfrak{su}(n, 1)$, il existe une, et une seule, représentation irréductible avec H^1 non nul, qui est alors de dimension 1.

THÉORÈME V.5. — Si G est un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie.

(a) $\mathfrak{so}(2, 1) \simeq \mathfrak{su}(1, 1)$ ou $\mathfrak{su}(n, 1)$, $n \geq 2$, il existe exactement deux représentations unitaires irréductibles, conjuguées l'une de l'autre ayant une 1-cohomologie non nulle.

(b) $\mathfrak{so}(n, 1)$, $n \geq 3$. Il existe exactement une représentation unitaire irréductible (complexifiée d'une représentation réelle) ayant une 1-cohomologie non nulle.

La dimension du H^1 de ces représentations est égale à 1. Les représentations intervenant dans le théorème seront précisées au cours de la démonstration.

Démonstration :

1° Grâce au lemme V.4, on se ramène au cas où G est de centre fini. Le cas où G est d'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2, 1)$ a déjà été traité (cf. PINCZON

et SIMON [27], remarque 13). Prenant $G = SL(2, \mathbf{R})$, il existe deux représentations unitaires irréductibles de G , π_1^+ et π_1^- dans la classification de Pukanszky vérifiant $H^1 \neq 0$. De plus,

$$\dim H^1(G, \pi_1^+) = \dim(H^1, \pi_1^-) = 1$$

et π_1^+ et π_1^- sont dans la série discrète. Ce cas sera toujours exclu dans la suite.

2° Soient $G = KAN$ une décomposition d'Iwasawa de G , \tilde{G} le recouvrement universel de G , $p: \tilde{G} \rightarrow G$ la projection canonique, \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G , ρ une représentation unitaire irréductible de G dans un espace de Hilbert H .

Soit H_ω (resp. H_K) l'espace des vecteurs analytiques (resp. K -finis) de ρ . On désigne par ρ_ω (resp. ρ_K) la représentation de \mathfrak{g} dans H_ω (resp. H_K), par $\tilde{\rho}$ la représentation de \tilde{G} dans H définie par $\tilde{\rho} = \rho \circ p$. Il est clair que H_ω est l'espace des vecteurs analytiques de $\tilde{\rho}$.

Considérons

$$H^1(\mathfrak{g}, \rho_K) = Z^1(\mathfrak{g}, \rho_K)/B^1(\mathfrak{g}, \rho_K),$$

$$H^1(\mathfrak{g}, \rho_\omega) = Z^1(\mathfrak{g}, \rho_\omega)/B^1(\mathfrak{g}, \rho_\omega).$$

J'affirme que, s'il existe $B \in Z^1(\mathfrak{g}, \rho_K)$, B non nul et nul sur \mathfrak{k} , et si H ne contient pas de vecteur non nul invariant par K , alors $H^1(G, \rho) \neq 0$.

En effet, s'il existe un tel B , alors $H^1(\mathfrak{g}, \rho_K) \neq 0$. Or, d'après PINCZON et SIMON ([27], lemme 7 et prop. 5), on a

$$H^1(\mathfrak{g}, \rho_K) \subset H^1(\mathfrak{g}, \rho_\omega)$$

et

$$H^1(\tilde{H}, \tilde{\rho}) \simeq H^1(\mathfrak{g}, \rho_\omega).$$

Donc $H^1(\tilde{G}, \tilde{\rho}) \neq 0$. Mais alors, d'après le lemme V.4, on a $H^1(G, \rho) \simeq H^1(\tilde{G}, \tilde{\rho})$, et l'affirmation est justifiée.

D'après le lemme V.5, il suffit, pour prouver le théorème, d'exhiber :

- cas (a) : deux représentations ρ^+ et ρ^- unitaires irréductibles de G avec H^1 non nul;
- cas (b) : une représentation ρ de G unitaire irréductible de G , complexifiée d'une représentation réelle ayant une 1-cohomologie non nulle.

3° Pour ce faire, introduisons quelques notations supplémentaires.

Soit M le centralisateur de A dans K . Soient \mathfrak{g} , \mathfrak{k} , \mathfrak{a} , \mathfrak{m} et \mathfrak{n} les algèbres de Lie respectives de G , K , A , M et N . Si $g \in G$, alors

$$g = k(g) \cdot \exp(H(g)) \cdot n(g),$$

où $k(g) \in K$, $K(g) \in \mathfrak{a}$ et $n(g) \in N$ sont uniques.

Soient \mathfrak{a}^* le dual de \mathfrak{a} et $\gamma \in \mathfrak{a}^* - \{0\}$; γ est appelée racine restreinte si

$$\mathfrak{g}_\gamma = \{X \in \mathfrak{g}; [H, X] = \gamma(H) X, \quad \forall H \in \mathfrak{a}\}$$

est non nul. Soit $m_\gamma = \dim \mathfrak{g}_\gamma$. On note Δ l'ensemble des racines restreintes. Alors $\mathfrak{g} = \sum_{\gamma \in \Delta} \mathfrak{g}_\gamma + \mathfrak{m} + \mathfrak{a}$. Nous avons un ordre sur \mathfrak{a}^* tel que, si Δ^+ est l'ensemble des racines positives,

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha.$$

On pose

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} m_\alpha \alpha.$$

Si $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, on définit un caractère non unitaire de MAN par

$$x = man \rightarrow x^\lambda = \exp(\lambda(\log a)).$$

Nous notons dk la mesure sur $K/M \simeq G/MAN$, K invariante et normalisée. Dans la suite, on fixe $\lambda = 2\mu$. Soit H l'espace de Hilbert, complété de l'espace des fonctions continues $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$(1) \quad f(gx) = x^{-\lambda} f(g) \quad \text{si } x \in MAN,$$

pour la norme $\left(\int_{K/M} |f(k)|^2 dk \right)^{1/2} < +\infty$.

Soit π l'action de G sur H induite par les translations à gauche (cf. WALLACH [33], lemme 8.4.2). Si X est l'espace des vecteurs K finis de H , les éléments de X sont en fait des fonctions analytiques. On voit facilement que les parties réelles et imaginaires de ces fonctions sont également des vecteurs K finis. π induit sur X une représentation de $U(\mathfrak{g})$ (algèbre enveloppante complexifiée de \mathfrak{g}) qu'on notera encore π .

Soit \hat{K} le dual de K . Si $\theta: K \rightarrow GL(V)$ est une représentation de K , soit $V^M = \{v \in V; \theta(m)v = v, \forall m \in M\}$. Pour $\gamma \in \hat{K}$, on fixe $(\pi_\gamma, V_\gamma) \in \gamma$. Soit $\hat{K}_0 = \{\gamma \in \hat{K}; V_\gamma^M \neq 0\}$. Comme

$$1^\circ \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n, 1), \quad n \geq 3,$$

ou

$$2^\circ \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n, 1), \quad n \geq 2,$$

on a $\dim \mathfrak{a} = 1$.

Dans le premier cas, $\Delta = \{-\alpha, \alpha\}$, $m_\alpha = n-1$, et l'on a $m_{2\alpha} = 0$.

Dans le second, $\Delta = \{-2\alpha, -\alpha, \alpha, 2\alpha\}$, et $m_\alpha = 2n-2$, $m_{2\alpha} = 1$.

Dans les deux cas, $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{2\alpha}$.

Alors $2\mu = (m_\alpha + 2m_{2\alpha})\alpha$. On sait, d'après KOSTANT [1] que l'on a $X \simeq \bigoplus_{\gamma \in \hat{K}_0} V_\gamma$ en tant que K -module. D'autre part, on a une paramétrisation naturelle de \hat{K}_0 donnée comme suit :

1° si $m_{2\alpha} = 0$, \hat{K}_0 peut être identifié à l'ensemble des entiers positifs ou nuls (à 0 correspond la représentation triviale de K);

2° si $m_{2\alpha} = 1$, \hat{K}_0 peut être identifié à $\{(m, k); k \text{ et } m \text{ entiers, } |k| \leq m, \text{ et } m-k \text{ pair}\}$ (à (0,0) correspond la représentation triviale de K).

Choisissons $H \in \mathfrak{a}$ tel que $\alpha(H) = 1$. Il résulte de N. R. WALLACH et K. JOHNSON [33] (th. 2.2) qu'il existe une base $\{e_\gamma \mid \gamma \in \hat{K}_0\}$ de X^M telle que $e_\gamma \in V_\gamma$, vérifiant :

$$1^\circ \text{ Si } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n, 1), \quad n \geq 3, \quad \pi(H)e_0 = (n-1)e_1;$$

$$2^\circ \text{ Si } \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n, 1), \quad n \geq 2, \quad \pi(H)e_{0,0} = n(e_{1,1} + e_{1,-1}).$$

De plus :

1° (TAKAHASHI [30]) Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n, 1)$, $n \geq 3$, π laisse stable $W_0 = \bigoplus_{j=1}^\infty V_j$; $\pi \mid W_0$ est irréductible, et il existe sur W_0 un produit scalaire défini positif invariant par \mathfrak{g} . De plus, X/W_0 est un \mathfrak{g} -module trivial.

2° (K. JOHNSON et N. R. WALLACH [23], th. 4.1) Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n, 1)$, $n \geq 2$, π laisse stable $U_0 = \bigoplus_{m-|k|>0} V_{m,k}$,

$$F_0^+ = \bigoplus_{m+k>0} V_{m,k},$$

$$F_0^- = \bigoplus_{m-k>0} V_{m,k},$$

F_0^+/U_0 et F_0^-/U_0 sont des $U(\mathfrak{g})$ -modules irréductibles munis d'un produit scalaire défini positif invariant. De plus, $X/F_0^+ + F_0^-$ est un \mathfrak{g} -module trivial.

J'affirme que si G est un groupe de Lie connexe de centre fini d'algèbre de Lie :

1° Si $\mathfrak{so}(n, 1)$, $n \geq 3$, il existe une représentation unitaire irréductible ρ de G ayant W_0 comme espace de vecteurs K -finis, et telle que la représenta-

tion ρ_K de $U(\mathfrak{g})$ sur W_0 soit identique à $\pi|_{W_0}$. ρ est complexifiée d'une représentation réelle, et $\dim H^1(G, \rho) = 1$.

2° Si $\mathfrak{su}(n, 1)$, $n \geq 2$, il existe une représentation unitaire irréductible ρ^+ (resp. ρ^-) de G ayant F_0^+/U_0 (resp. F_0^-/U_0) comme espace de vecteurs K -finis, et telle que la représentation ρ_K^+ (resp. ρ_K^-) de $U(\mathfrak{g})$ soit identique au sous-quotient de π sur F_0^+/U_0 (resp. F_0^-/U_0).

Existence de ρ (resp. ρ^\pm). — D'après WARNER ([36], vol. 1, p. 330), on déduit l'existence de $\tilde{\rho}$ (resp. $\tilde{\rho}^\pm$), représentation unitaire irréductible de \tilde{G} contenant W_0 (resp. F_0^\pm/U_0) comme sous-espace stable et dense de vecteurs C^∞ , l'action de $U(\mathfrak{g})$ sur cet espace étant la même que celle donnée par restriction de π (resp. les sous-quotients de π).

On voit facilement que l'action de $\tilde{K} = p^{-1}(K)$ sur W_0 (resp. F_0^\pm/U_0) provient de l'action de K sur ces espaces. D'où $\tilde{\rho}$ (resp. $\tilde{\rho}^\pm$) admet des vecteurs invariants par $\tilde{M} = p^{-1}(M)$. Or le centre de \tilde{G} est contenu dans \tilde{M} . Par suite, $\tilde{\rho}$ (resp. $\tilde{\rho}^\pm$) est triviale sur le centre, et permet de définir une représentation de $G : \rho$ (resp. ρ^\pm). Utilisant WARNER ([36], vol. 1 (prop. 4.4, 3.4)), on voit que ρ (resp. ρ^\pm) ainsi définie admet W_0 (resp. F_0^\pm/U_0) comme espace de vecteur K -finis.

De plus, ρ est complexifiée d'une représentation réelle. En effet, on a $W_0 = (W_0)_{\mathbf{R}} \oplus i(W_0)_{\mathbf{R}}$, où $(W_0)_{\mathbf{R}}$ désigne les éléments de W_0 à valeurs réelles, et $(W_0)_{\mathbf{R}}$ est laissé stable par \mathfrak{g} .

Il ne reste plus qu'à démontrer que $H^1(G, \rho)$ (resp. $H^1(G, \rho^\pm)$) est non nul. En effet, si cela est vrai, il résulte des propriétés de ρ et du lemme V.5 que $\dim H^1(G, \rho) = 1$ (resp. $\dim H^1(G, \rho^\pm) = 1$). Grâce au point 2° de la démonstration, il suffit de trouver $B \in Z^1(\mathfrak{g}, \rho_K)$ (resp. $B \in Z^1(\mathfrak{g}, \rho_K^\pm)$) non nul, nul sur \mathfrak{k} . En effet, ρ (resp. ρ^\pm) n'a pas de vecteur non nul invariant par K .

1° On pose $B(X) = \pi(X)e_0, \forall X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n, 1), n \geq 3$. On vérifie aisément :

$$B \in Z^1(\mathfrak{g}, \rho_K) \quad (\text{car } X/W_0 \text{ est un } \mathfrak{g}\text{-module trivial),}$$

$$B(\mathfrak{k}) = 0 \quad (e_0 \in V_0),$$

$$B(H) = (n-1)e_1.$$

2° On pose $B(X) = \pi(X)e_{0,0}, \forall X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n, 1), n \geq 2$. On vérifie aisément :

$$B \in Z^1(\mathfrak{g}, \pi) \quad \text{et même } B \in B^1(\mathfrak{g}, \pi),$$

$$B(\mathfrak{k}) = 0 \quad (e_{0,0} \in V_{0,0}),$$

$$B(\mathfrak{g}) \subset F_0^+ + F_0^- \quad \text{car } X/F_0^+ + F_0^- \text{ est un } \mathfrak{g}\text{-module trivial.}$$

D'autre part :

$$(B(H) = n(e_{1,1} + e_{1,-1})) \text{ implique } (B(\mathfrak{g}) \not\subset F_0^+, F_0^-, U_0).$$

Or $F_0^+ \cap F_0^- = U_0$. Donc :

$$(F_0^+ + F_0^-)/U_0 = F_0^+/U_0 \oplus F_0^-/U_0.$$

Alors, par passage au quotient par U_0 , on trouve $B^\pm \in Z^1(\mathfrak{g}, \rho_K^\pm)$, B^\pm nul sur \mathfrak{k} , non nul. Ceci achève la démonstration.

REMARQUE V.8. — D'après K. JOHNSON [22], sauf si l'algèbre de Lie de G est $\mathfrak{so}(2,1) \simeq \mathfrak{su}(1,1)$, ρ (resp. ρ^\pm) n'est pas dans la série discrète.

PROPOSITION V.6. — *Sauf si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3,1) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, les représentations de G ayant une 1-cohomologie non nulle ne sont pas dans la série principale. Rappelons que si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3,1)$, prenant $G = SL(2, \mathbb{C})$, ρ est dans la série principale, ($\rho = (2, 0)$) dans la paramétrisation de GEI'FAND GRAEV et VILENKIN [9].*

Démonstration. — Nous étudions le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n,1)$, $n \neq 3$, le cas de $\mathfrak{su}(n,1)$ se traitant de manière analogue.

D'après PINCZON et SIMON ([26], prop. 1), si L est une représentation unitaire de dimension finie de MAN , on a

$$H^1(G, \text{Ind}_{MAN \uparrow G} L) \simeq H^1(MAN, L\delta^{1/2}),$$

où δ est le module de MAN et $L\delta^{1/2}$ est la représentation de MAN dans l'espace de L donnée par

$$L\delta^{1/2}(man) = L(man)\delta^{1/2}(man).$$

Ici $\delta(man) = \exp(n-1)t$ avec $a = \exp tH$.

Montrons que si $n \neq 3$, $H^1(MAN, L\delta^{1/2})$ est nul. D'abord L est de la forme $L(man) = \Lambda(a)\mu(m)$, où μ est une représentation unitaire irréductible de M , et Λ un caractère unitaire de A .

On a la suite exacte (cf. GUICHARDET [13]) :

$$0 \rightarrow H^1(A, \Lambda\delta^{1/2}) \rightarrow H^1(AN, \Lambda\delta^{1/2}) \rightarrow \text{Hom}_A(N, \mathbb{C}),$$

A étant commutatif, et $\Lambda\delta^{1/2}$ étant un caractère non trivial de A , on a $H^1(A, \Lambda\delta^{1/2}) = 0$. D'autre part, si $\varphi \in \text{Hom}_A(N, \mathbb{C})$, on a

$$\varphi(ana^{-1}) = \Lambda\delta^{1/2}(a)\varphi(n).$$

En différentiant à l'origine, appelant f la forme linéaire sur $\mathfrak{n} = \text{Lie } N$, tangente à φ à l'origine, on a

$$f(\text{Ada } X) = \Lambda \delta^{1/2}(a) f(X), \quad \forall X \in \mathfrak{n}.$$

Or $\text{Ada } X = e^t X$ si $a = \exp t H$.

Si φ est non nul, f est non nul, et l'on doit avoir

$$e^t = \Lambda \delta^{1/2}(\exp t H),$$

i. e. : $e^t = \exp((n-1)/2) t \Lambda(\exp t H)$. Ceci n'est possible que si $n = 3$ et Λ trivial.

D'où, pour $n \neq 3$, $H^1(AN, \Lambda \delta^{1/2}) = 0$, $L\delta^{1/2}$ restreinte à AN ne contenant pas la représentation triviale (c'est un multiple de $\Lambda \delta^{1/2}$), on en déduit $H^1(MAN, L\delta^{1/2}) = 0$ pour $n \neq 3$.

Il en résulte que si $n \neq 3$, une représentation irréductible de $SO_e(n, \mathbb{1})$ de la série principale est sans cohomologie. Ce qui achève la démonstration de la proposition.

(D) 1-cohomologie des groupes de Lie résolubles connexes

THÉORÈME V.6. — Si G est un groupe de Lie résoluble connexe, toute représentation factorielle, U de G distincte d'un multiple d'un caractère vérifie $Z^1(G, U) = \overline{B^1}(G, U)$.

On se ramène à démontrer le théorème lorsque G est simplement connexe grâce au lemme suivant.

LEMME V.6. — Soient U une représentation factorielle non triviale de G (groupe de Lie), \tilde{G} le recouvrement universel de G , $p : \tilde{G} \rightarrow G$ la projection canonique $\tilde{U} = U \circ p$. Alors :

$$Z^1(G, U) / \overline{B^1}(G, U) \simeq Z^1(\tilde{G}, \tilde{U}) / \overline{B^1}(\tilde{G}, \tilde{U}).$$

Démonstration du lemme. — Soit $Z = \text{Ker } p$. Z est central dans \tilde{G} . De plus, \tilde{U} est triviale sur Z . D'où la suite exacte (cf. GUICHARDET [13]) :

$$Z^1(G, U) / \overline{B^1}(G, U) \rightarrow Z^1(\tilde{G}, \tilde{U}) / \overline{B^1}(\tilde{G}, \tilde{U}) \rightarrow \text{Hom}_G(Z, \mathcal{H}(U)),$$

où $\mathcal{H}(U)$ est l'espace de U , et $\text{Hom}_G(Z, \mathcal{H}(U))$ désigne l'ensemble des morphismes, φ , de Z dans $\mathcal{H}(U)$ vérifiant

$$\varphi(gzg^{-1}) = \tilde{U}(g)\varphi(z), \quad \forall z \in Z, \quad \forall g \in \tilde{G}.$$

Or Z est central et \tilde{U} non triviale. D'où, $\text{Hom}_G(Z, \mathcal{H}(U)) = 0$, et le lemme est démontré.

Démonstration du théorème.

1° On suppose désormais G simplement connexe. Soit U comme dans l'énoncé du théorème. Soit $(\text{Ker } U)_0$ la composante neutre du noyau, $\text{Ker } U$, de U dans G . $(\text{Ker } U)_0$ est un sous-groupe analytique de G , simplement connexe car G est simplement connexe. On note $G' = G/(\text{Ker } U)_0$, et U' la représentation factorielle de G' déduite de U par passage au quotient. G' est un groupe de Lie résoluble, connexe, simplement connexe (cf. HOCHSCHILD [20]). On a la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Z^1(G', U')/\overline{B^1(G', U')} &\rightarrow Z^1(G, U)/\overline{B^1(G, U)} \\ &\rightarrow \text{Hom}_G((\text{Ker } U)_0, \mathcal{H}(U)), \end{aligned}$$

où $\mathcal{H}(U)$ désigne l'espace de U , et $\text{Hom}_G((\text{Ker } U)_0, \mathcal{H}(U))$ l'ensemble des morphismes $\varphi : (\text{Ker } U)_0 \rightarrow \mathcal{H}(U)$ vérifiant :

$$\varphi(ghg^{-1}) = U(g)\varphi(h), \quad \forall g \in G, \quad \forall h \in (\text{Ker } U)_0.$$

Si $\text{Hom}_G((\text{Ker } U)_0, \mathcal{H}(U)) \neq 0$, U contient une sous-représentation de dimension finie; U étant factorielle et G résoluble, U est alors multiple d'un caractère : une contradiction qui montre que

$$Z^1(G', U')/\overline{B^1(G', U')} \simeq Z^1(G, U)/\overline{B^1(G, U)}.$$

On peut donc se limiter à démontrer le théorème dans le cas où $(\text{Ker } U)_0$ est réduit à l'élément neutre de G , ce que nous ferons dans la suite.

2° U étant factorielle, $U|G^{\mathfrak{h}}$ est multiple d'un caractère de $G^{\mathfrak{h}}$ ($G^{\mathfrak{h}}$ centre de G). Si ce caractère est non trivial, on a

$$Z^1(G, U) = B^1(G, U).$$

On peut donc se limiter à prouver le théorème en supposant ce caractère trivial. Alors l'hypothèse $(\text{Ker } U)_0 = \{0\}$ implique $\dim G^{\mathfrak{h}} = 0$. Dans la suite, nous ferons donc les hypothèses suivantes :

(H1) $G^{\mathfrak{h}}$ est de dimension zéro, i. e. $LAG^{\mathfrak{h}} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{h}} = \{0\}$.

$\mathfrak{g}^{\mathfrak{h}}$ centre de $\mathfrak{g} = LAG$;

(H2) $(\text{Ker } U)_0 = \{0\}$.

3° Comme $\mathfrak{g}^{\mathfrak{h}} = 0$, la démonstration de PUZANSZKY ([29], lemme 26) montre qu'il existe dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\mathfrak{h}}$ un idéal de \mathfrak{g} , abélien, non central minimal, \mathfrak{h} de dimension 1 ou 2, tel que le sous-groupe analytique correspondant, H , soit régulièrement plongé dans G .

4° Alors il existe un caractère χ , de H , et une représentation factorielle V de G_χ , stabilisateur de χ dans G , vérifiant :

$$V|_H \approx \chi \quad \text{et} \quad \text{Ind}_{G_\chi \uparrow G} V \approx U$$

(où \approx désigne la quasi-équivalence des représentations unitaires). Rappelons que l'on fait agir G sur \hat{H} par

$$v \in \hat{H} \rightarrow g.v \in \hat{H}, (g.v)(h) = v(ghg^{-1}).$$

Dans la suite, nous noterons K le groupe G_χ .

Remarquons que χ est non trivial d'après (H 2). D'autre part, la propriété $Z^1(G, U) = \overline{B^1(G, U)}$ se conserve par quasi-équivalence.

Nous supposons donc dans la suite :

$$U = \text{Ind}_{K \uparrow G} V \quad \text{avec} \quad V|_H \approx \chi \in \hat{H} \quad \text{et} \quad \chi \text{ non trivial.}$$

5° On a un isomorphisme de variété $G/K \simeq G.\chi \subset \hat{H}$. Comme $\hat{H} \simeq \mathbf{R}$ ou \mathbf{R}^2 , et G résoluble connexe, simplement connexe, agit sur \hat{H} , on voit facilement en étudiant les diverses actions possibles (cf. PUKANSZKY [29], démonstration du lemme 26) que $G/K \simeq \mathbf{R}, \mathbf{T}$ ou $\mathbf{R} \times \mathbf{T}$ ($\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$) ($G = K$ étant exclu puisque χ est non trivial, H non central et $(\text{Ker } U)_0 = \{e\}$). D'autre part, $H \subset [G, G]^h$ implique $K \supset [G, G]$, et K est distingué dans G . Alors en tant que groupe de Lie, on a

$$G/K \simeq \mathbf{R}, \mathbf{T} \quad \text{ou} \quad \mathbf{R} \times \mathbf{T}.$$

En particulier, K est de codimension 1 ou 2 dans G .

Le cas $G/K \simeq \mathbf{T}$ se traite facilement. En effet, comme $V|_H \simeq \chi$, χ non trivial, on a $H^1(K, V) = 0$. Utilisant la démonstration de PINCZON et SIMON ([26], prop. 1) on en déduit aisément que $H^1(G, U) = 0$. (Le fait que K possède éventuellement une infinité de composantes connexes n'intervient pas pour ce qui nous intéresse.) Dans la suite, nous supposons donc que $G/K \simeq \mathbf{R}$ ou $\mathbf{R} \times \mathbf{T}$.

6° Deux réalisations de U :

(α) Soit

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ \begin{array}{l} f: G \rightarrow \mathcal{H}(V); \\ f \text{ mesurable } f(kx) = V(k)f(x); \int_{G/K} \|f(x)\|^2 d\dot{x} < \infty \end{array} \right\},$$

où $d\dot{x}$ est une mesure invariante sur G/K ; U est donnée dans \mathcal{H}_1 par

$$(U(g))f(x) = f(xg).$$

(β) Soit K_0 la composante neutre de K . On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{diagramme} & & \\ D_1 & \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{p} & \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{\pi} & G/K_0 \end{array} & \begin{array}{l} p, \pi \text{ projections canoniques} \\ \\ \mathfrak{l} = LAK \end{array} \end{array}$$

G étant simplement connexe, et $[G, G] \subset K_0$, $\exp \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \rightarrow G/K_0$ est un isomorphisme. Dans cet isomorphisme, K/K_0 s'identifie à un sous-groupe discret D de $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ (regardé comme groupe additif). Désignons par E un supplémentaire de \mathfrak{k} dans \mathfrak{g} . On peut alors choisir 2 vecteurs U et T de E , avec U éventuellement nul, de telle sorte que $D = \mathbf{Z} U$ et $E = \mathbf{R} U \oplus \mathbf{R} T$. Les hypothèses sur G/K impliquent que $T \neq 0$. De la commutativité de (D.1), on déduit aisément que l'application $K_0 \times E \rightarrow G$, définie par $(k, u U + t T) \rightarrow k \exp u U \exp t T$, est un difféomorphisme et que $s_1 : E \rightarrow G$, définie par $s_1(u U + t T) = \exp u U \exp t T$, est C^∞ . Posons $\mathbf{U} = \mathbf{R} U / \mathbf{Z} U$. On définit $S : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{R} U$ par $u \rightarrow S(u)$ avec $S(u) \in u$ et $S(u) = \sigma U$, $0 \leq \sigma < 1$ et

$$S_1 : \mathbf{U} \times \mathbf{R} \rightarrow E \quad \text{par} \quad (u, t) \rightarrow S(u) + t T.$$

On pose enfin $s = s_1 \circ S_1$, $\mathbf{U} \times \mathbf{R} \rightarrow G$; s est C^∞ sur un ouvert Ω de $\mathbf{U} \times \mathbf{R}$ de complémentaire de mesure nulle ($\mathbf{U} \times \mathbf{R}$ étant muni d'une mesure de Haar). Si

$$\begin{aligned} U \neq 0, & \quad \Omega = (\mathbf{U} - \{0\}) \times \mathbf{R}, \\ U = 0, & \quad \Omega = \mathbf{R} = \mathbf{U} \times \mathbf{R}. \end{aligned}$$

D'autre part, tout élément de G s'écrit de manière unique $g = ks(y)$, $k \in K$, $g \in \mathbf{U} \times \mathbf{R}$.

Ceci résulte aisément des propriétés de s_1 et de $K/K_0 \simeq \mathbf{Z} U$. Alors, si l'on choisit convenablement $d\dot{x}$, et une mesure de Haar sur $\mathbf{U} \times \mathbf{R}$, $dvdt$, notant :

$$\mathcal{H}_2 = L^2(\mathbf{U} \times \mathbf{R}, dvdt) \otimes \mathcal{H}(V).$$

l'application $T\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, définie par

$$(Tf)(y) = F(y) = f(s(y)), \forall y \in \mathbf{U} \times \mathbf{R},$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert, et U est donnée dans \mathcal{H}_2 par

$$(U(g)F)(y) = V(k')F(y')$$

avec

$$s(y)g = k's(y'), \quad k' \in K, \quad y, y' \in U \times \mathbf{R}.$$

7° D'après PINCZON et SIMON [27], on peut se limiter à étudier les cocycles analytiques. Si $b : G \rightarrow \mathcal{H}_1$ est un 1-cocycle analytique de G pour U , comme $Z^1(K, V) = B^1(K, V)$, d'après la démonstration de PINCZON et SIMON ([26], prop. 1), il existe :

$$f : G \rightarrow \mathcal{H}(V),$$

C^∞ , avec $f(kg) = V(k)f(g)$ et $(b(g))(x) = f(xg) - f(x)$.

Par transport dans \mathcal{H}_2 , notant encore b le cocycle et posant $F(g) = f(s(y))$, on a

$$\forall y \in U \times \mathbf{R}, \quad \forall g \in G, \quad (b(g))(y) = V(k')F(y') - F(y)$$

avec

$$s(y)g = k's(y'), \quad k' \in K.$$

Notons que F est C^∞ sur Ω (cf. 6°). Désormais, nous supposons U réalisée dans \mathcal{H}_2 et b comme ci-dessus.

8° Notons B le 1-cocycle de \mathfrak{g} , déduit de b par différentiation à l'origine. On prolonge B à $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Soit η la forme linéaire non nulle sur \mathfrak{h} associée au caractère χ de H . On prolonge de même η à $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Pour $Z \in \mathfrak{h}_{\mathbf{C}}$, on a

$$(1) \quad (B(Z))(y) = i\eta((\text{Ad } s(y))Z)F(y).$$

En effet, on a, pour $z = \exp tZ$,

$$s(y)z = (s(y)zs(y)^{-1})s(y) \quad \text{avec} \quad (s(y)zs(y)^{-1}) \in K.$$

D'où :

$$\begin{aligned} (b(\exp tZ))(y) &= \chi(s(y)\exp tZs(y)^{-1})F(y) - F(y) \\ &= \chi(\exp t\text{Ad } s(y)Z)F(y) - F(y). \end{aligned}$$

Par différentiation, l'identité annoncée en résulte. Distinguons maintenant deux cas :

(\alpha) $\dim \mathfrak{h} = 1$. η étant non nulle, on peut choisir $Z_0 \in \mathfrak{h}$ avec $\eta(Z_0) = 1$. D'autre part,

$$[X, Z_0] = \theta_0(X)Z_0, \quad \forall X \in \mathfrak{g} \quad \text{avec} \quad \theta_0 \in \mathfrak{g}^*.$$

(β) $\dim \mathfrak{h} = 2$, \mathfrak{g} étant résoluble, il existe une base Z_1, Z_2 de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ telle que

$$\left. \begin{aligned} [X, Z_1] &= (\theta_1 + i\theta_2)(X)Z_1 \\ [X, Z_2] &= (\theta_3 + i\theta_4)(X)Z_2 \oplus \mathbb{C}Z_2 \end{aligned} \right\} X \in \mathfrak{g}, \quad \theta_j \in \mathfrak{g}^*, \quad 1 \leq j \leq 4.$$

Dans les deux cas, il existe $\theta \in \mathfrak{g}^*$, indépendante de b , du choix de E et de (U, T) , telle que

$$(2) \quad y \rightarrow \exp(\theta(S_1(y))) \|F(y)\| \in L^2(\mathbf{U} \times \mathbf{R}, \text{dudt}).$$

Dans le cas (α), $B(Z_0) \in \mathcal{H}$, (1) et $\eta(Z_0) \neq 0$ impliquent que (2) est vrai pour $\theta = \theta_0$. Dans le cas (β), si $\eta(Z_1) \neq 0$, $B(Z_1) \in \mathcal{H}$ et (1) impliquent que (2) est vrai pour $\theta = \theta_1$.

Si $\eta(Z_1) = 0$, alors $\eta(Z_2) \neq 0$; $B(Z_2) \in \mathcal{H}$ et (1) impliquent que (2) est vrai pour $\theta = \theta_3$.

Notons que si θ nulle sur E , alors $F \in \mathcal{H}$, b est un cobord, et le théorème est démontré dans ce cas. Dans la suite, nous supposons θ non nulle sur E .

9° Si θ est non nulle sur $\mathbf{R} U$, un choix convenable de T permet de supposer $\theta(T) = 0$. Alors:

$$y \rightarrow \exp(\theta(S_1(y))) = \exp(\theta(S(u))) \quad \text{si } y = (u, t) \in \mathbf{U} \times \mathbf{R},$$

et cette application est bornée inférieurement par une constante strictement positive ($S(\mathbf{U})$ est borné dans $\mathbf{R} U$). Alors $F \in \mathcal{H}$ et b est un cobord. Le théorème est démontré dans ce cas. On suppose donc θ nulle sur $\mathbf{R} U$. On peut alors choisir T tel que $\theta(T) = 1$. Alors (2) implique que l'application

$$y = (u, t) \in \mathbf{U} \times \mathbf{R} \rightarrow e^t \|F(y)\|$$

est un élément de $L^2(\mathbf{U} \times \mathbf{R}, \text{du } dt)$. D'autre part, on a

$$(3) \quad B(T)(y) = \frac{\partial}{\partial t} F(y), \quad y = (u, t) \in \Omega.$$

En effet,

$$b(\exp x T)(y) = F(u, t+x) - F(u, t) \quad \text{si } y = (u, t) \in \mathbf{U} \times \mathbf{R},$$

car $s(y) \exp(x T) = s(u, t+x)$.

Il en résulte que

$$(4) \quad \left(y \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} F(y) \right) \in \mathcal{H}$$

est dans \mathcal{H} .

10° Supposons maintenant qu'il existe une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $\varphi_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ avec $\varphi_n \in C^1$, $\sup_{t \in \mathbf{R}} |\varphi_n(t)| \leq 1$, (φ_n) tend vers 1 uniformément sur tout compact, et telle que $F_n : \mathbf{U} \times \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{H}(V)$, définie par $F_n(u, t) = \varphi_n(t) F(u, t)$, vérifie :

$$F_n \in \mathcal{H}, \quad \frac{\partial}{\partial t} F_n \in \mathcal{H},$$

et $[(\partial/\partial t) F_n]$ tend vers $(\partial/\partial t) F$ dans \mathcal{H} . Alors $b_n = \partial F_n$ est C^1 ; b_n étant un 1-cocycle, il suffit de prouver qu'il admet des dérivées partielles à l'origine selon tout vecteur d'une base de \mathfrak{g} (alors les dérivées partielles existent en tout point et sont continues).

Pour $X \in \mathfrak{k}$, on a

$$(b_n(\exp x X))(y) = \varphi_n(t') (V(k') F(y')) - \varphi_n(t) F(y),$$

avec $y = (u, t)$, $y' = (u', t')$, $s(y) \exp x X = k' s(y')$.

En fait, comme $s(y) \exp x X s(y)^{-1} \in K$, on a $y = y'$.

D'où :

$$(b_n(\exp x X))(y) = \varphi_n(t) (b(\exp x X))(y).$$

D'où l'on déduit aisément :

$$\begin{aligned} B_n(X) &= \left. \frac{d}{dx} b_n(\exp x X) \right|_{x=0} \\ &= \tilde{\varphi}_n B(X), \quad \forall X \in \mathfrak{k}, \end{aligned}$$

où $\tilde{\varphi}_n$ désigne l'application $\mathbf{U} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $(u, t) \rightarrow \varphi_n(t)$, et la limite est prise dans \mathcal{H} . De même, on a

$$s(y) (\exp x U) = k' s(y'),$$

avec $y = (u, t)$, $y' = (u', t') \in \mathbf{U} \times \mathbf{R}$, $k' \in K$.

Utilisant la commutativité du diagramme D1, on voit que $t = t'$. Alors :

$$b_n(\exp U) = \tilde{\varphi}_n b(\exp x U).$$

D'où :

$$\left. \frac{d}{dx} b_n(\exp x X) \right|_{x=0} = B_n(X) = \tilde{\varphi}_n B(X) \quad \text{pour } X \in \mathfrak{k} \text{ et } X = U.$$

Enfin, on a

$$b_n(\exp x T)(y) = \varphi_n(t+x) F(y') - \varphi_n(t) F(y)$$

avec $y = (u, t)$, $y' = (u, t+x) \in \mathbf{U} \times \mathbf{R}$.

D'où :

$$\left. \frac{d}{dx} (b_n(\exp x T)) \right|_{x=0} = B_n(T) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi}_n F.$$

En résumé, on a

$$(5) \quad \begin{cases} B_n(U) = \tilde{\varphi}_n B(U), \\ B_n(X) = \tilde{\varphi}_n(B(X)), & X \in \mathfrak{g}. \\ B_n(T) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi}_n F_n \end{cases}$$

Avec les hypothèses faites sur (φ_n) , il résulte de (3) et (5) que B_n tend vers B simplement sur \mathfrak{g} lorsque n tend vers l'infini. D'autre part, on vérifie facilement les égalités

$$(6) \quad \begin{cases} b_n(\exp X) = \int_0^1 U(\exp t X) B_n(X) dt, \\ b(\exp X) = \int_0^1 U(\exp t X) B(X) dt. \end{cases}$$

Alors, B_n tend vers B simplement implique que $b_n = \partial F_n$ tend vers b simplement sur un voisinage de l'élément neutre. Puis, grâce à l'identité de 1-cocycle et à la connexité de G , on en déduit que b_n converge vers b simplement sur G . Mais, si une suite de cocycles converge simplement, elle converge uniformément sur tout compact (cf. GUICHARDET [13].) D'où b_n tend vers b dans $Z^1(G, U)$ et le théorème en résulte.

11° Montrons donc que si $F : \mathbf{U} \times \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{H}(V)$ est C^∞ sur Ω (cf. 6°) et vérifie

$$e^t F \in \mathcal{H},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F \in \mathcal{H},$$

il existe une suite de fonctions (φ_n) , $\varphi_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que

$\varphi_n \in C^1$, $\sup_{t \in \mathbf{R}} |\varphi_n(t)| \leq 1$, φ_n tend vers 1 uniformément sur tout compact,

$$\tilde{\varphi}_n F \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} \varphi_n F \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} F \quad \text{dans } \mathcal{H}$$

avec $\varphi_n : \mathbf{U} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\tilde{\varphi}_n(u, t) = \varphi_n(t)$.

On introduit, pour n entier positif, la fonction

$$\gamma_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R},$$

définie par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma_n(t) = \gamma_n(-t), & \\ \gamma_n(t) = 1, & t \in (0, n), \\ \gamma_n(t) = 1 - K_n \frac{1}{2(n+1)^2} (t-n)^2, & t \in (n, n+1), \\ \gamma_n(t) = K_n t^{-1}, & t \in (n+1, \infty[. \end{array} \right.$$

avec

$$K_n = \frac{2(n+1)^2}{1+2(n+1)}.$$

On vérifie aisément que γ_n est C^1 avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma'_n(t) = -\gamma'_n(-t), & \\ \gamma'_n(t) = 0, & t \in (0, n), \\ \gamma'_n(t) = -K_n \frac{(t-n)}{(n+1)^2}, & t \in (n, n+1), \\ \gamma'_n(t) = -K_n t^{-2}, & t \in (n+1, \infty[. \end{array} \right.$$

En outre (γ_n) vérifie $\sup_{t \in \mathbf{R}} |\gamma_n(t)| = 1$, (γ_n) tend uniformément vers 1 sur tout compact, et $|\gamma'_n(t)| \leq 2|t|^{-1} \mathbf{1}_{\mathbf{t} \in]-n, n]}(t)$, $\gamma_n \in L^2(\mathbf{R})$.

Enfin $|\gamma_n(t)| \leq K_n |t|^{-1}$. Il suffit de le vérifier pour $t \in (n, n+1)$. Or on a, pour $t \in (n, n+1)$, $\gamma_n(t) \geq 0$:

$$\frac{d}{dt}(\gamma_n(t) - K_n t^{-1}) = K_n \left(\frac{-(t-n)}{(n+1)^2} + t^{-2} \right) \geq 0$$

et

$$\gamma_n(n+1) = K_n/n+1.$$

D'où l'inégalité annoncée. Rappelons une inégalité de Hardy (cf. HARDY [18]). Soit f mesurable $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$. On pose

$$\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

On a alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{-2} [\Phi(t)]^2 dt \leq 4 \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt$$

(dt mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}).

Revenons à notre problème : comme $e^t F \in \mathcal{H}$, le théorème de Fubini montre que, pour presque $t \in \mathbf{R}$, on a

$$u \in \mathbf{U} \rightarrow F(u, t) \in L^2(\mathbf{U}, du) \otimes \mathcal{H}(V).$$

En changeant de variable, i. e. en posant $t' = t - t_0$, $u' = u$, on peut supposer $F(u, 0) \in L^2(\mathbf{U}, du) \otimes \mathcal{H}(V)$. Le problème posé est invariant par le changement de variable. Or sur $\Omega \subset \mathbf{U} \times \mathbf{R}$, on a

$$\gamma_n(t) F(u, t) = \gamma_n(t) F(u, 0) + \gamma_n(t) \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} F(u, x) dx.$$

Comme $\gamma_n \in L^2(\mathbf{R}, dt)$ et $F(u, 0) \in L^2(\mathbf{U}, du) \otimes \mathcal{H}(V)$, on a

$$\gamma_n(t) F(u, 0) \in \mathcal{H}.$$

D'autre part, $0 \leq \gamma_n(t) \leq K_n |t|^{-1}$ implique :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{U} \times \mathbf{R}} |\gamma_n(t)|^2 \left\| \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} F(u, x) dx \right\|_{\mathcal{H}(V)}^2 dudt \\ & \leq \int_{\mathbf{U} \times \mathbf{R}} K_n^2 |t|^{-2} \left(\int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial x} F(u, x) \right\|_{\mathcal{H}(V)} dx \right)^2 dudt. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hardy, mentionnée ci-dessus, à

$$f(t) = \left\| \frac{\partial}{\partial t} F(u, t) \right\|_{\mathcal{H}(V)},$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{U} \times \mathbf{R}} |\gamma_n(t)|^2 \left\| \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} F(u, x) dx \right\|_{\mathcal{H}(V)}^2 dudt \\ & \leq 4 K_n^2 \int_{\mathbf{U} \times \mathbf{R}} \left\| \frac{\partial}{\partial t} F(u, t) \right\|_{\mathcal{H}(V)}^2 dudt < +\infty, \end{aligned}$$

car $(\partial/\partial t) F \in \mathcal{H}$. D'où, $\gamma_n F \in \mathcal{H}$. De la même manière, on obtient :

$$1_{\mathbf{C}[-1, 1]}(t) |t|^{-1} F \in \mathcal{H}.$$

Alors de $|\gamma'_n(t)| \leq 2 |t|^{-1} |1_{\mathbf{C}[-n, n]}(t)|$, on déduit que $\gamma'_n(t) F$ tend vers zéro dans \mathcal{H} lorsque n tend vers l'infini et donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_n(t) F = \gamma'_n(t) F + \gamma_n(t) \frac{\partial}{\partial t} F \text{ tend vers } \frac{\partial}{\partial t} F \text{ dans } \mathcal{H}$$

((γ_n) converge vers 1 uniformément sur tout compact).

La suite γ_n répond donc au problème posé. Ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE V.2. — *Les représentations factorielles non triviales de G , résoluble connexe vérifiant $Z^1(G, U) \neq \overline{B^1}(G, U)$, sont exactement (à quasi-équivalence près) les caractères unitaires non triviaux qui sont quotient de la représentation adjointe de G dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. — D'après le théorème V.6, il suffit de démontrer que $Z^1(G, \chi) \neq \overline{B^1}(G, \chi)$, où χ est un caractère unitaire non trivial de G , si et seulement si, χ est un quotient de la représentation adjointe de G dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\mathbb{C}}$.

Comme la représentation adjointe de G sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\mathbb{C}}$ est triviale sur le centre de G , on se ramène, grâce au lemme V.6, au cas où G est simplement connexe.

Un caractère non trivial χ de G ne contient pas faiblement la représentation triviale. Donc $\overline{B^1}(G, \chi) = B^1(G, \chi)$. D'autre part, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow H^1(G/[G, G], \tilde{\chi}) \rightarrow H^1(G, \chi) \rightarrow \text{Hom}_G([G, G], \mathbb{C}),$$

où $\tilde{\chi}$ est le caractère de $G/[G, G]$ déduit de χ par passage au quotient.

Partie « seulement si » du corollaire. — Supposons $H^1(G, \chi) \neq 0$. Comme χ est non trivial, $H^1(G/[G, G], \tilde{\chi}) = 0$, et l'on a

$$\text{Hom}_G([G, G], \mathbb{C}) \neq 0.$$

Soit donc $f: [G, G] \rightarrow \mathbb{C}$, morphisme vérifiant

$$f(gxg^{-1}) = \chi(g)f(x), \quad \forall x \in [G, G], \quad \forall g \in G, \quad f \text{ non nul.}$$

Par différentiation à l'origine, on obtient un morphisme

$$\eta: [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{avec} \quad \eta(\text{Ad } g X) = \chi(g)\eta(X),$$

$$\forall X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \forall g \in G.$$

On note $\eta_{\mathbb{C}}$ le prolongement de η à $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\mathbb{C}}$: $\text{Ker } \eta_{\mathbb{C}}$ est stable par Ad . De plus, G agit sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\mathbb{C}}/\text{Ker } \eta_{\mathbb{C}}$ comme χ , ce qui achève la démonstration.

Partie « si » du corollaire. — Soit χ , un caractère unitaire non trivial de G , identique à l'action adjointe de G sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\mathbb{C}}/V$, où V est un hyperplan de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\mathbb{C}}$ stable par Ad . G étant simplement connexe pour montrer que $H^1(G, \chi)$ est non nul, il suffit de prouver $H^1(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \nu_{\mathbb{C}}) \neq 0$, où $\nu_{\mathbb{C}}$ est la représentation de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ dans $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\mathbb{C}}/V$ déduite de χ . En fait, $\nu_{\mathbb{C}}$ est une

forme linéaire (non nulle) sur \mathfrak{g}_C . Soit $\Omega \in \mathfrak{g}_C$ tel que $v_C(\Omega) = 1$. Notons η_C la projection $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_C \rightarrow [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_C/V$. On vérifie aisément que

$$X \rightarrow \eta_C([\Omega, X]) \text{ est un 1-cocycle non trivial de } \mathfrak{g}_C \text{ pour } v_C.$$

Ce qui achève la démonstration. On déduit alors de GUICHARDET [16] le résultat suivant.

COROLLAIRE V.3. — *Les groupes de Lie résolubles connexes possèdent la propriété (P) de Guichardet, i. e. toute représentation factorielle d'un groupe de Lie résoluble connexe, séparée de ε_G dans \hat{G} , a une 1-cohomologie nulle.*

ANNEXE I

Une propriété des représentations des C^* -algèbres de type I

Soient A une C^* -algèbre supposée de type I, π une représentation non dégénérée de A dans un espace hilbertien séparable \dot{H} , T un sous-ensemble de \hat{A} . On suppose qu'aucune sous-représentation de π , associée à un projecteur central, n'a son support disjoint de T . Alors, pour toute suite (\mathcal{V}_n) de voisinages de T , on a

$$S(\pi) \subset (\bigcap \mathcal{V}_n)^-,$$

où $S(\pi)$ désigne le support de π dans \hat{A} , et $-$ l'opération de fermeture dans \hat{A} muni de la topologie de Fell.

Démonstration. — A étant séparable de type I, en considérant la désintégration centrale, nous avons

$$H = \int_{\hat{A}}^{\oplus} H(\xi) d\theta(\xi), \quad \pi = \int_{\hat{A}}^{\oplus} \pi(\xi) d\theta(\xi),$$

où θ est une mesure sur \hat{A} , $\pi(\xi)$ est un multiple de $\xi \in \hat{A}$. En outre, $S(\pi) = \text{supp } \theta$ où, par définition, $\text{supp } \theta$ est le plus petit fermé de \hat{A} de complémentaire θ -négligeable. On peut supposer que la suite (\mathcal{V}_n) est une suite de voisinages ouverts de T . Alors, pour tout n , $\int_{\hat{A}} \mathcal{V}_n$ est de θ -mesure nulle. En effet, si $\theta(\int_{\hat{A}} \mathcal{V}_n) > 0$, la sous-représentation de π dans $H_n = \int_{\int_{\hat{A}} \mathcal{V}_n}^{\oplus} K(\xi) d\theta(\xi)$ est une sous-représentation non nulle de π qui a son support dans $\int_{\hat{A}} \mathcal{V}_n$, donc disjoint de T . De plus, le projecteur sur H_n est central ce qui est en contradiction avec les hypothèses. Par

conséquent, $\theta(\mathfrak{C} \mathcal{V}_n) = 0$ pour tout n . Donc :

$$\bigcup_n (\mathfrak{C} \mathcal{V}_n) = \mathfrak{C} \left(\bigcap_n \mathcal{V}_n \right)$$

est de θ -mesure nulle. D'où,

$$\text{supp } \theta = S(\pi) \subset \left(\bigcap_n \mathcal{V}_n \right)^-.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARAKI (H.). — Factorizable representations of current algebra, *Publ. Res. Inst. math. Sc.*, Kyoto, t. 5, 1969, p. 361-422.
- [2] ARAKI (H.) and WOODS (J.). — Complete boolean algebras of type I factors, *Publ. Res. Inst. math. Sc.*, Kyoto, t. 2, 1966, p. 157-242.
- [3] BERNAT (P.) et coll. — *Représentations des groupes de Lie résolubles*. — Paris, Dunod, 1972 (*Monographies de la Société mathématique de France*, 4).
- [4] DELAROCHE (C.) et KIRILLOV (A. A.). — Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés, d'après Kajdan, *Séminaire Bourbaki*, 20^e année, 1967/1968, n^o 343, 22 p.
- [5] DIXMIER (J.). — *Les C*-algèbres et leurs représentations*. — Paris, Gauthiers-Villars, 1964 (*Cahiers scientifiques*, 29).
- [6] FARAUT (J.) et HARZALLAH (K.). — Distances hilbertiennes invariantes sur un espace homogène, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 24, 1974, fasc. 3, p. 171-217.
- [7] FELL (J. M. G.). — The dual of C*-algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 94, 1960, p. 365-400.
- [8] GANGOLLI (R.). — Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Levy's brownian motion of several parameters, *Ann. Inst. H. Poincaré*, Sect. B, t. 3, 1967, p. 121-225.
- [9] GEL'FAND (I. M.), GRAEV (I. M.) et VILENKIN (M. I.). — *Les distributions*, t. 5. — Paris, Dunod, 1970 (*Monographies universitaires de mathématiques*, 34).
- [10] GODEMENT (R.). — Introduction aux travaux de A. Selberg, *Séminaire Bourbaki*, 9^e année, 1956/1957, n^o 144, 16 p.
- [11] GUICHARDET (A.). — Produits tensoriels continus d'algèbres de Banach, *Comm. in math. Physics*, t. 5, 1967, p. 262-287.
- [12] GUICHARDET (A.). — Sur la cohomologie des groupes topologiques, *Bull. Sc. math.*, t. 95, 1971, p. 161-176.
- [13] GUICHARDET (A.). — Sur la cohomologie des groupes topologiques, II., *Bull. Sc. math.*, t. 96, 1972, p. 305-332.
- [14] GUICHARDET (A.). — *Symmetric Hilbert spaces and related topics*. — Berlin, Springer-Verlag, 1972 (*Lecture Notes in Mathematics*, 261).
- [15] GUICHARDET (A.). — Sur la cohomologie des groupes topologiques, III., *Bull. Sc. math.*, t. 98, 1974, p. 201-208.
- [16] GUICHARDET (A.). — 1-cohomologie des groupes de Lie résolubles de type (R), et propriété (P), *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 280, série A, 1975, p. 101-103.
- [17] GUICHARDET (A.) et WULFSOHN (A.). — Sur les produits tensoriels continus d'espaces hilbertiens, *J. Funct. Anal.*, t. 2, 1968, p. 371-377.

- [18] HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.) and POLYA (G.). — *Inequalities*. — Cambridge, Cambridge University Press, 1967.
- [19] HELGASON (J.). — *Differential geometry and symmetric spaces*. — New York Academic Press, 1962 (*Pure and applied mathematics*, Academic Press, 12).
- [20] HOCHSCHILD (G.). — *La structure des groupes de Lie*. — Paris, Dunod, 1968 (*monographies universitaires de mathématiques*, 27).
- [21] JOHNSON (B. E.) — *Cohomology in Banach algebras*. — Providence, American mathematical society, 1972 (*Memoirs of the American mathematical Society*, 127).
- [22] JOHNSON (K.). — On an exceptional series of representations “*Harmonic analysis on homogeneous spaces*”, p. 275-280. — Providence, American mathematical society, 1975 (*Proceedings of Symposia in pure Mathematics*, 26).
- [23] JOHNSON (K.) and WALLACH (N. R.). — Composition series and intertwining operators for the spherical principal series, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 78, 1972, p. 1053-1059.
- [24] KOSTANT (B.). — On the existence and irreducibility of certain series of representations, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 75, 1969, p. 627-642.
- [25] PICHAUD (J.). — *Sur la 1-cohomologie de certaines représentations induites* (à paraître).
- [26] PINCZON (G.) et SIMON (J.). — Sur la 1-cohomologie des groupes de Lie semi-simples *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 279, série A, 1974, p. 455-458.
- [27] PINCZON (G.) and SIMON (J.). — On the 1-cohomology of Lie groups, *Letters in math. Physics*, t. 1, 1975, p. 83-91.
- [28] PONTRJAGIN (L.). — *Topological groups*. 2nd edition. — New York, Gordon and Breach, 1966.
- [29] PUKANSZKY (L.). — The primitive ideal Space of solvable Lie groups, *Invent Math.* t. 22, 1973, p. 75-118.
- [30] TAKAHASHI (R.). — Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés, *Bull. Soc. math. France*, t. 91, 1963, p. 289-433.
- [31] VERŠIK (A. M.), GEL'FAND (I. M.) and GRAEV (I. M.). — Representations of the group $SL(2, R)$, where R is a ring of functions, *Russian math. Surveys*, t. 28, 1973, n° 5, p. 78-132.
- [32] VERŠIK (A. M.), GEL'FAND (I. M.), et GRAEV (I. M.). — Représentations des groupes $G^{(c)}$ et cohomologie [en russe], *Funk. Anal. i Priloz.*, t. 8, 1974 n° 2, p. 67-69.
- [33] WALLACH (N. R.). — *Harmonic analysis on homogeneous spaces*. — New York, M. Dekker, 1973 (*Pure and applied mathematics*, Dekker, 19).
- [34] WANG (S. P.). — The dual of semi-simple Lie groups, *Amer. J. of Math.*, t. 91, 1969, p. 921-937.
- [35] WANG (S. P.). — On the first cohomology group of discrete groups with property (T), *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 42, 1974, p. 621-624.
- [36] WARNER (G.). — *Harmonic analysis on semi simple Lie groups*. Vol. 1 and 2. — Berlin Springer, 1972 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 188-189).

(Texte reçu le 20 février 1976.)

Patrick DELORME,
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
91128 Palaiseau.