BULLETIN DE LA S. M. F.

THOMAS BLOOM
JEAN-JACQUES RISLER

Familles de courbes sur les germes d'espaces analytiques

Bulletin de la S. M. F., tome 105 (1977), p. 261-280
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1977__105__261_0>

Bull. Soc. math. France,
105, 1977, p. 261-280.

FAMILLES DE COURBES SUR LES GERMES D'ESPACES ANALYTIQUES

PAR

THOMAS BLOOM (*) et JEAN-JACQUES RISLER

[Université Toronto et École Polytechnique, Palaiseau]

RÉSUMÉ. — Soit X un germe d'espace analytique réel ou complexe : on montre l'existence et on étudie les propriétés des familles H de courbes sur X possédant la propriété suivante : Pour chaque entier $\mu \geqslant 1$, il existe un entier $e(\mu)$ tel que si une fonction analytique est $e(\mu)$-plate sur chaque élément de H, elle est μ-plate sur X. On donne ensuite des applications aux fonctions différentiables et aux opérateurs différentiels sur les espaces analytiques réels.

Introduction

Soit (X, x) un germe d'ensemble analytique réel ou complexe, et soit H une famille de courbes dans X; considérons la propriété suivante :

(P) *Pour chaque entier* $\mu \geqslant 1$, *il existe un entier* $e(\mu)$ *tel que si une fonction analytique est* $e(\mu)$-*plate en* x *sur chaque élément de* H, *elle est* μ-*plate en* x *sur* X.

Cette propriété a été considérée par J.-C. TOUGERON [T] pour étudier la question suivante : Étant donné un nombre fini de séries convergentes $t_1, \ldots, t_N$ et une relation formelle entre ces séries, existe-t-il une relation analytique ? (La réponse n'est pas toujours positive : *cf.* [G_1] ou [G_2].)

Nous donnons au paragraphe 2 une caractérisation des familles H possédant la propriété (P) (théorème 2.2) : H possède la propriété (P) si, et seulement si, la famille H est une décomposition complète de X. (Cette notion avait été introduite dans [B_1].)

Au paragraphe 3, nous utilisons les décompositions complètes pour étudier les fonctions différentiables sur les germes analytiques réels : il s'agit de comparer le polynôme de Taylor d'une fonction de classe $\mathscr{C}^r$ qui s'annule sur un germe d'ensemble analytique réel X (ou sur une partie de X) avec l'idéal des fonctions analytiques réelles qui s'annulent sur X (théorème 3.4). Les décompositions complètes permettent de se ramener au cas des courbes

---

(*) En partie subventionné par le Conseil National de Recherche du Canada (A 7535). Cet article a été écrit pendant que le premier auteur était invité à l'Université Paris-VI.

où un calcul explicite est possible. Un des auteurs avait déjà obtenu certains résultats dans ce sens [R_1]. Signalons d'autre part que BECKER et GURJAR [B-G] obtiennent des résultats similaires à ceux de ce paragraphe en utilisant une méthode différente, de même que K. SPALLEK [Sp].

Au paragraphe 4, nous introduisons certains cônes associés à un germe analytique réel (ce sont les analogues réels des cônes introduits dans [B_3]). Ces cônes peuvent être utiles pour préciser les résultats du paragraphe 3 (corollaire 4.10). La propriété fondamentale de ces cônes est que leur réunion est égale au dual de l'anneau analytique local du germe considéré.

Nous donnons enfin des exemples de calculs de ces cônes (4.14).

1. Notations et rappels

1.1. Soit k un corps commutatif valué de caractéristique 0 (en général $\mathbf{R}$ dans cet article). Nous noterons $\mathcal{O}_n$ (resp. $\mathcal{F}_n$) l'anneau des séries convergentes $k\,\{x_1, \ldots, x_n\}$ (resp. l'anneau des séries formelles $k\,[[x_1, \ldots, x_n]]$) en n variables sur l'anneau k.

Un anneau analytique est par définition le quotient de $\mathcal{O}_n$ par un idéal.

Soient A un anneau local noethérien de corps résiduel k et d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ (par exemple un anneau analytique), E un A-module de type fini, $\hat{E}$ son complété pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique : on a alors

$$\hat{E} = \varprojlim_n E/\mathfrak{m}^n E;$$

remarquons que chaque $E/\mathfrak{m}^n E$ est un espace vectoriel de dimension finie sur k.

1.2. *Définition* (*cf.* [B_1], p. 81). — k étant muni de sa topologie canonique, si l'on met que chaque $E/\mathfrak{m}^n E \xrightarrow{\sim} k^{p_n}$ la topologie euclidienne (ou topologie produit), on obtient par limite projective une topologie sur $\hat{E}$ appelée topologie faible. La topologie habituelle sur $\hat{E}$ est la topologie $\mathfrak{m}$-adique; elle peut être obtenue par limite projective en mettant sur chaque $E/\mathfrak{m}^n E$ la topologie discrète.

L'avantage de la topologie faible est que, muni de cette topologie, E est un k-espace vectoriel topologique; il est de plus séparé, complet et localement convexe.

1.3. Rappelons quelques propriétés bien connues du complété (A est toujours un anneau local noethérien, de corps résiduel k et d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et E et F sont des A-modules de type fini) :

(*a*) $\hat{A}$ est fidèlement plat sur A, et $\hat{E} \xrightarrow{\sim} E \otimes_A \hat{A}$;

(*b*) $\bigcap_n \mathfrak{m}^n \hat{E} = (0)$, ce qui entraîne que la topologie faible sur $\hat{E}$ est séparée, puisque les $\mathfrak{m}^n \hat{E}$ sont fermés dans $\hat{E}$;

(*c*) si $\{ E_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille finie de sous-modules de E, on a

$$(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda)\hat{} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \hat{E}_\lambda;$$

(*d*) si E est un sous-module de F, $\hat{E}$ est fermé dans $\hat{F}$, et l'on a $F \cap \hat{E} = E$.

1.4. $(\hat{E})^*$ désigne le dual topologique de $\hat{E}$ (espace des formes linéaires continues); $(\hat{E})^*$ sera muni de la topologie faible (en tant que dual d'un e. v. t.) et donc $\hat{E}$ et $(\hat{E})^*$ sont des e. v. t. en dualité (*cf.* [Tr], chap. 35).

Si r est entier $\geqslant 0$, nous poserons

$$T_r(E) = \operatorname{Hom}_k(E/\mathfrak{m}^{r+1} E, k).$$

On a alors :

$$(\hat{E})^* = \varinjlim_r T_r(E),$$

algébriquement et topologiquement, ce qui implique que tous les sous-espaces vectoriels de $(\hat{E})^*$ sont fermés, et que toutes les formes linéaires sur $(\hat{E})^*$ sont continues.

L'application canonique $T_r(E) \to (\hat{E})^*$ est injective, ce qui identifie $T_r(E)$ à un sous-espace de $(\hat{E})^*$.

1.5. Soient E et F deux A-modules de type fini tels que $E \subset F$; nous poserons

$$\operatorname{ann}_F(E) = \{ \delta \in (\hat{F})^*;\ \delta(E) = 0 \}.$$

On déduit de 1.3 (*d*) qu'un élément $f \in F$ appartient à E si, et seulement si, $\delta(f) = 0$ pour tout $\delta \in \operatorname{ann}_F(E)$.

1.6. Soit $f : A \to B$ un morphisme local; f induit alors des applications linéaires $T_r(f)$:

$$T_r(B) \to T_r(A) \qquad (\forall\, r \geqslant 0)$$

qui par limite inductive donnent une application linéaire continue $(\hat{B})^* \to (\hat{A})^*$.

1.7. Soit (X, x) un germe d'ensemble analytique plongé dans $(k^n, 0)$; nous poserons $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}_n/I(X)$ où $I(X)$ est l'idéal des germes de fonctions analytiques nulles sur X.

On a alors $\widehat{\mathcal{O}(X)}^* \xrightarrow{\sim} \operatorname{ann}_{\mathcal{O}_n}(I(X))$.

1.8. Soient $\mathfrak{m}_X$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}(X)$, et μ un entier $\geqslant 1$; on dit qu'une fonction $f \in \mathcal{O}_n$ est μ-plate sur X en x si $f \in I(X) + \mathfrak{m}^{\mu}$ (ou si l'image de f dans $\mathcal{O}(X)$ appartient à $\mathfrak{m}_X^{\mu}$); de même, si A est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, on dit que $f \in A$ est μ-plate dans A si $f \in \mathfrak{m}^{\mu}$.

1.9. Nous désignerons systématiquement par la même notation les germes d'espaces analytiques (ou les germes de fonctions analytiques) et leurs représentants dans un ouvert suffisamment petit.

2. Décompositions complètes

2.1. Une décomposition complète d'un germe analytique X est une famille H de sous-ensembles analytiques de X telle que tout élément $\delta \in (\hat{\mathcal{O}}(X))^*$ soit « porté » par un nombre fini d'éléments de H; ceci permet, lorsque H est composée de courbes, de réduire l'étude des éléments de $(\hat{\mathcal{O}}(X))^*$ au cas des ensembles de dimension 1.

2.2. Théorème. — *Soient k un corps valué complet de caractéristique* 0, *A un anneau local noethérien de corps résiduel isomorphe à k, $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'idéaux de A.*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(*a*) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \hat{I}_\lambda = (0)$;

(*b*) *étant donné $\delta \in (\hat{A})^*$, il existe un ensemble fini $\Gamma \subset \Lambda$ tel que* $\delta \in \sum_{\lambda \in \Gamma} \operatorname{ann}_A(I_\lambda)$;

(*c*) *pour tout entier $\mu \geqslant 1$, il existe un entier $e(\mu) \geqslant 1$, et un ensemble fini $\Gamma \subset \Lambda$ tels que si $f \in \hat{A}$ a une image $e(\mu)$-plate dans $\hat{A}/\hat{I}_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Gamma$, alors f est μ-plate dans A.*

Démonstration :

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*). Si $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \hat{I}_\lambda = (0)$, $\sum_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{ann}_A(I_\lambda)$ est dense dans $(\hat{A})^*$: le dual de $(\hat{A})^*$ s'identifie à $\hat{A}$, et si $f \in \hat{A}$ s'annule sur $\sum_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{ann}_A(I_\lambda)$, on a $f \in \hat{I}_\lambda$, $\forall \lambda \in \Lambda$ (1.5), d'où $f = 0$.

Mais comme tous les sous-espaces de $(\hat{A})^*$ sont fermés, on a

$$(\hat{A})^* = \sum_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{ann}_A(I_\lambda);$$

étant donné $\delta \in (\hat{A})^*$, il existe donc bien un ensemble fini $\Gamma \subset \Lambda$ tel que $\delta \in \sum_{\lambda \in \Gamma} \operatorname{ann}_A(I_\lambda)$.

(*b*) $\Rightarrow$ (*c*). Un élément $f \in \hat{A}$ est μ-plat dans $\hat{A}$ si, et seulement si, $\delta(f) = 0$, $\forall \delta \in T_{\mu-1}(\hat{A})$ (*cf.* 1.4), mais $T_{\mu-1}(\hat{A})$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de dimension finie de $(\hat{A})^*$: il existe donc, d'après (b), un ensemble fini $\Gamma_\mu \subset \Lambda$ tel que

$$T_{\mu-1}(\hat{A}) \subset \sum_{\lambda\in\Gamma_\mu} \mathrm{ann}_A(I_\lambda).$$

Mais, pour chaque λ, on a l'égalité

$$\mathrm{ann}_A(I_\lambda) = \varinjlim_n T_n(\hat{A}/\hat{I}_\lambda).$$

Il existe donc un entier $e(\mu)$ tel que

$$T_{\mu-1}(\hat{A}) \subset \sum_{\lambda\in\Gamma_\mu} T_{e(\mu)-1}(\hat{A}/\hat{I}_\lambda),$$

d'où immédiatement la condition (c).

(c) $\Rightarrow$ (a). Soit $f \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \hat{I}_\lambda$; f est alors infiniment plate dans $\hat{A}/\hat{I}_\lambda$ pour chaque λ, ce qui implique qu'elle est infiniment plate dans $\hat{A}$ (par la condition (c)) et donc nulle.

C.Q.F.D.

2.3. *Définition.* — Une famille d'idéaux $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, satisfaisant aux conditions équivalentes du théorème 2.2, est appelée une *décomposition complète de l'anneau A.*

Nous allons maintenant donner deux exemples de décompositions complètes :

2.4. PROPOSITION. — *Soient A un anneau local noethérien tel que $\hat{A}$ soit intègre, et $\{\mathscr{P}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ une famille infinie d'idéaux premiers de hauteur* 1. *Alors la famille $\{\mathscr{P}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ est une décomposition complète de A.*

Démonstration. — Nous allons montrer que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \hat{\mathscr{P}}_\lambda = (0)$; posons $\mathscr{A} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \hat{\mathscr{P}}_\lambda$. Comme chaque $\mathscr{P}_\lambda$ est contenu dans un nombre fini d'idéaux de hauteurs 1 $\hat{\mathscr{P}}_{\lambda_i}$ de $\hat{A}$ (qui correspondent aux idéaux minimaux de $\hat{A}/\hat{\mathscr{P}}_\lambda$), si $\mathscr{A}$ n'était pas égal à (0), l'anneau noethérien $\hat{A}/\mathscr{A}$ aurait une infinité d'idéaux premiers minimaux (à savoir les images des $\hat{\mathscr{P}}_{\lambda_i}$ dans $\hat{A}/\mathscr{A}$), ce qui est absurde.

C.Q.F.D.

Soient $\mathscr{I} = (\mathscr{I}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une filtration séparée d'un anneau local noethérien A par des idéaux $\mathscr{I}_n$, $\mathrm{Gr}_{\mathscr{I}} A$ l'anneau gradué associé; si $f\in A$, on note $\mathrm{In}(f)$ la forme initiale de f dans $\mathrm{Gr}_{\mathscr{I}} A$ (si $f \in \mathscr{I}_p$ et $f \notin \mathscr{I}_{p+1}$, $\mathrm{In}(f)$ est l'image de f dans $\mathscr{I}_p/\mathscr{I}_{p+1}$); si I est un idéal de A, $\mathrm{In}(I)$ désigne l'idéal de $\mathrm{gr}_{\mathscr{I}}(A)$ engendré par les formes initiales des éléments de I.

2.5. PROPOSITION. — *Soit* $(\mathscr{I}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *une filtration de* A *par des idéaux tels que* $A/\mathscr{I}_n$ *soit de longueur finie,* $\forall\, n \in \mathbf{N}$, *et que* $\bigcap \mathscr{I}_n \hat{A} = (0)$. *Alors si* $H = \{ I_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ *est une famille d'idéaux de* A *telle que* $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{In}(I_\lambda) = (0)$, H *est une décomposition complète de* A.

Démonstration. — Comme $A/\mathscr{I}_n$ est de longueur finie, $\mathrm{Gr}_{\mathscr{I}} A$ s'identifie à $\mathrm{Gr}_{\mathscr{I}} \hat{A}$, et $\mathrm{In}(I_\lambda)$ à $\mathrm{In}(\hat{I}_\lambda)$; si $f \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \hat{I}_\lambda$,

$$In\, f \in \bigcap\nolimits_{\lambda\in\Lambda} In(\hat{I}_\lambda) = \bigcap\nolimits_{\lambda\in\Lambda} In(I_\lambda),$$

et donc $\mathrm{In}(f) = 0$ par hypothèse, d'où $f = 0$ puisque $\bigcap \mathscr{I}_n \hat{A} = (0)$ par hypothèse.

C.Q.F.D.

Cette proposition s'applique en particulier à la filtration $\mathfrak{m}$-adique de A.

2.6. *Remarques :*

(*a*) Dans le cas d'une famille $\{ I_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ d'idéaux vérifiant la propriété de la proposition 2.5 pour la filtration $\mathfrak{m}$-adique de A, on peut prendre $e(\mu) = \mu$ ($e(\mu)$ étant l'entier défini par le théorème 2.2 (*c*)). Soit en effet μ un entier > 0, et supposons que $f \in \hat{A}$ soit non nulle et μ-plate dans $\hat{A}/\hat{I}_\lambda$, $\forall\, \lambda \in \Lambda$, i. e. que $f \in \hat{I}_\lambda + \hat{\mathfrak{m}}^\mu$, $\forall\, \lambda \in \Lambda$; si $f \notin \hat{\mathfrak{m}}^\mu$, on peut écrire $f = h + h'$ avec $h' \in \hat{\mathfrak{m}}^\mu$, $h \in \hat{I}_\lambda$ et $h \notin \hat{\mathfrak{m}}^\mu$. On a donc $\mathrm{In}\, f = \mathrm{In}\, h$, d'où $\mathrm{In}\, f \in \mathrm{In}(I_\lambda)$, $\forall\, \lambda \in \Lambda$, soit $\mathrm{In}\, f \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{In}(I_\lambda) = (0)$, ce qui est absurde.

(*b*) Soit $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'idéaux de A telle que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = (0)$; il est faux en général que cette famille soit une décomposition complète de A. Voici un contre-exemple, dû à J. BECKER [Be] : $A = \mathbf{C}\{ x, y \}$ et

$$I_\lambda = (x + \textstyle\sum_{k=1}^{\lambda} k!\, y^k,\ y^{\lambda+1}) \qquad (\lambda \in \mathbf{N}).$$

2.7. DÉFINITION. — Soit (X, x) un germe d'ensemble analytique (réel ou complexe), et soit $\{ X_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de sous-espaces analytiques de X (*cf.* 1.9). Soit I_λ l'idéal de $\mathcal{O}(X)$ formé des fonctions nulles sur X_λ; on dit alors que *la famille* $\{ X_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ *est une décomposition complète de* X *si la famille* $\{ I_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ *est une décomposition complète de* $\mathcal{O}(X)$.

2.8. On peut se poser la question suivante (*cf.* [T], conjecture 1.9) : soient A un anneau analytique, et $H = \{ I_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'idéaux premiers de A; à quelle condition sur H a-t-on la propriété suivante : si $f \in \hat{A}$ est telle que son image dans $\hat{A}/\hat{I}_\lambda$ soit en fait dans A/I_λ (pour tout $\lambda \in \Lambda$), alors $f \in A$?

Voici un exemple qui montre qu'il n'est pas suffisant que H soit une décomposition complète : posons $A = \mathbf{R}\{x, y\}$, et soit H la famille d'idéaux $(x-\lambda_n y)_{n \in \mathbf{N}}$ avec $\lambda_n \in \mathbf{R}$. H est évidemment une décomposition complète de A (*cf.* 2.5).

Considérons $f \in \hat{A}$, définie par

$$f(x, y) = (x-\lambda_1 y)+2!(x-\lambda_1 y)(x-\lambda_2 y)+\dots$$
$$+n!(x-\lambda_1 y)\dots(x-\lambda_n y)+\dots$$

La fonction f, restreinte aux droites de H d'équation $x = \lambda_i y$, est analytique (et même polynomiale), alors que la série formelle $f(x, y)$ n'est évidemment pas convergente.

2.9. Soit X un germe analytique plongé dans k^n ($k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Une courbe C dans X sera toujours définie par une représentation paramétrique, i. e. par un morphisme $\gamma : \mathcal{O}(X) \to k\{t\}$; l'idéal $I(C) = \ker \gamma$ est alors un idéal premier dans $\mathcal{O}(X)$. La lettre C désignera aussi dans la suite l'ensemble (ou le germe) sous-jacent à la courbe définie par γ.

2.10. *Définition.* – Soient C_1 et C_2 deux courbes dans X, définies par deux morphismes γ_1 et $\gamma_2 : \mathcal{O}(X) \to k\{t\}$, et soit μ un entier $\geqslant 1$; on dit que C_1 et C_2 ont un *contact d'ordre* $\geqslant \mu$ si $\gamma_1(f)-\gamma_2(f) \in (t)^\mu$ pour tout $f \in \mathcal{O}(X)$.

Si X est un germe analytique, nous noterons X_{reg} l'ensemble des points réguliers de X (dans le cas réel irréductible, X_{reg} est l'ensemble des points lisses de dimension maximum); nous noterons systématiquement de la même manière le germe d'un espace analytique et son représentant dans un ouvert assez petit. On a alors le théorème suivant :

2.11. THÉORÈME. – *Soient* (X, x) *un germe analytique* (*réel ou complexe*) *irréductible,* C *une courbe dans* X *telle que* $C-\{x\} \subset X_{\text{reg}}$, *et* μ *un entier* $\geqslant 1$.

Alors l'ensemble des courbes C_λ dans X, ayant un contact d'ordre $\geqslant \mu$ avec C, est une décomposition complète de X.

2.12. *Remarque.* – J.-C. TOUGERON [T] démontre ce théorème dans le cas complexe en utilisant la condition (c) du théorème 2.2; une démonstration analogue, dans le cas réel, est esquissée dans [R_1]. Nous donnons ici une démonstration plus directe qui s'appuie sur la condition (a) du théorème 2.2.

Nous noterons Sing X l'ensemble des points singuliers de X (i. e. l'ensemble des points $y \in X$ tels que $\mathcal{O}_{X, y}$ ne soit pas régulier), et si I est un idéal de $\mathcal{O}_{X, y}$, $V(I)$ désignera l'ensemble des zéros de I.

2.13. LEMME. — *Soient* (X, x) *un germe d'espace analytique irréductible,* I *un idéal de* $\mathcal{O}_{X,x}$ *tel que* $V(I) \subset \operatorname{Sing} X$, $\pi : \tilde{X} \to X$ *l'éclatement de l'idéal* I *dans* X, *et* $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ *un point de* $\tilde{X}$ *adhérant à* $\pi^{-1}(X_{\text{reg}})$; *alors le morphisme canonique* $\hat{\pi}^*$ (*induit par* π) $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} \to \hat{\mathcal{O}}_{\tilde{X},\tilde{x}}$ *est injectif.*

Démonstration. — $\mathfrak{m}$ désignera l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$ et $\tilde{\mathfrak{m}}$ celui de $\mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{x}}$.

(*a*) Montrons d'abord que le morphisme $\pi^* : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{x}}$, induit par π, est injectif; comme $x \in \pi^{-1}(X_{\text{reg}})$ par hypothèse, et que π induit un isomorphisme $\pi^{-1}(X_{\text{reg}}) \to X_{\text{reg}}$, on en déduit que l'image par π d'un voisinage de $\tilde{x}$ dans $\tilde{X}$ contient un ouvert de X (qui n'est pas en général un voisinage de x). Cela entraîne bien que π^* est injective, car si $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ est telle que $\pi^*(f) = f \circ \pi = 0$, f s'annule sur un ouvert de X_{reg}, et donc $f = 0$ puisque X est supposé irréductible.

(*b*) Montrons ensuite, comme dans [B-G], que la topologie $\mathfrak{m}$-adique de $\mathcal{O}_{X,x}$ est induite par la topologie $\tilde{\mathfrak{m}}$-adique de $\mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{x}}$ (ce qui n'est pas nécessairement réalisé pour un morphisme analytique : *cf.* [G_1]; ce problème est étudié dans [T] et [G_2]). Soit $U \subset \tilde{X}$ une carte affine de l'éclatement π telle que $\tilde{x} \in U$; si $I = (f_1, \ldots, f_n)$, l'anneau $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(U)$ s'identifie à $\mathcal{O}_{X,x}[f_1/f_i, \ldots, f_n/f_i]$ pour un certain i (avec $1 \leqslant i \leqslant n$) : c'est donc une algèbre de type fini sur l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$; si S désigne le localisé de $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(U)$ par rapport à l'idéal du point $\tilde{x}$, et $\mathfrak{m}_S$ son idéal maximal, on en déduit que la topologie $\mathfrak{m}$-adique de $\mathcal{O}_{X,x}$ est induite par la topologie $\mathfrak{m}_S$-adique de S (c'est le *Zariski subspace theorem* : *cf.* [Ab]). Mais l'anneau $\mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{x}}$ est plat sur S, et $\mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{x}}$ et S ont même complété : on a donc $\tilde{\mathfrak{m}}^n \cap S = \mathfrak{m}_S^n$, $\forall n \in \mathbf{N}$, ce qui implique évidemment que la topologie $\mathfrak{m}_S$-adique de S est induite par la topologie $\tilde{\mathfrak{m}}$-adique de $\mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{x}}$, et donc que la topologie $\mathfrak{m}$-adique de $\mathcal{O}_{X,x}$ est induite par la topologie $\tilde{\mathfrak{m}}$-adique de $\mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{x}}$ (pour tout ce qui concerne les éclatements, *cf.* [H_1] par exemple).

(*c*) Il existe donc une application $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que

$$\tilde{\mathfrak{m}}^{\varphi(q)} \cap \mathcal{O}_{X,x} \subset \mathfrak{m}^q \qquad (\forall q \in \mathbf{N});$$

montrons que cela implique que $\hat{\pi}^* : \hat{\mathcal{O}}_{X,x} \to \hat{\mathcal{O}}_{\tilde{X},\tilde{x}}$ est injective : soit $f \in \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ telle que $\hat{\pi}^*(f) = 0$, et soit $f_1 \in \hat{\mathfrak{m}}^{\varphi(q)}$ telle que $f - f_1 \in \mathcal{O}_{X,x}$; on a

$$\hat{\pi}^*(f - f_1) = \hat{\pi}^*(f_1) \in \hat{\tilde{\mathfrak{m}}}^{\varphi(q)} \cap \mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{x}} = \tilde{\mathfrak{m}}^{\varphi(q)}.$$

On a donc $f - f_1 \in \tilde{\mathfrak{m}}^{\varphi(q)} \cap \mathcal{O}_{X,x} \subset \mathfrak{m}^q$ par hypothèse, d'où $f \in \hat{\mathfrak{m}}^q$ puisque $\varphi(q) \geqslant q$. On a donc $f \in \hat{\mathfrak{m}}^q$, $\forall q \in \mathbf{N}$, d'où $f = 0$.

C.Q.F.D.

2.14. LEMME. — *Soient* (X, x) *un germe analytique irréductible* (*réel ou complexe*), $\mathcal{O}_{X,x}$ *l'anneau des germes de fonctions analytiques sur* X, $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ *son complété*, $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ (*telle que* $\varphi \neq 0$), C *une courbe dans* X *telle que* $C - \{x\} \subset X_{\text{reg}}$, *et* μ *un entier* $\geqslant 1$. *Il existe alors une courbe* C' *dans* X *ayant un contact d'ordre* $\geqslant \mu$ *avec* C, *et telle que* φ *ne s'annule pas sur* C' (*i. e. telle que si* $\mathcal{P}'$ *est l'idéal de* C' *dans* $\mathcal{O}_{X,x}$, *on ait* $\varphi \notin \hat{\mathcal{P}}'$).

2.15. COROLLAIRE. — *Si* Y *est un sous-espace analytique strict de* X, *il existe une courbe* C' *dans* X *ayant un contact d'ordre* $\geqslant \mu$ *avec* C *et telle que* $C' \not\subset Y$.

Démonstration du lemme 2.14 :

(*a*) Supposons d'abord X lisse au voisinage de x, i. e. que X soit le germe de k^n (avec coordonnées $x_1, \ldots, x_n$) à l'origine; il est d'abord clair que l'on peut trouver une courbe C' de la forme

$$t \to (f_1(t), \ldots, f_{n-1}(t), t)$$

telle que $\varphi(f_1(t), \ldots, f_{n-1}(t), t) \neq 0$ (φ est un élément de $k[[x_1, \ldots, x_n]]$).

Supposons que la courbe C soit donnée sous forme paramétrique :

$$t \mapsto (\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t));$$

le morphisme analytique $g : (k^n, 0) \to (k^n, 0)$, défini par

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1^{\mu+1} + \xi_1(x_n), \ldots, x_{n-1}^{\mu+1} + \xi_{n-1}(x_n), \xi_n(x_n)),$$

correspond à un morphisme d'anneaux locaux $g^* : \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n$ qui est fini (il est en effet immédiat de voir qu'il est quasi fini); le morphisme $\hat{g}^* : \hat{\mathcal{O}}_n \to \hat{\mathcal{O}}_n$ est donc aussi fini, ce qui implique qu'il est injectif, et donc que $\hat{g}^*(\varphi) \neq 0$.

On peut donc, d'après la remarque faite plus haut, trouver une courbe analytique C', définie par une représentation paramétrique de la forme $h(t) = (h_1(t), \ldots, h_{n-1}(t), t)$, telle que $\hat{g}^*(\varphi)(h(t)) \neq 0$; la courbe C', définie par la représentation paramétrique $g \circ h$ a alors un contact d'ordre $\geqslant \mu$ avec C, et vérifie

$$\varphi(g(h(t))) = \hat{g}^*(\varphi)(h(t)) \neq 0.$$

(*b*) Dans le cas où X est singulier en x, on sait qu'il existe une résolution des singularités $\pi : \tilde{X} \to X$ obtenue comme une suite d'éclatements, telle que π induise un isomorphisme $\pi^{-1}(X_{\text{reg}}) \to X_{\text{reg}}$ (*cf.* [H_1] par exemple).

Le germe de courbe (C, x) se remonte alors de manière unique en un germe de courbe $(\tilde{C}, \tilde{x})$ dans $\tilde{X}$ (car π est propre, et $\pi \mid \pi^{-1}(X_{\text{reg}})$ est un isomorphisme) telle que $\pi(\tilde{C}) = C$ et $\pi(\tilde{x}) = x$; il résulte alors du lemme 2.14

que l'application $\hat{\pi}^* : \hat{\mathcal{O}}_{X,x} \to \hat{\mathcal{O}}_{\tilde{X},\tilde{x}}$, induite par π, est injective, et donc que $\hat{\pi}^*(\varphi) \neq 0$; comme $\tilde{X}$ est lisse, on peut, d'après la partie (*a*), choisir dans le germe de $\tilde{X}$ en $\tilde{x}$ une courbe $\tilde{C}'$ ayant un contact d'ordre $\geqslant \mu$ avec $\tilde{C}$ et telle que $\hat{\pi}^*(\varphi)$ ne s'annule pas sur $\tilde{C}'$; la courbe $C' = \pi(\tilde{C}')$ répond alors aux conditions demandées.

C.Q.F.D.

Démonstration du théorème 2.11. — Soit $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ la famille des courbes de (X, x) ayant un contact d'ordre $\geqslant \mu$ avec C, et soit $\varphi \in \mathcal{O}_{X,x}$ ($\varphi \neq 0$); il existe, d'après le lemme 2.14, une courbe C_λ d'idéal $\mathcal{P}_\lambda$ telle que $\varphi \notin \hat{\mathcal{P}}_\lambda$; on a donc $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \hat{\mathcal{P}}_\lambda = (0)$, ce qui implique bien que la famille $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une décomposition complète de X (condition (*a*) du théorème 2.12).

Nous allons maintenant donner deux autres exemples de décompositions complètes par des courbes :

2.16. PROPOSITION. — *Soient* (X, x) *un germe d'ensemble analytique réel irréductible,* Z *un ensemble sous-analytique dans* X (*cf.* [H_2]) *contenant un ouvert non vide de* X_{reg}. *Alors la famille des courbes* C_λ *de* X *telles que* $C_\lambda \cap Z \neq \{x\}$ (*i. e. telles que* $C_\lambda \cap Z$ *soit de dimension* 1) *est une décomposition complète de* X.

Remarque. — Si Z est semi-analytique, et n'est contenu dans aucun sous-espace analytique strict de X, il vérifie les hypothèses de la proposition 2.16; il peut en revanche exister des ensembles Z sous-analytiques dans X ne contenant aucun ouvert non vide de X, et n'étant contenu dans aucun sous-espace analytique strict de X (*cf.* [H_2]); il est cependant probable que la proposition 2.16 soit aussi valable pour ces ensembles.

Démonstration de la proposition 2.16. — Soit U un ouvert non vide, sous-analytique dans X, tel que $x \in \bar{U}$ et $U \subset X_{\text{reg}} \cap Z$; il existe, d'après le *curve selection lemma* [H_2], une courbe C, analytique dans X, telle que $C - \{x\} \subset U$.

2.17. LEMME. — *Il existe un entier* μ *tel que toute courbe* C' *de* X, *ayant un contact d'ordre* $\geqslant \mu$ *avec* C, *soit telle que* $C' - \{x\} \subset U$.

Démonstration. — Ce lemme est analogue au lemme 4.4 de [R_1]. Supposons (X, x) plongé dans $(\mathbf{R}^n, 0)$, ce qui permet de parler de distance. Les ensembles C et $W = \complement U$ sont sous-analytiques dans $\mathbf{R}^n$ et tels que $C \cap W = \{0\}$ par hypothèse (on se place dans une petite boule compacte K de centre 0).

Il existe donc un nombre α et une constante λ tels que l'on ait :

$$\lambda\, d(x, 0)^{\alpha} \leqslant d(x, C)+d(x, W) \qquad (\forall x \in K)$$

(c'est l'inégalité de Lojasiewicz, valable pour les sous-ensembles sous-analytiques [H_1]).

Si C est définie par la représentation paramétrique $h : \mathcal{O}_n \to \mathbf{R}\{t\}$, posons $x(t) = (h(x_1), \ldots, h(x_n))$. Si e est la multiplicité de C dans $\mathbf{R}^n$ à l'origine (e est le plus petit des ordres des séries $h(x_1), \ldots, h(x_n)$), il existe une constante λ_1 telle que

$$|t|^e \leqslant \lambda_1 |x(t)|$$

dans un voisinage de l'origine dans $\mathbf{R}$.

Si maintenant C' a un contact d'ordre $\nu \geqslant e(\alpha+1)$ avec C, on a, $\forall x \in C' \cap K$ (et pour t assez proche de 0),

$$d(x, C) \leqslant \lambda_2 |t|^{\nu} \leqslant \lambda_3 |x|^{\nu/e} \leqslant \lambda_3 |x|^{\alpha+1}$$

(où λ_2 et λ_3 désignent des constantes convenables); on a donc, $\forall x \in C' \cap K$ (quitte à restreindre K),

$$d(x, \complement U) = d(x, W) \geqslant \lambda |x|^{\alpha} - d(x, C) \geqslant \lambda_4 |x|^{\alpha},$$

ce qui implique bien que $C' - \{0\} \subset U$.

C.Q.F.D.

La proposition 2.16 découle maintenant immédiatement du lemme 2.17 et du théorème 2.11.

2.18. Proposition. — *Soient (X, x) un germe analytique complexe, $C_{X,x}$ son cône tangent en x; si, pour toute génératrice D_λ de $C_{X,x}$, on choisit une courbe C_λ dans X dont la tangente en x est D_λ, on obtient une décomposition complète de X.*

Démonstration. — Soit I_λ l'idéal de $\mathcal{O}(X)$ des fonctions nulles sur C_λ. $\sqrt{\operatorname{In}(I_\lambda)}$ est alors l'idéal des fonctions sur $C_{X,x}$ nulles sur D_λ. Comme $\operatorname{In}(I_\lambda) \subset \sqrt{\operatorname{In}(I_\lambda)}$, on a $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \operatorname{In}(I_\lambda) = (0)$, et donc la famille des C_λ forme une décomposition complète de X d'après 2.5.

2.19 *Remarques :*

(*a*) Il résulte de la remarque 2.6 que, dans le cas de la proposition 2.18, on peut prendre $e(\mu) = \mu$ (*cf.* théorème 2.2 (*c*)).

(*b*) Le raisonnement de 2.18 s'applique aussi dans le cas où X est réel si le cône tangent $C_{X,x}$ (défini algébriquement par l'idéal $\operatorname{In}(I(X))$ dans $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$) a toutes ses composantes irréductibles de la même dimension que celle de X (ce qui est équivalent à dire que l'idéal $\sqrt{\operatorname{In}(I(X))}$ est réel, *cf.* [R_2]), et si de plus $C_{X,x}$ coïncide avec l'ensemble des tangentes aux courbes analytiques réelles tracées sur X (i. e. si $C_{X,x}$ coïncide avec le cône C_3 de Whitney, ce qui est toujours réalisé dans le cas complexe mais pas dans le cas réel; par exemple si X est défini par l'équation $x^2+y^4-z^7 = 0$ dans $\mathbf{R}^3$, $C_{X,x}$ est d'équation $x^2 = 0$, donc de dimension 2, alors que toutes les courbes tracées sur X sont tangentes à l'axe des z).

3. Fonctions différentiables et ensembles analytiques

3.1. *Définition.* — Soient X un ensemble plongé dans $\mathbf{R}^n$ (ou le germe à l'origine de $\mathbf{R}^n$ d'un ensemble), et μ un entier $\geqslant 1$; on dit qu'une fonction f sur X *s'annule à l'ordre* μ en 0 (ou est μ-nulle en 0) s'il existe une constante C et un voisinage V de 0 dans X tels que

$$|f(y)| \leqslant C|y|^{\mu} \qquad (\forall y \in V \cap X).$$

3.2. *Remarque.* — La propriété pour une fonction f sur X d'être μ-nulle à l'origine est indépendante du plongement de X lorsque X est un germe d'ensemble analytique réel.

3.3. B. MALGRANGE [M] montre le résultat suivant : soient X un germe d'ensemble analytique à l'origine de $\mathbf{R}^n$, f une fonction de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ nulle à l'ordre $+\infty$ sur X en 0; alors, pour tout entier r, il existe une fonction analytique au voisinage de 0, nulle sur X, et dont le polynôme de Taylor d'ordre r coïncide avec celui de f.

Nous allons généraliser ce résultat aux fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ (et retrouver le résultat ci-dessus, *cf.* 3.7). Ces résultats sont analogues à ceux de [R_1] (*cf.* en particulier le théorème 4.1 de [R_1]), mais démontrés de manière différente.

Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbf{R}^n$, et si $x \in \mathbf{R}^n$, $T_r(f, x)$ désignera le polynôme de Taylor de f d'ordre r au point x (développement de Taylor de f jusqu'à l'ordre r; on a évidemment supposé $r \leqslant p$).

3.4. THÉORÈME. — *Soient X un germe d'ensemble analytique réel à l'origine de $\mathbf{R}^n$, Z un ensemble sous-analytique contenu dans X et contenant un ouvert non vide; supposons que X soit le plus petit germe analytique réel contenant Z. Alors, pour tout entier $r \geqslant 0$, il existe un entier p tel que, pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^p$ au voisinage de* 0, *dont la restriction à Z soit p-nulle en* 0, *on ait*

$$T_p(f, 0) \in I(X) + \mathfrak{m}^r$$

($\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_n$).

3.5. *Remarques :*

(*a*) Il serait intéressant de pouvoir préciser en fonction de r, de X et de Z, l'entier p minimal pour lequel le théorème 3.4 est vrai. Cette question sera abordée au paragraphe 4 (*cf.* aussi [R_1], théorème 2.2, où cette question est traitée lorsque $Z = X$ et que X est de dimension 1).

(*b*) On peut aussi se poser la question suivante : le théorème 3.4 est-il encore valable avec des ensembles Z non nécessairement sous-analytiques ?

Démonstration du théorème 3.4 *:*

(*a*) Supposons d'abord X irréductible de dimension 1; soit $\pi : Y \to X$ une normalisation de X. Y est alors le germe d'une droite réelle, et le morphisme d'anneaux correspondants :

$$\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \quad (\text{avec } \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\{t\})$$

est fini et injectif; si r est un entier donné, il existe donc un entier p tel que l'on ait

$$\mathfrak{m}_Y^p \cap \mathcal{O}_X \subset \mathfrak{m}_X^r,$$

car les topologies $\mathfrak{m}_X$-adique et $\mathfrak{m}_Y$-adique coïncident sur $\mathcal{O}_X$.

D'autre part, $\pi^{-1}(Z)$ est sous-analytique dans Y, et non réduit à l'origine : $\pi^{-1}(Z)$ contient donc nécessairement le germe d'une demi-droite (ouverte ou fermée) adhérente à 0.

Si maintenant f est une fonction de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbf{R}^n$ dont la restriction à Z est p-nulle en 0, il en sera de même de $T_p(f, 0)$ (puisque $f - T_p(f, 0)$ est p-plate, donc p-nulle, en 0 dans $\mathbf{R}^n$).

Soit $T_p f$ la restriction de $T_p(f, 0)$ à X : $T_p f \circ \pi$ est un polynôme en t dont la restriction à Z est p-nulle en 0 par hypothèse; on a donc $T_p f \circ \pi \in (t)^p = \mathfrak{m}_Y^p$, d'où :

$$T_p f \in \mathfrak{m}_X^r$$

(puisque p a été choisi de façon à ce que $\mathfrak{m}_Y^p \cap \mathcal{O}_X \subset \mathfrak{m}_X^r$), ce qui démontre le théorème dans ce cas.

(*b*) Pour le cas général, soit $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une décomposition complète de X par des courbes analytiques irréductibles telles que $X_\lambda \cap Z$ soit de dimension 1, $\forall \lambda \in \Lambda$ (*cf.* 2.16).

D'après la condition (*c*) du théorème 2.2, il existe un ensemble fini Γ et un entier $e(r)$ tels que, pour $h \in \mathcal{O}_n$, si $h \in I(X_\lambda) + \mathfrak{m}^{e(r)}$, $\forall \lambda \in \Gamma$, alors $h \in I(X) + \mathfrak{m}^r$; mais comme Γ est fini, il existe, d'après la première partie de la démonstration, un entier p tel que

$$T_p(f, 0) \in I(X_\lambda) + \mathfrak{m}^{e(r)} \qquad (\forall \lambda \in \Gamma);$$

on a donc $T_p(f, 0) \in I(X) + \mathfrak{m}^r$.

C.Q.F.D.

3.6. COROLLAIRE. — *X et Z vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème* 3.4, *si f est une fonction de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *dont la restriction à Z est nulle à l'ordre* $+\infty$ *en* 0, *alors* $T_\infty(f, 0) \in \widehat{I(X)}$.

On a en effet $T_\infty(f, 0) \in \widehat{I(X)} + \hat{\mathfrak{m}}^r$ pour tout r, d'après le théorème.

3.7. COROLLAIRE (*cf.* [R₁], théorème 4.1). — *Soit X un germe d'ensemble analytique réel à l'origine de* $\mathbf{R}^n$. *Etant donné un entier* $r \geqslant 0$, *il existe un entier p tel que si f est une fonction de classe* $\mathscr{C}^p$, *dont la restriction à X est p-nulle en* 0, *alors :*

$$T_p(f, 0) \in I(X) + \mathfrak{m}^r.$$

Il suffit de faire $Z = X$ dans le théorème 3.4.

4. Cônes dans les espaces de jets

4.1. Soit X un germe d'ensemble analytique réel à l'origine de $\mathbf{R}^n$. Pour chaque entier $k \geqslant 0$, nous allons définir un cône D_k dans l'espace des jets $T_k(X)$; D_k sera constitué des éléments de $T_k(X)$ que l'on peut « approcher » (en tant que distributions) par des combinaisons linéaires de $(k+1)$ masses de Dirac dont le support se trouve dans X.

Remarquons que $T_k(\mathcal{O}_n)$ s'identifie avec les opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant k$ à coefficients constants. Un élément δ de $T_k(X)$ peut être considéré comme un élément de $T_k(\mathcal{O}_n)$, donc comme un opérateur différentiel P_δ d'ordre $\leqslant k$ à coefficients constants tel que $P_\delta(f)(0) = 0$, $\forall f \in I(X)$ (plus précisément, J étant un multi-indice, si l'on a $\delta(x^J) = C_J$, on pose $P_\delta = \sum (C_J/J\,!)\,\partial/\partial x^J$.

4.2. La question de l'approximation d'une distribution de support l'origine par des combinaisons linéaires de masses de Dirac a été étudiée par GLAESER ([Gl]). Il démontre en particulier le résultat suivant : soit $\{S_i\}$ une suite de distributions de $\mathbf{R}^n$, sommes de $(k+1)$ masses de Dirac, i. e. telles que

$$S_i(f) = \textstyle\sum_{j=1}^{k+1} a_{ij}\, f(P_{ij}),$$

avec $P_{ij} \in \mathbf{R}^n$ et $a_{ij} \in \mathbf{R}$ (f étant une fonction $\mathscr{C}^\infty$). Supposons que $\lim_i P_{ij} = 0$ ($j = 1, \ldots, k+1$). Alors la suite S_i converge si, et seulemen si, $\lim_i \sum_{j=1}^{k+1} a_{ij} (P_{ij})^I$ existe pour chaque n-multi-indice I tel que $|I| \leqslant k$

Plus précisément, si l'on pose

$$C_I = \lim_i \sum_{j=1}^{k+1} a_{ij} (P_{ij})^I,$$

alors :

$$\lim_i S_i = \sum_{|I| \leqslant k} \frac{C_I}{I!} \frac{\partial}{\partial x^I}.$$

De plus, si la suite S_i converge en tant que suite de distributions, elle converge pour la topologie faible sur le dual des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, (i. e. si g est de classe $\mathscr{C}^k$, $\lim S_i(g)$ existe, et est égale à

$$\sum_{|I| \leqslant k} ((C_I/I!)\, \partial g/\partial x^I)(0).)$$

4.3. *Remarque.* – Un résultat analogue à celui de GLAESER dans le cas analytique complexe a été démontré par un des auteurs ([B_3]; *cf.* aussi [K]).

4.4. Soit X un germe d'ensemble analytique réel plongé dans $(\mathbf{R}^n, 0)$. Soit k un entier fixé : nous considérerons les suites $\{S_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ de distributions, combinaisons linéaires d'au plus $k+1$ masses de Dirac dont le support est dans X et tend vers l'origine lorsque i tend vers $+\infty$. (Ces distributions sont donc celles considérées en 4.2, avec en plus la condition $P_{ij} \in X$, $\forall\, i, j$.)

Nous poserons $D_k(X, 0) = \{ D \in T_k(X);\ D = \lim_i S_i \}$, les S_i étant les distributions définies ci-dessus.

X étant fixé, nous utiliserons la notation D_k ou $D_k\,(X)$ au lieu de $D_k\,(X, 0)$.

4.5. *Remarque.* – Les cônes D_k sont les analogues réels des cônes introduits dans [B_3] à ceci près : on n'impose ici aucune contrainte sur les coefficients a_{ij} des masses de Dirac P_{ij}, et donc les multiples de la masse de Dirac en 0 appartiennent à D_k ($\forall\, k$).

Ceci vient du fait qu'ici on a posé

$$T_k(X) = \operatorname{Hom}(\mathscr{O}(X)/\mathfrak{m}^{k+1}, \mathbf{R}),$$

au lieu de $\operatorname{Hom}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{k+1}, \mathbf{R})$ comme dans [B_3].

4.6. On voit facilement que les cônes D_k possèdent les propriétés suivantes :

(*a*) D_k est un cône dans J_k;

(*b*) $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \ldots$;

(*c*) $D_k + D_j \subset D_{k+j+1}$ ($\forall$ entiers $\geqslant 0$ k et j);

(*d*) si $f : X \to Y$ est un morphisme de germes d'ensembles analytiques réels, l'application linéaire induite par f $T_k(f) : T_k(X) \to T_k(Y)$ envoie $D_k(X)$ dans $D_k(Y)$; en particulier, les $D_k(X)$ sont des invariants analytiques de X, et si X est un sous-ensemble analytique de Y, $D_k(X)$ est un sous-cône de $D_k(Y)$.

Nous allons maintenant montrer un théorème qui implique que tout élément de $\mathcal{O}(X)^*$ (considéré comme une distribution) est limite d'une suite de combinaisons linéaires d'un nombre borné de masses de Dirac dont le support se trouve dans X.

4.7. Théorème. — *Soit X un germe d'ensemble analytique réel, et soit k un entier $\geqslant 0$; il existe un entier $r \geqslant k$ tel que*

$$D_r(X) \supset T_k(X)$$

($D_r(X)$ et $T_k(X)$ sont considérés comme plongés dans $T_r(X) \subset \hat{\mathcal{O}}(X)^*$).

Démonstration :

(*a*) Si X est lisse de dimension 1, on a $D_k(X) = T_k(X)$ pour tout $k \geqslant 0$ à cause de la formule des différences finies; les distributions S_h, définies par

$$S_h(f) = \frac{1}{h^m}\sum_{j=1}^{m+1}(-1)^j\binom{m+1}{j}f(x-jh),$$

tendent en effet vers $f^{(m)}(x)$ quand h tend vers zéro.

Chaque élément de $T_k(X)$ est donc limite de distributions dont le support est au plus $k+1$ points, à savoir les $\{x-jh\}_{j=1,\ldots,k+1}$.

(*b*) Supposons maintenant X de dimension 1 et irréductible, mais éventuellement singulier à l'origine, et soit $\pi : Y \to X$ une normalisation de X; $\mathcal{O}(Y)$ est alors un $\mathcal{O}(X)$-module fini, et si k est donné, il existe un entier r tel que

$$T_r(\pi)(T_r(Y)) \supset T_k(X)$$

(*cf.* la démonstration du théorème 3.4). Mais d'après (*a*), $D_r(Y) = T_r(Y)$; on a donc

$$D_r(X) \supset T_r(\pi)(D_r(Y)) = T_r(\pi)(T_r(Y)) \supset T_k(X),$$

ce qui démontre le théorème dans ce cas.

(*c*) Dans le cas général, soit $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ une décomposition complète de X par des courbes irréductibles, et soit $\delta \in T_k(X)$: il existe, d'après la condition (*b*) du théorème 2.2, un ensemble fini $\Gamma \subset \Lambda$ tel que

$$\delta \in \sum_{\lambda\in\Gamma} \operatorname{ann}_{\mathcal{O}(X)}(I_\lambda);$$

mais

$$\operatorname{ann}_{\mathcal{O}(X)}(I_\lambda) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}(X_\lambda)}^* \quad (cf.\ 1.7),$$

comme

$$\widehat{\mathcal{O}(X_\lambda)}^* = \varinjlim_r T_k(X_\lambda)$$

et que X_λ est de dimension 1, il existe, d'après (*b*), un entier r_1 tel que $\delta \in \sum_{\lambda \in \Gamma} D_{r_1}(X_\lambda)$, d'où $\delta \in D_{r_1}(X)$ (4.6).

Comme $T_k(X)$ est de dimension finie, on peut faire ce qui précède pour tous les éléments δ d'une base de $T_k(X)$, d'où l'on tire l'existence d'un entier r assez grand tel que $T_k(X) \subset D_r(X)$ (en utilisant 4.6 (*c*)).

4.8. COROLLAIRE. — *Soit $\delta \in T_k(X)$: on a alors $\delta = \lim_i S_i$, où les S_i sont des distributions comme dans le théorème* 4.7, *mais où l'on peut restreindre les supports des S_i à être dans un sous-ensemble analytique de dimension* 1 *de X.*

On peut en effet, d'après la démonstration précédente, restreindre les supports des S_i à être dans $\bigcup_{\lambda \in \Gamma} X_\lambda$.

4.9. *Remarque.* — Des résultats, analogues au théorème 4.7 et au corollaire 4.8, mais dans le cas complexe, sont démontrés dans [B3].

Nous noterons $LD_r(X)$ le sous-espace vectoriel de $T_r(X)$ engendré par le cône $D_r(X)$.

4.10. COROLLAIRE. — *Soit X un germe d'espace analytique réel à l'origine de $\mathbf{R}^n$, et soient r et k deux entiers $\geqslant 0$ tels que $LD_r(X) \supset T_k(X)$. Alors si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^r$ nulle sur X, on a $T_r(f, 0) \in I(X) + \mathfrak{m}^{k+1}$ ($\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_n$).*

Démonstration. — Comme par hypothèse $LD_r(X) \supset T_k(X)$, on peut supposer qu'il y a une base B de $T_k(X)$ vérifiant la propriété suivante : Pour tout élément $\delta \in B$, on a $\delta = \lim_i S_i$, où les S_i sont des distributions comme dans 4.4 (sommes d'au plus $r+1$ masses de Dirac). Soient maintenant f une fonction de classe $\mathscr{C}^r$ nulle sur X, et δ un élément de B : puisque Supp $(S_i) \subset X$, on a $S_i(f) = 0$, $\forall\, i$, d'où $\delta(f) = 0$, et donc $\delta(T_r(f, 0)) = 0$ (car $\delta(f) = \delta(T_r(f, 0))$ parce que δ est une distribution d'ordre $\leqslant r$ de support l'origine). On a ainsi $\delta(T_r(f, 0)) = 0$, $\forall\, \delta \in T_k(X)$, ce qui implique bien que $T_r(f, 0) \in I(X) + \mathfrak{m}^{k+1}$ (*cf.* 1.5).

C.Q.F.D.

4.11. PROPOSITION. — *Soit (X, x) un cône de sommet x; on a alors $LD_k(X, x) = T_k(X, x)$ pour tout entier $k > 0$.*

Démonstration. – La famille $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ des génératrices de X forme une décomposition complète de X, et comme X_λ est lisse, on a

$$LD_k(X_\lambda, x) = T_k(X_\lambda, x) \qquad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

(démonstration du théorème 4.7 (*a*)).

On a d'autre part

$$T_k(X) = \textstyle\sum_{\lambda \in \Lambda} T_k(X, x)$$

à cause de la remarque 2.6 (*a*); on obtient donc :

$$T_k(X, x) = \textstyle\sum_{\lambda \in \Lambda} T_k(X_\lambda, x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} LD_k(X_\lambda, x) \subset LD_k(X, x).$$

C.Q.F.D.

4.12. Corollaire. – *Soit (X, x) un cône de sommet x plongé dans $\mathbf{R}^n$; si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ nulle sur X, on a*

$$T_k(f, 0) \in I(X) + \mathfrak{m}^{k+1} \quad (\mathfrak{m} \text{ désignant l'idéal maximal de } \mathcal{O}_{X,x}).$$

4.13. *Remarque.* – La remarque 2.6 et la proposition 4.11 incitent à se poser la question suivante : Soient (X, x) un germe analytique réel, $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une décomposition complète par des courbes irréductibles deux à deux transverses (i. e. à tangentes deux à deux distinctes), et $r(k)$ un entier tel que l'on ait $LD_{r(k)}(X_\lambda, x) \supset T_k(X_\lambda, x)$, $\forall \lambda \in \Lambda$; a-t-on alors $LD_{r(k)}(X, x) \supset T_k(X, x)$?

4.14. Voici un exemple de calcul du cône $D_k(X)$: Soit

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^3 = y^{10}\}$$

considéré comme germe à l'origine. $T_1(X)$ est de dimension 3 sur $\mathbf{R}$, de base $\{1, \partial/\partial x, \partial/\partial y\}$: nous allons montrer que $\partial/\partial x \in D_4(X)$. Soit $\pi : \mathbf{R} \to X$ la normalisation de X donnée par $\pi(t) = (t^{10}, t^3)$, et soit $\{M_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ une suite de points de $\mathbf{R}$ telle que $\lim_i M_i = 0$.

Nous considérerons les cinq suites de points dans X, définies par $\pi(\lambda_j M_i)$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$, où $\lambda_1 = 1$ et où les λ_i sont des constantes deux à deux distinctes.

On peut alors trouver des constantes $a_j \neq 0$ $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ telles que

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^5 a_j = 0, \\ \sum_{j=1}^5 a_j \lambda_j^m = 0 \qquad (m = 3, 6, 9), \\ \sum_{j=1}^5 a_j \lambda_j^{10} = 1 \end{cases}$$

(car le déterminant de ce système linéaire est de la forme « Vandermonde », donc non nul si les λ_i sont deux à deux distinctes).

Posons $a_{ij} = a_j M_i^{-10}$: la suite des distributions

$$S_i = \sum_{j=1}^{5} a_{ij} \pi(\lambda_j M_i)$$

a pour limite $\partial/\partial x$ (*cf.* 4.2).

Remarquons que $\partial/\partial x \notin D_3$, car la fonction $f(x, y) = x - y^{10/3}$ est de classe $\mathscr{C}^3$, nulle sur X, et l'on a $\partial/\partial x f(0, 0) \neq 0$.

4.15. Le problème suivant semble intéressant : Soient X un germe analytique réel, et k un entier $\geqslant 0$; peut-on caractériser le plus petit entier r tel que l'on ait $T_r(f, 0) \in I(X) + \mathfrak{m}^{k+1}$ pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^r$ nulle sur X ?

Une approche de ce problème serait de caractériser le plus petit entier r tel que $LD_r(X) \supset T_k(X)$ (4.10).

Un autre problème, dans le cas où X est un germe analytique complexe, et où $X_{\mathbf{R}}$ désigne le germe réel sous-jacent, est de comparer $D_k(X)$ (qui est un cône complexe), et $D_k(X_{\mathbf{R}})$ (qui est un cône réel). Si $k = 1$, ces deux cônes coïncident ([B_2], théorème 2.4).

BIBLIOGRAPHIE

[A] ABYANKAR (S.). — *Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces.* — New York, Academic Press, 1966 (*Pure and applied Mathematics*, Academic Press, 24).

[B-G] BECKER and GURJAR. — *Curves with large tangent space* (preprint, Purdue University).

[Be] BECKER (J.). — Holomorphic and differentiable tangent spaces to a complex analytic variety. *J. Diff. Geometry*, (à paraître).

[B_1] BLOOM (T.). — Opérateurs différentiels sur les espaces analytiques complexe, *Séminaire P. Lelong : Analyse*, 8e année, 1967/1968, n° 1, 20 p. — Berlin, Springer-Verlag, 1968 (*Lecture Notes in Mathematics*, 71).

[B_2] BLOOM (T.). — C^1 functions on a complex analytic variety, *Duke math. J.*, t. 36, 1969, p. 283-296.

[B_3] BLOOM (T.). — On the Zariski tangent space to a complex analytic variety, *Math. Annalen*, t. 214, 1975, p. 159-166.

[G_1] GABRIELOV (A. M.). — The formal relations between analytic functions *Funct. Anal. and Appl.*, t. 5, 1971; [en russe] *Funkc. Anal. i Pril.*, t. 5, 1971, fasc. 4, p. 64-65.

[G_2] GABRIELOV (A. M.). — Formal relations between analytic functions, *Math. USSR—Izvetja*, t. 7, 1973, p. 1056-1088; [en russe], *Izvest. Akad. Nauk SSSR, Serija Mat.*, t. 37, 1973, p. 1056-1090.

[Gl] GLAESER (G.). — L'interpolation des fonctions différentiables de plusieurs variables, *Proceedings of Liverpool singularities symposium*, II, p. 1-33. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics* 209).

[H_1] HIRONAKA (H.). — *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps*, Cours à l'Istituto L. Tonelli, Pisa, 1973.

[H_2] HIRONAKA (H.). — Sub-analytic sets, *Number theory, algebraic geometry and commutative algebra, In honor of Y. Akisuki.*

[K] KERGIN (P.). — Thèse Université de Toronto, 1976.

[M] MALGRANGE (B.). — Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques, *Bull. Soc. math. France*, t. 91, 1963, p. 113-127.

[R_1] RISLER (J.-J.). — Sur la divisibilité des fonctions de classe C^r par les fonctions analytiques réelles, *Bull. Soc. math. France*, t. 105, 1977, p. 97-112.

[R_2] RISLER (J.-J.). — Le théorème des zéros en géométries algébriques et analytique réelles, *Bull. Soc. math. France*, t. 104, 1976, p. 113-127.

[Sp] SPALLEK (K.). — *L*-platte Funktionen auf semi-analytischen Mengen (Preprint).

[T] TOUGERON (J.-C.). — Courbes analytiques sur un germe d'espace analytique et applications, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 26, 1976.

[T_r] TRÈVES (F.). — *Topological vector spaces, distributions and kernels.* — New York, Academic Press, 1967 (*Pure and applied mathematics*, Academic Press, 25).

(Texte reçu le 17 février 1977.)

Thomas BLOOM,
Department of Mathematics,
University of Toronto,
Toronto,
Ont. (Canada)

et

Jean-Jacques RISLER,
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
91128 Palaiseau.