BULLETIN DE LA S. M. F.

ANTOINE BRUNEL

DANIEL REVUZ

Marches de Harris sur les groupes localement compacts. II

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 3-31

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__3_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 3-31.

MARCHES DE HARRIS SUR LES GROUPES LOCALEMENT COMPACTS. II.

PAR

ANTOINE BRUNEL et DANIEL REVUZ
(Paris VI) (Paris VII)

RÉSUMÉ. — Nous étudions les problèmes de renouvellement des marches de Harris sur les groupes localement compacts pour lesquelles la frontière de Martin est constituée de deux points. Ceci permet d'obtenir dans ce cas la caractérisation complète des fonctions spéciales et de constater que le théorème de normalité est vrai en toute généralité. Pour cela, il est nécessaire de montrer que le potentiel d'une marche-trace sur un sous-groupe ouvert est la trace du potentiel de la marche.

Dans [3], H. KESTEN a montré que la frontière de Martin pour une promenade récurrente sur un groupe dénombrable comportait un, deux ou une infinité de points, et émis la conjecture suivante : Elle ne peut en fait comporter que un ou deux points. De plus, KESTEN montre que la frontière de Martin comporte deux points si, et seulement si, le groupe G qui porte la marche étudiée possède un sous-groupe H isomorphe à Z, tel que G/H soit fini et que la marche induite sur H ait un moment d'ordre 2.

Dans [2], nous avons repris cette question en ne supposant plus le groupe dénombrable, mais seulement localement compact métrisable, et en étendant les investigations aux fonctions spéciales plus générales que les fonctions à support compact considérées jusque là. Nous avons ainsi été amenés à considérer des classes de marches, dites de type *II*, qui rappellent la classe des marches isolées par KESTEN comme celles ayant deux points frontières.

Dans un article ultérieur, où nous étudierons la conjecture de Kesten, nous préciserons le résultat de Kesten en démontrant le résultat suivant : La marche a deux points frontières si, et seulement si, on est dans un des deux cas suivants :

(i) la marche est de type *II*;

(ii) le groupe G admet un sous-groupe distingué G_0 d'indice 2 tel que la marche induite sur G_0 soit de type *II*.

Dans cet article, nous nous proposons d'étudier complètement la transposition aux groupes généraux de ces deux types de marche et de démontrer à leur endroit le théorème du renouvellement. Les méthodes employées sont aussi valables pour les groupes abéliens comme cela a été exposé dans [6].

Nous remercions H. KESTEN de nous avoir signalé une erreur dans une première version de ces résultats.

Dans tout cet article, les définitions et les notations seront celles de [2] sauf que nous appellerons la marche M pour éviter la confusion avec le caractère X. Rappelons néanmoins qu'une marche est dite de type II s'il existe un *caractère réel* χ tel que $P\,|\,\chi\,|-|\,\chi\,|$ soit intégrable par la mesure de Haar m du groupe G considéré et que ceci entraîne que G possède un sous-groupe compact distingué $\operatorname{Ker}\chi$ tel que $G/\operatorname{Ker}\chi$ soit isomorphe à R ou Z. On appellera X le *caractère canonique* tel que l'image de m par X soit la mesure de Lebesgue, et l'on rappelle que l'on pose

$$\sigma^2 = \int_G X^2\,d\mu < +\infty.$$

Nous allons faire l'étude des propriétés asymptotiques des noyaux potentiels A construits dans [2]. Cette étude sera double : D'après la forme de A, il est clair que, si f est une charge, le comportement asymptotique de Af est celui de $W_h f$, tandis que si f est positive, le comportement de Af sera celui de γ, et nous allons essayer de faire ces deux études successivement. La première revient (*cf.* [2] (I.3)) à chercher la frontière de Martin du groupe pour la promenade considérée.

1. Théorème du renouvellement pour les noyaux W_h

Dans ce paragraphe, comme dans le suivant, nous considérons des marches de type II.

Les fonctions bornées à support compact étant spéciales, il est immédiat que l'ensemble $\{\, W_h(x,\,.),\ x\in G\,\}$ est un ensemble vaguement relativement compact de mesures de Radon positives. Nous allons ci-dessous identifier la fermeture vague de cet ensemble.

Comme d'habitude, Δ désigne le point à l'infini dans la compactification d'Alexandrov de G. Les deux propositions suivantes ne font pas usage du fait que M est de type II.

(1.1) PROPOSITION. – *Pour tout $f\in C_0\cap S$, pour tout $x\in G$,*

$$\lim_{a\to\Delta}(W_h f(xa)-W_h f(a)) = 0.$$

De plus, la convergence est uniforme lorsque x varie dans un ensemble compact.

Démonstration. — Posons $\varphi_a = \tau_a W_h(f)$ et $B = \| W_h(f) \|$. Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre plus fin que le filtre des voisinages de Δ, posons

$$L(x) = \lim_{\substack{\mathcal{U} \\ a \to \Delta}} \varphi_a(x).$$

Comme

$$P_{n+1} W_h f = W_h f - \sum_0^n P_{k+1} f + \sum_0^n \frac{P_{k+1} h}{m(h)} m(f),$$

on a, pour n fixé,

$$\lim_{a\to\Delta}(P_n \varphi_a(x) - \varphi_a(x)) = \lim_{a\to\Delta}\left(-\tau_a \sum_0^n P_{k+1} f + \tau_a \sum_0^n \frac{P_{k+1} h}{m(h)} m(f)\right) = 0,$$

car ces dernières fonctions sont dans C_0.

Si n est assez grand, on peut écrire $\mu^n = g_n . m + \beta_n$ avec $g_n \in \mathcal{L}^1(m)$, et l'on a

$$\left| P_n \varphi_a(x) - \int \varphi_a(yx) g_n(y) m(dy) \right| \leqslant B \| \beta_n \|.$$

Soit ψ un représentant borélien de la limite de φ_a suivant $\mathcal{U}$ dans $\sigma(L^\infty, L^1)$; on a donc :

$$\left| L(x) - \int \psi(yx) g_n(y) m(dy) \right| \leqslant B \| \beta_n \|,$$

et

$$| L(x) - P_n \psi(x) | \leqslant 2 B \| \beta_n \|.$$

Il en résulte, en faisant tendre n vers l'infini, que $L = \lim_n P_n \psi$, donc que L est constante, donc que

$$\lim_{\substack{\mathcal{U} \\ a \to \Delta}} \varphi_a(x) - \varphi_a(e) = 0,$$

ce qui entraîne

$$\lim_{a\to\Delta}(W_h f(xa) - W_h f(a)) = 0.$$

Pour montrer la deuxième phrase de l'énoncé, il suffit d'utiliser un procédé exposé dans [1] et [6] et basé sur une extension du théorème d'Egoroff, due à Mokobodzki. Nous nous contenterons de renvoyer à ces références.

La démonstration ci-dessus donne aussi la proposition suivante :

(1.2) PROPOSITION. — *Si f est spéciale, et telle que Pf tende vers zéro à l'infini, alors la conclusion de* (1.1) *est encore valable.*

La condition qui apparaît dans cet énoncé est nécessaire. En effet, si f est une fonction pour laquelle le résultat est vrai, le calcul précédent montre que

$$-\sum_0^n P_{k+1} f(xa) + \sum_0^n P_{k+1} h(xa) . m(f)/m(h)$$

doit tendre vers zéro lorsque a tend vers Δ, et comme le second terme de cette somme tend vers zéro, le premier doit également tendre vers zéro.

Remarque. — Il existe des fonctions spéciales pour lesquelles la condition que Pf tende vers zéro à l'infini n'est pas vérifiée.

Enfin la proposition (1.1) a la conséquence importante suivante :

(1.3) PROPOSITION. — *Pour tout $f \in C_0 \cap S$, on a*

$$\lim_{a \to \Delta} (W_h f(ax) - W_h f(a)) = 0.$$

De plus, la convergence est uniforme lorsque x décrit un ensemble compact.

Démonstration. — On peut écrire que $W_h f(ax) = W_h f(axa^{-1}.a)$; or lorsque a décrit G, il résulte de la structure particulière de G, que axa^{-1} reste dans le compact $\varphi^{-1}(\varphi\{x\})$, où φ est l'application canonique $G \to G/\operatorname{Ker}\chi$. Le résultat découle alors immédiatement de (1.1).

Remarque. — Cette proposition sera, pendant un moment, la seule où joue l'hypothèse que la marche est de type *II*.

(1.4) LEMME. — *Pour x fixé dans G, et $f \in C_K$, l'ensemble des nombres $W_h(\sigma_a f)(x)$, $a \in G$, est borné.*

Démonstration. — Soit V un voisinage compact de e et $f' \in C_K^+$ telle que, pour tout $b \in V$, on ait $\tau_b f' \geqslant f$. On a alors

$$W_h(\sigma_a f')(xb) = W_{\tau_b h}(\sigma_a \tau_b f')(x) \geqslant W_{\tau_b h}(\sigma_a f)(x);$$

s'il existait une suite $a_n \to \Delta$, telle que $W_h(\sigma_{a_n} f)(x)$ tende vers $+\infty$, la formule

$$W_{\tau_b h}(\sigma_{a_n} f)(x) + \frac{m(f)}{m(h)} W_h(\tau_b h)(x) \geqslant W_h(\sigma_{a_n} f)(x)$$

montrerait que l'on a aussi

$$\lim_{n \to \infty} W_{\tau_b h}(\sigma_{a_n} f)(x) = +\infty,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} W_h(\sigma_a f')(y) = +\infty$$

uniformément pour $y \in x V$. Ceci entraîne

$$\lim_n \int g \,.\, W_h(\sigma_{a_n} f))\, dm = +\infty$$

si $g \in C_K^+$ et majore 1_{xV}. Comme

$$\int g \,.\, W_h(\sigma_{a_n} f')\, dm \leqslant \| \hat{W}_h g \|_\infty \| f' \|_1,$$

on arrive à une contradiction.

(1.5) PROPOSITION. — *Pour $f \in C_K$, la famille des applications $W_h(\sigma_a f)(.)$ est équi-uniformément continue à droite sur tout compact.*

Démonstration. — Soit x fixé dans G. Pour b dans G, on a

$$\begin{aligned}
A(b) &= W_h(\sigma_a f)(xb) - W_h(\sigma_a f)(x) = W_{\tau_b h}(\sigma_a \tau_b f)(x) - W_h(\sigma_a f)(x)\\
&= W_{\tau_b h}(\tau_b \sigma_a f)(x) - W_h(\tau_b \sigma_a f)(x) + (W_h \sigma_a(\tau_b f - f))(x)\\
&= \frac{1}{m(h)}(h \,.\, m)\, W_{\tau_b h}(\tau_b \sigma_a f) - \frac{m(f)}{m(h)} W_h(\tau_b h)(x) + W_h(\sigma_a(\tau_b f - f))(x)\\
&= \frac{1}{m(h)} \langle \tau_b^{-1} h,\, W_h(\sigma_a f) \rangle - \frac{m(f)}{m(h)} W_h(\tau_b h)(x) + W_h(\sigma_a(\tau_b f - f))(x)\\
&= \frac{1}{m(h)} \langle \hat{W}_h(\tau_b^{-1} h),\, \sigma_a f \rangle - \frac{m(f)}{m(h)} W_h(\tau_b h)(x) + W_h(\sigma_a(\tau_b f - f))(x).
\end{aligned}$$

Soient K le support de f, H un voisinage symétrique de l'origine, et f' une fonction de C_K^+ valant 1 sur HK. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un voisinage V de e tel que, pour $b \in V$, $| \tau_b f - f | < \varepsilon f'$.

La façon dont on a choisi h dans [2] permet alors d'affirmer qu'il existe un voisinage symétrique W de e tel que, pour $b \in W$, on ait $| A(b) | \leqslant \varepsilon + \varepsilon\, W_h(\sigma_a f')(x)$. Il résulte alors du lemme précédent que les applications $W_h(\sigma_a f)$ sont équi-uniformément continues à droite sur un voisinage de x et donc sur tout compact en appliquant la propriété de Borel-Lebesgue.

(1.6) PROPOSITION. — *De toute suite tendant vers Δ, on peut extraire une sous-suite (a_n) telle que, pour tout $f \in C_K$, les fonctions $W_h(\sigma_{a_n} f)$*

convergent uniformément sur tout compact vers $\Gamma(x).m(f)$, *où* $\Gamma(x)$ *est une fonction continue et positive.*

Démonstration. — D'après le lemme (1.4), pour x fixé dans G, l'ensemble des applications $\mu_a^x : f \to W_h(\sigma_a f)(x)$ est un ensemble vaguement relativement compact de mesures de Radon positives. Mais, d'après la proposition précédente, de toute suite tendant vers Δ, on peut extraire par le procédé diagonal une suite a_n telle que les fonctions $W_h(\sigma_{a_n} f_i)$ convergent uniformément sur tout compact pour tous les éléments f_i d'un système dénombrable, dense dans C_K pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Il en résulte que les mesures $\mu_{a_n}^x$ convergent vaguement vers une mesure ν^x et que, pour tout $f \in C_K$, l'application $x \to \nu^x(f)$ est continue.

Soit alors $f, g \in C_K$ et $b \in G$. On a

$$\begin{aligned}
&\int \nu^x(f-\sigma_b f).g(x).m(dx)\\
&= \lim_n \int W_h(\sigma_{a_n}(f-\sigma_b f)).g\,dm\\
&= \lim_n \int \sigma_{a_n}(f-\sigma_b f).\hat{W}_h g\,dm\\
&= \lim_n \int f(x).(\hat{W}_h g(a_n^{-1}x) - \hat{W}_h g(a_n^{-1}b^{-1}x))\,dm(x)\\
&= 0
\end{aligned}$$

d'après la proposition (1.3). Il en résulte que ν^x est invariante par σ_b et donc que $\nu^x = \Gamma(x).m$, où $\Gamma(x)$ est continue.

Remarque. — Tous les résultats précédents restent valables pour une marche quelconque sur un groupe abélien.

(1.7) Proposition. — *La fonction* Γ *de* (1.6) *est de la forme* $\gamma_h + a + \chi$, *où* a *est une constante et* χ *un caractère réel tel que* $P|\chi| - |\chi|$ *soit intégrable par* m.

Démonstration. — De par sa définition, il est facile de voir que Γ vérifie $P\Gamma \leqslant \Gamma + (1/m(h))\,P h$.

Posons $C = \Gamma - \gamma_h$; si $f \in C_K^+$ avec $m(f) = 1$,

$$C(x) = \lim_n W_h(\sigma_{a_n} - P_n) f(x),$$

et, pour $b \in G$,

$$C(x)-C(bx) = \lim_n (I-\sigma_b) W_h(\sigma_{a_n}-P_n)f(x)$$
$$= \lim_n (I-\sigma_b) W_{\tau_x h}(\sigma_{a_n}-P_n)(\tau_x f)(e).$$

Or $(\sigma_{a_n}-P_n)\tau_x f \in N$ et, pour $g \in N$, $(I-\sigma_b)(W_{\tau_x h}-W_h)g = 0$ d'après les formules (I.1.5) de [2]; on a donc

$$\lim_n (I-\sigma_b) W_{\tau_x h}(\sigma_{a_n}-P_n)(\tau_x f)(e) = \lim_n (I-\sigma_b) W_h(\sigma_{a_n}-P_n)(\tau_x f)(e),$$

et $\tau_x f$ étant encore une fonction de C_K d'intégrale 1, ceci converge vers $C(e)-C(b)$. On a donc bien $C = a+\chi$, où χ est un caractère réel. Comme $|\chi| \leqslant \Gamma+\gamma_h+a$, on a $P|\chi| < +\infty$ et donc, puisque la marche est récurrente, $P\chi = \chi$. Ceci entraîne que $P\Gamma = \Gamma+(1/m(h))Ph$ et, comme en II.2.1 de [2], $P|\chi|-|\chi|$ est intégrable.

(1.8) Proposition. — *De toute suite tendant vers Δ on peut extraire une sous-suite $\{a_n\}$ telles que les mesures $W_h(a_n, .)$ convergent vaguement et sur toutes les fonctions continues majorées par h vers une mesure $(\hat{\gamma}_h+\chi).m$, où χ est un caractère tel que $P|\chi|-|\chi|$ soit intégrable.*

Démonstration. — Comme $\{W_h(x, .), x \in G\}$ est vaguement relativement compact, on peut effectivement trouver (a_n) telle que $W_h(a_n, .)$ converge vaguement, et (1.3) montre alors que, pour tout $f \in C_K$, $W_h f(a_n x)$ converge vers une constante α.

Pour $g \in C_K$, on a donc

$$\alpha\, m(g) = \lim_n \langle W_h f(a_n .), g(.)\rangle = \lim_n \langle f, W_h(\sigma_{a_n}^{-1} g)\rangle$$
$$= m(g)\int(\hat{\gamma}_h+a+\chi).f\,dm,$$

et par suite $\alpha = \int(\hat{\gamma}_h+a+\chi).f\,dm.$

Maintenant si $f \in C_0 \cap S$ et si $W_h f(a_n) \to_{n\to\infty} \int(\hat{\gamma}_h+a+\chi).f\,dm$, la même propriété est vraie pour Pf; en effet,

$$W_h \mathrm{P}f(a_n) = W_h f(a_n)-Pf(a_n)+\frac{1}{m(h)}\int h.\mathrm{P}f\,dm,$$

donc la limite des $W_h\, Pf(a_n)$ existe, et vaut

$$\int (\hat{\gamma}_h + a + \chi) . f\, dm + \int \frac{\hat{P} h}{m(h)} f\, dm$$

$$= \int (\hat{\gamma}_h + a + \chi) . f\, dm + \int (\hat{P}\hat{\gamma}_h - \hat{\gamma}_h) . f\, dm$$

$$= \int \hat{P}\hat{\gamma}_h . f\, dm + \int a . f\, dm + \int \chi . f\, dm = \int (\hat{\gamma}_h + a + \chi) . Pf\, dm.$$

Si $U \in C_K^+$, la fonction $\varphi = \sum 2^{-n} P_n U$ vérifie la propriété ci-dessus, et on peut choisir U de façon que $\varphi \geqslant h$ (lemme II.1.4 de [2]).

Par semi-continuité inférieure, on a alors

$$\underline{\lim}\, W_h(\varphi - h)(a_n) \geqslant \int (\hat{\gamma}_h + a + \chi)(\varphi - h)\, dm,$$

$$\underline{\lim}\, W_h(h)(a_n) \geqslant \int (\hat{\gamma}_h + a + \chi) . h\, dm,$$

d'où il résulte que

$$\lim W_h(h)(a_n) = \int \hat{\gamma}_h . h\, dm = \int (\hat{\gamma}_h + a + \chi) . h\, dm.$$

Comme $\int \chi . h\, dm = 0$ puisque h est symétrique, il en résulte que $a = 0$, et la proposition est démontrée, le raisonnement par semi-continuité inférieure montrant la convergence pour toutes les fonctions majorées par h.

DÉFINITION. — Pour une marche de type *II*, on dira que $x \to \pm \infty$ si $X(x) \to \pm \infty$ dans R.

(1.9) THÉORÈME. — *Les mesures $W_h(x, .)$ convergent vaguement vers $\hat{\gamma}_h . m \pm \sigma^{-2} X . m$ lorsque $x \to \pm \infty$, où X est le caractère canonique.*

Démonstration. — Soient (a_n) et (a'_n) deux suites tendant vers Δ et telles que les suites $W_h(a_n, .)$ et $W_h(a'_n, .)$ convergent vaguement conformément à la proposition précédente. Il existe donc un caractère χ tel que $v = P|\chi| - |\chi|$ soit intégrable et que $\lim_{n \to \infty} (W_h(a_n, .) - W_h(a'_n, .)) = \chi . m$ au sens vague.

Pour $f \in C_K$ et b arbitraire dans G, on a, en utilisant (1.1),

$$\lim_{n \to \infty} (W_h(I - \tau_b) f(x a_n) - W_h(I - \tau_b) f(x a'_n)) = \int \chi (I - \tau_b) f\, dm$$

$$= \chi(b) . m(f),$$

et la convergence est bornée ce qui permet d'affirmer que

$$\lim_n \langle v(.),\, W_h(I-\tau_b)f(.a_n)-W_h(I-\tau_b)f(.a'_n)\rangle = \chi(b).m(f).m(v).$$

Maintenant $(I-\tau_b)f$ est une charge à support compact et par suite

$$W_h(I-\tau_b)f(.)-\int\hat{\gamma}_h.(I-\tau_b)f\,dm = \lim_N \textstyle\sum_1^N P_n(I-\tau_b)\,f(.),$$

la convergence étant bornée. On a donc

$$\begin{aligned}
&\langle v(.),\, W_h(I-\tau_b)f(.a_n)-W_h(I-\tau_b)\,f(.a'_n)\rangle\\
&\quad=\lim_N \langle v(.),\, \textstyle\sum_1^N P_n(I-\tau_b)\,f(.a_n)-\sum_1^N P_n(I-\tau_b)f(.a'_n)\rangle\\
&\quad=\lim_N \langle \hat{P}_{N+1}\,|\chi|(.)-\hat{P}\,|\chi|(.),\,(I-\tau_b)f(.a_n)-(I-\tau_b)f(.a'_n)\rangle\\
&\quad=\lim_N \langle \hat{P}_{N+1}\,(I-\tau_{b^{-1}})\,|\chi|(.)-\hat{P}(I-\tau_{b^{-1}})\,|\chi|(.),\,f(.a_n)-f(.a'_n)\rangle
\end{aligned}$$

et, en utilisant II.2.7 de [2], cette limite est égale à

$$\begin{aligned}
&-\langle \hat{P}(I-\tau_{b^{-1}})\,|\chi|(.),\,f(.a_n)-f(.a'_n)\rangle\\
&\quad=-\langle Pf(.),\,(I-\tau_{b^{-1}})\,|\chi|(.a_n^{-1})-(I-\tau_{b^{-1}})\,|\chi|(.a_n'^{-1})\rangle.
\end{aligned}$$

La fonction $(I-\tau_{b^{-1}})\,|\chi|$ a été décrite en II.2.7 de [2]. Il en résulte que si (a_n) et (a'_n) tendent vers Δ avec le même signe, ce crochet tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. On a donc $\chi(b) = 0$, donc χ est nul, et par suite $W_h(x, .)$ a une limite, soit lorsque $x \to +\infty$, soit lorsque $x \to -\infty$.

Les fonctions $W_h f$ sont donc plates aux deux infinis, et comme $P_n W_h$ converge vers $\hat{\gamma}_h.m$ et que $\lim_n P_n 1_{G^+} = \lim_n P_n 1_{G^-} = 1/2$, les deux limites ne peuvent être que de la forme $\hat{\gamma}_h.m+\lambda.X.m$ lorsque $x\to+\infty$, et $\hat{\gamma}_h.m-\lambda.X.m$ lorsque $x\to-\infty$, où λ est une constante et X le caractère canonique.

Il nous reste à calculer λ. Soit (a_n) une suite tendant vers $+\infty$ et (a'_n) une suite tendant vers $-\infty$. En raisonnant comme précédemment, on a $\chi = 2\lambda X$; quant au dernier crochet, il converge vers $2.m(f).\chi(b)$. On a donc $m(v) = \int (P\,|\chi|-|\chi|)\,dm = 2$, et par suite

$$2\,|\lambda|\int(P\,|X|-|X|)\,dm = 2\,|\lambda|\,\sigma^2 = 2,$$

soit $|\lambda| = \sigma^2$.

Il reste à déterminer le signe de λ. Si f est une fonction positive de C_K à support dans $\{X > 0\}$, on peut choisir b de façon que $\tau_b f$ soit à support dans $\{X < 0\}$, ce qui entraîne en particulier $X(b) > 0$; on a alors $\int X(f-\tau_b) f\,dm > 0$.

D'autre part, d'après la forme de $(I-\tau_{b-1})|X|$ lorsque $x \to +\infty$, la limite de $W(I-\tau_{b-1})f(x)$ est positive. Il en résulte que λ est positif et vaut donc σ^{-2}, ce qui termine la démonstration.

(1.10) COROLLAIRE. — *Si f est une fonction continue majorée par un multiple de h, alors $W_h f$ est uniformément continue.*

Les résultats qui précèdent ont une traduction évidente sur les noyaux A.

(1.11) THÉORÈME. — *Si f est une charge continue et majorée en module par un multiple de h, alors*

$$\lim_{x\to\pm\Delta} Af(x) = \pm\,\sigma^{-2}\int X f\,dm.$$

(1.12) *Remarque.* — Dans tout ce paragraphe, l'hypothèse que la marche est de type *II* n'a servi qu'en deux endroits, pour démontrer la proposition (1.3) d'une part, puis dans la démonstration du théorème (1.9). Il est clair que, pour une marche de type *I* sur un groupe qui posséderait la propriété utilisée en (1.3), à savoir que pour tout x de G l'ensemble des éléments axa^{-1} reste dans un compact fixe lorsque a décrit G, on pourrait refaire tous les raisonnements du paragraphe. La démonstration de (1.9) deviendrait sans objet, et l'on aurait le théorème du renouvellement $\lim_{x\to\Delta} W_h(x, .) = \hat{\gamma}.m$ au sens vague. Ceci a été utilisé dans [6] pour les groupes abéliens, et sera utilisé dans un article ultérieur pour démontrer la conjecture de Kesten pour certains groupes.

2. Comportement asymptotique des potentiels

Dans cette section, nous allions étudier le comportement asymptotique des potentiels AU pour $U \geqslant 0$ ou, de façon équivalente, des fonctions γ. Les fonctions γ sont des fonctions positives, et le fait qu'elles soient sous-harmoniques et non constantes entraîne qu'elles sont non bornées. Lorsque x tend vers Δ, $\gamma(x)$ admet donc toujours $+\infty$ comme valeur d'adhérence. Le problème est de savoir si γ tend vers $+\infty$ et, sinon, de trouver les autres valeurs d'adhérence possibles; enfin, de trouver à quelle vitesse γ converge vers $+\infty$. Pour les marches de type *I*, on sait (*cf.* [4]) que les fonctions γ peuvent avoir une limite finie. Nous allons montrer ici que cela est impossible pour les marches de type *II* et que, dans ce cas, les fonctions γ croissent comme un caractère à l'infini.

(2.1) PROPOSITION. — *Si g est une fonction continue, positive, majorée par un multiple de h et telle que $m(g) = 1$, pour tout a fixé dans G, on a*

$$\lim_{x\to\pm\infty}(I-\tau_a)A\,g(x) = -\lim_{x\to\pm\infty}(I-\tau_a)\gamma(x) = \pm\,\sigma^{-2}\,X(a),$$

le signe étant le même dans les trois termes. De plus, la convergence est uniforme lorsque a décrit un ensemble compact.

Démonstration. — Comme

$$(I-\tau_a)A\,g(x) = (I-\tau_a)g(x)+(I-\tau_a)\,W_h\,g(x)-(I-\tau_a)\gamma(x),$$

il résulte de (1.3) que

$$\lim_{x\to\pm\infty}(I-\tau_a)A\,g(x) = -\lim_{x\to\pm\infty}(I-\tau_a)\gamma(x).$$

Comme d'autre part on a $(I-\tau_a)\,A\,g = A\,(I-\tau_a)\,g$ puisque A est un noyau de convolution, le résultat découle presque immédiatement du théorème (1.11).

La dernière phrase de l'énoncé résulte de la continuité uniforme à droite des fonctions considérées.

(2.2) COROLLAIRE. — *Si a est un élément de G tel que a^n tende vers Δ, on a $\lim_{n\to+\infty}\gamma(a^n)/n = \sigma^{-2}\,|\,X(a)\,|$.*

Démonstration. — D'après le résultat précédent, $\gamma(a^n)-\gamma(a^{n-1})$ converge vers les limites indiquées; le résultat découle alors du fait que la convergence au sens ordinaire entraîne celle au sens de Cesaro.

Remarque. — Ces résultats généralisent ceux de SPITZER pour $G = Z$.

L'étude suivante va reposer sur le fait, démontré dans [2] (proposition III.1.6), que $\gamma-\gamma'$ est bornée, qui découle du fait que $(I-\sigma)\gamma$ est borné. Dans le cas des marches de type *II*, il existe de ce fait une autre démonstration que nous donnons ici à cause de sa simplicité.

(2.3) LEMME. — *Il existe une constante M telle que $|\,\gamma(ax)-\gamma(xa)\,| < M$ pour tout x et tout a.*

Démonstration. — Du théorème III.1.5 de [2], on déduit que

$$\begin{aligned}\gamma(xa)-\gamma(ax) &= \gamma(axx^{-1}a^{-1}xa)-\gamma(ax)\\ &\leqslant \gamma(ax)+\gamma'(x^{-1}a^{-1}xa)-\gamma(ax) = \gamma'(x^{-1}a^{-1}xa).\end{aligned}$$

Or $x^{-1}a^{-1}xa$ appartient à Ker χ qui est compact, et le résultat s'ensuit immédiatement.

Le comportement asymptotique des fonctions γ dans le cas des marches de type *II* est alors fixé par le théorème suivant.

(2.4) THÉORÈME. — *Si la marche est de type II, on a*

$$\lim_{x\to\Delta}\gamma(x)/|X(x)| = \sigma^{-2}.$$

Démonstration. — Lorsque a décrit Ker χ la fonction $\gamma(x)-\gamma(xa)$ est uniformément bornée. On peut donc se contenter d'étudier le cas où G est de la forme **R** ou **Z**. Mais alors il résulte de la sous-additivité de γ' que $\gamma'(x)/|X(x)|$ a une limite lorsque $|X(x)|\to\infty$ ou $x\to\infty$, ce qui est équivalent. Mais comme $\gamma-\gamma'$ est bornée, il en résulte que $\gamma(x)/|X(x)|$ a aussi une limite lorsque $|X(x)|$ tend vers l'infini. Le fait que cette limite soit σ^{-2} résulte alors de (2.2) qui dit que $\gamma(na)/|X(na)|$ converge vers σ^{-2}.

Nous pouvons maintenant revenir sur le théorème II.3.8 de [2], et énoncer la proposition suivante :

(2.5) PROPOSITION. — *Le coefficient d qui apparaît dans le théorème II.*3.8 *de* [2] *doit être compris entre* $-\sigma^{-2}$ *et* σ^{-2}.

Démonstration. — Considérons le noyau

$$A' = A + c(1\otimes m) + d((1\otimes X.m)-(X\otimes m))$$

et soit f une fonction spéciale. On a

$$A'f = f + Wf + cm(f) - \int\hat{\gamma}.f\,dm + d\int X.f\,dm - (\gamma + d\,X)\,m(f),$$

où tous les termes sont bornés sauf le dernier. On voit alors clairement que $A'f$ ne peut être bornée supérieurement que si $|d|.|X|$ croît vers l'infini moins vite que γ, donc si $-\sigma^{-2}\leqslant d\leqslant\sigma^{-2}$.

Avant de passer à l'application suivante du théorème (2.4), nous allons énoncer une proposition qui précise l'étude des fonctions spéciales faites dans le chapitre III de [2] et qui ne suppose pas que la marche soit de type *II*. En fait, cette proposition sera surtout intéressante pour les marches de type *I*. Nous avons besoin d'un résultat préliminaire intéressant en lui-même pour l'étude du comportement asymptotique de γ.

(2.6) PROPOSITION. — *On a* $\lim_{x\to\Delta}(\gamma+\hat{\gamma})(x) = \lim_{x\to\Delta}(\gamma'+\hat{\gamma}')(x) = +\infty$.

Démonstration. — Comme $\gamma-\gamma'$ est une fonction bornée, il suffit de montrer le résultat pour $\gamma+\hat{\gamma}$. Soit $\{a_n\}$ une suite tendant vers Δ

et telle que, pour tout n, on ait $\gamma(a_n)+\gamma(a_n^{-1}) \leqslant K_1 < \infty$. On pose $\Phi_n(x) = \gamma(xa_n)$; pour x fixé, la suite $\Phi_n(x)$ est bornée, car $\gamma(xa_n) \leqslant \gamma(x)+\gamma(a_n)+$constante, d'après III.1.5 de [2], et on pose $\Psi(x) = \underline{\lim}\, \Phi_n(x)$. Du fait que $P\Phi_n = \Phi_n+m(h)^{-1} Ph$, on déduit facilement que $P\Psi \leqslant \Psi$ et donc qu'il existe une constante K_2 telle que $\Psi = K_2$.

Soit alors y un point quelconque de G. Du théorème III.1.5 de [2], il résulte que

$$\gamma(y) = \gamma(ya_n a_n^{-1}) \leqslant \Phi_n(y) + \gamma(a_n^{-1}) + K_3$$

pour une constante K_3. On a donc

$$\gamma(y) \leqslant \Psi(y)+K_1+K_3 = K_2+K_1+K_3;$$

γ est donc une fonction bornée, ce qui est contradictoire.

(2.7) PROPOSITION. — *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Les fonctions spéciales sont exactement les fonctions bornées intégrables par la mesure* $\hat{\gamma}.m$.

(ii) *Il existe deux nombres* $0 < \alpha \leqslant \beta < +\infty$ *tels que* $\alpha \leqslant \gamma/\hat{\gamma} \leqslant \beta$ *en dehors d'un ensemble compact.*

Ces deux conditions entraînent, de plus, que γ *tend vers* $+\infty$ *en* Δ, *et*

(iii) *Les fonctions spéciales et co-spéciales sont identiques.*

Démonstration. — Compte tenu du paragraphe II.1 de [2], la condition (i) peut s'exprimer :

$$\text{Si} \int \hat{\gamma} f\, dm < \infty, \quad \text{alors } f \text{ est spéciale.}$$

Cette condition entraîne l'existence d'une constante $C > 1$ telle que si $\int \hat{\gamma} f\, dm < \infty$, alors $Wf \leqslant C \int \hat{\gamma} f\, dm$.

En effet, dans le cas contraire, il existerait une suite $\{g_n\}$ de fonctions de $b\mathscr{E} \cap \mathscr{L}^1(\hat{\gamma}\, m)$ telles que $\sum \| g_n \| < +\infty$, $\| Wg_n \| = n$ et $\int \hat{\gamma}\, f_n\, dm \leqslant 2^{-n}$. La fonction $g = \sum g_n$ serait encore dans $b\mathscr{E} \cap \mathscr{L}^1(\hat{\gamma}\, m)$ et pourtant Wg ne serait pas bornée contredisant la condition (i).

On a alors

$$m(h)^{-1}\, W(\tau_a h)(x) \leqslant C\, m(h)^{-1} \int h\, \tau_{a^{-1}} \hat{\gamma}\, dm = C\gamma'(a),$$

et par suite, en utilisant les résultats du lemme III.1.4 de [2],

$$\gamma(x)-\gamma(xa)+\gamma'(a) \leqslant C\gamma'(a).$$

En faisant $x = a^{-1}$, il vient $\gamma(a^{-1}) \leqslant (C-1)\gamma'(a)+\gamma(e)$, et comme $\gamma-\gamma'$ est bornée, il existe une constante $K < \infty$ telle que

$$\hat{\gamma}'(a) \leqslant (C-1)\gamma'(a)+K.$$

En changeant a en a^{-1} et en utilisant le fait que $\hat{\gamma}'(a) = \gamma'(a^{-1})$, on obtient

$$C_1\hat{\gamma}'(a)+C_2 \leqslant \gamma'(a) \leqslant C_3\hat{\gamma}'(a)+C_4,$$

pour des constantes C_i convenables. Il résulte de ceci que γ' et donc γ tendent vers l'infini en Δ puisque $\gamma'+\hat{\gamma}'$ tend vers l'infini en Δ. Comme $\gamma-\gamma'$ est bornée, on a une double inégalité du même type avec γ au lieu de γ', et comme γ tend vers l'infini le rapport $\gamma/\hat{\gamma}$ est bien défini au moins en dehors d'un ensemble compact et est borné des deux côtés.

Si $\gamma/\hat{\gamma}$ est borné des deux côtés, alors la condition $\int f.\hat{\gamma}.\,dm < \infty$ entraîne que $\int f(\gamma+\hat{\gamma})\,dm < \infty$, donc que f est spéciale et cospéciale, donc en particulier spéciale. Ceci montre que (ii) $\Rightarrow$ (i) et (iii).

Ce sera une conséquence du théorème du renouvellement que (iii) est en fait équivalente à (i) et (ii). Dans le cas des marches de type *II*, on peut dès maintenant le montrer. En effet, comme il résulte facilement du théorème (2.4) que, dans le cas des marches de type *II*, le rapport $\gamma/\hat{\gamma}$ est borné, on a le corollaire suivant.

(2.8) COROLLAIRE. — *Pour les marches de type II. il y a identité entre*

(i) *les fonctions spéciales,*
(ii) *les fonctions cospéciales,*
(iii) *les fonctions intégrables par la mesure* $|X|.m$.

Ce résultat généralise un résultat de NEVEU [5] pour le mouvement brownien linéaire. Il entraîne aussi que, pour les marches de type II, le théorème de normalité est valable pour toutes les fonctions spéciales, d'après le chapitre III de [2]. Nous ferons le même travail pour le renouvellement dans le paragraphe suivant. Nous allons pour l'instant appliquer le corollaire précédent à un problème évoqué par SPITZER ([7], p. 392).

(2.9) PROPOSITION. — *Si la marche est de type II, la fonction* $P|X|-|X|$ *est spéciale si, et seulement si, il existe un moment d'ordre* 3, *en d'autres termes si* $\int_G |X|^3\, d\mu < \infty$.

Démonstration. — Il suffit de raisonner dans le cas où $G = R$, et d'après le corollaire précédent, il suffit de démontrer que l'intégrale

$$J = \int |X|.(|PX|-|X|)\,dm$$

est finie si, et seulement si, il existe un moment d'ordre 3.

En utilisant les notations et les résultats du théorème II.2.4 de [2], on a

$$J = 2\int (X^+ + X^-)(PX^+ - X^+)\,dm = 2\int (X^+ + X^-)(PX^- - X^-)\,dm,$$

donc encore

$$\begin{aligned} J &= 2\int_{-\infty}^{0} X^- .(PX^+ - X^+)\,dm + 2\int_{0}^{+\infty} X^+.(PX^- - X^-)\,dm \\ &= 2\int_{-\infty}^{0} X^-.PX^+\,dm + 2\int_{0}^{+\infty} X^+.PX^-\,dm. \end{aligned}$$

Calculons l'intégrale

$$\begin{aligned} K = {} & 2\int_{-\infty}^{0} X^-.PX^+\,dm = -2\int_{-\infty}^{0} x\,dx \int_{-x}^{+\infty} (x+y)\,\mu(dy) \\ &= -2\int_{-\infty}^{0} x^2\,dx \int_{-x}^{+\infty} \mu(dy) - 2\int_{-\infty}^{0} x\,dx\int_{-x}^{+\infty} y\,\mu(dy). \end{aligned}$$

Dans ces deux intégrales, les fonctions à intégrer sont de signe constant dans le domaine considéré; on peut donc appliquer le théorème de Fubini, ce qui donne $K = (1/3)\int_0^\infty y^3\,\mu\,(dy)$.

De la même façon, l'autre morceau de J est égal à $-(1/3)\int_0^\infty y^3\,\mu\,(dy)$, ce qui termine la démonstration.

On peut appliquer ceci au problème de SPITZER et énoncer la proposition suivante :

(2.10) PROPOSITION. — *Si la marche est de type II et s'il existe un moment d'ordre* 3, *la fonction* $\gamma - \sigma^{-2}|X|$ *est bornée.*

Démonstration. — Si $\psi = P\,|\,X\,|-|\,X\,|$ est spéciale, comme $\int \psi \, dm = \sigma^2$, la fonction $n = m(h)^{-1}.\, Ph - \sigma^{-2}.\psi$ est une charge, et la fonction $\varphi = \gamma - \sigma^{-2}.|\,X\,|$ est solution de l'équation de Poisson $(P-I)\,\varphi = n$.

En remarquant que $(I-\tau)\,\varphi$ est borné pour tout τ, et en invoquant la proposition II.2.1 de [2], on a $\gamma - \sigma^{-2}\,|\,X\,| = A\,n + a + b\,X$ pour deux constantes a et b. Si on fait tendre la variable vers $\pm\infty$ après avoir divisé par $|\,X\,|$, il résulte des théorèmes (1.11) et (2.4) que

$$\sigma^{-2} - \sigma^{-2} = 0 = \pm\, b,$$

donc que $b = 0$, ce qui termine la démonstration,

Remarque. — Si la marche est de type *II* mais sans moment d'ordre 3, on voit que la fonction $|\,X\,|$ est solution d'une équation de Poisson dont le second membre n'est pas spécial mais seulement intégrable. Cela donne du prix à un résultat de Baldi sur l'unicité des solutions de l'équation de Poisson à second membre intégrable.

3. **Amélioration du théorème du renouvellement**

Dans ce paragraphe, nous voulons montrer que la convergence des noyaux W_n démontrée au paragraphe 1 a en fait lieu sur toutes les fonctions spéciales. Nous continuons à ne considérer que des marches de type *II*.

(3.1) LEMME. — *On a* $\lim_{a\to\pm\infty} (I-\sigma_x)\,\gamma(a) = \mp\, \sigma^{-2}\, X(x)$.

Démonstration. — D'après (2.1), on sait que si $y \in \operatorname{Ker} X$ alors $\gamma(ay) - \gamma(a)$ tend vers zéro uniformément en y lorsque $a \to \pm\infty$. Or on peut écrire pour x quelconque :

$$\gamma(xa) - \gamma(a) = \gamma(axx^{-1}\,a^{-1}\,xa) - \gamma(ax) + \gamma(ax) - \gamma(a);$$

comme $y = x^{-1}\,a^{-1}\,xa$ est dans Ker X et que $ax \to \pm\infty$ avec a, il résulte de la première remarque que $\gamma(xa) - \gamma(a)$ et $\gamma(ax) - \gamma(a)$ ont la même limite, ce qui termine la démonstration.

On en déduit le lemme suivant :

(3.2) LEMME. — $\lim_{a\to\pm\infty} m(h)^{-1}\, W(\tau_a\, h) = \gamma \mp \sigma^{-2}.X$.

Démonstration. — On part de la relation suivante, démontrée dans III.1.4 de [2] :

$$m(h)^{-1}\, W(\tau_a\, h)(x) = \gamma(x) - \gamma(xa) + \gamma'(a).$$

En soustrayant de cette relation celle qu'on obtient en y faisant $x = e$, on trouve

$$m(h)^{-1}\ W(\tau_a h)(x)-\gamma(x) = m(h)^{-1}\ W(\tau_a h)(e)-\gamma(e)+(I-\sigma_x)\gamma(a).$$

Il résulte alors du lemme précédent que de toute suite convergeant vers $\pm\infty$ on peut extraire une sous-suite $\{ a_n \}$ telle que

$$\lim_{a_n\to\pm\infty} m(h)^{-1}\ W(\tau_{a_n} h) = \gamma \mp \sigma^{-2} X + C_{\pm},$$

où $C_{\pm}$ est une constante.

Supposons que $\{ a_n \}$ tende vers $+\infty$, et choisissons, grâce au théorème d'Egoroff, un compact K sur lequel la convergence précédente soit uniforme. On a alors

$$\begin{aligned}\int \gamma . 1_K\, dm - \sigma^{-2} \int X . 1_K\, dm + C_+\, m(K) &= \lim \langle 1_K,\ m(h)^{-1}\ W(\tau_{a_n} h)\rangle \\ &= \frac{1}{m(h)} \lim \langle \tau_{a_n^{-1}}\, \hat{W} 1_K,\ h\rangle \\ &= \int \gamma . 1_K\, dm - \sigma^{-2} \int X . 1_K\, dm,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $C_+ = 0$. De la même façon, $C_- = 0$, ce qui termine la démonstration.

(3.3) THÉORÈME. — *Pour toute fonction spéciale telle que Pf tende vers zéro à l'infini, on a* $\lim_{x\to\pm\infty} Wf(x) = \int (\hat{\gamma} \pm \sigma^{-2} X) . f\, dm.$

Démonstration. — D'après la proposition (1.2), de toute suite convergeant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{ a_n \}$ telle que $Wf(a_n)$ converge vers une constante ρ lorsque n tend vers l'infini. On a donc

$$\rho = \lim_n \langle \tau_{a_n} Wf,\ m(h)^{-1} . h\rangle = \lim_n \langle f,\ m(h)^{-1}\ \hat{W}(\tau_{a_n^{-1}} h)\rangle.$$

D'après la proposition III.1.7 de [2], la convergence dans le lemme précédent est majorée par $\gamma + \hat{\gamma} + C$ pour une constante C; en vertu de (2.7), on peut donc appliquer le théorème de Lebesgue pour passer à la limite dans la dernière intégrale, ce qui donne $\rho = \int (\hat{\gamma} + \sigma^{-2} X) f\, dm$. On procède de la même façon de l'autre côté.

Comme pour la normalité, ce théorème a des applications classiques que nous laisserons au lecteur le soin de démontrer. En utilisant les notations de la proposition III.1.10 de [2], on a par exemple la proposition suivante :

(3.4) PROPOSITION. — *Pour tout ensemble K relativement compact, les deux limites* $\lim_{x \to \pm\infty} P_K(x, .)$ *existent, et leur somme est égale à* $2\lambda_K$.

La probabilité λ_K est la mesure d'équilibre de l'ensemble K dans la théorie du potentiel liée au noyau A. On peut aussi énoncer des résultats semblables pour les opérateurs U_K et les potentiels G_K des marches tuées à l'entrée dans K. Les démonstrations sont tout à fait directes à partir des formules reliant ces noyaux aux potentiels, formules que l'on pourra trouver dans le chapitre 8 de [6].

4. Potentiel des promenades induites

Pour étudier le deuxième des cas auquel cet article est consacré nous aurons besoin de savoir que, de manière heuristique, le potentiel de la trace est la trace du potentiel. Ce résultat évident pour les marches transientes est ici plus compliqué à démontrer.

Dans toute cette section, G_0 désignera un sous-groupe ouvert non compact de G. Il est facile de montrer que la chaîne-trace M_0 de M sur G_0 est une promenade aléatoire de probabilité de transition $\Pi = I_{G_0} U_{G_0} I_{G_0}$. Cette promenade est récurrente, et nous nous proposons de montrer que si A est un opérateur potentiel de M, alors $I_{G_0} A I_{G_0}$ est un opérateur potentiel de M_0. Tout ce qui a trait à la chaîne M_0 sera noté d'un indice 0.

Rappelons tout d'abord que si h est une fonction non négligeable telle que $U_h > 1 \otimes m$, même non strictement positive, on peut lui associer un opérateur W_h qui jouit de toutes les propriétés des opérateurs W de NEVEU [5]. On pourra consulter la section VI.5 de [6].

(4.1) LEMME. — *Si h_1 est une fonction non négligeable telle que $U_{h_1} > 1 \otimes m$ et $\hat{U}_{h_1} > 1 \otimes m$, alors $W_{h_1} P_n f \to \gamma_1 m(f)$ si $f \in C_K^+$. On a*

$$\gamma + m(h)^{-1} W_{h_1}(h) = \gamma_1 + m(h_1)^{-1} \int \gamma . h_1 \, dm,$$

et $\int \gamma_1 . h_1 \, dm = (1 - m(h_1))/m(h_1)$.

Démonstration. — La fonction h est celle de [2], et γ est la fonction correspondante. Supposons que $m(f) = 1$; on a ([6] section VI.5 ou [5])

$$WP_n f + m(h)^{-1} W_{h_1}(h) = W_{h_1} P_n f + m(h_1)^{-1} . (h_1 . m) \, WP_n f.$$

Il suffit de montrer que le dernier terme à droite converge vers la valeur requise; or ce terme est égal à $m(h_1)^{-1} \langle f, \hat{P}_n \hat{W}(h_1) \rangle$ et tend d'après le théorème de normalité ([2], III.1.8) vers le résultat désiré.

En multipliant l'égalité ainsi obtenue par h_1, puis en intégrant par rapport à m, on obtient

$$\int \gamma_1 . h_1 \, dm = m(h)^{-1} \langle h, \; W_{h_1}(h_1) \rangle = (1 - m(h_1))/m(h_1).$$

Ce lemme montre que l'on peut utiliser, pour faire la théorie de [2], n'importe quelle fonction spéciale et co-spéciale h telle que $U_h > 1 \otimes m$ et $\hat{U}_h > 1 \otimes m$. Dans la suite, h sera une telle fonction, symétrique et à support dans G_0, par exemple $1_{G_0} . h$ si h est la fonction de [2]. Cette fonction a les mêmes propriétés relativement à la marche induite M_0; nous appellerons W_0 l'opérateur correspondant. Pour alléger l'écriture, nous poserons $h' = m(h)^{-1} . h$, et nous utiliserons les notations de [2] telles que W ou γ en convenant qu'elles se rapportent à la fonction h considérée désormais.

(4.2) LEMME. — *On a* $W_0 = I_{G_0} \, W I_{G_0}$.

Démonstration. — Il résulte de la formule probabiliste (*cf.* [5] ou [6])

$$U_h f(x) = E_x(\textstyle\sum_{n \geqslant 1} (1 - h(X_1)) \ldots (1 - h(X_{n-1})) f(X_n)),$$

que si h et f sont à support dans G_0 et $x \in G_0$, on a $U_h f(x) = U_h^0 f(x)$. Comme W est défini comme la somme de la série

$$\textstyle\sum_{n \geqslant 0} ((U_h - 1 \otimes m) I_h)^n (U_h - 1 \otimes m),$$

le résultat est alors clair.

A l'opérateur W_0, on peut donc associer la fonction $\gamma_0 = \lim W_0 \, \Pi^n f$, où $f \in C_K^+ (G_0)$ et $m(f) = 1$. Nous allons montrer que c'est la trace de la fonction γ. Pour cela nous allons avoir besoin de deux lemmes qui seront encore très utiles dans l'article suivant.

(4.3) LEMME. — *Si* $g \in \mathscr{L}_+^1$ *alors* Wg *est une fonction finie m-p. p. et* $\lim_{n \to \infty} P_n \, Wg / P_n \, \gamma = 0$ *m-p. p.*

Démonstration. — De la formule $\langle Wg, f \rangle = \langle g, \hat{W} f \rangle$, où f décrit l'ensemble des fonctions spéciales, on déduit aisément que Wg est finie m-p. p.; on supposera ci-dessous que $m(g) = 1$.

Toujours en utilisant la dualité et les formules I.1.4 de [2], on montre alors finalement que $P_n \, Wg = Wg + \sum_1^n P_k \, h' - \sum_1^n P_k \, g$ m-p. p. D'autre part, on a $P_n\gamma = \gamma+\sum_1^n P_k h'$, d'où on déduit que $\sum_1^n P_k h'/P_n\gamma \to 1$. Comme d'après le théorème de Chacon-Ornstein, on a

$$\lim \sum_1^n P_k g/\sum_1^n P_k h' = \|g\|,$$

on a aussi que $\sum_1^n P_k g/P_n\gamma \to_{n\to\infty} 1$. Le résultat découle alors de l'égalité

$$\frac{P_n Wg}{P_n\gamma} = \frac{Wg}{P_n\gamma} + \frac{\sum_1^n P_k h'}{P_n\gamma} - \frac{\sum_1^n P_k g}{P_n\gamma}.$$

(4.4) LEMME. — *Si f est une fonction de $\mathscr{L}_1^+$ non négligeable et φ une fonction positive telle que $P\varphi \leqslant \varphi+f$, alors $g = \varphi+f-P\varphi$ est dans $\mathscr{L}_+^1$ et $\int g\,dm \leqslant \int f\,dm$.*

Démonstration. — Si g n'était pas intégrable, on aurait

$$\lim_{n\to\infty}(\textstyle\sum_1^n P_k g)/(\sum_1^n P_k f) = +\infty \quad m\ p.p.$$

Mais de l'égalité $P\varphi = \varphi+f-g$ il découle que

$$P_n\varphi = \varphi + \textstyle\sum_1^{n-1} P_k f - \sum_1^{n-1} P_k g,$$

et en divisant tout par $\sum_1^{n-1} P_k f$, on obtient à la limite

$$0 \leqslant 1-\lim_{n\to\infty}((\textstyle\sum_1^n P_k g)/(\sum_1^n P_k f)),$$

d'où il ressort que g doit être intégrable et $\int g\,dm \geqslant \int f\,dm$.

(4.5) THÉORÈME. — *Soient A et A^0 les opérateurs potentiels construits à partir d'une même fonction h; on a $A^0 = I_{G_0} A\, I_{G_0}$.*

Démonstration. — De la relation $P\gamma = \gamma+P h'$, écrite

$$PI_{G_0}\gamma + PI_{G_0^c}\gamma = \gamma+P h',$$

on déduit, après multiplication par $PI_{G_0^c}$ et addition de $PI_{G_0}\gamma$, que

$$\begin{aligned} PI_{G_0}\gamma + PI_{G_0^c} PI_{G_0}\gamma + (PI_{G_0^c})^2\gamma &= PI_{G_0^c}\gamma + PI_{G_0}\gamma + PI_{G_0^c} Ph' \\ &= P\gamma + PI_{G_0^c} Ph' = \gamma + P h' + PI_{G_0^c} P h'. \end{aligned}$$

En itérant ce procédé, comme dans [5], on obtient, pour tout n,

$$\textstyle\sum_{k\leqslant n}(PI_{G_0^c})^k PI_{G_0}\gamma + (PI_{G_0^c})^{n+1}\gamma = \gamma + \sum_{k\leqslant n}(PI_{G_0^c})^k P h'.$$

Comme h' est à support dans G_0, on obtient en passant à la limite

$$(1) \qquad \Pi\gamma + I_{G_0} g = I_{G_0}\gamma + \Pi h',$$

où $g = \lim (PI_{G_0^c})^n \gamma$. On déduit alors du lemme (4.4), appliqué à la marche induite, que $m(I_{G_0} g) < \infty$. D'autre part, comme pour $n \to \infty$ la convergence de $(PI_{G_0^c})^n \gamma$ vers g est dominée par la fonction $PI_{G_0^c}$-intégrable $\gamma + U_{G_0} h'$, on a $PI_{G_0^c}\, g = g$. Nous allons montrer que $g = 0$.

Posons $\Phi = W_0(I_{G_0} g)$; cette fonction est finie d'après (4.3) et la formule I.1.4 de [2] donne

$$\Pi\Phi = \Phi - \Pi\, I_{G_0} g + m(I_{G_0} g) . \Pi h'$$

En rapprochant cette équation de l'équation (1) on arrive à

$$\Pi(I_{G_0}\gamma - \Phi - I_{G_0} g) = (I_{G_0}\gamma - \Phi - I_{G_0} g) + (1 - m(I_{G_0} g))\,\Pi h'.$$

Comme on sait d'autre part que $\Pi\gamma^0 = \gamma^0 + \Pi h'$, on voit que la fonction $\psi = I_{G_0}\gamma - \varphi - I_{G_0} g - (1 - m(I_{G_0} g))\,\gamma^0$ est Π-invariante.

D'autre part, si $a \in G_0$, le lemme (4.2) entraîne que

$$I_{G_0}\, W(\tau_a h') = W_0(\tau_a h').$$

Donc pour x et a dans G_0, on a d'après le lemme III.1.4 de [2] que

$$(2) \qquad \gamma(x) - \gamma(xa) + \gamma'(a) = \gamma^0(x) - \gamma^0(xa) + \gamma'^0(a).$$

Comme $\gamma'(a) = \int h' . \tau_a \gamma\, dm$, on en déduit que

$$\gamma'(b) - \gamma'(ba) + \gamma'(a) = \gamma'^0(b) - \gamma'^0(ba) + \gamma'^0(a), \qquad a,\ b \in G_0,$$

c'est-à-dire que $\chi^0 = I_{G_0}\gamma' - \gamma'^0$ est un caractère réel de G_0. Posons $U = I_{G_0}\gamma - \gamma^0$; d'après (2), il vient que

$$U(xa) - U(x) = \chi^0(a),$$

donc $(U - \chi^0)(xa) = (U - \chi^0)(x)$, et par suite, il existe une constante C telle que $I_{G_0}\gamma - \gamma^0 = I_{G_0}\gamma' - \gamma'^0 + C = \chi^0 + C$.

On a $|\chi^0| \leqslant I_{G_0}\gamma + \gamma^0 + C$, et par suite, $\Pi|\chi^0|$ est une fonction finie, et par suite $\Pi\chi^0 = \chi^0$. En conséquence, pour tout n,

$$\Pi^n I_{G_0}\gamma - \Pi^n\gamma^0 = \chi^0 + C,$$

et donc $\lim_{n\to\infty} \Pi^n I_{G_0}\gamma / \Pi^n\gamma^0 = 1$.

Par ailleurs, comme $\Pi\,(W_0\,(I_{G_0}\,g)+I_{G_0}\,g) = W_0\,(I_{G_0}\,g)+m\,(I_{G_0}\,g).\Pi\,h'$, on a :

$$0 = \lim_n \frac{\Psi}{\Pi^n \gamma^0} = \lim \frac{\Pi^n \Psi}{\Pi^n \gamma^0}$$
$$= 1-(1-m(I_{G_0}\,g)) - \lim \frac{\Pi^{n-1}(\,W_0(I_{G_0}\,g)+m(I_{G_0}\,g).\Pi\,h')}{\Pi^n \gamma^0},$$

donc, grâce au lemme (4.3), $m\,(\,I_{G_0}\,g) = 0$.

Comme $\Pi\gamma = \Pi\,\gamma^0 + \chi^0 + C = \gamma^0 + \Pi\,h' + \chi^0 + C$, la fonction $\Pi\gamma$ est continue et, d'après (1), la fonction $I_{G_0}\,g$ est continue; elle est donc identiquement nulle. Il est alors évident que $P\,g = g$, donc que g est constante, et par suite identiquement nulle.

L'équation (1) se réduit donc à $\Pi\,\gamma = I_{G_0}\,\gamma+\Pi\,h'$. Comme d'autre part $\Pi\,\gamma^0 = \gamma^0+\Pi\,h'$ et que $(I-\tau_a)\,\gamma$ et $(I-\tau_a)\,\gamma^0$ sont bornés, il résulte de la section II.2 de [2] que $I_{G_0}\,\gamma = \gamma^0+a+\chi$, où a est une constante et χ un caractère de G_0 tel que $\Pi\,|\,\chi\,|-|\,\chi\,|$ soit intégrable. Comme $\int \gamma.h\,dm = \int \gamma^0.h\,dm$ et que h est symétrique, il en résulte que $a = 0$.

De même, on a $I_{G_0}\,\hat{\gamma} = \hat{\gamma}^0+\hat{\chi}$, où $\hat{\chi}$ est aussi un caractère tel que $\Pi\,|\,\hat{\chi}\,|-|\,\hat{\chi}\,|$ soit intégrable.

L'opérateur A est égal à $I+W-\gamma\otimes m-1\otimes\hat{\gamma}\,m$, et donc

$$I_{G_0}AI_{G_0} = I_{G_0}+I_{G_0}\,WI_{G_0}-I_{G_0}\gamma\otimes m.I_{G_0}-I_{G^0}\otimes I_{G_0}\hat{\gamma}.m$$
$$= I_{G_0}+I_{G_0}\,WI_{G_0}-\gamma^0\otimes m-\chi\otimes m-I_{G_0}\otimes\hat{\gamma}^0\,m-I_{G_0}\otimes\hat{\chi}\,m.$$

D'après le lemme (4.2) et le théorème II.3.5 de [2] on a donc

$$I_{G_0}AI_{G_0} = A^0-\chi\otimes m-I_{G_0}\otimes\hat{\chi}\,m.$$

Maintenant, pour une charge quelconque à support dans G_0, on a

$$A^0 f(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\Pi^n f(x) = E_x\,[\sum_{n=0}^{\infty} f(X_n^0)] = E_x\,[\sum_{n=0}^{\infty} f(X_n)]$$
$$= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n\,f(x) = Af(x)$$

en utilisant la propriété (ii) du théorème II.3.5 de [2]. Il en résulte que, pour toute charge à support dans G_0, en particulier pour toute fonction continue à support compact dans G_0 et d'intégrale nulle, on a $\int \chi f\,dm = 0$, ce qui entraîne que χ est identiquement nul. De même, $\hat{\chi}$ est nul et $I_{G_0}\,A\,I_{G_0} = A^0$.

Remarque. — On voit aussi que $\gamma^0 = I_{G_0}\,\gamma$.

5. Marches de type I'

(5.1) DÉFINITION. — Nous dirons qu'une marche M est de type I' si elle est de type I et s'il existe un sous-groupe G_0 distingué, ouvert, d'indice 2 dans G telle que la marche M_0 induite sur G_0 soit de type II.

Un exemple typique d'une telle situation est fourni par le groupe de transformations du plan engendré par une translation soit T et la symétrie par rapport à l'origine soit R et par la marche dont la loi est donnée par $\mu(T) = \alpha$, $\mu(R) = 1-\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$.

Dans tout ce paragraphe, nous étudierons des marches de type I', et nous emploierons les notations et résultats de la section précédente. On considérera les opérateurs potentiels liés à une fonction h à support dans G_0. On appellera X_0 le caractère canonique de la marche M_0, c'est-à-dire celui par lequel l'image de la mesure de Haar sur G_0 est la mesure de Lebesgue, et l'on posera, comme dans [2],

$$\sigma^2 = \int_{G_0} (\Pi\,|X_0| - |X_0|)\,dm = \int_{G_0} X_0^2\,dm.$$

On posera aussi P_{G_0} pour l'opérateur de balayage lié à G_0.

(5.2) PROPOSITION. — *La fonction $X = P_{G_0} X_0$ est une solution de l'équation de Poisson sans second membre telle que $(I-\tau) X$ ne soit pas borné pour tout τ. De plus, elle vérifie $X(xy) = X(y)+\varepsilon(y) X(x)$, où $\varepsilon = +1$ sur G_0 et -1 sur G_0^c.*

Enfin $X(x^{-1}) = -\hat{P}_{G_0} X_0(x) = -\hat{X}(x)$.

Démonstration. — Il est évident que $PX = X$ puisque $\Pi X_0 = X_0$. Si $(I-\tau) X$ était borné pour tout τ, d'après II.2 de [2], $P_{G_0} X_0$ serait constante et donc nulle puisque nulle en e, ce qui contredit l'existence de X_0.

D'autre part, G_0 étant un sous-groupe, les opérateurs I_{G_0} et $I_{G_0^c}$ commutent avec les translations à droite τ_y pour $y \in G_0$. On a donc, vu la forme analytique de P_{G_0},

$$(1)\quad X(x) = \int P_{G_0}(xy, dz)\, X_0(zy^{-1}) = \int P_{G_0}(xy, dz)(X_0(z) - X_0(y))$$
$$= X(xy) - X_0(y) = X(xy) - X(y).$$

De même,

$$X(x^{-1}) = \int P_{G_0}(x^{-1}, dz)\, X_0(z)$$
$$= I_{G_0} X_0(x^{-1}) + \textstyle\sum_{n \geq 1} (I_{G_0^c} P)^n I_{G_0} X_0(x^{-1}),$$

et $X_0(x^{-1}) = -X_0(x)$ d'une part; d'autre part,

$$PI_{G_0} X_0(x^{-1}) = \int \mu(dz)\, 1_{G_0}(zx^{-1})\, X_0(zx^{-1})$$

$$= -\int \mu(dz)\, 1_{G_0}(z^{-1}x)\, X_0(z^{-1}x) = -\hat{P}I_{G_0} X_0(x)$$

car $z^{-1}x \in G_0$ si, et seulement si, $zx^{-1} \in G_0$. En faisant cette opération pour tous les termes de la série ci-dessus, on obtient le résultat annoncé.

Passons au cas où $x \in G_0$ et $y \in G_0^c$. Il existe x' tel que $xy = yx'$ et, d'après ce qui a déjà été montré, on a $X(xy) = X(y) + X(x')$.

Il faut montrer que $X(x') = -X(x)$. Or les applications $x \to y^{-1}xy$ sont des automorphismes de G_0. L'application $\tilde{X} : x \to X_0(y^{-1}xy)$ est donc un multiple de X_0 et en particulier $X_0(x') = 0$ si, et seulement si, $X_0(x) = 0$. De plus $\tilde{X}$ est constante sur les classes modulo Ker X_0. En effet, si $h \in$ Ker X_0, on a $\tilde{X}(xh) = X_0(y^{-1}xy\,y^{-1}hy) = X_0(y^{-1}xy) = \tilde{X}(x)$.

Donc G apparaît comme un groupe d'automorphisme de $G_0/\text{Ker}\, X_0$. Or G_0 agit de manière triviale, et son indice dans G est 2. Il en résulte que, pour $y \in G_0^c$, l'application correspondante sur $G_0/\text{Ker}\, X$ est la multiplication par -1 sinon X serait un caractère ce qui est impossible vue la structure de G. Il en résulte que, pour $x \in G_0$ et $y \in G_0^c$, on a

$$X(xy) = X(y) - X(x), \tag{2}$$

ce qui est bien la formule de l'énoncé.

Soient maintenant x et y dans G_0^c, alors xy est dans G_0 et, d'après ce qui a été déjà montré, $X(y) = X(x^{-1}xy) = X(x^{-1}) + X(xy)$ soit

$$X(xy) = X(y) - X(x^{-1}). \tag{3}$$

Il reste donc à montrer que $X(x^{-1}) = X(x)$. A cet effet, considérons la fonction $F(x) = X(xz) + X(xzy) - X(x) - X(xy)$, où z et y sont arbitraires et fixés dans G_0^c. Cette fonction est P-invariante; de plus elle est constante sur G_0 et G_0^c. En effet, si $x \in G_0$, il résulte de (1) et (2) que

$$F(x) = -X(x) + X(z) + X(x) + X(zy) - X(x) + X(x) - X(y)$$
$$= X(z) + X(zy) - X(y)$$

qui ne dépend plus de x. Si $x \in G_0^c$, alors comme $xz \in G_0$,

$$F(x) = X(xz) - X(xz) + X(y) - X(x) - X(xy)$$

et, en utilisant (3),

$$F(x) = X(x^{-1}y) - X(xy).$$

Mais $x^{-1}y$ et xy sont dans G_0, sur lequel X est un caractère, donc

$$F(x) = -X(yx^{-1}) - X(xy) = -X(y^2).$$

Il en résulte que F est bornée, et comme elle est P-invariante, elle est constante; c'est dire que, pour y et z dans G_0^c,

$$-X(y^2) = X(zy) + X(z) - X(y).$$

Si on fait $z = y$, il en résulte immédiatement que $X(y^2) = -X(y^2) = 0$. Si l'on fait $z = y^{-1}$, il s'ensuit alors que $X(y^{-1}) = X(y)$, et la démonstration est terminée.

Remarque. — Dans le cas des groupes discrets, nous donnerons dans un article ultérieur une autre démonstration de ce résultat. En fait, on montrera l'existence d'une fonction X ayant la propriété ci-dessus, et on en déduira la structure du groupe.

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant d'un évident intérêt intrinsèque.

(5.3) PROPOSITION. — *On a* $\lim_{x \to \Delta} \gamma(x)/|X(x)| = \sigma^{-2}$.

Démonstration. — Si $x \to \Delta$ en restant dans G_0, le résultat découle immédiatement de (2.4) et de (4.5). Supposons maintenant que $x \to \Delta$ dans G_0^c, et soit a un point arbitraire dans G_0^c. Alors xa tend vers Δ dans G_0 et, comme $(I - \tau_a)\gamma$ est borné, on a

$$\lim_{x \to \Delta} (\gamma(x) - \gamma(xa))/|X(x)| = 0.$$

Mais, d'après les propriétés de X, on a

$$|X(x)|/\gamma(xa) = |X(a) - X(xa)|/\gamma(xa),$$

et cette dernière quantité tend vers σ^2 lorsque $x \to \Delta$ d'après la première partie.

(5.4) COROLLAIRE. — *Il y a identité entre*

(i) *les fonctions spéciales,*

(ii) *les fonctions cospéciales,*

(iii) *les fonctions intégrables par la mesure* $|X|.m$.

Démonstration. — C'est la même que pour (2.7). On peut aussi remarquer que toute fonction spéciale est la somme d'une fonction spéciale pour M_0

sur G_0 et de la translatée d'une telle fonction sur G_0^c. Il suffit d'utiliser (4.2) et le fait que l'ensemble des fonctions spéciales est invariant par translation dans le groupe.

(5.5) LEMME. — *La fonction* $g = P|X|-|X|$ *est intégrable, et*

$$m(g) = \int (P|X|-|X|)\,dm = \sigma^2.$$

Démonstration. — Comme $PX = X$, on a $P|X| \geqslant |X|$, et g est positive. En utilisant la méthode de (4.5), on a facilement

$$U_{G_0} I_{G_0} |X| + \lim_n (PI_{G_0^c})^n |X| = |X| + \sum_{n \geqslant 0} (PI_{G_0^c})^n g.$$

Mais d'après (5.3), $|X|$ est majoré par un multiple de γ et, par suite, la démonstration de (4.5) entraîne que $\lim_n (PI_{G_0^c})^n |X| = 0$. En restreignant l'égalité ci-dessus à G_0, on obtient alors

$$\Pi |X_0| - |X_0| = I_{G_0}.\sum_{n \geqslant 0} (PI_{G_0^c})^n g,$$

et en intégrant par rapport à m,

$$\sigma^2 = \langle 1_{G_0}.\sum (PI_{G_0^c})^n g \rangle = \langle \sum_{n \geqslant 0} (I_{G_0^c} \hat{P})^n 1_{G_0}, g \rangle$$
$$= \langle \hat{P}_{G_0} 1, g \rangle = m(g).$$

Avant d'énoncer le théorème du renouvellement posons la définition suivante :

(5.6) DÉFINITION. — *On dira que* $x \to \pm \infty$ *dans* G *si* $X(x) \to \pm \infty$ *dans* **R**.

On remarque que, sur G_0, cela coïncide avec la définition déjà utilisée. D'autre part, dans le groupe visé au début du paragraphe qui peut se représenter comme le groupe des matrices $\begin{pmatrix} \varepsilon & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon = \pm 1$, une suite de points converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si les entiers n correspondants convergent vers $+\infty$ resp. $-\infty$).

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

(5.7) THÉORÈME. — *Pour toute charge* f *telle que* $P|f|$ *tende vers zéro à l'infini, on a* $\lim_{x \to \pm\infty} Af(x) = \pm\, \sigma^{-2} \int \hat{X}.f\,dm$, *et, pour toute fonction spéciale* f *telle que* Pf *tende vers zéro à l'infini,*

$$\lim_{x \to \pm\infty} Wf(x) = \int (\hat{\gamma} \pm \sigma^{-2} \hat{X}) f\,dm.$$

Démonstration. — Soit h la fonction déjà utilisée à support dans G_0; on posera encore $h' = h/m(h)$, et on appellera W et $\hat{W}$ les opérateurs associés. Soit f une charge dont le module tend vers zéro à l'infini.

Soit (a_n) une suite tendant vers $+\infty$ et telle que $\lim_{n\to\infty} \hat{W}f(a_n) = L(f)$ existe. D'après (1.2), on a aussi, pour tout x de G,

$$\lim_{n\to\infty} W_h f(xa_n) = L(f),$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} \langle g, \hat{W}f(.a_n)\rangle = m(g)\, L(f),$$

soit $\lim_{n\to\infty} < W(\tau_{a_n}^{-1} g), f > = \sigma^2 L(f)$.

Calculons $W_h(\tau_a g)$; compte tenu des valeurs absolues, on a

$$\begin{aligned}|(I-\tau_a)|X||(x) &= ||X(x)|-|X(xa)||\\ &= ||X(x)|-|X(x)+\varepsilon(a)X(a)|| \leqslant |X(a)|.\end{aligned}$$

La fonction $(I-\tau_a)|X|$ est donc bornée et

$$P(I-\tau_a)|X|-(I-\tau_a)|X| = (I-\tau_a)g;$$

comme g est intégrable, en utilisant le même argument que dans le lemme (4.3), on a donc $(I-\tau_a)|X| = (I+W)(\tau_a-I)\, g+C(a)$ m-$p.p.$ où $C(a)$ est une constante. Nous avons donc

$$\begin{aligned}\sigma^2 L(f) &= \lim_{n\to\infty}\langle (I-\tau_{a_n}^{-1})(|X|+g)+Wg-C(a_n), f\rangle\\ &= \langle |X|, f\rangle + \langle Wg, f\rangle + \langle g, f\rangle - \lim_n \langle \tau_{a_n}^{-1}|X|, f\rangle\end{aligned}$$

parce que f est une charge telle que $|f|$ tende vers zéro à l'infini. Or

$$\langle \tau_{a_n}^{-1}|X|, f\rangle = \langle |X+\varepsilon(a_n^{-1})X(a_n^{-1})|, f\rangle;$$

si $a\in G_0$, alors $\varepsilon(a^{-1}) = 1$ et $X(a^{-1}) = -X(a)$, tandis que si $a\in G_0^c$, alors $\varepsilon(a^{-1}) = -1$, mais $X(a^{-1}) = X(a)$, donc, dans tous les cas,

$$\begin{aligned}\langle \tau_{a_n}^{-1}|X|, f\rangle &= \langle |X-X(a_n)|, f\rangle\\ &= \langle ||X(a_n)|-\mathrm{sgn}(X(a_n))X|, f\rangle\\ &= \langle ||X(a_n)|-\mathrm{sgn}(X(a_n))X|-|X(a_n)|, f\rangle\\ &= \langle \Phi, f\rangle.\end{aligned}$$

Lorsque a_n tend vers $+\infty$, la fonction Φ tend vers $-X$ en restant majorée par $|X|$ et comme d'après (5.4), $\int |X|.f\, dm < \infty$, le théorème de Lebesgue permet d'affirmer que $\lim < \tau_{a_n}^{-1} |X|, f > = -\int X.f\,dm$, et par suite que

$$\sigma^2 L(f) = \langle |X| + Wg+g, f\rangle + \int X.\, f\,dm.$$

Posons maintenant $\varphi = |X| + Wg+g-\sigma^2\gamma$. En raisonnant comme en (4.3), on a presque partout $P(Wg+g) = Wg+\sigma^2 Ph'$ et par suite m-$p.p.$ $P\varphi = \varphi$. On a donc encore $P\varphi^+ = \varphi^+ + k$ m-$p, p.$, et donc $P_n\varphi^+ = \varphi^+ + \sum_1^n P_j k$ m-$p.p.$ Maintenant de (5.3) on peut déduire, puisque les mesures P_n convergent étroitement vers ε_Δ, que

$$\lim_n P_n(|X| - \sigma^2\gamma)^+/\sigma^2 P_n\gamma = 0.$$

Comme $\varphi^+ \leqslant (|X| - \sigma^2\gamma)^+ + Wg+g$, on en déduit à l'aide du lemme (4.3) que $\lim_n P_n\varphi^+/\sigma^2 P_n\gamma = 0$, ce qui entraîne que $\lim_n \sum_1^n P_j\ k/P_n\gamma = 0$, ce qui n'est possible que si k est négligeable. On en déduit que $P\varphi^+ = \varphi^+$ m-$p.p.$, donc que Φ^+ est constante m-$p.p.$; comme Φ^+ est semi-continue inférieurement, elle est inférieure à cette constante partout. La fonction Φ est donc invariante et bornée supérieurement, donc constante.

En se servant une fois de plus du fait que f est une charge, on arrive donc à conclure que $\sigma^2 L(f) = \int(\sigma^2\gamma + X) f\,dm$, soit $L(f) = \int(\gamma+\sigma^{-2}X) f\,dm$ ce qui donne la première conclusion de l'énoncé pour la marche duale lorsque f est une charge telle que $|f|$ tende vers zéro à l'infini, et la seconde pour toutes les fonctions spéciales tendant vers zéro à l'infini.

Il n'est alors pas difficile d'obtenir le théorème en toute généralité.

Ce théorème a des applications classiques comme celles qui sont indiquées à la fin du paragraphe 3. Le lecteur n'aura pas de mal à les énoncer et à les démontrer dans le cas où il en aurait besoin.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Brunel (A.) et Revuz (D.). — Sur la théorie du renouvellement pour les groupes non abéliens, *Israël J. of Math.*, t. 20, 1975, p. 46-56.

[2] Brunel (A.) et Revuz (D.). — Marches récurrentes au sens de Harris sur les groupes localement compacts, I., *Annales scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 7, 1974, p. 273-310.

[3] Kesten (H.). — The Martin boundary of recurrent random walks on countable groups, "*Proceedins of the Fifth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability* [1965. Berkelcy]. Vol. 2, part 2", p. 51-75. — Berkeley, University of California Press, 1967.

[4] KESTEN (H.) and SPITZER (F.). — Random walks on countable infinite abelian groups, *Acta Math.*, Uppsala, t. 114, 1965, p. 237-265.

[5] NEVEU (J.). — Potentiel markovien récurrent des chaînes de Harris, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 22, 1972, fasc. 2, p. 85-130.

[6] REVUZ (D.). — *Markov chains*. — Amsterdam, North-Holland publishing Company; New York, American Elsevier publishing Company, 1975 (*North-Holland mathematical Library*, 11).

[7] SPITZER (F.). — *Principle of random walks*. — New York, D. Van Nostrand Company, 1964 (*University Series in higher Mathematicas*).

(Texte reçu le 17 janvier 1975.)

Antoine BRUNEL et Daniel REVUZ,
Laboratoire de Probabilités,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
Tour 56,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05.