BULLETIN DE LA S. M. F.

MARC DURAND

Paramétrix d'opérateurs elliptiques de classe C^{μ}

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 21-63
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__21_0>

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 21-63.

PARAMÉTRIX D'OPÉRATEURS ELLIPTIQUES DE CLASSE C^{μ}

PAR

MARC DURAND

[Orsay]

RÉSUMÉ. — G. GIRAUD a construit des solutions fondamentales des opérateurs elliptiques du second ordre à coefficients höldériens. On étudie ici la même question pour des opérateurs d'ordre quelconque, définis sur une variété différentiable compacte sans bord. On utilise l'algèbre d'opérateurs intégraux-singuliers, opérant dans les espaces de fonctions höldériennes, construite par J.-L. CLERC et P. COURRÈGE, afin de définir et étudier des classes d'opérateurs intégraux et de restes bien adaptées aux problèmes envisagés. On construit alors explicitement des parametrix d'opérateurs elliptiques, qui appartiennent à une des classes d'opérateurs intégraux ainsi définis. L'étude des équations elliptiques à coefficients höldériens est alors ramenée à celle d'une alternative de Fredholm dont l'opérateur appartient à une classe de restes. Les inégalités *a priori* habituelles peuvent alors être déduites *a posteriori* et on peut établir des théorèmes d'indice sans difficulté aucune.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Prolongeant les travaux de G. GIRAUD [10] sur les intégrales singulières opérant dans les espaces C^{μ} $(0 < \mu < 1)$, J.-L. CLERC et P. COURRÈGE ([4], [5], [6]) ont construit une algèbre d'opérateurs intégraux-singuliers opérant dans l'espace $C^{\mu}(\mathscr{M})$ des fonctions de classe C^{μ} définies sur une variété différentiable compacte sans bord $\mathscr{M}$. Ces opérateurs possèdent, hors de la diagonale, un noyau-fonction somme d'une partie principale $k(x-y, y)$, positivement homogène de degré $-n$ en la première variable, et d'un reste μ-fois régularisant dont l'opérateur associé est compact de $C^\mu(\mathscr{M})$ dans $C^\mu(\mathscr{M})$. Notre but ici est de reprendre les méthodes de G. GIRAUD et E.-E. LEVI [12] pour la construction des solutions fondamentales des opérateurs elliptiques du second ordre à coefficients de classe C^μ afin de traiter le cas des opérateurs d'ordre quelconque.

Plus précisément, en utilisant les résultats de J.-L. CLERC et P. COURRÈGE, nous voulons définir, sur une variété différentiable compacte sans bord $\mathscr{M}$, un type $\mathscr{G}_r^\mu$ (r entier > 0, $0 < \mu < 1$) de noyaux-fonctions $N(x, y)$ ayant une certaine singularité sur la diagonale, de telle sorte que l'opérateur intégral $\overline{N}$ associé applique continûment $C^\mu(\mathscr{M})$ dans $C^{r+\mu}(\mathscr{M})$ et que, pour tout opérateur différentiel L elliptique défini sur $\mathscr{M}$ à coefficients C^μ et d'ordre $2m$, il existe un noyau E de type $\mathscr{G}_{2m}^\mu$ dont l'opérateur intégral $\overline{N}$ associé soit une parametrix de L. Autrement dit, pour toute fonction $f \in C^\mu(\mathscr{M})$, on a alors la relation $L\overline{E}f = f + \overline{K}f$ ($f \in C^\mu(\mathscr{M})$), où l'opérateur $\overline{K}$, compact de $C^\mu(\mathscr{M})$ dans $C^\mu(\mathscr{M})$, est défini à l'aide d'un noyau K qui appartient à la classe des restes définie par J.-L. CLERC et P. COURRÈGE; la résolution dans $C^{2m+\mu}(\mathscr{M})$ de l'équation $Lu = g$ (avec g donnée dans $C^\mu(\mathscr{M})$) se ramène à celle d'une équation de Fredholm dans $C^\mu(\mathscr{M})$, et donc les deux résolutions sont équivalentes si la paramétrix est bijective. En outre dans le cas d'unicité pour l'équation de Fredholm, l'opérateur résolvant R (tel que si $(1-\overline{K})f = g$, alors $f = (1+R)g$) est dans la même classe d'opérateurs intégraux que $\overline{K}$.

Dans le paragraphe 1, nous définissons sur un ouvert borné Ω de R^n le type de restes $\mathscr{R}_r^\mu(\Omega)$ qui interviendra dans la suite; leurs noyaux sont caractérisés par leur régularité et leurs singularités sur la diagonale de $\Omega \times \Omega$ (n^os 1.1 à 1.4); ils opèrent de $C_k^\lambda(\Omega)$ dans $C^{r+\mu}(\Omega)$ pour tout $\lambda > 0$, et ils donnent lieu à un théorème de dérivation sous le signe somme habituel (n° 1.5, théorème I).

Dans le paragraphe 2, nous définissons les noyaux de Giraud r-fois régularisants en classe C^μ comme des noyaux $N(x, y)$ de la forme $k(x-y, y)$, où la fonction $k(z, y)$ est de classe C^∞ et positivement homogène d'ordre $(r-n)$ en la variable z lorsque $r < n$, avec un facteur logarithmique lorsque $r \geqslant n$, et de classe C^μ en y (n^os 2.1 et 2.2). Les noyaux intégraux de la classe $\mathscr{G}_r^\mu(\Omega)$, à laquelle appartiennent les paramétrix des opérateurs

Giraud r-fois régularisant en classe C^μ et d'un reste de type $\mathscr{R}_r^\mu$ (nº 2.3). Les opérateurs intégraux associés à de tels noyaux sont continus de $C_k^\mu(\Omega)$ dans $C^{r+\mu}(\Omega)$, et donnent lieu à un théorème de dérivation singulière sous le signe somme (nº 2.4, théorème II) qui est fondamental pour montrer que les paramétrix cherchées peuvent être obtenues dans la classe d'opérateurs ainsi définie.

Dans le paragraphe 3, nous montrons que les types $\mathscr{R}_r^\mu$ et $\mathscr{G}_r^\mu$ sont invariants par difféomorphisme (nºs 3.1 à 3.6 et le théorème III), ce qui permet de définir les classes de noyaux correspondantes sur une variété compacte sans bord $\mathscr{M}$ par localisation et à l'aide d'une partition de l'unité (nº 3.7). Le théorème IV (nº 3.8) résume les propriétés essentielles des opérateurs régularisants associés à ces noyaux.

Enfin, dans le paragraphe 4, nous construisons les paramétrix annoncées. Après un rappel des formules donnant les solutions élémentaires des opérateurs à coefficients constants (nº 4.1) (résultats « bien connus » dont les démonstrations complètes sont cependant données en appendice, faute de les avoir trouvées dans la littérature), on définit, pour un opérateur elliptique à coefficients de classe C^μ, d'abord une paramétrix sur un ouvert Ω de R^n à partir de la solution élémentaire de l'opérateur à coefficients constants tangent en chaque point à l'opérateur donné (nº 4.2, théorème V), puis sur une variété compacte sans bord $\mathscr{M}$ (nº 4.3, théorème VI).

Ce travail a profité de nombreuses discussions avec J.-L. CLERC, qu'il en soit remercié. L'auteur voudrait surtout exprimer toute sa gratitude à P. COURRÈGE qui avait déjà abordé toutes ces questions auparavant. Il a suivi de bout en bout l'élaboration de ce travail, n'a jamais ménagé ni ses conseils ni sa peine, et l'auteur lui doit le meilleur de sa formation.

0. Notations et définitions

Ω désigne un ouvert borné de R^n, Σ_n la sphère unité de R^n munie de la mesure superficielle euclidienne σ_n.

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est un multi-indice de longueur $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, on note

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{et} \qquad D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

On note $\mathscr{L}_k^\infty(\Omega)$ (resp. $C_k^p(\Omega)$) l'espace des fonctions complexes sur Ω mesurables bornées (resp. continues, p-fois continûment différentiables) elliptiques d'ordre r, sont alors définis comme somme d'un noyau de à support compact dans Ω. On munit ces espaces de leur topologie habituelle. Pour tout μ dans l'intervalle $]0, 1[$, on note $C_k^{p+\mu}(\Omega)$ le sous-espace de $C_k^p(\Omega)$ formé des fonctions f telles que

$$\|f\|_{p,\mu} = \sup_{x \in \Omega;\, |\alpha| \leqslant p} |D^\alpha f(x)| + \sup \frac{|D^\alpha f(y) - D^\alpha f(x)|}{|x-y|^\mu} < +\infty,$$

et on note $C^{p+\mu}(\Omega)$ l'espace des fonctions f telles que, pour toute fonction $\varphi \in C_k^{p+\mu}(\Omega)$, on ait $f\varphi \in C_k^{p+\mu}(\Omega)$. $C_K^{p+\mu}$, espace des fonctions de $C_k^{p+\mu}(\Omega)$ dont le support est contenu dans le compact K, est alors un espace de Banach, et $C_k^{p+\mu}(\Omega)$ est muni de la topologie de limite inductive habi. tuelle. Dans ce qui suit, μ désigne toujours un nombre réel tel que $0 < \mu < 1$-

Comme dans [6] (chap. 0), on considère une variété compacte sans bord $\mathscr{M}$ de classe C^∞ et de dimension n, munie d'une métrique riemanienne g de classe C^μ et de la mesure associée τ_g, mais ici $n \geqslant 2$. On définit de même, par localisation, les espaces $\mathscr{L}^\infty(\mathscr{M})$, $C(\mathscr{M})$, $C^p(\mathscr{M})$, $C^{p+\mu}(\mathscr{M})$.

Pour les notions de noyau-fonction, noyau symétrique, noyau intégrable, opérateur intégral associé, on renvoie à [4] et à [6] (chap. 0). On rappelle qu'étant donné un noyau N, on désigne par N l'opérateur intégral associé, et par $\check{N}$ le noyau $\check{N}(x, y) = N(y, x)$.

1. Définition locale des types de restes. Dérivation sous le signe somme

On rappelle d'abord les définitions des types de noyaux $\mathscr{N}_q$, $\mathscr{N}_q^\mu$, $\mathscr{N}_\mu^{\mu+}$ et $\mathscr{R}^\mu$ qui ont été définis en [6] (¹) (I.1.1, I.2.1, I.3.1, I.4.1) (on pourra voir aussi [4], où $\mathscr{N}_\mu^{\mu+}$ est noté $\mathscr{N}_\mu^\mu$).

DÉFINITION. — Un noyau N sur Ω est dit *d'ordre* q ($q \in R$) si, pour tout compact K de Ω, il existe une constante M_K telle que, pour tous x et y dans K, $x \neq y$, on ait les relations

$$\begin{aligned}
&|N(x, y)| \leqslant M_K |x-y|^{-n+q} && \text{si } q < n,\\
&|N(x, y)| \leqslant M_K \left(\log \frac{\delta(K)}{|x-y|} + 1\right) && \text{si } q = n,\\
&N(x, y) \text{ se prolonge continûment à } \Omega \times \Omega && \text{si } q > n,
\end{aligned}$$

où $\delta(K)$ désigne le diamètre du compact K.

(¹) Le lecteur remarquera que la classe qui, en [4] et en [6] est notée $\mathscr{R}_\mu$ est désormais écrite $\mathscr{R}^\mu$, ce changement de place de l'indice étant destiné à conserver la cohérence des notations après l'introduction de la classe $\mathscr{R}_p^\mu$.

On désigne par $\mathcal{N}_q(\Omega)$ l'ensemble des noyaux sur Ω d'ordre q.

On définit maintenant un type de noyaux dont on contrôle la régularité en la première variable.

DÉFINITION. — Un noyau N sur Ω, d'ordre q ($q > 0$), est dit *C^μ-contrôlé* si, pour tout compact K de Ω, il existe une constante $M_K > 0$, telle que, pour tous x, x' et y dans K, $x \neq y$, $x' \neq y$,

$$(\mathrm{R}_2)\quad |N(x, y)-N(x', y)| \leqslant M_K |x-x'|^\mu . \varpi_{q,\mu}(\inf(|x-y|, |x'-y|)),$$

où

$$\varpi_{q,\mu}(t) = \begin{cases} t^{q-n-\mu} & \text{si } q < n, \\ t^{q-n-\mu}\left(1+\log^+ \dfrac{1}{t}\right) & \text{si } n \leqslant q \leqslant n+\mu, \\ 1 & \text{si } q > n+\mu. \end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{N}_q^\mu(\Omega)$ l'ensemble des noyaux sur Ω d'ordre q et C^μ-contrôlés.

Les noyaux de type $\mathcal{N}_\mu^\mu$ sont essentiels à la théorie, mais on ne sait malheureusement s'ils envoient l'espace $C_k^\lambda(\Omega)$ dans $C^\mu(\Omega)$ ($\lambda > 0$). C'est pourquoi on utilise une classe probablement un peu plus restreinte définie comme suit.

DÉFINITION. — Un noyau N sur Ω de type $\mathcal{N}_\mu^\mu$ ($0 < \mu < 1$) est dit *de type $\mathcal{N}_\mu^{\mu+}$* si, pour toute fonction $\varphi \in C_k^\infty(\Omega)$, $\overline{N}\varphi \in C^\mu(\Omega)$.

On désigne par $\mathcal{N}_\mu^{\mu+}(\Omega)$ l'ensemble des noyaux sur Ω de type $\mathcal{N}_\mu^{\mu+}$. On note que l'opérateur intégral associé à un noyau de type $\mathcal{N}_\mu^{\mu+}$ applique continûment $C_k^\lambda(\Omega)$ dans $C^\mu(\Omega)$ pour tout $\lambda > 0$ (propriété R_3).

On donne ici une propriété importante d'un certain type de fonctions (*cf.* [6], I.3.2).

PROPOSITION. — *Soit $h(z)$ une fonction positivement homogène de degré $\mu-n$, telle que $h|_\Sigma \in C^{\mu'}(\Sigma)$ avec $\mu < \mu'$. Alors le noyau $\tilde{h}(x, y) = h(x-y)$ est de type $\mathcal{N}_\mu^{\mu+}$.*

Soit $h(x, z)$ une fonction définie sur $\Omega \times R_n \setminus \{0\}$, positivement homogène en z de degré $\mu-n$, et telle que soit vérifiée la condition :

$(\Sigma_{\mu\mu'})$, *Pour tout compact K de Ω, il existe une constante C_K, telle que, pour tous x, x' dans K, et θ, θ' dans Σ,*

$$|k(x', \theta')-k(x, \theta)| \leqslant C_K(|x-x'|^\mu+|\theta-\theta'|^\mu),$$

alors les noyaux $h(x, y) = k(x, x-y)$ *et* $\tilde{h}(x, y) = k(y, x-y)$ *sont de type* $\mathcal{N}_{\mu}^{\mu+}$ *sur* Ω.

On va enfin définir la classe des noyaux qui constitueront les restes.

DÉFINITION. — Un noyau N sur Ω est dit *de type* $\mathcal{R}^{\mu}$ $(0 < \mu < 1)$ si N et $\check{N}$ sont de type $\mathcal{N}_{\mu}^{\mu+}$ et si, pour tout compact K de Ω et tous x, x', y, y' distincts dans K, il existe une constante C_K telle que

$$(R_4) \qquad \begin{aligned} &|N(x, y)-N(x', y)-N(x, y')+N(x', y')| \\ &\leqslant C_K |x-x'|^{\mu} |y-y'|^{\mu} \\ &\quad \times [\inf(|x-y|, |x'-y|, |x-y'|, |x'-y'|)]^{-n-\mu}. \end{aligned}$$

On désigne par $\mathcal{R}^{\mu}(\Omega)$ l'ensemble des noyaux sur Ω de type $\mathcal{R}^{\mu}$. Ces noyaux, avec des conditions de régularité sur les différences secondes, ont été introduits afin d'avoir des théorèmes de composition des opérateurs intégraux-singuliers dont les restes ont des noyaux appartenant précisément à la classe $\mathcal{R}^{\mu}$, résultats qui ne semblent pas possibles si l'on prend les restes dans la classe $\mathcal{N}_{\mu}^{\mu+}$. Comme le lecteur pourra s'en convaincre en se reportant à [5] et à ce que nous disons à propos de la résolution d'une alternative de Fredholm (remarque de 4.3 où nous signalons que le noyau résolvant est dans $\mathcal{R}^{\mu}$), cette classe ne paraît pas trop restrictive.

Voici enfin un exemple de noyau de type $\mathcal{R}^{\mu}$.

PROPOSITION. — *Soit* $h(x, z)$ *une fonction définie, continue dans* $\Omega \times R_n \setminus \{0\}$, *positivement homogène en* z *de degré* $\mu - n$, *une fois continûment différentiable en* z, *et telle que* $(\partial/\partial z_i)\, h(x, z) \in C^{\mu}(\Omega \times R^n \setminus \{0\})$ *pour tout* i, $1 \leqslant i \leqslant n$. *Alors le noyau* $\tilde{h}(x, y) = h(x, x-y)$ *est de type* $\mathcal{R}^{\mu}$ *sur* Ω.

1.1. Ceci étant, nous pouvons maintenant définir les noyaux dérivables.

DÉFINITION. — Un noyau N sur Ω est dit *p-fois dérivable* si, pour chaque y dans Ω, la fonction $N(., y)$ est p-fois continûment différentiable dans l'ouvert $\Omega \setminus \{y\}$.

On désigne par $\mathcal{N}_q^p(\Omega)$ l'ensemble des noyaux sur Ω d'ordre q qui sont p-fois dérivables (noyaux de type $\mathcal{N}_q^p$).

Pour chaque multi-indice de dérivation α de longueur $|\alpha| \leqslant p$, on note $D^{\alpha} N$ le noyau défini par

$$\begin{aligned} &D^{\alpha} N(x, y) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} N(x, y) \qquad \text{pour} \quad x \neq y, \\ &D^{\alpha} N(x, y) = 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{pour} \quad x = y. \end{aligned}$$

Il faut maintenant définir des types de noyaux dérivables dont les dérivées d'ordre maximal sont encore contrôlées par une condition de Hölder et aussi dont on contrôle les différences secondes. Mais auparavant nous donnons une notation :

Étant donné un opérateur différentiel $P(x, D) = \sum a_\alpha(x) D^\alpha$, on note PN le noyau $\sum a_\alpha(x) D^\alpha N$.

1.2. Définition. — Un noyau N sur Ω est dit *de type* $\mathscr{N}_q^{p+\mu}$ si, pour tout multi-indice de dérivation α de longueur $|\alpha| = p' \leqslant p$, $D^\alpha N \in \mathscr{N}_{q-p'}^{\mu}(\Omega)$.

On désigne par $\mathscr{N}_q^{p+\mu}(\Omega)$ l'ensemble des noyaux sur Ω de type $\mathscr{N}_q^{p+\mu}$.

Remarque. — Un noyau N est de type $\mathscr{N}_q^{p+\mu}$ si, pour tout indice de dérivation α de longueur $|\alpha| = p' < p$, $D^\alpha N$ est de type $\mathscr{N}_{q-p'}$ et si, pour tout β de longueur $|\beta| = p$, $D^\beta N$ est de type $\mathscr{N}_{q-p}^{\mu}$ (on applique la formule de Taylor pour le voir).

1.3. Nous donnons maintenant le type qui interviendra dans la suite.

Définition. — Un noyau N sur Ω est *p-fois bien dérivable en classe* C^μ (p entier $\geqslant 0$) si

(i) N est de type $\mathscr{N}_{p+\mu}^{p+\mu}$;

(ii) pour tout multi-indice de dérivation α de longueur $|\alpha| \leqslant p$, le noyau $D^\alpha N$ est de type $\mathscr{R}^\mu$.

On dit alors que N est de type $\mathscr{R}_p^\mu$, et on désigne par $\mathscr{R}_p^\mu(\Omega)$ l'ensemble des noyaux sur Ω de type $\mathscr{R}_p^\mu$.

1.4. Il est facile d'établir les inclusions suivantes :

$$\begin{aligned} &\mathscr{N}_q^{p+\mu'}(\Omega) \subset \mathscr{N}_q^{p+\mu}(\Omega) \qquad \text{si} \quad \mu \leqslant \mu', \\ &\mathscr{N}_q^{p+1}(\Omega) \subset \mathscr{N}_q^{p+\mu}(\Omega), \\ &\mathscr{N}_{q'}^{p+\mu}(\Omega) \subset \mathscr{N}_q^{p+\mu}(\Omega) \qquad \text{si} \quad q \leqslant q'. \end{aligned}$$

Si $\varphi \in C^{p+\mu}(\Omega)$, si $N \in \mathscr{R}_p^\mu(\Omega)$, alors le noyau $\varphi(x) N(x, y) \varphi(y)$ est de type $\mathscr{R}_p^\mu$ (on utilisera ce résultat sans le rappeler).

1.5. Nous allons maintenant établir le *théorème de dérivation sous le signe somme* pour les opérateurs intégraux associés aux noyaux de type $\mathscr{R}_p^\mu$.

Théorème I. — *Soit N un noyau sur Ω de type $\mathscr{R}_p^\mu$. Alors l'opérateur intégral $\overline{N}$ applique continûment $\mathscr{L}_k^\infty(\Omega)$ dans $C^{p+\lambda}(\Omega)$ pour tout $\lambda < \mu$, et $C_k^\lambda(\Omega)$ dans $C^{p+\mu}(\Omega)$ pour tout $\lambda > 0$. En outre, pour $f \in C_k^\infty(\Omega)$, pour* *tout indice de dérivation* α *de longueur* $|\alpha| \leqslant p$ *et pour tout* x *dans* Ω,

$$D^\alpha(\overline{N}f)(x) = \int_\Omega D^\alpha N(x, y) f(y)\, dy = \overline{D^\alpha N} f(x).$$

Ce théorème est une conséquence du résultat suivant :

LEMME. — *Soit* N *un noyau sur* Ω *de type* $\mathcal{N}_q^1$ $(q > 1)$. *Alors, pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}_k^\infty(\Omega)$, *la fonction* $\overline{N}f(.) = \int_\Omega N(., y) f(y)\, dy$ *est de classe* C^1 *sur* Ω. *De plus,*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\int_\Omega N(x, y) f(y)\, dy = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} N(x, y) f(y)\, dy \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Démonstration du lemme. — Désignons par $(e_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ la base canonique de R^n, et montrons que, pour tout i et tout x dans Ω,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_\Omega [N(x+te_i, y) - N(x, y)] f(y)\, dy = \int_\Omega D_i N(x, y) f(y)\, dy.$$

Puisque $N \in \mathcal{N}_q^1$ $(q > 1)$, la fonction définie sur R

$$s \to \int_\Omega D_i N(x+se_i, y) f(y)\, dy$$

est définie et continue pour $|s|$ assez petit, soit pour $|s| \leqslant \eta$ $(\eta > 0)$. Posons

$$\psi_i(t) = \frac{1}{t}\int_0^t ds \int_\Omega D_i N(x+\varepsilon s e_i, y) f(y)\, dy,$$

avec

$$0 < t < \eta \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

Désignons par S l'ensemble $\{x+se_i; |s| \leqslant \eta\}$. Puisque $n \geqslant 2$, S est de mesure nulle, et l'intégrale sur Ω qui se trouve dans la définition de $\psi_i(t)$ peut être prise sur $\Omega \setminus S$. Nous avons alors

$$\lim_{t\to 0}\psi_i(t) = \int_\Omega D_i N(x, y) f(y)\, dy.$$

D'autre part, puisque $D_i N$ est un noyau intégrable, une application du théorème de Fubini donne

$$\psi_i(t) = \frac{1}{t}\int_{\Omega\setminus S} f(y)\, dy \int_0^t D_i N(x+\varepsilon s e_i, y)\, ds.$$

Pour $y \in \Omega \setminus S$, la fonction $s \to N(x+\varepsilon s e_i, y)$ est dérivable, et elle a pour dérivée $\varepsilon D_i N(x+\varepsilon s e_i, y)$, d'où nous déduisons

$$\psi_i(t) = \frac{\varepsilon}{t} \int_{\Omega \setminus S} [N(x+\varepsilon t e_i, y) - N(x, y)] f(y)\, dy.$$

Donc

$$\lim_{t\to 0} \psi_i(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\Omega \setminus S} [N(x+t e_i, y) - N(x, y)] f(y)\, dy,$$

ce qui démontre l'égalité cherchée.

Il est alors évident que $\overline{N} f$ est de classe C^1 sur Ω.

C. Q. F. D.

Démonstration du théorème. — Tout d'abord une récurrence sur p permet de voir immédiatement que si $N \in \mathscr{N}_q^{p+\mu}(\Omega)$, avec $q > p$, alors, pour toute fonction $f \in \mathscr{L}_k^\infty(\Omega)$, la fonction $\overline{N} f$ est de classe C^p sur Ω, et

$$D^\alpha(\overline{N} f)(x) = \int_\Omega D^\alpha N(x, y) f(y)\, dy = \overline{D^\alpha N} f(x) \qquad (|\alpha| \leqslant p).$$

De plus si $\lambda < q-p$, $0 < \lambda \leqslant \mu$, alors pour toute fonction $f \in \mathscr{L}_k^\infty(\Omega)$, $\overline{N} f \in C^{p+\lambda}(\Omega)$ (*cf.* théorème I.2.2 de [6]). Enfin lorsque $|\alpha| = p$, $D^\alpha N \in \mathscr{R}^\mu(\Omega) \subset \mathscr{N}_\mu^{\mu+}(\Omega)$, donc, pour toute fonction $f \in C_k^\lambda(\Omega)$, $\lambda > 0$, $\overline{N} f \in C^{p+\mu}(\Omega)$.

C. Q. F. D.

2. Définition locale du type de noyaux. Dérivation singulière sous le signe somme

Nous définissons maintenant les noyaux que nous devons envisager pour construire les paramétrix des opérateurs différentiels elliptiques.

2.1. DÉFINITION. — Soient s et μ deux nombres réels. On appelle $H_s^\mu(\Omega)$ l'espace des fonctions complexes $h : (z, y) \to h(z, y)$ définies sur $(R^n \setminus \{0\}) \times \Omega$, telles que

(H_1) Pour tout y dans Ω, la fonction $h(., y)$ définie sur $R^n \setminus \{0\}$ est de classe C^∞ et positivement homogène de degré s;

(H_2) Pour tout multi-indice de dérivation α, la fonction

$$D^\alpha h : \ (z, y) \to \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} h(z, y)$$

appartient à $C^\mu(R^n \setminus \{0\} \times \Omega)$.

On désigne par $H_1^1(\Omega)$ le sous-espace de $H_1^\mu(\Omega)$ formé des fonctions telles que $D^\alpha h \in C^1(R_n \setminus \{0\} \times \Omega)$.

Un *noyau singulier de Giraud sur* Ω *en classe* C^μ est une fonction $h(z, y) \in H_{-n}^\mu(\Omega)$ qui, pour tout y fixé, est d'intégrale nulle sur la sphère unité.

2.2. Cela étant, nous avons le résultat suivant :

DÉFINITION. — Soit r un entier > 0. On appelle *noyau de Giraud r-fois régularisant en classe* C^μ *sur* Ω tout noyau N sur Ω défini comme suit :

1° Si $r < n$, $N(x, y) = k(x-y, y)$, où $k \in H_{r-n}^\mu(\Omega)$;

2° Si $r \geq n$, $N(x, y) = k_0(x-y, y) + k_1(x-y, y)\,\mathrm{Log}\,|k_2(x-y, y)|$ (2), où

$k_0 \in H_{r-n}^\mu(\Omega)$,

$k_1(z, y) = \sum_{|\alpha|=0}^{r-n} a_\alpha(y)\, z^\alpha$ avec $a_\alpha \in C^\mu(\Omega)$,

$k_2 \in H_1^1(\Omega)$, $k_2(z, y) \neq 0$ lorsque $z \neq 0$,

et enfin pour tout multi-indice de dérivation α de longueur $|\alpha| = r-n$, pour tout y dans Ω,

$$\int_{\Sigma_n} D^\alpha\left[k_0(z, y) + k_1(z, y)\log|k_2(z, y)|\right]\sigma_n(dz) = 0.$$

Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible nous dirons, par la suite, « *noyau de Giraud régularisant* » au lieu de « *noyau de Giraud r-fois régularisant en classe* C^μ ». Remarquons enfin que les noyaux de classe $\mathscr{G}_\mu(\Omega)$, définis en [5], sont 0-fois régularisants.

2.3. Nous pouvons maintenant définir les noyaux que nous désirons étudier.

DÉFINITION. — Soit r un entier > 0. On appelle $\mathscr{G}_r^\mu(\Omega)$ l'ensemble des noyaux N sur Ω de la forme

$$N(x, y) = l(x-y, y) + \Phi(x, y),$$

où l est un noyau de Giraud r-fois régularisant en classe C^μ, et Φ un noyau de type $\mathscr{R}_r^\mu$.

---

(2) Pour y fixé, on peut dire que $k_0(z, y) + k_1(z, y)\log|k_2(z, y)|$ est une fonction pseudo-homogène de degré $(r-n)$.

Si $N \in \mathcal{G}_r^\mu(\Omega)$, on dira aussi que N est un noyau de type $\mathcal{G}_r^\mu$ sur Ω. On ne devra pas confondre ces noyaux avec les noyaux de Giraud r-fois régularisants en classe C^μ, lesquels en constituent la partie principale selon la proposition suivante (³).

PROPOSITION. — *Soit N un noyau sur Ω de type $\mathcal{G}_r^\mu$. Alors N peut s'écrire d'une manière, et d'une seule, sous la forme*

$$N(x, y) = l(x-y, y)+m(x, y),$$

où l est un noyau de Giraud r-fois régularisant en classe C^μ, et m un noyau de type $\mathcal{R}_r^\mu$.

Pour établir ce résultat, remarquons d'abord qu'étant donné un ouvert Ω de R^n, et un point y fixé dans Ω, pour tout point $\tilde{z}$ de Σ_n, il existe $x \in \Omega$ aussi proche que l'on veut de y, et tel que $\tilde{z} = (x-y)/|x-y|$. Cela étant, soit

$$N(x, y) = l(x-y, y)+\Phi(x, y) = l'(x-y, y)+\Phi'(x, y).$$

Posons

$$q(x-y, y) = l(x-y, y)-l'(x-y, y) = \Phi'(x, y)-\Phi(x, y).$$

Ainsi $q \in \mathcal{R}_r^\mu(\Omega)$.

Premier cas : $r < n$. — $q \in \mathcal{R}_r^\mu(\Omega) \subset \mathcal{N}_{r+\mu}^{r+\mu}(\Omega)$. De plus l et l' sont positivement homogènes de degré $(r-n)$, donc

$$|q(z, y)| = |z|^{r-n}|q(\tilde{z}, y)| \leqslant C|z|^{r-n+\mu}, \qquad \text{ou} \quad \tilde{z} = \frac{z}{|z|}.$$

Donc $|q(\tilde{z}, y)| \leqslant C|z|^\mu$; donc, grâce à la remarque ci-dessus et en faisant tendre z vers zéro, $q(\tilde{z}, y) = 0$, et $q \equiv 0$.

Deuxième cas : $r = n$. — Nous avons d'abord (avec $\tilde{z} = z/|z|$) :

$$\begin{aligned}|l(z, y)-l'(z, y)| &= |k_0(z, y)-k_0'(z, y) \\ &\quad +k_1(y)\log|k_2(z, y)|-k_1'(y)\log|k_2'(z, y)|| \\ &= |k_0(z, y)-k_0'(z, y)+k_1(y)\log|k_2(\tilde{z}, y)| \\ &\quad -k_1'(y)\log|k_2'(\tilde{z}, y)|+(k_1(y)-k_1'(y))\log|z||,\end{aligned}$$

(³) Notons que lorsque $r > n$, tout noyau de la forme

$$k_0(x-y, y)+\textstyle\sum_{|\alpha|=r-1} a_\alpha(y)(x-y)^\alpha\log|k_2(x-y, y)|,$$

où $k_0 \in H_{r-n}^\mu$, $k_2 \in H_1^1$ et $a_\alpha \in C^\mu(\Omega)$, est égal à la somme d'un noyau de type $\mathcal{G}_r^\mu$ et d'un polynôme appartenant à $\mathcal{R}_r^\mu$.

et cette expression est majorée par une constante puisque $l-l' \in \mathcal{N}_{n+\mu}$. k_2 et k'_2 sont continues en $\tilde{z}$, donc $k_1(y) = k'_1(y)$. Alors

$$k_0(z, y)-k'_0(z, y)+k_1(y)\log\frac{|k_2(z, y)|}{|k'_2(z, y)|} = a(y);$$

mais $\int_{\Sigma_n} a(y)\,\sigma_n(dz) = 0$, donc $a \equiv 0$ et le noyau l est unique.

Troisième cas : $r > n$. — En dérivant $(r-n)$-fois, et grâce à la condition donnée sur $D^\alpha l$ dans le 2° de la définition des noyaux, on retombe sur le cas précédent.

Remarque. — D'après les résultats de [4], on a $H^{\mu}_{r+\mu-n}(\Omega) \subset \mathcal{R}^{\mu}_{r}(\Omega)$. De plus, on montre aisément que $\mathcal{G}^{\mu}_{r}(\Omega) \subset \mathcal{R}^{\mu}_{r-1}(\Omega)$ (pour cela on utilise le fait que $k_2(z, y) \in H^1_1(\Omega)$ pour traiter les termes comportant un logarithme). Enfin, toute fonction $a \in C^{\mu}(\Omega)$ est de type $\mathcal{R}^{\mu}_{r}$ sur Ω pour tout r.

2.4. Nous pouvons alors énoncer le *théorème fondamental* qui établit, à l'aide d'une dérivation singulière sous le signe somme, le caractère r-fois régularisant du type $\mathcal{G}^{\mu}_{r}$.

THÉORÈME II. — *Soit $N(x, y)$ un noyau de $\mathcal{G}^{\mu}_{r}(\Omega)$ (r entier > 0, $0 < \mu < 1$), $l(x-y, y)$ sa partie principale. Alors l'opérateur intégral associé $\overline{N}$ applique continûment $C^{\mu}_{k}(\Omega)$ dans $C^{r+\mu}(\Omega)$. Plus précisément, si α est un indice de dérivation de longueur $|\alpha| = r-1$ et si $1 \leqslant i \leqslant n$, alors la fonction*

$$D_i D^\alpha l : \quad (z, y) \to \frac{\partial}{\partial z_i}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} l(z, y),$$

définie sur $(R_n \setminus \{0\}) \times \Omega$, est un noyau singulier de Giraud en classe C^{μ} sur Ω (4), et pour chaque fonction $f \in C^{\mu}_{k}(\Omega)$, la fonction $\overline{N}f$ appartient à $C^{r+\mu}(\Omega)$ avec, pour tout x dans Ω,

$$D_i D^\alpha(\overline{N}f)(x) = f(x)\int_{\Sigma_n} D^\alpha l(\theta, x)\,\theta_i\,\sigma_n(d\theta)+[\text{v. p. } D_i D^\alpha l]\,f(x)$$
$$+\int_{\Omega} D_i D^\alpha m(x, y) f(y)\,dy,$$

où $m(x, y) = N(x, y)-l(x-y, y)$ est le reste du noyau N.

(4) Ces noyaux constituent la classe $\mathcal{G}_\mu(\Omega)$ de [5]. Ils opèrent en v.p.

Pour établir ce théorème, nous utiliserons les deux lemmes suivants :

LEMME A. — *Soit $h(z)$ une fonction de $C^1(R^n\setminus\{0\})$ positivement homogène de degré $(1-n)$. Alors, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $D_i h(z)$ est une fonction positivement homogène de degré $-n$ et d'intégrale nulle sur la sphère unité :*

$$\int_{\Sigma_n} D_i h(\theta)\, \sigma_n(d\theta) = 0.$$

La démonstration de ce résultat est élémentaire. Le lecteur pourra par exemple se reporter au livre de S. AGMON [1] (lemme 11.1, p. 152).

LEMME B. — *Étant donnés un nombre réel $\varepsilon > 0$, et une fonction $g \in C_k(R^n)$, on pose $g_\varepsilon(x) = \int_{|y-x|\geqslant\varepsilon} g(y)\,dy$, pour tout $x \in R^n$. Alors $g_\varepsilon \in C^1(R^n)$, et*

$$D_i g_\varepsilon(x) = -\varepsilon^{n-1}\int_{\Sigma_n} g(x+\varepsilon\theta)\,\theta_i\,\sigma_n(d\theta).$$

Démonstration du lemme B. — Nous pouvons supposer que $g \in C_k^1(R_n)$ car on peut uniformément approcher $g \in C_k(R^n)$ par des fonctions de $C_k^1(R_n)$. De plus, $g_\varepsilon(x) = \int_{|z|\geqslant\varepsilon} g(x+z)\,dz$. Soient donc $g \in C_k^1(R^n)$, U un ouvert, et K un compact de R^n, tels que, pour tout x dans U, K contienne le support de la fonction $z \to g(x+z)$. Posons enfin $K_\varepsilon = \{z \in K;\ |z| \geqslant \varepsilon\}$. Alors K_ε est compact, et $g_\varepsilon(x) = \int_{K_\varepsilon} g(x+z)\,dz$. La fonction $(\partial/\partial x_i)\,g(x+z)$ est définie et continue sur $U \times K_\varepsilon$, donc g_ε est dérivable dans U, et

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_\varepsilon(x) = \int_{K_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} g(x+z)\,dz = \varepsilon^n \int_{|z|\geqslant 1} \mathrm{D}_i g(x+\varepsilon z)\,dz.$$

Une intégration par parties sur la variété à bord $R^n\setminus B_1(0)$ (où $B_1(0)$ est la boule de centre 0 et rayon 1) donne alors le résultat annoncé.

C. Q. F. D.

Démonstration du théorème II. — Grâce au théorème I (nº 1.5), nous pouvons supposer que le reste est nul. Par ailleurs, d'après la remarque du nº 2.3, $N \in \mathscr{R}^\mu_{r-1}(\Omega)$. Donc lorsque $|\alpha| \leqslant r-1$,

$$D^\alpha(\overline{N}f)(x) = \int_\Omega D^\alpha N(x, y) f(y)\,dy = \overline{D^\alpha N} f(x)$$

pour

$$x \in \Omega, \qquad f \in C_k^\mu(\Omega).$$

Il suffit donc de démontrer le théorème dans le cas $r = 1$, $|\alpha| = 0$. Alors $l(x-y, y) = k(x-y, y)$, où $k \in H^{\mu}_{1-n}(\Omega)$.

Soient $k(z, y) \in H^{\mu}_{1-n}(\Omega)$ et le noyau $N(x, y) = \tilde{k}(x-y, y)$. D'après le lemme A, la fonction $D_i\, k(., y)$ est positivement homogène de degré $-n$ et d'intégrale nulle sur la sphère unité; elle définit donc un noyau de Giraud en classe C^{μ} sur Ω (classe $\mathscr{G}_{\mu}(\Omega)$ de [5]) qui opère en valeur principale sur $C^{\lambda}_{k}(\Omega)$ pour tout $\lambda > 0$. Établissons l'égalité

$$D_i(\overline{N} f)(x) = f(x) \int_{\Sigma_n} k(\theta, x)\, \theta_i\, \sigma_n(d\theta) + [\text{v. p. } D_i k] f(x)$$

pour

$$f \in C^{\mu}_{k}(\Omega).$$

Pour cela on introduit la fonction auxiliaire

$$\Phi_{\varepsilon}(x, t) = \int_{|x-y| \geqslant \varepsilon} k(t-y, y) f(y)\, dy \qquad \text{pour} \quad (x, t) \in A,$$

où $A = \{ (x, t);\, x \in \Omega,\, t \in \Omega,\, |x-t| < \varepsilon/2 \}$, et nous posons

$$\varphi_{\varepsilon}(x) = \Phi_{\varepsilon}(x, x).$$

Supposons avoir montré que Φ_{ε} est de classe C^1 sur l'ensemble A, et que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_{\varepsilon}(x, t) = -\varepsilon^{n-1} \int_{\Sigma_n} k(t-x-\varepsilon\theta, x+\varepsilon\theta) f(x+\varepsilon\theta)\, \theta_i\, \sigma_n(d\theta),$$

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \Phi_{\varepsilon}(x, t) = \int_{|x-y| \geqslant \varepsilon} D_i k(t-y, y) f(y)\, dy.$$

Alors $\varphi_{\varepsilon}(x)$ est de classe C^1, et

$$\begin{aligned} D_i \varphi_{\varepsilon}(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_{\varepsilon}\right)(x, x) + \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \Phi_{\varepsilon}\right)(x, x) \\ &= \int_{\Sigma_n} k(\theta, x-\varepsilon\theta) f(x-\varepsilon\theta)\, \theta_i\, \sigma_n(d\theta) \\ &\quad + \int_{|x-y| \geqslant \varepsilon} D_i k(x-y, y) f(y)\, dy. \end{aligned}$$

k étant continue sur $\Sigma_n \times \Omega$, lorsque ε tend vers zéro, $D_i\, \varphi_{\varepsilon}(x)$ tend uniformément vers la fonction

$$\psi(x) = \int_{\Sigma_n} k(\theta, x) f(x)\, \theta_i\, \sigma_n(d\theta) + [\text{v. p. } D_i k] f(x).$$

Pour terminer la démonstration, il suffit donc d'établir les résultats annoncés sur $\varphi_\varepsilon(x, t)$.

Pour x fixé dans Ω, $\Phi_\varepsilon(x, .) \in C^1(\{t; t \in \Omega, |x-t| < \varepsilon/2\})$ et, sur cet ensemble,

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\Phi_\varepsilon(x, t) = \int_{|x-y| \geqslant \varepsilon} D_i k(t-y, y) f(y)\, dy \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

En effet, si $K = (\operatorname{supp} f) \cap \{y; |x-y| \geqslant \varepsilon\}$, et si $B_\rho(x)$ désigne la boule de centre x et de rayon ρ, alors la fonction $(t, y) \to D_i k(t-y, y) f(y)$ est continue dans $B_{\varepsilon/2}(x) \times K$ puisque la fonction $(\zeta, y) \to D_i k(\zeta, y)$ appartient à $C^\mu(R^n \setminus \{0\} \times \Omega)$. On peut donc dériver, sous le signe somme, l'expression de $\Phi_\varepsilon(x, .)$.

Pour t fixé dans Ω, $\Phi_\varepsilon(., t) \in C^1\{x; x \in \Omega, |x-t| < \varepsilon/2\}$ et, sur cet ensemble,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi_\varepsilon(x, t) = -\varepsilon^{n-1}\int_{\Sigma_n} k(t-x-\varepsilon\theta, x+\varepsilon\theta) f(x+\varepsilon\theta)\,\theta_i\,\sigma_n(d\theta)$$
$$(1 \leqslant i \leqslant n).$$

Si $\gamma_\varepsilon \in C_k^\infty(R^n)$ est une fonction nulle au voisinage de zéro et égale à 1 hors de $B_{\varepsilon/2}(0)$, alors $\Phi_\varepsilon(x, t)$ peut s'écrire :

$$\Phi_\varepsilon(x, t) = \int_{|x-y| \geqslant \varepsilon} k(t-y, y)\,\gamma_\varepsilon(t-y) f(y)\, dy,$$

et le lemme B donne le résultat cherché.

Enfin, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, les fonctions $(x, t) \to (\partial/\partial t_i)\,\Phi_\varepsilon(x, t)$ et $(x, t) \to (\partial/\partial t_i)\,\Phi_\varepsilon(x, t)$ sont continues sur l'ensemble A, donc $\Phi_\varepsilon(x, t)$ est de classe C^1 sur cet ensemble, ce qui achève la démonstration de l'égalité du théorème.

Il nous reste à établir que l'opérateur $\overline{N}$ envoie $C_k^\mu(\Omega)$ dans $C^{r+\mu}(\Omega)$. Il est évident qu'il l'envoie dans $C^{r+\mu-1}$ puisque le noyau N est de type $\mathscr{R}_{r-1}^\mu$. De plus, [v. p. $D_i D^\alpha k$] envoie $C_k^\mu(\Omega)$ dans $C^\mu(\Omega)$ puisque c'est un opérateur intégral singulier de Giraud (*cf.* [6]), et enfin $\int_{\Sigma_n} D^\alpha k(\theta, x)\,\theta_i\,\sigma_n(d\theta)$ est de classe C^μ sur Ω. $\overline{N}$ envoie donc bien $C_k^\mu(\Omega)$ dans $C^{r+\mu}(\Omega)$ d'après l'égalité du théorème déjà établie. La continuité de l'application est tout aussi évidente.

C. Q. F. D.

3. Opérateurs intégraux r-fois régularisants sur la variété compacte $\mathscr{M}$

3.1. Avant de définir les opérateurs sur une variété, il faut établir l'*invariance par difféomorphisme* des classes $\mathscr{R}_r^\mu$ et $\mathscr{G}_r^\mu$.

THÉORÈME III. — *Soient Ω et $\tilde{\Omega}$ deux ouverts de R^n, et φ un C^∞-difféomorphisme de Ω sur $\tilde{\Omega}$. Alors si $\tilde{N} \in \mathscr{G}_r^\mu(\tilde{\Omega})$* (resp. $\mathscr{R}_r^\mu(\tilde{\Omega})$) *le noyau* (*sur* Ω) *$N(x, y) = \tilde{N}(\varphi(x), \varphi(y))$ appartient à $\mathscr{G}_r^\mu(\Omega)$* (resp. $\mathscr{R}_r^\mu(\Omega)$) *et, lorsque $\tilde{N} \in \mathscr{G}_r^\mu(\tilde{\Omega})$, la partie principale l du noyau N s'exprime au moyen de celle du noyau $\tilde{N}$, $\tilde{l}$, par la relation*

$$l(z, y) = \tilde{l}(d_y\varphi(z), \varphi(y)) + p(z, y) \qquad (z \in R^n \setminus \{0\},\ y \in \Omega),$$

où $p(z, y)$ est un polynôme en z dans $\mathscr{R}_r^\mu$ et l est tel que

$$\int_{\Sigma_n} D^\alpha l(z, y)\,\sigma_n(dz) = 0 \qquad \text{pour} \quad |\alpha| = r - n.$$

Note. — $d_y\varphi$ désigne la différentielle au point y de la fonction φ. C'est une application linéaire de R^n dans R^n, et $d_y\varphi(z) \in R^n$ est la valeur prise par cette application au point $z \in R^n$. On doit rajouter le polynôme $p(z, y)$ pour que soit vérifiée la condition explicitée au 2° dans la définition 2.2 qui a pour but de rendre unique la partie principale (*cf.* aussi la note ([3]) qui suit la proposition 2.3).

3.2. *Montrons d'abord l'invariance du type $\mathscr{R}_r^\mu$.* Soient Ω et $\tilde{\Omega}$, φ, N et $\tilde{N}$ définis dans le théorème. Montrons que $N \in \mathscr{R}_r^\mu(\Omega)$.

Soient $\tilde{x} = \varphi(x)$, $\tilde{y} = \varphi(y)$. Nous établirons successivement que

(i) $N(x, y)$ est de type $\mathscr{N}_{r+\mu}^{r+\mu}$;

(ii) Pour tout indice de dérivation α de longueur $|\alpha| \leqslant r$, $D^\alpha N \in \mathscr{R}_r^\mu(\Omega)$.

Démonstration de (i). — Il est clair que, pour tout indice α,

$$D^\alpha N(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \tilde{N}(\varphi(x), \varphi(y)) = \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} a_\beta(x)\, D^\beta \tilde{N}(\varphi(x), \varphi(y)),$$

où $a_\beta \in C^\mu(\Omega)$. Donc, pour chaque y de Ω, $N(., y)$ est r-fois continûment différentiable sur $\Omega \setminus \{y\}$. Par ailleurs, puisque $\tilde{N}$ est de type $-(r+\mu)$, pour tout compact $\tilde{K} \subset \tilde{\Omega}$ et tous $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ distincts dans $\tilde{K}$,

$$|\tilde{N}(\tilde{x}, \tilde{y})| \leqslant C_{\tilde{K}} |\tilde{x}-\tilde{y}|^{-n+r+\mu} \qquad \text{pour} \quad r+\mu < n$$

$$\tilde{N}(\tilde{x}, \tilde{y}) \text{ est continue sur } \tilde{K} \times \tilde{K} \qquad \text{pour} \quad r+\mu > n.$$

φ étant un C^∞-difféomorphisme de Ω sur $\tilde{\Omega}$, pour tout compact $\tilde{K} = \varphi(K) \subset \tilde{\Omega}$, il existe deux constantes a_K et $b_K > 0$ telles que pour x et y dans K :

$$(1) \qquad a_K |x-y| \leqslant |\tilde{x}-\tilde{y}| \leqslant b_K |x-y|.$$

On en déduit immédiatement que N est de type $-(r+\mu)$ puisque $N \in \mathscr{N}_{r+\mu}^{r+\mu}(\Omega)$.

Démonstration de (ii). — On sait que $D^\alpha N = \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} a_\beta D^\beta \tilde{N}$ et que $D^\beta \tilde{N}$ est de type $\mathscr{R}^\mu$. Donc, par application des inégalités (1), on obtient que $D^\alpha N$ est de type $\mathscr{R}^\mu$. Ceci achève la démonstration de l'invariance de $\mathscr{R}_r^\mu$.

3.3. *Pour établir l'invariance du type* $\mathscr{G}_r^\mu$, nous considérons un noyau sur $\tilde{\Omega}$ dont le reste est nul (ce qui n'est pas une restriction puisqu'on a montré l'invariance du type $\mathscr{R}_r^\mu$). Le noyau $\tilde{N}$ s'écrit alors

$$\tilde{N}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{l}(\tilde{x}-\tilde{y}, \tilde{y}) = \tilde{k}_0(\tilde{x}-\tilde{y}, \tilde{y}) + \tilde{k}_1(\tilde{x}-\tilde{y}, \tilde{y}) \log |\tilde{k}_2(\tilde{x}-\tilde{y}, \tilde{y})|.$$

Posons

$$l(z, y) = k_0(z, y) + k_1(z, y) \log |k_2(z, y)| + p(z, y),$$

avec $k_i(z, y) = \tilde{k}_i(d_y \varphi(z), \varphi(y))$ pour $i = 0, 1, 2$, et $p(z, y)$ est un polynôme en z à coefficients dans $C^\mu(\Omega)$ tel que, pour tout α de longueur $|\alpha| = r-n$,

$$\int_{\Sigma_n} D^\alpha l(z, y) \sigma_n(dz) = 0.$$

On a alors

$$N(x, y) = l(x-y, y) + N'(x, y),$$

avec $N'(x, y) = \tilde{l}(\varphi(x)-\varphi(y), \varphi(y)) - \tilde{l}(d_y \varphi(x-y), \varphi(y)) - p(x-y, y)$.

Nous allons montrer successivement (en conservant les mêmes notations dans tout le paragraphe) :

(i) $l(z, y)$ est un noyau de Giraud r-fois régularisant en classe C^μ sur Ω;

(ii) $N'(x, y) \in \mathscr{N}_{r+1}^{r+\mu}(\Omega)$;

(iii) $N'(x, y) \in \mathscr{R}_r^\mu(\Omega)$.

Ces trois résultats joints à l'invariance du type $\mathscr{R}_r^\mu$ établiront celle du type $\mathscr{G}_r^\mu$.

3.4. LEMME. — *Si $\tilde{l}(\tilde{x}-\tilde{y}, \tilde{y})$ est un noyau de Giraud r-fois régularisant en classe C^μ sur $\tilde{\Omega} = \varphi(\Omega)$, il existe un polynôme $\sum_{|\alpha|=r-n} a_\alpha(y) z^\alpha$ avec $a_\alpha \in C^\mu(\Omega)$ tel que le noyau*

$$l(x-y, y) = \tilde{l}(d_y \varphi(x-y), \varphi(y)) + \sum_{|\alpha|=r-n} a_\alpha(y)(x-y)^\alpha$$

soit un noyau de Giraud r-fois régularisant en classe C^μ sur Ω.

D'après les hypothèses sur $\tilde{l}$, il est clair que, pour tout y dans Ω,

$$k_i(., y) \in C^\infty(R^n \setminus \{0\}) \qquad (i = 0, 1, 2),$$

et que k_0, k_1 et k_2 vérifient les conditions d'homogénéité de la proposition 2.2. D'autre part, on voit par récurrence que, pour tout multi-indice de dérivation α,

$$D^\alpha k_i(z, y) = \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|} A_\beta^i(y)\, D^\beta \tilde{k}_i(d_y \varphi(z), \varphi(y)) \qquad (i = 0, 1, 2),$$

où les A_β^i sont des fonctions dans $C^\infty(\Omega)$. On en déduit que l vérifie les conditions de régularité de la définition 2.2. Finalement, grâce à la présence du terme correctif polynômial, $l(x-y, y)$ est un noyau de Giraud r-fois régularisant en classe C^μ.

C. Q. F. D.

3.5. LEMME. — *Si $\tilde{l}(\tilde{x}-\tilde{y}, \tilde{y})$ est un noyau de Giraud r-fois régularisant en classe C^μ, alors le noyau $N'(x, y)$, défini par*

$$N'(x, y) = \tilde{l}(\varphi(x)-\varphi(y), \varphi(y)) - \tilde{l}(d_y \varphi(x-y), \varphi(y)) - p(x-y, y),$$

où $p(z, y)$ est un polynôme homogène en z à coefficients de classe C^μ, est de type $\mathscr{N}_{r+1}^{r+\mu}$.

Puisque $p(x-y, y)$ est de type $\mathscr{R}_r^\mu$ pour tout r, nous supposerons dans la démonstration que $p \equiv 0$ et ceci n'est pas une restriction. L'idée de la démonstration est la suivante :

On pose $\xi = d_y \varphi(x-y)$ et $\xi' = \varphi(x) - \varphi(y)$, et on évalue la différence

$$\tilde{n}(\xi, \xi', y) = \tilde{l}(\xi', \varphi(y)) - \tilde{l}(\xi, \varphi(y))$$

à l'aide de la formule de Taylor :

$$\tilde{n}(\xi, \xi', y) = \sum_{i=1}^{n} (\xi'_i - \xi_i) \int_0^1 D_i \tilde{l}(\xi + t(\xi' - \xi), \varphi(y))\, dt \qquad (|\xi' - \xi| < |\xi|).$$

Grâce à la condition $|\xi' - \xi| < |\xi|$, on sait que, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, $|\xi + t(\xi' - \xi)| > 0$, et l'intégrale est convergente. Pour tout compact $K \subset \Omega$, on définit une fonction

$$\delta(x-y, y) = (\delta_1(x-y, y), \ldots, \delta_n(x-y, y))$$

telle que, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\delta_i(z, y) \in C^\infty(R_n \times \Omega)$ et que, pour x et y dans K, $\delta(x-y, y) = \xi' - \xi$. On cherche alors de bonnes majorations de $|\delta(x-y, y)|$ et de ses dérivées. Par ailleurs, dans l'évaluation de $\tilde{n}(\xi, \xi', y)$, les coefficients des $(\xi'_i - \xi_i)$ sont des intégrales qui représentent des noyaux $Q_i(x, y)$ et, grâce aux propriétés de $\tilde{k}_0$, $\tilde{k}_1$ et $\tilde{k}_2$, ces noyaux sont de types $\mathcal{N}_{r+1}^{r-1+\mu}$. Alors, des propriétés des Q_i et de δ, on déduit que N' est de type $\mathcal{N}_{r+1}^{r+\mu}$.

Donnons maintenant une démonstration précise. Soient K un compact contenu dans Ω, et $d = d(K, \complement\, \Omega)$. Dans Ω, on définit l'ouvert

$$V = \left\{ y;\ y \in \Omega,\ d(y, K) < \frac{d}{4} \right\}$$

et enfin on désigne par B la boule ouverte de R^n de centre 0 et de rayon $d/4$.

3.5.1. LEMME. — *La fonction*

$$\delta(z, y) = 2 \sum_{|\beta|=2} \frac{1}{\beta!} z^\beta \int_0^1 D^\beta \varphi(y + tz)(1-t)\, dt$$

est définie et de classe C^∞ sur un voisinage de $\overline{B} \times \overline{V}$, prolongeable pour chaque y en une fonction de z de classe C^∞ dans R^n. De plus, il existe une constante $C > 0$, et un nombre ρ, $0 < \rho < d/4$, tels que, pour tout $y \in V$ et $z \in B(0, \rho)$,

$$|\delta(z, y)| \leqslant C |z|^2 < \frac{1}{2} |d_y \varphi(z)|, \qquad |D_i \delta(z, y)| \leqslant C |z| \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

et, pour tout β de longueur $|\beta| \geqslant 2$, $|D^\beta \delta(z, y)| \leqslant C$. Enfin lorsque x et y sont « assez proches »,

$$\delta(x-y, y) = \xi' - \xi = \varphi(x) - \varphi(y) - d_y \varphi(x-y).$$

Une application de la formule de Taylor à la différence $\xi' - \xi$ donne

$$\xi' - \xi = \varphi(x) - \varphi(y) - d_y \varphi(x-y) = 2 \sum_{|\beta|=2} \frac{1}{\beta\,!} z^\beta \int_0^1 D^\beta \varphi(y+tz)(1-t)\,dt$$

si $x \in \Omega$, $y \in \Omega$ et $y+t\,(x-y) \in \Omega$ pour $t \in [0, 1]$. Cette dernière condition est vérifiée si x et y sont « assez proches », ce que nous supposons dans toute la suite de la démonstration du théorème III, le cas contraire n'offrant aucune difficulté. La fonction $\delta\,(z, y)$ étant définie, le reste du lemme en découle immédiatement.

C. Q. F. D.

3.5.2. Lemme. — *K étant un compact contenu dans Ω, pour tous x et y distincts dans K, $|x-y| < \rho$, et pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, le noyau $Q_i\,(x, y)$, défini par l'intégrale*

$$Q_i(x, y) = \int_0^1 D_i \tilde{l}\,[d_y \varphi(x-y) + t\,\delta(x-y, y), \varphi(y)]\,dt$$

est de type $\mathcal{N}_{r-1}^{r-1+\mu}$. De plus, si γ est un multi-indice de dérivation de longueur $|\gamma| = r+j$ ($j = 0, 1$),

$$\left| \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma} Q_i(x, y) \right| \leqslant C_K |x-y|^{-n-1-j}.$$

Supposons d'abord que $\tilde{l}\,(\tilde{x}-\tilde{y}, \tilde{y}) = \tilde{k}_0\,(\tilde{x}-\tilde{y}, \tilde{y})$ (sans terme logarithmique). Puisque

$$|\xi' - \xi| = |\delta(x-y, y)| < \frac{1}{2} |d_y \varphi(x-y)| = \frac{1}{2} |\xi|,$$

l'intégrale est bien définie. Pour tout multi-indice de dérivation γ,

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma} D_i \tilde{k}_0\,[d_y \varphi(x-y) + t\,\delta(x-y, y), \varphi(y)]$$
$$= \sum_{|\eta| \leqslant |\gamma|} C_\eta^\gamma(x, y, t)\, D^\eta D_i \tilde{k}_0\,[d_y \varphi(x-y) + t\,\delta(x-y, y), \varphi(y)],$$

où $C_\eta^\gamma\,(x, y, t) \in C^\infty\,(\{(x, y, t);\ x \in V,\ y \in V,\ t \in [0, 1],\ |x-y| < \rho\})$. Donc $Q_i\,(x, y)$ est indéfiniment différentiable en x lorsque $x \neq y$ et

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma} Q_i(x, y) \in C^\mu(\{(x, y) \in V \times V \setminus \Delta, |x-y| < \rho\})$$

et lorsque $|\gamma| \leqslant r-1$,

$$\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma} Q_i(x, y) \in \mathcal{N}^{\mu}_{r-1-|\gamma|}(\Omega).$$

De plus, si $|\gamma| = r+j$ ($j = 0, 1$),

$$\frac{\partial^{r+j}}{\partial x^\gamma} Q_i(x, y) = \sum_{|\eta| \leqslant |\gamma|} \int_0^1 C^\gamma_\eta(x, y, t)\, D^\eta D_i \tilde{k}_0(\xi + t(\xi'-\xi), \varphi(y))\, dt$$

à la condition que l'intégrale soit absolument convergente. Nous allons montrer que

$$|D^\eta D_i \tilde{k}_0(\xi + t(\xi'-\xi), \varphi(y))| \leqslant C\, |x-y|^{-n-1-j},$$

alors pour x et y fixés, $x \neq y$, le terme à intégrer est uniformément borné en t, et l'intégrale est absolument convergente. Pour montrer cette inégalité, on remarque que $\tilde{k}_0$ étant positivement homogène de degré $r-n$ en la première variable,

$$|D^\eta D_i \tilde{k}_0(\xi + t(\xi'-\xi), \varphi(y))| = |\xi|^{-n-1-j} \left| D^\eta D_i \tilde{k}_0\left(\frac{\xi + t(\xi'-\xi)}{|\xi|}, \varphi(y)\right)\right|$$

lorsque $|\eta| = r+j$ (le cas $|\eta| < r$ étant trivial). Alors, d'après les hypothèses de régularité sur $\tilde{k}_0$, et puisque $|\xi + t(\xi'-\xi)|/|\xi| > 1/2$ (car $|\xi'-\xi| < (1/2)|\xi|$),

$$\left| D^\eta D_i \tilde{k}_0\left(\frac{\xi + t(\xi'-\xi)}{|\xi|}, \varphi(y)\right)\right| \leqslant C,$$

où C est indépendant de t, x et y, d'où l'inégalité cherchée. Enfin l'expression de $(\partial^{r+j}/\partial x^\gamma)\, Q_i(x, y)$ à l'aide de l'intégrale montre que

$$\left|\frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^\gamma} Q_i(x, y)\right| \leqslant C\, |x-y|^{-n-1-j},$$

ce qui achève de démontrer le lemme.

C. Q. F. D.

3.5.3. *Pour terminer la démonstration du lemme* 3.5, il faut établir que $N'(x, y)$ est de type $\mathcal{N}^{r+\mu}_{r+1}$. Pour tout multi-indice α de longueur $|\alpha| \leqslant r$,

$$D^\alpha N'(x, y) = \sum_{i=1}^n \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \delta_i(x-y, y)\, D^{\alpha-\beta} Q_i(x, y).$$

Les lemmes 3.5.1 et 3.5.2 montrent alors immédiatement que $Q_i(x, y)$ est de type $\mathcal{N}^{r+1}_{r+1}$, donc aussi de type $\mathcal{N}^{r+\mu}_{r+1}$.

C. Q. F. D.

3.6. *Pour établir que N' est de type $\mathcal{R}^{\mu}_{r}$*, on remarque d'abord que, pour tout indice de dérivation α de longueur $|\alpha| \leqslant r$, le noyau $D^{\alpha} N'$ est de type $\mathcal{N}^{\mu+}_{\mu}$ puisque N' est de type $\mathcal{N}^{r+\mu}_{r+1}$. On montre aussi facilement qu'il en est de même pour $(D^{\alpha} N')^{\check{}}$.

3.6.1. Pour étudier les différences secondes des noyaux $D^{\alpha} N'$, nous devons d'abord établir un lemme technique sur les dérivations de fonctions composées.

LEMME. — *Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux ouverts de R^n, et ψ un C^{∞} difféomorphisme de $\mathcal{O}_1$ sur $\mathcal{O}_2$* $\left(\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \vdots \\ \psi^n \end{pmatrix}\right)$. *Soit N une fonction définie sur $\mathcal{O}_2$, de classe C^{∞}.*

Alors

$$D^{\alpha}_x N(\psi(x)) = \sum_{\beta} A_{\beta}(x)\, D^{\beta} N)(\psi(x)) + \ldots$$

avec les notations suivantes :

— *α est un multi-indice de dérivation* : $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $(\alpha_i \in N)$;

— *β est un multi-indice du type suivant* : $\beta = (\beta^1, \ldots, \beta^n)$, *où* β^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *est un multi-indice ordinaire* $\beta^i = (\beta^i_1, \ldots, \beta^i_n)$ $(\beta^i_j \in \mathbf{N})$ *et* $D^{\beta} = D^{\beta^1} \ldots D^{\beta^n}$;

— *la sommation est faite sur tous les β^i_j tels que* $|\beta^i| = \beta^i_1 + \ldots + \beta^i_n = \alpha_i$;

— *les pointillés remplacent des dérivations d'ordre strictement inférieur à* $|\beta| = \Sigma |\beta^i| = |\alpha|$;

— $A_{\beta} = \prod^{n}_{i, j=1} (\partial/\partial x_j)\, \psi^i)^{\beta^j_i}$ *avec la convention* $(\partial\psi_i/\partial x_j)^{\beta^j_i} = 1$ *si* $\beta^j_i = 0$.

Nous établissons ce lemme en faisant une récurrence sur la longueur $|\alpha|$ de α.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} N(\psi(x)) = \sum^{n}_{j=1} \frac{\partial \psi^j}{\partial x_i}(x)\, D_j \mathrm{N}(\psi(x)),$$

donc, pour $|\alpha| = 1$, on a bien

$$D^{\alpha}_x N(\psi(x)) = \sum_{\beta} A_{\beta}(x)\, D^{\beta} N(\psi(x))$$

(on remarquera que $\beta^j = 0$ pour $j \neq i$, et $A_\beta = \partial\psi^j/\partial x_i$ si

$$\beta = (0, \ldots, \beta^i, \ldots, 0) \qquad \text{et} \qquad \beta^i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0),$$

où 1 est à la j-ième place).

Si $D_x^\alpha N(\psi(x)) = \sum_\beta A_\beta(x) D^\beta N(\psi(x)) + \ldots$ pour $|\alpha| = p$, alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} D_x^\alpha N(\psi(x)) &= \textstyle\sum_\beta A_\beta(x) \dfrac{\partial}{\partial x_i} D^\beta N(\psi(x)) + \ldots\\ &= \textstyle\sum_\beta A_\beta(x) \sum_{j=1}^n \dfrac{\partial\psi^j}{\partial x_i} D^\beta D_j N(\psi(x)) + \ldots\\ &= \textstyle\sum_\gamma A_\gamma(x) D^\gamma N(\psi(x)) + \ldots\end{aligned}$$

où la sommation est faite sur les γ tels que $\gamma_l^k = \beta_l^k$ si $k \neq i$ et $\gamma_j^i = \beta_j^i + 1$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$. Il est évident que

$$A_\gamma(x) = \prod_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\psi^i(x)\right)^{\beta_i^j}.$$

3.6.2. *Pour montrer que $D^\alpha N'$ est de type $\mathscr{R}^\mu$*, nous supposerons, comme dans le n° 3.5, que le polynôme p dans l'expression de N' est nul. D'après le lemme 3.6.1,

$$\begin{aligned}&D_x^\alpha[\tilde{l}(\varphi(x)-\varphi(y), \varphi(y)) - \tilde{l}(d_y\varphi(x-y), \varphi(y))]\\ &\quad = \textstyle\sum_\beta \{A_\beta(x, y) D^\beta \tilde{l}(\varphi(x)-\varphi(y), \varphi(y))\\ &\qquad\qquad - A'_\beta(x, y) D^\beta \tilde{l}(d_y\varphi(x-y), \varphi(y))\} + \ldots\end{aligned}$$

où

$$A_\beta(x, y) = \prod_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi^i(x)\right)^{\beta_i^j} \qquad \text{(donc est indépendant de } y\text{)}$$

et

$$A'_\beta(x, y) = \prod_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(d_y\varphi)^i(x-y)\right)^{\beta_i^j}.$$

Mais $d_y\varphi$ est donné par la matrice suivante : $d_y\varphi = (\partial\varphi_i/\partial x_j(y))_{i,j}$ (i-ième ligne, j-ième colonne), et la i-ième coordonnée du vecteur $d_y\varphi(x-y)$ s'écrit

$$(d_y\varphi(x-y))_i = \textstyle\sum_k \dfrac{\partial\varphi^i}{\partial x_k}(y)(x_k - y_k),$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[d_y\varphi(x-y)] = \frac{\partial\varphi^i}{\partial x_j}(y).$$

Nous en déduisons que

$$A'_\beta(x, y) = \prod_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x_j}(y)\right)^{\beta_i^j}.$$

On a alors la relation

$$\begin{aligned} D_x^\alpha[\tilde{l}(\varphi(x)-\varphi(y), \varphi(y)) - \tilde{l}(d_y\varphi(x-y), \varphi(y)) \\ = \textstyle\sum_\beta A_\beta(x)[D^\beta\tilde{l}(\varphi(x)-\varphi(y), \varphi(y)) - D^\beta\tilde{l}(d_y\varphi(x-y), \varphi(y))] \\ + \textstyle\sum_\beta(A_\beta(x)-A_\beta(y))\, D^\beta\tilde{l}(d_y\varphi(x-y), \varphi(y)) + \ldots \end{aligned}$$

Supposons alors que $|\alpha| = r$ (le cas $|\alpha| < r$ étant évident). Posons

$$l(x-y, y) = \tilde{l}(d_y\varphi(x-y), \varphi(y)).$$

D'après le lemme A du n° 2.4, $D^\beta l(z, y)$ est d'intégrale nulle sur la sphère unité et appartient à $H^\mu_{-n}(\Omega)$. Nous allons montrer que $(A_\beta(x)-A_\beta(y))\, D^\beta l(x-y, y)$ vérifie la condition sur les différences secondes de la définition du type $\mathscr{R}^\mu$. Soit donc un compact K contenu dans Ω. Pour x, x', y et y' distincts dans K, on a la relation suivante :

$$\begin{aligned} &(A_\beta(x)-A_\beta(y))\, D^\beta l(x-y, y) - (A_\beta(x')-A_\beta(y))\, D^\beta l(x'-y, y) \\ &\quad -(A_\beta(x)-A_\beta(y'))\, D^\beta l(x-y', y') + (A_\beta(x')-A_\beta(y'))\, D^\beta l(x'-y', y') \\ &= (A_\beta(x)-A_\beta(y))(D^\beta l(x-y, y) - D^\beta l(x'-y, y) \\ &\qquad\qquad - D^\beta l(x-y', y') + D^\beta l(x'-y', y')) \\ &\quad +(A_\beta(x)-A_\beta(x'))(D^\beta l(x'-y, y) - D^\beta l(x'-y', y')) \\ &\quad +(A_\beta(y')-A_\beta(y))(D^\beta l(x-y', y') - D^\beta l(x'-y', y')) \\ &= D_1 + D_2 + D_3. \end{aligned}$$

En posant $d = \inf(|x-y|, |x'-y|, |x-y'|, |x'-y'|)$, on a

$$\begin{aligned} D_1 = (A_\beta(x)-A_\beta(y))\int_0^1 \frac{d}{dt}[D^\beta l(x'+t(x-x')-y, y) \\ - D^\beta l(x'+t(x-x')-y', y')]\, dt. \end{aligned}$$

On en déduit l'existence d'une constante C_K telle que

$$|D_1| \leqslant C_K|x-y|.|x-x'|.|y-y'|^\mu d^{-n-1-\mu} \leqslant C_K|x-x'|^\mu|y-y'|^\mu d^{-n-\mu}$$

et D_2 et D_3 vérifient la même inégalité, de même que les différences secondes du noyau

$$\sum_\beta A_\beta(x)(D^\beta \tilde{l}(\varphi(x)-\varphi(y), \varphi(y)) - D^\beta \tilde{l}(d_y \varphi(x-y), \varphi(y)))$$

(en effet, $D^\beta \tilde{l}(., \varphi(y)) \in H^\mu_{-n}(\Omega)$ est d'intégrale nulle sur la sphère unité, le résultat est alors établi en [6]).

On a ainsi établi que, pour tout α de longueur $|\alpha| \leqslant r$, le noyau $D^\alpha N'$ est de type $\mathscr{R}^\mu$. Cela, joint au lemme 3.4 relatif à la partie principale, établit l'invariance par difféomorphisme du type $\mathscr{G}^\mu_r$.

C. Q. F. D.

3.7. On peut maintenant *construire par localisation*, à l'aide d'une partition de l'unité, *des noyaux du type* $\mathscr{G}^\mu_r$ (resp. $\mathscr{R}^\mu_r$) *sur la variété compacte sans bord* $\mathscr{M}$.

DÉFINITION. — Un noyau $N(x, y)$ sur $\mathscr{M}$ est dit *de type* $\mathscr{G}^\mu_r$ (resp. $\mathscr{R}^\mu_r$) si, pour toute carte locale (U, χ) de $\mathscr{M}$, le noyau N_χ, induit par N sur l'ouvert $\chi(U)$ de R^n, est de type $\mathscr{G}^\mu_r$ (resp. $\mathscr{R}^\mu_r$) sur $\chi(U)$ (lorsque $r = 0$, $\mathscr{G}^\mu_0 = \mathscr{G}_\mu$ et $\mathscr{R}^\mu_0 = \mathscr{R}_\mu$ dans les notations de [4], [5], [6]).

Les résultats précédents permettent d'affirmer l'existence de noyaux sur $\mathscr{M}$ conformes à cette définition. Après quelques remarques, nous les construirons de manière explicite. On désigne par $\mathscr{G}^\mu_r(\mathscr{M})$ (resp. $\mathscr{R}^\mu_r(\mathscr{M})$) la classe des noyaux sur $\mathscr{M}$ de type $\mathscr{G}^\mu_r$ (resp. $\mathscr{R}^\mu_r$). On remarquera que $\mathscr{R}^\mu_r(\mathscr{M}) \subset \mathscr{G}^\mu_r(\mathscr{M})$. Lorsque $N \in \mathscr{G}^\mu_r(\mathscr{M})$, pour chaque y la fonction $N(., y)$ est de classe C^r sur $\mathscr{M} \setminus \{y\}$. P étant un opérateur différentiel linéaire défini sur $\mathscr{M}$, d'ordre $p \leqslant r$, à coefficients complexes de classe C^μ (on dira alors que P est de classe C^μ), on note PN le noyau $PN(x, y) = P_x N(., y)$ $(x \in \mathscr{M},\ y \in \mathscr{M},\ x \neq y)$. On désigne par $\overline{\mathscr{G}^\mu_r}(\mathscr{M})$ (resp. $\overline{\mathscr{R}^\mu_r}(\mathscr{M})$) l'espace des applications linéaires de $C^\mu(\mathscr{M})$ dans $C^{r+\mu}(\mathscr{M})$ définies par un opérateur intégral $\overline{N}$ associé à un noyau N de type $\mathscr{G}^\mu_r$ (resp. $\mathscr{R}^\mu_r$). De telles applications sont continues. Elles sont aussi dites de type $\overline{\mathscr{G}^\mu_r}$ (resp. $\overline{\mathscr{R}^\mu_r}$). On remarquera enfin que les espaces $\mathscr{G}^\mu_r(\mathscr{M})$, $\overline{\mathscr{G}^\mu_r}(\mathscr{M})$, $\mathscr{R}^\mu_r(\mathscr{M})$ et $\overline{\mathscr{R}^\mu_r}(\mathscr{M})$ ne dépendent pas de la mesure régulière dont $\mathscr{M}$ est munie.

Avant d'énoncer le théorème fondamental sur les opérateurs de type $\overline{\mathscr{G}^\mu_r}$, rappelons les résultats de [6] relatifs à l'expression des noyaux sur la variété $\mathscr{M}$ à l'aide des noyaux induits sur les ouverts de R^n. Soit (U_i, χ_i) un recouvrement de $\mathscr{M}$ par des cartes locales tel qu'il existe un autre recouvrement (U_{ij}, χ_{ij}), vérifiant pour tout i et tout j $U_i \cup U_j \subset U_{ij}$ si

$U_i \cap U_j \neq \varnothing$ (ce choix de (U_i, χ_i) est toujours possible). Soit $(\varphi_i)_i$ une partition C^∞ de l'unité associée au recouvrement $(U_i)_i$, et enfin rappelons qu'on a désigné par g la métrique riemannienne sur $\mathcal{M}$ à laquelle est associée la mesure τ_g. Pour chaque carte locale (U_l, χ_l), on définit la fonction de classe C^∞

$$g^{\chi_l}(y) = \det(g_{ij}^{\chi_l}(y)),$$

où $(g_{ij}^{\chi_l})_{ij}$ est l'expression de la métrique g dans la carte (U_l, χ_l). On considère dans chaque ouvert U_{ij}, un noyau $N_{ij}(\tilde{x}, \tilde{y})$ $(\tilde{x} = \chi_{ij}(x), \tilde{y} = \chi_{ij}(y))$, et on définit sur $\mathcal{M}$ le noyau $N(x, y)$:

$$N(x, y) = \textstyle\sum_{i,j} \varphi_i(x) N_{ij}(\chi_{ij}(x), \chi_{ij}(y))\, \varphi_j(y). \tag{R}$$

Réciproquement, le noyau $N(x, y)$ sur $\mathcal{M}$ est associé dans chaque carte locale (U_{ij}, χ_{ij}) à un noyau

$$N_{ij}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{\sqrt{g^{\chi_{ij}}(\chi_{ij}^{-1}(\tilde{y}))}} N(\chi_{ij}^{-1}(\tilde{x}), \chi_{ij}^{-1}(\tilde{y})),$$

et en recollant ces noyaux à l'aide de la formule (R), on retrouve le noyau $N(x, y)$ sur $\mathcal{M}$.

3.8. Sur la variété $\mathcal{M}$ le résultat cherché peut s'énoncer de la façon suivante :

THÉORÈME IV. — *Soient N un noyau de type $\mathcal{G}_r^\mu$ sur la variété $\mathcal{M}$ (r entier > 0), et $\overline{N}$ l'opérateur intégral associé. Alors*

(1) *$\overline{N}$ applique continûment $C^\mu(\mathcal{M})$ dans $C^{r+\mu}(\mathcal{M})$.*

(2) *Une condition nécessaire et suffisante pour que $N \in \mathcal{R}_r^\mu(\mathcal{M})$ est que $\overline{N}$ soit compact de $C^\mu(\mathcal{M})$ dans $C^{r+\mu}(\mathcal{M})$, et dans ce cas, l'opérateur $\overline{N}$ applique continûment $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{M}, \tau_g)$ dans $C^{r+\lambda}(\mathcal{M})$ pour tout $\lambda < \mu$, et $C^\lambda(\mathcal{M})$ dans $C^{r+\mu}(\mathcal{M})$ pour tout $\lambda > 0$.*

(3) *Si P est un opérateur différentiel sur $\mathcal{M}$ d'ordre $p < r$ et de classe C^μ, alors le noyau $PN(x, y)$ est de type $\mathcal{G}_{r-p}^\mu$ sur $\mathcal{M}$ et on a $P(\overline{N}f) = \overline{PN}f$ pour toute fonction $f \in C^\mu(\mathcal{M})$.*

(4) *Si P est un opérateur différentiel sur $\mathcal{M}$ d'ordre r et de classe C^μ, alors PN est un noyau singulier de Giraud de type $\mathcal{G}_\mu$ (5) sur $\mathcal{M}$, et l'opérateur composé $S = P\overline{N}$ est un opérateur singulier de Giraud de type $\mathcal{G}_\mu$ (5) sur $\mathcal{M}$ dont PN est le noyau.*

(5) Conformément à la terminologie de [6].

Ce théorème se montre par localisation : dans une carte locale, les résultats (1), (2) et (4) ont déjà été établis ainsi que la seconde partie de (2). Pour prouver la compacité de l'opérateur $\overline{N}$ de type $\overline{\mathcal{R}_r^\mu}$ (r entier $\geqslant 0$), considérons un borné B de $C^\mu(\mathcal{M})$; son image $i(B)$ par l'injection canonique de $C^\mu(\mathcal{M})$ dans $C^\lambda(\mathcal{M})$ ($\lambda < \mu$) est compacte, et donc $\overline{N} \circ i(B) = N(B)$ est un compact de $C^{r+\mu}(\mathcal{M})$, ce qui établit que $\overline{N}$ est un opérateur compact de $C^\mu(\mathcal{M})$ dans $C^{r+\mu}(\mathcal{M})$.

3.9. Pour terminer la démonstration du théorème, il reste à établir le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Tout opérateur de* $\overline{\mathcal{G}_r^\mu}(\mathcal{M})$ *compact de* $C^\mu(\mathcal{M})$ *dans* $C^{r+\mu}(\mathcal{M})$ *appartient à* $\overline{\mathcal{R}_r^\mu}(\mathcal{M})$.

On va établir ce résultat dans une carte locale. Soit $\overline{N} \in \overline{\mathcal{G}_r^\mu}(\mathcal{M})$ un opérateur compact de $C^\mu(\mathcal{M})$ dans $C^{r+\mu}(\mathcal{M})$. On considère un recouvrement $(U_i, \chi_i)_i$ de $\mathcal{M}$ par des cartes locales, $(\psi_i)_i$ une partition de l'unité associée, $\Omega_i = \chi_i(U_i)$. Alors l'opérateur $\overline{A}_i$, de noyau

$$A_i(x, y) = \psi_i(\chi_i^{-1}(x))\, N(\chi_i^{-1}(x), \chi_i^{-1}(y))\, \psi_i(\chi_i^{-1}(y)),$$

est compact de $C_{K_i}^\mu(\Omega_i)$ dans $C^{r+\mu}(\Omega_i)$, où $K_i \subset \Omega_i$ est le support de $\varphi_i \circ \chi_i^{-1}$. Enfin l'application $f \to D^\alpha \overline{A}_i f$ est compacte de $C_{K_i}^\mu(\Omega_i)$ dans $C^\mu(\Omega_i)$ pour tout α d'ordre $|\alpha| \leqslant r$. D'après le théorème II du n° 2.4, elle est définie par la relation

$$D^\alpha \overline{A}_i f(x) = \varphi(x)\, a(x) f(x) + \varphi(x) [\text{v. p. } D^\alpha k] f(x) + \overline{R} f(x),$$

où $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$, $a \in C^\mu(\Omega)$, $D^\alpha k \in \mathcal{G}_\mu(\Omega)$ et $\overline{R} \in \overline{\mathcal{R}^\mu}(\Omega)$. Il nous suffit donc de démontrer le résultat suivant.

LEMME. — *Soient* Ω *un ouvert de* R^n, K *un compact contenu dans* Ω, $\varphi \in C_K^\infty(\Omega)$, $a \in C^\mu(\Omega)$, $m \in \mathcal{R}^\mu(\Omega)$, k *un noyau de Giraud de classe* C^μ *sur* Ω. *Alors, si l'opérateur* $\overline{N}$, *défini par*

$$\overline{N} : \ f \to af + [\text{v. p. } k] f + \overline{m} f,$$

est compact de $C_K^\mu(\Omega)$ *dans* $C^\mu(\Omega)$, $\varphi\, a \equiv 0$ *et* $\varphi\, k \in \mathcal{R}^\mu(\Omega)$.

Ce lemme est établi presque sous cette forme dans [14], dans le cadre de la théorie L^2. Nous en donnons ici une démonstration succincte. Pour cela, on remplace les noyaux de Giraud $k(x-y, y)$ par des noyaux de Calderón-Zygmund $k(x-y, x)$, ce qui n'est pas une restriction puisque la différence de deux tels noyaux est de type $\mathcal{R}^\mu$. Étant donné un noyau de Calderón-Zygmund $k(z, x)$, on considère son « transformé de Fourier »

$$\hat{k}(\xi, x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0, \eta \uparrow \infty} \int k(z, x) e^{i\xi z} dz,$$

et à l'opérateur $\overline{N}$ du type considéré dans le lemme on fait correspondre la fonction « symbole » $\sigma(N)(\xi, x) = a(x) + \hat{k}(\xi, x)$. Il est facile de voir que si $a \in C^\mu$ et $\hat{k}(\xi, x)$ est homogène de degré zéro en ξ et vérifie des conditions adéquates de régularité, alors $a(x) + \hat{k}(\xi, x)$ est le symbole d'un opérateur intégral singulier de Giraud. On considère alors la classe $\mathcal{C}$ des « symboles » et la sous-classe $\mathcal{C}_0$ des symboles d'opérateurs compacts de C_K^μ dans C^μ. D'après les résultats de [6] sur la composition des opérateurs singuliers de Giraud, il est facile de voir que $\mathcal{C}$ est un anneau et $\mathcal{C}_0$ un idéal de $\mathcal{C}$. En effet si $\sigma(N_1)$ et $\sigma(N_2)$ sont des « symboles », $\sigma(N_1) . \sigma(N_2)$ est le « symbole » d'un opérateur $\overline{N} = \overline{N}_1 \circ \overline{N}_2 + \overline{R}$, où $\overline{R} \in \overline{\mathcal{R}^\mu}(\Omega)$. On en déduit que si $\sigma(N) \in \mathcal{C}_0$, il en est de même de $|\sigma(N)|^2$. Soit alors x_0 dans l'intérieur de K et $\xi_0 \in \Sigma_n$ tels que $\sigma(N)(\xi_0, x_0) \neq 0$. Pour toute rotation ρ de centre x_0, on considère

$$\sigma_\rho(N)(\xi, x) = \sigma(N)(\rho(\xi + x_0) - x_0, \rho(x))$$

qui est le symbole d'un opérateur $\overline{N}_\rho$ compact de $C_K^\mu(\Omega)$ dans $C^\mu(\Omega)$, puisque $\overline{N}$ est compact. $\sigma(N)(\xi, x)$ étant différent de zéro pour tout x dans une boule B_{x_0} de centre x_0 et tout ξ dans un petit voisinage $V(\xi_0)$ de ξ_0 dans Σ_n, il existe une famille finie $(\rho_1, \ldots, \rho_p)$ de rotations autour de x_0 telle que, pour tout $x \in B_{x_0}$ et tout ξ dans Σ_n, il existe i, $1 \leqslant i \leqslant p$, tel que $\sigma_{\rho_i}(N)(\xi, x) \neq 0$. Alors la fonction

$$F(\xi, x) = \sum_{i=1}^{p} | \sigma_{\rho i}(N(\xi, x)|^2,$$

qui appartient à la classe $\mathcal{C}_0$, est strictement positive dans $B_{x_0} \times \Sigma_n$. Soit $\alpha \in C^\infty(R^n)$ telle que $\operatorname{supp} \alpha \subset B_{x_0}$ et $\alpha \equiv 1$ dans $(1/2) B_{x_0}$. La fonction αF^{-1} est dans la classe $\mathcal{C}$, et donc $\alpha = \alpha F^{-1} F \in \mathcal{C}_0$. Ainsi l'application $f \to \alpha f$ est compacte de C_K^μ dans C^μ, ce qui est faux. Donc, pour tout x_0 dans l'intérieur de K et tout ξ_0 dans Σ_n, $a(x_0) + \hat{k}(\xi_0, x_0) = 0$. On en déduit immédiatement que $\varphi a \equiv 0$ et $\varphi k(x-y, x) \equiv 0$. Donc le noyau $\varphi(x) k(x-y, y)$ est de type $\mathcal{R}^\mu$.

C. Q. F. D.

4. Construction d'une paramétrix d'un opérateur différentiel elliptique à coefficients C^μ sur la variété $\mathcal{M}$

Soit $L(x, D)$ un opérateur différentiel elliptique d'ordre $2m$, à coefficients C^μ, défini sur un ouvert borné Ω de R^n. On appelle $P(x, D)$ sa partie principale. On se propose de trouver explicitement une paramétrix de l'opérateur L sur Ω, ce qui permettra alors de construire une paramétrix pour tout opérateur elliptique à coefficients C^μ défini sur une variété compacte $\mathcal{M}$.

4.1. Rappel des résultats concernant les solutions élémentaires des opérateurs elliptiques à coefficients constants. — Soit $P(z)$ ($z \in R^n$) un polynôme à coefficients complexes homogène de degré $2m$ et elliptique ($P(z) \neq 0$ si $z \neq 0$), et soit $P(D)$ l'opérateur différentiel associé. On appellera ici solution élémentaire de l'opérateur $P(D)$ toute fonction (complexe) E de $L^1_{\text{loc}}(R^n) \cap C^\infty(R^n \setminus \{0\})$ telle que $P(D)E = \delta$.

Par ailleurs, pour tout vecteur ω de Σ_n (6), V_ω désigne l'hyperplan $\{z \in R^n; \langle \omega, z \rangle = 0\}$, et τ_ω la mesure superficielle euclidienne sur V_ω, $\partial/\partial \nu_\omega = \Sigma\, \omega_i\, \partial/\partial z_i$. Cela étant, on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition. — *On définit une solution élémentaire E_P de l'opérateur $P(D)$ par les formules suivantes (où les intégrales sont absolument convergentes) :*

(1) *Si n est impair, $2m < n$,*

$$\langle E_P, \varphi \rangle = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{\Sigma_n} \frac{\sigma_n(d\omega)}{P(\omega)} \int_{V_\omega} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_\omega}\right)^{n-2m-1} \varphi(z)\, \tau_\omega(dz) \qquad (\varphi \in \mathcal{D}).$$

(2) *Si n est impair, $2m > n$,*

$$E_P(z) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{4(2\pi)^n (2m-n)!} \int_{\Sigma_n} \frac{|\langle \omega, z \rangle|^{2m-n}}{P(\omega)}\, \sigma_n(d\omega).$$

(3) *Si n est pair, $2m < n$,*

$$\langle E_P, \varphi \rangle = \frac{(-1)^{n/2}}{(2\pi)^n} \int_{\Sigma_n} \frac{\sigma_n(d\omega)}{P(\omega)} \text{v. p.} \int_{R^n} \frac{1}{\langle \omega, z \rangle} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_\omega}\right)^{n-2m-1} \varphi(z)\, dz$$
$$(\varphi \in \mathcal{D}).$$

---

(6) Rappelons que Σ_n désigne la sphère unité de R^n, et σ_n la mesure superficielle euclidienne dessus.

(4) *Si n est pair, $2m \geqslant n$,*

$$E_P(z) = \frac{(-1)^{(n/2)-1}}{(2\pi)^n(2m-n)!}\int_{\Sigma_n} \frac{(\langle \omega, z\rangle)^{2m-n}\log|\langle \omega, z\rangle|}{P(\omega)}\,\sigma_n(d\omega).$$

De plus la fonction $(x, y) \to E_P(x-y)$ est un noyau de Giraud 2 m-fois régularisant.

On note que dans les cas (1) et (3), E_P est définie en tant que distribution, mais n'en est pas moins une solution élémentaire au sens précisé ci-dessus (*voir* l'appendice où sont établis ces résultats).

4.2. Nous pouvons alors énoncer les résultats relatifs à un opérateur à coefficients variables.

THÉORÈME V. — *Soit $L(x, D)$ un opérateur elliptique d'ordre $2m$ à coefficients de classe C^μ sur Ω, et soit $P(x, D)$ sa partie principale. Alors si on pose*

$$E_P(x, y) = E_{P(y, D)}(x-y), \qquad x \in \Omega, \quad y \in \Omega, \quad x \neq y,$$

on définit un noyau E_P sur Ω de type $\mathscr{G}^\mu_{2m}$ qui constitue une paramétrix de l'opérateur différentiel L en ce sens qu'il existe un noyau K sur Ω de type $\mathscr{R}^\mu$ tel que

$$L(\overline{E}_P f) = f + \overline{K} f \qquad (f \in C^\mu_k(\Omega)).$$

On note que si $f \in C^\mu_k(\Omega)$, $\overline{E}_P f \in C^{2m+\mu}(\Omega)$ d'après le théorème II (n° 2.3). Pour simplifier l'écriture dans la démonstration, nous poserons $E_{P(y, D)}(z) = E_P(z, y)$.

Dans le cas où l'opérateur L est réduit à sa partie principale P, la démonstration du théorème se ramène à celle de la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Soit P un opérateur elliptique homogène d'ordre $2m$, à coefficients C^μ, défini sur un ouvert Ω borné de R^n. Alors :*

(1) *Le noyau $E_P(x-y, y)$ associé est un noyau de Giraud en classe C^μ 2 m-fois régularisant sur Ω,*

(2) *Il existe un noyau K de type $\mathscr{R}^\mu$ sur Ω tel que*

$$P(x, D)(\overline{E}_P f)(x) = f(x) + \overline{K} f(x) \qquad (x \in \Omega, f \in C^\mu_k(\Omega)).$$

Avant d'établir cette proposition, nous donnons la démonstration du théorème V. Si L est homogène d'ordre $2m$, le théorème est immédiat.

Dans le cas contraire, on pose $L(x, D) = P(x, D)+Q(x, D)$, où P est la partie principale de l'opérateur L et degré $(Q) < 2m$. Dans chacun des quatre cas (n pair ou impair, $2m \geqslant n$ ou $2m < n$), nous considérons le noyau $E_P(x-y, y)$ que nous avons défini. Puisqu'il est de type $\mathscr{G}^{\mu}_{2m}$, il est aussi de type $\mathscr{R}^{\mu}_{2m-1}$ (*cf.* la remarque du n° 2.3), et donc $Q(x, D)\, E(x-y, y)$ est de type $\mathscr{R}^{\mu}$ sur Ω. Grâce au théorème de dérivation sous le signe somme (théorème I du n° 1.5), on a la relation

$$L(x, D)(\overline{E}_P f)(x) = f(x)+(\overline{K} f)(x)+(\overline{QE_P} f)(x),$$

où $\overline{K}$ est l'opérateur de type $\mathscr{R}^{\mu}$ trouvé dans le cas où $L = P$. Finalement, puisque le noyau $K' = K+QE$ est de type $\mathscr{R}^{\mu}$, on a, pour toute fonction $f \in C^{\mu}_{k}(\Omega)$, la relation

$$L(x, D)(\overline{E}_P f)(x) = f(x)+(\overline{K'} f)(x),$$

où $\overline{K'}$ est un opérateur de type $\mathscr{R}^{\mu}$.

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant établir la proposition.

4.2.1. *Démonstration du* (1) *de la proposition.* — On montre d'abord que $E_P(x-y, y)$ est homogène de degré $(2m-n)$ en $(x-y)$ dans les trois premiers cas (n impair et $2m > n$ ou $2m < n$, et n pair avec $2m < n$), ce qui est clair d'après ce qui précède, et pseudo-homogène de degré $(2m-n)$ dans le dernier cas, soit plus précisément de la forme

$$\sum_{|\alpha| = 2m-n} a_{\alpha}(y)(x-y)^{\alpha} \log|k_2(x-y, y)|,$$

avec

$$a_{\alpha} \in C^{\mu}(\Omega) \quad \text{et} \quad k_2 \in H^1_1(\Omega).$$

Établissons ce dernier résultat. Pour cela, on considère la fonction définie sur $R^n \setminus \{0\}$ de la façon suivante :

$$h(z) = \int_{\Sigma_n} \frac{(\langle \omega, z \rangle)^{2m-n}}{P(\omega)} \log|\langle \omega, z \rangle|\, \sigma_n(d\omega).$$

Alors si $k(z) = \int_{\Sigma_n} ([(\langle \omega, z \rangle)^{2m-n}]/P(\omega))\, \sigma_n(d\omega)$,

$$h(\lambda z) = \lambda^{2m-n}[h(z)+\log|\lambda|\, k(z)].$$

Ainsi k est un polynôme homogène de degré $2m$-n et vérifie

$$k(z) = \frac{h(\lambda z)}{\lambda^{2m-n}\log|\lambda|} - \frac{h(z)}{\log|\lambda|} \qquad (\lambda \in R \setminus \{0\}).$$

Alors si $\varphi(z) = h(z)/k(z)$,

$$\varphi(\lambda z) = \frac{\lambda^{2m-n}[h(z)+\log|\lambda|k(z)]}{\lambda^{2m-n}k(z)} = \varphi(z)+\log|\lambda|.$$

En posant $\psi(z) = e^{\varphi(z)}$, $h(z) = k(z)\log\psi(z)$ avec $\psi \in H_1^1$. On en déduit immédiatement le résultat cherché lorsque $P(\omega)$ dépend aussi de y.

Par ailleurs, on a vu en 4.1 que pour tout $y \in \Omega$, la fonction $E_P(.,y)$ est de classe C^∞ dans $R^n \setminus \{0\}$. Il reste à démontrer que l'application $E_P^\alpha : (z, y) \to (\partial^\alpha/\partial z^\alpha) E_P(z, y)$ appartient à $C^\mu((R^n\setminus\{0\}) \times \Omega)$. Nous allons montrer que, pour tout y_0 de Ω, et tout compact K de $R_n \setminus \{0\}$,

$$\sup_{y, y' \in V(y_0), z \in K} \frac{|E_P^\alpha(z, y)-E_P^\alpha(z, y')|}{|y-y'|^\mu} \leqslant C_{K, y_0},$$

où $V(y_0)$ est un petit voisinage de y_0.

Considérons le cas n impair, $2m < n$. Soient y_0, $V(y_0)$ et K fixés :

$$\frac{1}{|y-y'|^\mu}\langle E_{P_y}^\alpha - E_{P_{y'}}^\alpha, \varphi\rangle$$
$$= \frac{C_n}{|y-y'|^\mu}\int_{\Sigma_n} \frac{P_{y'}(\omega)-P_y(\omega)}{P_y(\omega)P_{y'}(\omega)}\left[\int_{V_\omega}\left(\frac{\partial}{\partial \nu_\omega}\right)^{n-2m-1} D^\alpha\varphi(z)\tau_\omega(dz)\right]\sigma_n(d\omega).$$

On en déduit immédiatement que l'ensemble des distributions

$$\left\{E_{yy'}^\alpha = \frac{E_{P_y}^\alpha - E_{P_{y'}}^\alpha}{|y-y'|^\mu}\right\}_{y, y' \in V(y_0), y \neq y'}$$

est faiblement borné dans $\mathscr{D}'(R^n\setminus\{0\})$, donc fortement borné. Mais pour tout α, $E_{yy'}^\alpha$ est une fonction de $C^\infty(R^n\setminus\{0\})$ et donc une distribution d'ordre zéro. Donc si B est un sous-ensemble borné de C_K (fonctions continues à support dans K), pour tous y et y' distincts dans $V(y_0)$, pour tout φ dans B, $|\langle E_{yy'}^\alpha, \varphi\rangle| \leqslant C_B$. Si pour tout multi-indice β de longueur $|\beta| = 1$, la suite $(D^\beta\varphi_n)_n$ converge vers zéro dans L_K^1, les fonctions φ_n étant à support dans le compact K, alors la suite $(\varphi_n)_n$ converge uniformément vers zéro sur K. Si $\psi = D^\beta\varphi$, $\langle E_{yy'}^\alpha, \varphi\rangle = -\langle E_{yy'}^{\beta+\alpha}, \psi\rangle$. On a associé à $E_{yy'}^\alpha$ une forme linéaire continue $T_{yy'}^\alpha$ sur un sous-espace de L_K^1, qui est prolongeable, sans augmentation de la norme, en une forme linéaire continue sur L_K^1. Il existe donc $f_{yy'}^\alpha \in L_K^\infty$ qui prolonge $T_{yy'}^\alpha$ comme forme linéaire continue sur L_K^1, et l'ensemble des $f_{yy'}^\alpha$, pour y et y' distincts dans $V(y_0)$, est un borné de L_K^∞. Or sur l'espace $\mathscr{D}_K$, $E_{yy'}^{\beta+\alpha} = f_{yy'}^\alpha$, donc

$E_{yy'}^{\beta+\alpha}(z)$ est uniformément borné sur K. Mais étant donné $E_{yy'}$, on peut définir de façon unique *sa* primitive d'ordre β, à savoir la distribution $P^\beta E_{yy'}$ telle que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(R^n \setminus \{0\})$, $\langle P^\beta E_{yy'}, \varphi \rangle = \langle E_{yy'}, \psi \rangle$, où $\psi \in \mathcal{D}$ et $D^\beta \psi = \varphi$: c'est une fonction de classe C^∞ dans $R^n \setminus \{0\}$, β-ième primitive (unique) de $E_{yy'}$ positivement homogène de degré $2m-n-|\beta|$. Le raisonnement ci-dessus appliqué à $P^\beta E_{yy'}$ et ses dérivées d'ordre α, montre que $\sup_{y \neq y',\, z \in K} |E_{yy'}^\alpha(z)| \leqq C_K$ pour tout indice de dérivation α. Ceci montre le résultat dans le cas où n est impair et $2m < n$. Si n est pair et $2m < n$, la démonstration est analogue. Lorsque $2m \geqq n$, le résultat est immédiat pour E et ses premières dérivées, pour les suivantes on obtient à nouveau les cas où $2m < n$.

C. Q. F. D.

4.2.2. *Démonstration du* (2) *de la proposition.* — On remarque d'abord que P peut s'écrire

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x) D^\alpha = \sum_{|\beta| = 2m-1,\, 1 \leqslant i \leqslant n} a_{\beta, i}(x) D_i D^\beta.$$

Étant donné le noyau $E_P(z, y)$ associé à l'opérateur P, on pose

$$E_P^\beta(z, y) = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^\beta E_P(z, y),$$

et on remarque que lorsque $|\beta| = 2m-1$, pour chaque y, $E_P^\beta(., y)$ est positivement homogène de degré $(-n+1)$ et de classe C^∞. D'après le théorème II du n° 2.4 (dérivation singulière sous le signe somme).

$$D_i D^\beta(\overline{E}_P f)(x) = f(x)\left[\int_{\Sigma_n} E_P^\beta(\theta, x)\, \theta_i \sigma_n(d\theta)\right] + [\text{v. p. } D_i E_P^\beta] f(x),$$

où $\theta \in \Sigma_n$ (et θ_i est la i-ième composante de θ) et $|\beta| = 2m-1$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} P(x, D)(\overline{E}_P f)(x) = f(x) & \left[\sum_{|\beta| = 2m-1,\, 1 \leqslant i \leqslant n} a_{\beta, i}(x) \int_{\Sigma_n} E_P^\beta(\theta, x)\, \theta_i \sigma_n(d\theta)\right] \\ & + \left[\text{v. p.} \sum_{|\beta| = 2m-1,\, 1 \leqslant i \leqslant n} (a_{\beta, i}(x) - a_{\beta, i}(y)) D_i E_P^\beta\right] f(x) \\ & + \left[\text{v. p.} \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(y) D^\alpha E_P\right] f(x). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que

(i) le premier terme du second membre est égal à $f(x)$;

(ii) le second à $\overline{K} f(x)$, où $\overline{K}$ est de type $\overline{\mathcal{R}}^\mu$; et

(iii) le dernier est nul.

(i) *Étude du premier terme.* — Dans le cas où $P(x, D) = P(x_0, D)$ est à coefficients constants, $P(x_0, D)(\overline{E}_P f)(x) = f(x)$. Or, dans ce cas,

$$P(x_0, D)(\overline{E}_P f)(x) = f(x)\left[\sum_{\beta, i} a_{\beta, i}(x_0) \int_{\Sigma_n} E_P^\beta(\theta, x_0)\theta_i \sigma_n(d\theta)\right] + [\text{v. p.} \sum_\alpha a_\alpha(x_0) D^\alpha E_P] f(x).$$

Si l'on admet (iii), alors, pour tout x,

$$\sum_{\beta, i} a_{\beta, i}(x) \int_{\Sigma_n} E_P^\beta(\theta, x)\theta_i \sigma_n(d\theta) = 1.$$

On en déduit que le terme cherché est égal à $f(x)$.

(ii) *Étude du second terme.* — On définit $K_{\beta, i}(x, y)$ par la relation

$$K_{\beta, i}(x, y) = \sum_{\beta, i}(a_{\beta, i}(x) - a_{\beta, i}(y)) D_i E_P^\beta(x-y, y).$$

Puisque $D_i E_P^\beta(., y)$ est positivement homogène de degré $-n$ et de classe C^∞, et que $a_{\beta, i} \in C^\mu(\Omega)$, pour tout compact de Ω contenant x et y distincts, $|K_{\beta, i}(x, y)| \leqq C|x-y|^{\mu-n}$. La v. p. peut donc être supprimée, et les propriétés de régularité du noyau $K_{\beta, i}$ ainsi que le lemme A du n° 2.4 montrent que $K_{\beta, i} \in \mathscr{R}^\mu(\Omega)$, et le (ii) est ainsi établi.

(iii) *Étude du dernier terme.* — Pour y fixé, $\Sigma_{|\alpha|=2m} a_\alpha(y) D^\alpha E(., y) = \delta$, où δ est la distribution de Dirac, d'après la construction de E et les résultats de l'appendice. Puisque $[\text{v. p. } \delta] f(x) = 0$, le terme est nul.

Ceci achève la démonstration de la proposition.

C. Q. F. D.

4.3. Sur la variété $\mathscr{M}$, le résultat peut s'énoncer par le théorème suivant :

THÉORÈME VI. — *Soit L un opérateur différentiel de classe C^μ sur la variété compacte sans bord $\mathscr{M}$ de dimension n, de partie principale P. Alors si L est elliptique d'ordre $2m$, il existe une paramétrix $\overline{E}_P$ associée à un noyau E_P de classe $\mathscr{G}_{2m}^\mu$ en ce sens que, pour toute fonction $f \in C^\mu(\mathscr{M})$, il existe un noyau K de type $\mathscr{R}^\mu$ sur $\mathscr{M}$ tel que $L\overline{E}_P f = f + \overline{K} f$.*

On peut en fait préciser le théorème comme suit :

LEMME. — *Pour qu'un noyau $N(x, y)$ sur $\mathscr{M}$ soit le noyau d'une paramétrix de l'opérateur L de classe $\mathscr{G}_{2m}^\mu$, il faut et il suffit que dans chaque carte locale (U_i, χ_i) dans laquelle l'opérateur P a pour image P_i, l'image N_i*

de N soit le noyau d'une paramétrix de P_i. En particulier, cela est le cas lorsque $N_i(x, y) = E_{P_i(y, D)}(x-y)$.

Remarque. — Le noyau E_P s'exprime explicitement à l'aide de la formule (R) du n° 3.7, lorsque $2m \geqslant n$, par la même méthode, mais pas explicitement comme fonction, lorsque $2m < n$.

Le théorème VI découle immédiatement du précédent. Nous avons alors atteint le but cherché, à savoir la construction explicite d'une paramétrix pour un opérateur elliptique à coefficients C^μ, défini sur une variété compacte sans bord $\mathscr{M}$ de classe C^∞.

4.4. Soit alors à résoudre l'équation

$$Lu = g, \qquad g \in C^\mu(\mathscr{M}).$$

En posant $u = \overline{E}_P f$ cette équation s'écrit

$$L\overline{E}_P f = f - \overline{K} f = g.$$

On est ramené à étudier l'équation de Fredholm :

$$f - \overline{K} f = g \quad (^7).$$

Alors si $\overline{E}_P$ est un isomorphisme de $C^\mu(\mathscr{M})$ sur $C^{2m+\mu}(\mathscr{M})$, les équations

$$Lu = g \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} f - \overline{K} f = g, \\ \qquad u = \overline{E}_P f \end{cases}$$

sont équivalentes.

Lorsqu'on a une telle paramétrix bijective $\overline{E}_P$, l'opérateur L est d'indice nul (puisque $1 - \overline{K}$ est d'indice nul). Si de plus L est injectif, L est un isomorphisme, et $(1 - \overline{K})$ a la propriété d'unicité. Il existe alors un noyau résolvant $Z \in \mathscr{R}^\mu(\mathscr{M})$ tel que $f = (1 + \overline{Z})\, g$. Dans ce cas, on sait résoudre complètement l'équation $Lu = g$ à l'aide d'un noyau qui appartient précisément à la meilleure classe qu'on pouvait espérer. Lorsque l'opérateur $(1 - \overline{K})$ n'a pas la propriété d'unicité, on doit résoudre une alternative de Fredholm. Lorsque $g \in C^\mu(\mathscr{M})$, et vérifie un certain nombre de conditions, il existe une solution $f \in C^\mu(\mathscr{M})$. On a ainsi les résultats les plus précis possibles tant au point de vue de la régularité et de l'exis-

(7) Pour ce qui a trait à l'équation de Fredholm dans $C^\mu(\mathscr{M})$, nous renvoyons à [6] (1.5), où tous les résultats nécessaires sont établis.

tence des solutions qu'en ce qui concerne la caractérisation des noyaux résolvants dont on a défini précisément la classe. Dans le cas de la théorie classique des opérateurs pseudo-différentiels, on ne sait rien de précis sur les opérateurs résolvants, et on se place dans le cadre C^{∞}; dans le cadre C^{μ}, on connaissait déjà la régularité qu'il était possible d'obtenir (ici les inégalités *a priori* de Schauder deviennent *a posteriori*) mais on ne connaissait rien des noyaux résolvants.

Ces quelques remarques font ressortir tout l'intérêt de la construction d'une paramétrix bijective $\overline{E}_P$. Lorsque les opérateurs sont d'ordre 2, on sait la construire explicitement (P. COURRÈGE, G. GIRAUD). On est amené à résoudre une équation différentielle de type de Fuchs, puis à recoller sur la variété pour obtenir une paramétrix injective, le principe du maximum permet de conclure. Dans le cas d'un ordre plus élevé, les difficultés sont à trois niveaux. D'une part l'équation de type de Fuchs est plus difficile, et on peut essayer de l'éviter, mais le problème du recollement des cartes sur la variété est moins aisé (il est bien connu que cela va dépendre de l'homologie de la variété et que lorsque la dimension $n = 2$ la démonstration du théorème de l'indice dans le cas C^{∞} est mise en défaut). Enfin, il n'y a plus de principe du maximum, et pour obtenir un théorème d'indice on doit utiliser l'adjoint de P, ce qui exige des conditions de régularité plus fortes sur les coefficients de l'opérateur. Lorsqu'on n'a pas de paramétrix bijective $\overline{E}_P$, toute solution de l'équation de Fredholm donne une solution de $L u = g$, mais il peut exister d'autres solutions que l'on ne trouve pas par cette méthode.

On pourrait aussi envisager de prendre les puissances successives de l'opérateur inverse de $(\Delta_g - 1)$ (où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la variété $\mathscr{M}$ associé à la métrique riemanienne g), $(\Delta_g - 1)$ étant un isomorphisme de $C^{k+2+\mu}$ sur $C^{k+\mu}$ pour tout entier $k \geqq 0$. En fait, il serait utile de construire une « classe d'opérateurs pseudo-différentiels en classe C^{μ} ». On considère l'opérateur Λ tel que $\Lambda^2 = \Delta - 1$. La classe cherchée serait composée des opérateurs de la forme $\Lambda^p \overline{G}$, $p \in Z$, et $\overline{G}$ étant un opérateur intégral singulier de Giraud (opérant de $C^{\mu}(\mathscr{M})$ dans $C^{\mu}(\mathscr{M})$); tout opérateur de type $\overline{\mathscr{G}_r^{\mu}}$ serait de la forme $\Lambda^{-r} \overline{G}$. Pour cela on a besoin essentiellement de théorèmes de composition des opérateurs, et si les restes se composent bien, par contre il est plus difficile de montrer que $\mathscr{G}_{2m}^{\mu} \circ \mathscr{G}^{\mu} \subset \mathscr{G}_{2m}^{\mu}$. En effet, si l'on se reporte à la démonstration du théorème de composition des noyaux singuliers de Giraud ($\mathscr{G}^{\mu}$) dans [5], on voit qu'elle utilise un détour par la théorie L^2 afin d'isoler la partie principale du noyau composé. La mauvaise décroissance à l'infini des noyaux de type $\mathscr{G}^{\mu}_{2m}$, et surtout leur croissance dans le cas où $2m \geqslant n$, ne permettent plus un tel détour pour isoler la partie principale du noyau composé. Ce sont ces difficultés qui font que nous n'avons pas construit ici cette classe d'opérateurs pseudo-différentiels.

APPENDICE ([8])

On démontre ici la proposition du n° 4.1 que l'on décompose en deux cas : $2m < n$ et $2m \geqslant n$. On donne d'abord l'expression du noyau cherché pour montrer *a posteriori* que le choix est correct. Le lecteur pourra se reporter au livre de I. M. GEL'FAND et G. E. ŠILOV [9] pour retrouver ces expressions données presque sous la même forme, ou à celui de F. JOHN [11] qui donne d'autres expressions. N'ayant trouvé nulle part de démonstrations complètes pour tous les cas envisagés, nous avons estimé utile de les faire ici.

Premier cas : $2m < n$.

LEMME 1. — *Soit* $P(\xi)$ *un polynôme homogène de degré* $2m$ *ne s'annulant pas sur* Σ_n *(cas d'ellipticité). Alors il existe une fonction* E_P *de classe* C^∞ *dans* $R^n \setminus \{0\}$, *positivement homogène de degré* $(2m-n)$, *et une seule, telle que, pour toute fonction* $\varphi \in \mathscr{D}(R^n)$,

$$(1) \qquad \int_{R^n} E_P(x)\,\varphi(x)\,dx = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{\Sigma_n} \frac{\sigma_n(d\omega)}{P(\omega)} \times \int_{V_\omega} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_\omega}\right)^{n-2m-1} \varphi(x)\,\tau_\omega(dx)$$

lorsque n *est impair, où* V_ω, τ_ω *et* $\partial/\partial\nu_\omega$ *ont été définis au* n° 4.1, *et*

$$(2) \qquad \int_{R^n} E_P(x)\,\varphi(x)\,dx = \frac{(-1)^{n/2}}{(2\pi)^n} \int_{\Sigma_n} \frac{\sigma_n(d\omega)}{P(\omega)} \times \text{v. p.} \int_{R_n} \frac{1}{\langle \omega, x \rangle} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_\omega}\right)^{n-2m-1} \varphi(x)\,dx$$

([8]) On pourra trouver des résultats plus complets dans l'article de L. GÅRDING [8]. Les méthodes que nous employons sont beaucoup plus élémentaires, et les résultats que nous obtenons nous suffisent ici.

lorsque n est pair. *De plus, E_P est une solution élémentaire de l'opérateur différentiel $P(D)$ associé à $P(\xi)$, c'est-à-dire $PE_P = \delta$.*

Démonstration dans le cas n impair. — L'équation (1) définit E_P comme une distribution; il est évident qu'elle est homogène de degré $(2m-n)$. On va d'abord montrer que

(i) E_P est une solution élémentaire de $P(D)$, puis

(ii) qu'elle est une fonction de classe C^∞ dans $R^n \setminus \{0\}$.

(i) $P(D)E_P = \delta$. — Comme $P(\xi)$ est homogène de degré pair, ceci s'écrit $\langle E_P, P\varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$ pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{D}$. Dans cette démonstration, la lettre C désignera la constante $(-1)^{(n-1)/2}/2(2\pi)^n$. On a

$$\langle E_P, P\varphi \rangle = C \int_{\Sigma_n} \frac{\sigma_n(d\omega)}{P(\omega)} \int_{V_\omega} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_\omega}\right)^{n-2m-1} (P\varphi)(x)\,\tau_\omega(dx).$$

Remarquons que si une fonction φ ne dépend que de $\langle \omega, x \rangle$, alors

$$P(D)\varphi(\langle \omega, x \rangle) = P(\omega)\varphi^{(2m)}(\langle \omega, x \rangle).$$

On constate ainsi que, pour toute fonction φ dans $\mathscr{D}$,

$$P(D)\varphi(x) = P(\omega)\left(\frac{\partial}{\partial \nu_\omega}\right)^{2m} \varphi(x) + Q(\tilde{D})\varphi(x),$$

où $Q(\tilde{D})$ est un polynôme de dérivation dans les directions normales au vecteur ω. Si $\tilde{D}$ désigne une dérivée première dans une telle direction, alors

$$\int_{V_\omega} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_\omega}\right)^{n-2m-1} (\tilde{D}\varphi)(x)\,\tau_\omega(dx)$$
$$= \lim_{|h| \downarrow 0} \int_{V_\omega} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_\omega}\right)^{n-2m-1} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{|h|}\,\tau_\omega(dx),$$

où h est un vecteur orthogonal au vecteur ω. Or

$$\int_{V_\omega} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_\omega}\right)^{n-2m-1} \varphi(x+h)\,\tau_\omega(dx) = \int_{V_\omega} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_\omega}\right)^{n-2m-1} \varphi(x)\,\tau_\omega(dx)$$

puisque $\varphi(\,.+h)$ est la fonction translatée de φ par un vecteur $h \in V_\omega$. Donc

$$\int_{V_\omega} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_\omega}\right)^{n-2m-1} (\tilde{D}\varphi)(x)\,\tau_\omega(dx) = 0,$$

et finalement

$$(\star)\quad \langle E_P, P\varphi\rangle = C\int_{\Sigma_n}\frac{\sigma_n(d\omega)}{P(\omega)}\int_{V_\omega}\left(\frac{\partial}{\partial\nu_\omega}\right)^{n-2m-1}P(\omega)\left(\frac{\partial}{\partial\nu_\omega}\right)^{2m}\varphi(x)\,\tau_\omega(dx)$$

$$= C\int_{\Sigma_n}\sigma_n(d\omega)\int_{V_\omega}\left(\frac{\partial}{\partial\nu_\omega}\right)^{n-1}\varphi(x)\,\tau_\omega(dx).$$

Pour transformer cette dernière expression, on considère le groupe SO (n) dont les éléments seront désignés par σ et la mesure de Haar normalisée par $d\sigma$. Soit

$$F\in L^\infty(\Sigma_n),\qquad \int_{SO(n)}d\sigma\int_{\Sigma_n}F(\omega)\,\sigma_n(d\omega) = \int_{\Sigma_n}\sigma_n(d\omega)\int_{SO(n)}F(\sigma\omega)\,d\sigma,$$

et soient e_1 un vecteur de base de R^n, et σ_1 la rotation telle que $\sigma_1\,\omega = e_1$. Alors

$$\int_{\Sigma_n}\sigma_n(d\omega)\int_{SO(n)}F(\sigma\omega)\,d\sigma = \int_{\Sigma_n}\sigma_n(d\omega)\int_{SO(n)}F(\sigma\sigma_1\,\omega)\,d\sigma$$

$$= \int_{\Sigma_n}\sigma_n(d\omega)\int_{SO(n)}F(\sigma e_1)\,d\sigma$$

$$= |\Sigma_n|\int_{SO(n)}F(\sigma e_1)\,d\sigma,$$

où $|\Sigma_n|$ désigne la mesure de Σ_n. La relation $(\star)$ donne alors

$$\langle E_P, P\varphi\rangle = C|\Sigma_n|\int_{y_1=0}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{n-1}\left[\int_{SO(n)}\varphi(\sigma y)\,d\sigma\right]dy_2\ldots dy_n.$$

Posons $\psi(r) = \int_{SO(n)}\varphi(\sigma y)\,d\sigma$ (où $r = \sqrt{\sum x_i^2}$); puisque $(n-1)$ est pair, nous avons la relation

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{n-1}\psi(r)\big|_{y_1=0} = \sum\nolimits_{0<p\leq(n-1)/2}a_p\frac{\psi^{(p)}(r)}{r^{n-1-p}}.$$

Soit alors $\varphi\in\mathscr{D}$ telle que $0\notin\operatorname{Supp}\varphi$, ψ la fonction radiale associée; une intégration en coordonnées polaires donne

$$\langle E_P, P\varphi\rangle = C|\Sigma_n|\sum\nolimits_{0<p\leq(n-1)/2}a_p\int_0^\infty r^{p-1}\,\psi^{(p)}(r)\,dr$$

Puisque $0\notin\operatorname{Supp}\psi$ et que $\operatorname{Supp}\psi$ est compact, $(p-1)$ intégrations par parties montrent que cette dernière expression est nulle. Finalement, la distribution PE_P, homogène de degré $-n$, a son support concentré à l'origine, elle est donc égale à $A\,\delta$, où A est une constante. Une application de PE_P à la fonction $e^{-|x|^2}$ montre que $A = 1$, ce qui achève la démonstration du (i).

(ii) *E_P est une fonction de classe C^∞ dans $R^n \setminus \{ 0 \}$*. — L'opérateur P n'admet qu'une seule solution élémentaire tempérée homogène de degré négatif (une application de la transformée de Fourier rend évident ce résultat). Or on a vu que E_P est tempérée homogène de degré $(2\,m-n) < 0$, donc elle est la seule solution élémentaire tempérée homogène de degré négatif de P. Comme la transformée de Fourier inverse de $1/P(\xi)$ vérifie la même propriété, $E_P = [1/P(\xi)]^\vee$. Or on a le résultat suivant.

LEMME. — *Si $h(\xi)$ est une fonction positivement homogène de degré $(-n)$ de classe C^∞ dans $R^n \setminus \{ 0 \}$ et d'intégrale nulle sur la sphère unité, alors $[h(\xi)]^\vee$ est une fonction positivement homogène de degré zéro, de classe C^∞ dans $R^n \setminus \{ 0 \}$ et d'intégrale nulle sur la sphère unité.*

(*Voir* par exemple l'article de A. P. CALDERÓN et A. ZYGMUND [3].) En utilisant le lemme A du n° 2.4, on constate que, pour $|\alpha| = 2\,m$, $D^\alpha(1/P(\xi))$ vérifie les conditions du lemme, donc $x^\alpha [1/P(\xi)]^\vee$ est de classe C^∞ dans $R^n \setminus \{ 0 \}$, donc il en est de même de $[1/P(\xi)]^\vee$, et donc de E_P. Ceci achève la démonstration de (ii).

La démonstration de (ii) a établi aussi l'unicité de E_P, donc la première partie du lemme est démontrée.

Démonstration dans le cas n pair. — Cela nécessite un développement parallèle à celui du précédent. En fait, seul le (i) s'en distingue quelque peu, nous le traitons donc ici. On désigne par C la constante $(-1)^{n/2}/(2\,\pi)^n$. Les mêmes considérations que précédemment sur les dérivations $\tilde{D}$ montrent que

$$\int_{\Sigma_n} \frac{\sigma_n(d\omega)}{P(\omega)} \text{v. p.} \int_{R^n} \frac{1}{\langle \omega, x \rangle} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_\omega}\right)^{n-2m-1} \tilde{D}\,\varphi(x)\,dx = 0$$

et

$$\langle E_P, P\varphi \rangle = C \int_{\Sigma_n} \sigma_n(d\omega) \left[\text{v. p.} \int_{R^n} \frac{1}{\langle \omega, x \rangle} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_\omega}\right)^{n-1} \varphi(x)\,dx \right].$$

L'invariance par rotation permet de remplacer $\varphi(x)$ par

$$\psi(r) = \int_{SO(n)} \varphi(\sigma x)\,d\sigma.$$

Le vecteur ω étant fixé, une rotation des axes permet de remplacer l'expression entre crochets par

$$I = \text{v. p.} \int_{R^n} \frac{1}{x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n-1} \psi(r)\, dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{R^n} \frac{\chi_\varepsilon(x_1)}{x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n-1} \psi(r)\, dx,$$

où

$$\chi_\varepsilon(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x_1| < \varepsilon \\ 1 & \text{si } |x_1| > 2\varepsilon \end{cases}, \qquad \chi_\varepsilon \in C^\infty(R).$$

On obtient alors par récurrence la relation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n-1} \psi(r) = \sum_{p,q} a_{p,q} \frac{(\langle \omega, x \rangle)^p}{r^q}\left(\frac{d}{dr}\right)^{n-1-(q-p)} \psi(r),$$

où la somme est prise sur les couples (p, q) tels que $0 \leqslant p \leqslant n-1$, $q \geqslant 2$, $q-p < n-1$ et $p \leqslant q$. Un passage en coordonnées polaires donne alors (avec $x_1 = r \cos\theta_1$) :

$$I = \sum_{p,q} a_{p,q} \int_0^\infty r^{n-2-(q-p)} \psi^{(n-1-(q-p))}(r)$$
$$\times \left[\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\Sigma_n} \frac{\chi_\varepsilon(r\cos\theta_1)}{\cos\theta_1} (\cos\theta_1)^p \sigma_n(d\theta)\right] dr.$$

L'expression entre crochets est un nombre fini pour $p \geqslant 0$, indépendant de r. Une suite d'intégrations par parties en r et le fait que $0 \notin \operatorname{Supp} \psi$ montre que $I = 0$. Comme auparavant, on en déduit que $PE_P = A\,\delta$, puis que $A = 1$. Ceci achève d'établir le lemme.

C. Q. F. D.

Second cas : $2m \geqslant n$. — Les solutions élémentaires sont alors définies explicitement par le résultat suivant :

LEMME 2. — *Soit $P(\xi)$ un polynôme homogène de degré $2m$ ne s'annulant pas sur Σ_n (cas d'ellipticité). Alors il existe une fonction E_P de classe C^∞ dans $R^n \setminus \{0\}$, à croissance lente lorsque la variable tend vers l'infini, solution élémentaire de l'opérateur $P(D)$, donnée par les relations :*

$$E_P(x) = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{4(2\pi)^n (2m-n)!} \int_{\Sigma_n} \frac{|\langle \omega, x \rangle|^{2m-n}}{P(\omega)} \sigma_n(d\omega) \tag{3}$$

lorsque n est impair, et

$$(4) \qquad E_P(x) = \frac{(-1)^{(n/2)-1}}{(2\pi)^n (2m-n)!} \int_{\Sigma_n} \frac{(\langle \omega, x \rangle)^{2m-n}}{P(\omega)} \log |\langle \omega, x \rangle| \sigma_n(d\omega)$$

lorsque n est pair.

On remarque d'abord que ces intégrales sont bien définies, puis, comme dans le premier cas, que $\langle E_P, P\varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$ et que ce sont des fonctions C^∞ dans $R^n \setminus \{0\}$. Mais ici la forme explicite prise par E_P rend ces démonstrations extrêmement élémentaires.

C. Q. F. D.

Les lemmes 1 et 2 donnent ainsi les expressions explicites des solutions élémentaires tempérées d'un opérateur elliptique d'ordre $2m$ à coefficients constants (expression donnée à l'addition près d'un polynôme de degré $< 2m$ dans le second cas), ceci démontre entièrement la proposition du n° 4.1.

Remarque. — Pour établir ces expressions que nous avons données *a priori*, on peut développer en ondes planes la distribution δ, ce qui ramène l'équation aux dérivées partielles à une équation différentielle ordinaire qu'il faut alors résoudre. La formule fondamentale pour toute la construction est la suivante :

Si δ_ω est la distribution définie par $\langle \delta_\omega, \varphi \rangle = \int_{V_\omega} \varphi(x) \tau_\omega(dx)$,

$$\delta = \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{\Sigma_n} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_\omega}\right)^{n-1} \delta_\omega \sigma_n(d\omega) \quad \textit{lorsque } n \textit{ est impair,}$$

et

$$\delta = \frac{(-1)^{n/2}(n-1)!}{(2\pi)^n} \int_{\Sigma_n} (\langle \omega, x \rangle)^{-n} \sigma_n(d\omega) \quad \textit{lorsque } n \textit{ est pair,}$$

où la distribution $(\langle \omega, x \rangle)^{-n}$ est définie par prolongement analytique de $(\langle \omega, x \rangle)^\lambda$, bien définie pour $\operatorname{Re} \lambda > -1$.

Si cette technique a l'avantage de montrer comment on peut construire les noyaux, elle a le double inconvénient, pour un tel appendice, d'utiliser les prolongements analytiques de distributions et les formes différentielles attachées à un hyperplan; cela nous faisait sortir du cadre élémentaire dans lequel nous avons voulu situer cet apendice.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGMON (S.). — *Lectures on elliptic boundary value problems.* — Princeton, D. Van Nostrand Company, 1965 (*Van Nostrand mathematical Studies*, 2).

[2] AGMON (S.), DOUGLIS (A.) and NIRENBERG (L.). — Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I., *Comm. pure and appl. Math.*, t. 12, 1959, p. 623-727.

[3] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). — A note on the interpolation of sublinear operations, *Amer. J. Math.*, t. 78, 1956, p. 282-320.

[4] CLERC (J.-L.) et COURRÈGE (P.). — Une algèbre d'opérateurs intégraux μ-fois régularisants dans les espaces C^μ, pour $0 < \mu < 1$, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 269, série A, 1969, p. 892-895.

[5] CLERC (J.-L.) et COURRÈGE (P.). — Une algèbre d'opérateurs intégraux singuliers dans les espaces C^μ, pour $0 < \mu < 1$, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 269, série A, 1969, p. 967-969.

[6] CLERC (J.-L.) et COURRÈGE (P.). — *Les opérateurs intégraux singuliers de Giraud en classe* C^μ $(0 < \mu < 1)$, manuscrit non publié, déposé aux Archives originales du C. N. R. S., n° 536.

[7] COURRÈGE (P.) et DURAND (M.). — Un type d'opérateurs r-fois régularisants en classe C^μ (r entier > 0, $0 < \mu < 1$), *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 271, série A, 1970, p. 349-352.

[8] GÅRDING (L.). — Transformation de Fourier des distributions homogènes, *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 89, 1961, p. 381-428.

[9] GEL'FAND (I. M.) et ŠILOV (G. E.). — *Les distributions*, vol. 1, — Paris, Dunod, 1962 (*Collection universitaire de Mathématiques*, 8).

[10] GIRAUD (G.). — Équations à intégrales principales, *Annales scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 51, 1934, p. 251-372.

[11] JOHN (F.). — *Planes waves and spherical means applied to partial differential equations.* — New York, Interscience Publishers, 1955 (*Interscience Tracts in pure and applied Mathematics*, 2).

[12] LEVI (E. E.). — Sulle equazioni lineari totalmente ellitiche alle derivate parziali, *Rend. Circ. Mat. Parlemo*, t. 24, 1907, p. 275-317.

[13] MIRANDA (C.). — *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellitico.* — Berlin, Springer-Verlag, 1955 (*Ergebnisse der Mathematik*, 2).

[14] SEELEY (R. T.). — Singular integrals on compact manifolds, *Amer. J. Math.*, t. 81, 1959, p. 658-690.

(Texte reçu le 23 mai 1974.)

Marc DURAND,
Mathématiques,
Bâtiment 425,
Université de Paris-Sud,
Campus universitaire d'Orsay,
91405 Orsay.