BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 21-27
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__21_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels; par M. Laguerre.

(Séance du 21 novembre 1879.)

1. Soit z une fonction satisfaisant à l'équation linéaire

$$\text{(1)}\qquad Wz' = Vz + U,$$

où U, V et W sont des polynômes entiers en x.

Supposons, pour fixer les idées, que z soit développable suivant les puissances croissantes de x, et proposons-nous de former les réduites successives de la fonction z.

En désignant par f_n le polynôme du degré n qui est le dénominateur de la réduite de rang n, posons

$$z = \frac{\varphi_n}{f_n} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right) \quad (^1);$$

on en déduit

$$z' = \frac{\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n}{f_n^2} + \left(\frac{1}{x^{2n+2}}\right),$$

d'où, en portant ces valeurs dans l'équation (1),

$$U + V\frac{\varphi_n}{f_n} + \frac{V}{x^{2n+1}} - \frac{W(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n)}{f_n^2} - \frac{W}{x^{2n+2}} = 0$$

et

$$f_n^2 U + f_n \varphi_n V - W(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) = f^2\left[V\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right) + W\left(\frac{1}{x^{2n+2}}\right)\right].$$

Le premier membre de cette relation est un polynôme entier; le second membre est de l'ordre de la fonction $V\left(\frac{1}{x}\right) + W\left(\frac{1}{x^2}\right)$, et cet ordre, qui est indépendant du nombre n, indique le degré de ce polynôme.

En désignant par A_n un coefficient indépendant de x et dont je

---

(1) Je désigne ici, comme dans tout ce qui suit, par $\left(\frac{1}{x^p}\right)$ une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et commençant par un terme de l'ordre de x^p.

fixerai plus tard la valeur, je puis donc poser

$$f_n^2 \mathrm{U} + f_n \varphi_n \mathrm{V} - \mathrm{W}(\varphi_n' f_n - f_n' \varphi_n) = \mathrm{A}_n \Theta_n, \tag{2}$$

où Θ_n est un polynôme entier dont le degré est marqué par l'ordre de la fonction

$$\mathrm{V}\left(\frac{1}{x}\right) + \mathrm{W}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

2. Formons maintenant l'équation différentielle du second ordre

$$\mathrm{M}y'' - \mathrm{N}y' + \mathrm{P}y = 0,$$

qui a pour solutions

$$y_1 = f_n \quad \text{et} \quad y_2 = e^{-\int \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}} dx}(\varphi_n - f_n z).$$

En posant, pour abréger,

$$\omega = y_1' y_2 - y_2' y_1,$$

on a, d'après une formule connue,

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} = \frac{d}{dx} \log \Omega;$$

or un calcul facile donne

$$\omega = e^{-\int \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}} dx} \frac{f_n^2 \mathrm{U} + f_n \varphi_n \mathrm{V} - \mathrm{W}(\varphi_n' f_n - f_n' \varphi_n)}{\mathrm{W}},$$

et, en tenant compte de la relation (2),

$$\omega = e^{-\int \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}} dx} \frac{\mathrm{A}_n \Theta_n}{\mathrm{W}},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} = \frac{\Theta_n'}{\Theta_n} - \frac{\mathrm{W}'}{\mathrm{W}} - \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{W}},$$

et il en résulte immédiatement que l'équation cherchée est de la forme

$$\mathrm{W}\Theta_n y'' + [(\mathrm{V} + \mathrm{W}')\Theta_n - \mathrm{W}\Theta_n']y' + \mathrm{K}_n y = 0,$$

où K_n désigne un polynôme entier dont le degré est indépendant de n.

Je mettrai cette équation sous la forme suivante :

$$Wy'' + \left(V + W' - W\frac{\Theta'_n}{\Theta_n}\right)y' + \frac{K_n}{\Theta_n}y = 0,$$

ou, pour abréger,

$$(3) \qquad Wy'' + W_0 y' + W_1 y = 0.$$

Je ferai remarquer que, quand cette équation est connue, Θ_n est connu à un facteur numérique près; on peut donc alors poser

$$\Theta_n = \lambda H_n \quad (^1),$$

où H_n est un polynôme déterminé et λ une quantité indépendante de x.

3. Je ne m'occuperai pas ici du problème qui consiste à trouver la valeur des coefficients des polynômes Θ_n et K_n, problème qui présente d'assez grandes difficultés et que j'ai déjà essayé de traiter, particulièrement dans deux Notes *Sur la réduction en fractions continues d'une classe assez étendue de fonctions* et *Sur le développement en fractions continues de $e^{F(x)}$*, publiées dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (janvier 1878).

Je suppose cette équation formée.

Cela posé, on sait que l'on a entre les termes de deux réduites consécutives la relation

$$(4) \qquad \varphi_{n+1} f_n - f_{n+1}\varphi_n = A_n,$$

A_n étant une quantité ne dépendant que du nombre n, et que du reste on peut choisir arbitrairement.

On a de même

$$\varphi_{n-1} f_n - f_{n-1}\varphi_n = -A_{n-1},$$

et on déduit de là

$$(A_{n-1}\varphi_{n+1} + A_n\varphi_{n-1})f_n = (A_{n-1}f_{n+1} + A_n f_{n-1})\varphi_n.$$

---

(1) H_n est déterminé par l'équation $\frac{H'_n}{H_n} = \frac{V + W' - W_0}{W}$.

d'où, si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = P_{n-1},$$

les deux relations

$$(5)\qquad f_{n+1} - Q_{n-1} f_n + P_{n-1} f_{n-1} = 0$$

et

$$(6)\qquad \varphi_{n+1} - Q_{n-1} f_n + P_{n-1} f_{n-1} = 0,$$

où Q_n désigne un polynôme du premier degré en x.

Il est à remarquer que, quand on se donne arbitrairement la quantité P_n en fonction du nombre entier n, les termes des réduites ne sont déterminés qu'à un facteur près purement numérique. Le signe des termes des réduites de rang impair demeure même indéterminé, car, en changeant ce signe, on voit que, toutes les quantités A_n changeant également de signe, P_n conserve la même valeur.

J'écris maintenant la relation (2) sous la forme suivante :

$$(U f_n + V\varphi_n - W\varphi'_n) f_n + W f'_n \varphi_n = A_n \Theta_n.$$

En éliminant Θ_n entre cette relation et l'identité (4), il vient

$$(W f'_n + \Theta_n f_{n+1})\varphi_n = (W\varphi'_n - U f_n - V\varphi_n + \Theta_n \varphi_{n+1}) f_n.$$

On en déduit, en désignant par Ω_n un polynôme entier dont le degré est indépendant de n, les deux équations suivantes :

$$(7)\qquad W f'_n = \Omega_n f_n - \Theta_n f_{n+1},$$

$$(8)\qquad W\varphi'_n = U f_n + (V + \Omega_n)\varphi_n - \Theta_n \varphi_{n+1}.$$

4. Il s'agit maintenant de déterminer les polynômes Ω_n et Q_n.

A cet effet, je déduis de l'équation (7) la valeur de f''_n, et je porte la valeur ainsi obtenue, ainsi que celle de f'_n, dans l'équation (3); après quelques réductions faciles, on obtient la relation

$$\begin{aligned} &\Theta_n^2 \Theta_{n+1} f_{n+2} - \Theta_n^2 (\Omega_n + \Omega_{n+1} + V) f_{n+1} \\ &\quad + [\Omega_n \Theta_n (\Omega_n + V) + W(\Omega'_n \Theta_n - \Theta'_n \Omega_n) + W K_n] f_n = 0; \end{aligned}$$

en la comparant à l'identité

$$f_{n+2} - Q_n f_{n+1} + P_n f_n = 0,$$

on en déduit

(9) $$Q_n = \frac{\Omega_{n+1} + \Omega_n + V}{\Theta_{n+1}}$$

et

(10) $$\Omega_n \Theta_n (\Omega_n + V) + W(\Omega'_n \Theta_n - \Theta'_n \Omega_n) + WK_n - P_n \Theta_n^2 \Theta_{n+1} = 0.$$

Posons

$$u = e^{\int \frac{\Omega_n}{W} dx},$$

d'où

(11) $$\Omega_n = W \frac{u'}{u};$$

en remplaçant, dans l'équation précédente, Ω_n par cette valeur, on obtiendra, toutes réductions faites, l'équation

(12) $$W u'' + W_0 u' + \left(W_1 - \frac{P_n \Theta_n \Theta_{n+1}}{W}\right) u = 0,$$

qui ne diffère, on le voit, de l'équation (3) que par l'addition du terme

$$- \frac{P_n \Theta_n \Theta_{n+1}}{W} u.$$

5. Quand on se donne l'équation (3), comme Θ_n n'est pas entièrement déterminé, je poserai, comme plus haut,

$$\Theta_n = \lambda H_n,$$

λ étant une quantité indépendante de x et inconnue.

L'équation (12) deviendra alors

(13) $$W u'' + W_0 u' + \left(W_1 - \frac{\lambda^2 P_n H_n H_{n-1}}{W}\right) u = 0.$$

La forme du polynôme Ω_n étant connue, on déterminera facilement les coefficients inconnus de la fonction u, ainsi que la constante λ^2; on choisira arbitrairement la valeur de λ que l'on en déduit (si l'on prenait la valeur qui est de signe contraire, cela n'aurait d'autre effet que de changer les signes des termes des réduites de rang impair), et la formule (11) donnera la valeur de Ω_n.

6. Comme application des formules qui précèdent, je prendrai pour exemple le développement de la fonction

$$z = e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$$

qui satisfait à l'équation différentielle

$$xz' = xz - 1,$$

et que j'ai étudiée dans une Note [1] présentée récemment à la Société.

Nous avons, dans ce cas,

$$V = W = x,$$

et l'équation différentielle à laquelle satisfait f_n est

$$xy'' + (x+1)y' - ny = 0.$$

On en conclut que H_n est une constante que l'on peut prendre égale à l'unité; je poserai

$$P_n = (n+1)^2.$$

Les équations (7) et (9) deviennent respectivement

$$(14) \qquad xf'_n = \Omega_n f_n - \Theta_n f_{n+1}$$

et

$$(15) \qquad Q_n = \frac{\Omega_{n+1} + \Omega_n + x}{\Theta_{n+1}}.$$

La formule (14) montre d'ailleurs que Ω_n est un polynôme du premier degré en x qui ne peut se réduire à une constante; on en conclut que u est de la forme $e^{\alpha x}x^\beta$, où α est différent de zéro.

---

[1] *Sur l'intégrale* $\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$ (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 72).

L'équation (13) devient, dans ce cas,

$$xu'' + (x+1)u' - \left[n + \frac{\lambda^2(n+1)^2}{x}\right]u = 0;$$

y substituant la valeur de u, il vient, toutes réductions faites,

$$\alpha(\alpha+1)x^2 + (2\alpha\beta + \alpha + \beta - n)x + [\beta^2 - (n+1)^2\lambda^2] = 0.$$

Comme α est essentiellement différent de zéro, on en déduit

$$\alpha = -1, \quad \beta = -(n+1), \quad \lambda^2 = 1,$$

et, en prenant la valeur négative de λ,

$$\lambda = \Theta = -1,$$

puis

$$\Omega_n = x\frac{u'}{u} = -x\left(1 + \frac{n+1}{x}\right) = -(x+n+1).$$

Les formules (14) et (15) donnent, par suite,

$$xf'_n = f_{n+1} - (x+n+1)f_n$$

et

$$Q_n = \frac{x - (x+n+1) - (x+n+2)}{-1} = x + 2n + 3,$$

d'où l'identité

$$f_{n+2} = (x+2n+3)f_{n+1} - (n+1)^2 f_n.$$

Ce sont précisément les relations que, par une voie différente, j'avais trouvées dans la Note citée plus haut.