BULLETIN DE LA S. M. F.

DANIEL ALIBERT
GEORGES MALTSINIOTIS

Groupe fondamental du complémentaire d'une courbe à points doubles ordinaires

Bulletin de la S. M. F., tome 102 (1974), p. 335-351
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__335_0>

Bull. Soc. math. France,
102, 1974, p. 335-351.

GROUPE FONDAMENTAL DU COMPLEMENTAIRE D'UNE COURBE A POINTS DOUBLES ORDINAIRES

PAR

DANIEL ALIBERT ET GEORGES MALTSINIOTIS

RÉSUMÉ. — La variété $V_{n,d}$ des courbes planes C de degré n, à d points doubles ordinaires est irréductible si $4d > 2n^2—9n + 4$, c'est-à-dire $n > (4/3)g$. De plus, elle contient un point représentant une courbe formée de n droites en position générale. Le groupe fondamental du complémentaire d'une telle courbe étant commutatif, (*cf.* ABHYANKAR), il en résulte, suivant POPP, que lorsque l'inégalité ci-dessus est vérifiée, le groupe fondamental du complémentaire de C est commutatif.

Introduction

Dans [14], ZARISKI pose le problème de la commutativité du groupe fondamental du complémentaire d'une courbe plane de degré n, à d points doubles ordinaires. La démonstration qu'il propose consiste à déformer la courbe en n droites en position générale.

POPP reprend cette méthode, et étudie la variation du groupe fondamental quand la courbe varie dans une famille irréductible. Il démontre que, dans une famille irréductible de courbes planes de degré n à points doubles ordinaires, si l'une des fibres est formée de n droites en position générale, alors le groupe fondamental du complémentaire de toute fibre est commutatif. Il indique que la variété $V_{n,d}$ des courbes planes de degré n, à d points doubles ordinaires, est irréductible pour $d > (n-2)^2/2$, c'est-à-dire $n > 2g+2$. Il conclut à la commutativité dans ce cas.

Dans cet article, nous démontrons effectivement l'irréductibilité de $V_{n,d}$, et la commutativité du groupe fondamental pour $d > (2n^2-9n+4)/4$, c'est-à-dire $n > (4/3)g$.

Signalons enfin, à propos de ce problème, les résultats de EDMUNDS suivant lesquels il suffit, pour avoir la commutativité du π_1, de montrer que ce groupe est résoluble [4].

ABHYANKAR, par une méthode différente, montre que ce π_1 est commutatif pour $d \leqq (n^2+3n-4)/6$.

1. Courbes à points doubles ordinaires

1.1. DÉFINITION. — Soient k un corps, Y une courbe du plan projectif P_k^2. On dit que Y est une courbe à points doubles ordinaires si, pour tout point x de Y, on a

— ou bien Y est lisse sur k en x;

— ou bien Y n'est pas lisse sur k en x et, si x est un point de l'ouvert spec $k[T_0, T_1]$ de P_k^2, f une équation de Y dans $k[T_0, T_1]$, alors

$$f''_{T_0^2}(x) f''_{T_1^2}(x) - f''^2_{T_0 T_1}(x) \neq 0. \tag{1}$$

1.2. Soient S un schéma, $X = P_S^2$ le plan projectif sur S, D un diviseur positif relatif de X sur S, et Y le support de D. Localement sur X, Y est défini par une équation f; soit J l'idéal de $\mathcal{O}_X$, défini par f et les dérivées partielles f'_{T_0}, f'_{T_1}. On remarquera que l'idéal J est indépendant du choix de f. Le support T de J est le fermé de non-lissité du morphisme $Y \to S$.

Dans toute la suite, chaque fois qu'il sera question de T en tant que schéma, on le munira de la structure définie par J.

1.3. Il résulte du critère jacobien de netteté que dans la situation de 1.2, pour un point s de S, les conditions suivantes sont équivalentes :

1° La fibre $Y(s)$ est une courbe à points doubles ordinaires,

2° T est net sur S en tout point x au-dessus de s.

1.4. PROPOSITION. — *Soient S un schéma régulier (normal et factoriel suffirait) et intègre, $X = P_S^2$, D un diviseur positif relatif de X sur S et Y le support de D.*

On suppose que les fibres de Y sont des courbes à points doubles ordinaires. Soit T le fermé de non-lissité du morphisme $Y \to S$. Alors D est un diviseur relatif à croisements normaux relatifs sur S au voisinage de tout point x de Y ayant une des propriétés suivantes :

1° $x \notin T$.

2° $x \in T$, *et il existe une générisation de x dans la fibre de T au-dessus du point générique de S.*

Démonstration. — Le 1° est clair.

D'après 1.3, T est net sur S. Le 2° résulte donc du fait que S est régulier, et de l'hypothèse que T est étale sur S en x ([5], EGA IV, 18.10.1). On peut donc (quitte à faire un changement de base étale, et à localiser) supposer que $T \to S$ est un isomorphisme local en x, et S affine d'anneau A local. Identifions P_A^2 à Proj $A[T_0, T_1, T_2]$, et supposons que x soit un point de l'ouvert spec $A[T_0, T_1]$.

Soit I l'idéal de $A[T_0, T_1]$ définissant T en x. On peut supposer $I = (T_0, T_1)$. Soient f une équation de Y dans $A[T_0, T_1]$, $B = \mathcal{O}_{P_A^2}$, et $\mathcal{M}_B$ son idéal maximal. On a $f \in I^2 - I^3$, car Y a un point double dans la fibre générique.

1.4.1 LEMME. — *Il existe un couple f_1, f_2 d'éléments de l'hensélisé strict ${}^{hs}B$, satisfaisant à*

$$f = f_1 f_2,$$
$$f_i \in (\mathcal{M}_B - \mathcal{M}_B^2)^{hs} B, \qquad i = 1, 2.$$

Démonstration. — Le lemme est clair si f n'est pas irréductible. On suppose, dans la suite, $fA[T_0, T_1]$ premier.

Le nombre des idéaux premiers minimaux de ${}^{hs}B/f\,{}^{hs}B$ est égal au nombre d'idéaux maximaux du normalisé de B/fB ([11], ch. IX, cor. 1 de la prop. 1). Pour chercher ce nombre, nous allons éclater le fermé de non-lissité T dans la courbe Y.

1.4.2 LEMME. — *Soit $E \to Y$ l'éclaté de T dans Y.*

Soient k_A le corps résiduel de A, et k une extension quelconque de k_A. Posons

$$\overline{T} = T \otimes_A k,$$
$$\overline{Y} = Y \otimes_A k.$$

Soit $\overline{E} \to \overline{Y}$ l'éclaté de $\overline{T}$ dans $\overline{Y}$. On a un isomorphisme

$$\overline{E} \simeq E \otimes_A k.$$

Démonstration. — Posons

$$M = \otimes_{n=0}^{\infty} I^n \qquad \text{et} \qquad N = \otimes_{n=0}^{\infty} (I/(f))^n.$$

On a une suite exacte

$$0 \to \oplus (I^n \cap (f)) \to M \to N \to 0.$$

Si $n < 2$, $I^n \cap (f) = (f)$.

Si $n \geqq 2$, $I^n \cap (f) = I^{n-2} f$.

Il en résulte un isomorphisme

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{Proj} M/f\,M(2) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Proj} N.$$

Soit $\bar{I}$ (resp. $\bar{f}$) l'image de I (resp. de f) dans $k[T_0, T_1]$. Si l'on pose

$$\bar{M} = \otimes\,\bar{I}^n \qquad \text{et} \qquad \bar{N} = \otimes\,(\bar{I}/(\bar{f}))^n,$$

on a de même un isomorphisme

$$\text{(3)} \qquad (\operatorname{Proj} \bar{M}/\bar{f}\,\bar{M}(2)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Proj} \bar{N},$$

$Y \otimes_A k$ ayant un point double à l'origine. Le plan P_A^2 étant normalement plat le long de T, on a un isomorphisme

$$\text{(4)} \qquad \bar{M} \simeq M \otimes_A k.$$

Il résulte des isomorphismes (2), (3) et (4), un isomorphisme

$$\operatorname{Proj} \bar{N} \simeq (\operatorname{Proj} N) \otimes_A k.$$

Ce qui démontre 1.4.2.

On conserve les notations de 1.4.2. Le schéma E est normal. Le morphisme $E \longrightarrow Y$ est fini et birationnel, et ses fibres ont deux points au-dessus d'un point de T.

1.4.3. Le schéma E est par suite un normalisé de Y. Donc la clôture intégrale de B/fB a deux idéaux maximaux, par suite ${}^{hs}B/f\,{}^{hs}B$ a deux idéaux premiers minimaux. La courbe Y étant réduite, on a donc une décomposition

$$\text{(5)} \qquad f = f_1 f_2;$$

car B est factoriel. Ce qui démontre 1.4.1.

1.5. Corollaire. — *Y est normalement plat le long de T, en tout point de T satisfaisant le* 2°.

1.6. Corollaire. — *Supposons, de plus, que les fibres de Y aient le même nombre de points géométriques singuliers. Alors D est un diviseur relatif à croisements normaux relatifs.*

2. Variété des courbes projectives planes de degré n à d points doubles ordinaires

2.1. Soient k un corps algébriquement clos, $n \in \mathbf{N}^*$, $N = (n(n+3))/2$. Soient P^2 (resp. P^N) le plan projectif sur k (resp. l'espace projectif des équations des courbes sur k planes de degré n).

Soient (X, Y, T) (resp. $(A_{a,b,c})$, $a+b+c = n$, $a, b, c \geqq 0$) un système de coordonnées homogènes de P^2 (resp. de P^N).

On note $\Gamma(P^N)$ le diviseur de $P^N \times P^2$, défini par l'équation

$$F(X, Y, T) = \textstyle\sum_{a,b,c \geqq 0} A_{a,b,c} X^a Y^b T^c = 0. \tag{6}$$

Le diviseur $\Gamma(P^N)$ est un diviseur relatif de $P^N \times P^2$ au-dessus de P^N de degré n. De plus, le couple $(P^N, \Gamma(P^N))$ représente le foncteur contravariant D_n qui, à tout k-schéma localement noethérien S, associe l'ensemble des diviseurs relatifs de $P^2 \times S$ au-dessus de S, de degré n.

2.2. Soit d un entier tel que $d \leqq ((n-1)(n-2))/2$. On considère le schéma $P^N \times (P^2)^d$. Les points fermés de ce schéma correspondent aux couples formés d'une courbe plane de degré n, et d'un d-uple de points de P^2. Soit (X_j, Y_j, Z_j) un système de coordonnées homogènes du j-ième facteur de $(P^2)^d$. Soit U l'ouvert de $P^N \times (P^2)_d$, produit de P^N et du complémentaire dans $(P^2)^d$ des diagonales partielles.

DÉFINITION. — On notera par $W_{n,d}$ l'adhérence dans $P^N \times (P^2)^d$ du sous-schéma fermé de U, défini par les trois équations

$$\begin{cases} F\ (X_j, Y_j, Z_j) = 0, \\ F'_X(X_j, Y_j, Z_j) = 0, \qquad 1 \leqq j \leqq d. \\ F'_Y(X_j, Y_j, Z_j) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

2.3. PROPOSITION. — *Soit Γ une courbe projective plane de degré n à points doubles ordinaires. Soient $M_1, \ldots, M_d$, d de ces points doubles deux à deux distincts.*

Alors le point fermé de $W_{n,d}$, correspondant à $(\Gamma; M_1, \ldots, M_d)$, est un point lisse de dimension $(n(n+3)/2) - d$.

Pour la démonstration, *voir* [9].

2.4. Soit $S_{n,d}$ l'image de $W_{n,d}$ par la première projection

$$P^N \times (P^2)^d \to P^N.$$

Le schéma $S_{n,d}$ est l'adhérence de l'ensemble des points de P^N qui représente une courbe ayant au moins d points singuliers distincts deux à deux. Soit $p : W_{n,d} \to S_{n,d}$ le morphisme induit par la projection.

Le morphisme p est fini et surjectif.

2.5. Corollaire. — *Toute composante irréductible de $S_{n,d}$, qui contient un point qui représente une courbe à points doubles ordinaires, est de dimension $(n(n+3)/2)-d$.*

Démonstration. — Si S est une telle composante, S est l'image d'une composante irréductible de $W_{n,d}$ qui contient un point $(\Gamma; M_1, \ldots, M_d)$, où $M_1, \ldots, M_d$ sont des points doubles ordinaires de Γ. On conclut par 2.3.

2.6. Proposition. — *Soit $x = (\Gamma; M_1, \ldots, M_d)$ un point fermé de $W_{n,d}$ tel que Γ représente une courbe à points doubles ordinaires et que les M_i soient des points singuliers de Γ deux à deux distincts. Alors p est nette en x.*

Si, de plus, $M_1, \ldots, M_d$ sont les seuls points singuliers de Γ, p est étale en x.

Démonstration. — La netteté de p résulte du critère jacobien.

Supposons dans la suite que Γ n'a pas d'autre singularité que les M_i. Le groupe symétrique G_d opère par permutation de facteurs sur $(P^2)^d$, donc sur $P^N \times (P^2)^d$, et $W_{n,d}$ est stable par cette action. Soit $\tilde{W}_{n,d}$ le quotient de $W_{n,d}$ par l'action de G_d. Notons $q : W_{n,d} \to \tilde{W}_{n,d}$ l'épimorphisme canonique.

Le morphisme p, étant invariant par G_a, se factorise par q :

$$\begin{tikzcd} & W_{n,d} \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ \tilde{W}_{n,d} \arrow[rr, "r"] & & S_{n,d} \end{tikzcd}$$

Le morphisme q est étale en tout point x' de $W_{r,d}$ de la forme $(\Gamma'; M'_1, \ldots, M'_d)$ tel que les M'_i soient deux à deux distincts, car en un tel point le groupe d'inertie est trivial. Posons $y = p(x)$. La fibre $p^{-1}(y) = q^{-1}(r^{-1}(y))$ est réduite. Donc $r^{-1}(y)$ est réduite.

Or, $r^{-1}(y)$ contient un seul point z, car Γ n'a pas d'autre point singulier que les M_i.

Il en résulte $r^{-1}(y) = \operatorname{spec} k$.

Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}\tilde{W}' = (\operatorname{spec} \mathcal{O}_{S_{n,d},\, y}) \times_{S_{n,d}} \tilde{W}_{n,d} & \to & \tilde{W}_{n,d} \\ \downarrow{\scriptstyle r'} & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ \operatorname{spec} \mathcal{O}_{S_{n,d},\, y} & \to & S_{n,d}\end{array}$$

Le morphisme r' est fini, donc $W' = \operatorname{spec} B$, B étant une $S_{S_{n,d},y}$ algèbre finie et locale. On conclut donc, avec NAKAYAMA, que

$$\mathcal{O}_{S_{n,d},\, y} \xrightarrow{\sim} B.$$

Ce qui démontre que r est étale en z, et p étale en x.

2.7. COROLLAIRE. — *Soit* $\Gamma \in S_{n,d}$. *On suppose que* Γ *représente une courbe à points doubles ordinaires ayant d singularités. Alors* $S_{n,d}$ *est lisse en* Γ, *de dimension* $(n(n+3)/2)-d$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de 2.6 et 2.3.

3. Étude du morphisme $U_{n,d} \to M_g$

3.1. LEMME. — *Soient* $\Gamma \hookrightarrow P^2(X)$ *un diviseur relatif au-dessus d'un schéma* X, $x \in X$, *et* y *une générisation de* x *dans* X. *Si la fibre géométrique de* x *dans* X *est une courbe à points doubles ordinaires ayant d points singuliers distincts, alors la fibre géométrique de* y *est une courbe à points doubles ordinaires ayant au plus d points singuliers.*

Démonstration. — Soit $T \to X$ le fermé de non-lissité de Γ. Le schéma T est net au-dessus de x, il est donc net au voisinage de x donc en y. Par suite, la fibre de y a des points doubles pour seules singularités (1.3).

Soit A un anneau de valuation discrète strictement hensélien, $\operatorname{spec} A \to X$ un morphisme tel que l'image du point fermé de $\operatorname{spec} A$ soit x, et l'image du point générique y, et

$$T_A \to \Gamma_A \to \operatorname{spec} A$$

la figure obtenue par changement de base.

Le schéma T_A étant fini sur A, on a $T_A \xrightarrow{\sim} \coprod_i T_{i,A}$, où les $T_{i,A}$ sont des schémas locaux.

Ceux qui ne sont pas concentrés au-dessus du point fermé de A sont de dimension 1, donc étales sur A; ils sont donc intègres.

Un point singulier de la fibre spéciale a donc au plus une générisation dans T, ce qui termine la démonstration du lemme.

3.2. DÉFINITION. — On note $\Gamma(W_{n,d})$ (resp. $\Gamma(S_{n,d})$) le diviseur de $W_{n,d} \times P^2$ (resp. $S_{n,d} \times P^2$), défini par l'équation (6)

$$F(X, Y, T) = 0,$$

$\Gamma(W_{n,d})$ (resp. $\Gamma(S_{n,d})$) est une courbe et un diviseur relatif au-dessus de $W_{n,d}$ (resp. $S_{n,d}$).

On note $V_{n,d}$ la réunion des composantes irréductibles de $S_{n,d}$ dont la fibre générique géométrique dans $\Gamma(S_{n,d})$ est une courbe irréductible possédant d points doubles ordinaires pour seules singularités.

Remarquons que, pour qu'une composante irréductible de $S_{n,d}$ soit incluse dans $V_{n,d}$, il suffit qu'elle contienne un point dont la fibre géométrique dans $\Gamma(S_{n,d})$ soit une courbe irréductible ayant d points doubles ordinaires pour seules singularités. En effet, cela résulte de (3.1) et de la définition de $S_{n,d}$.

On note $U_{n,d}$ l'ensemble des points de $V_{n,d}$ dont la fibre géométrique dans $\Gamma(S_{n,d})$ est une courbe possédant d points doubles ordinaires pour seules singularités. $U_{n,d}$ est un ouvert dense de $V_{n,d}$: en effet, il contient les points génériques des composantes irréductibles de $V_{n,d}$, et, de plus, il est l'intersection de l'ouvert au-dessus duquel T est net et de l'ouvert complémentaire de

$$\bigcup_{d'>d} S_{n,d'}.$$

L'ouvert $U_{n,d}$ est lisse (2.7), et T est net sur $U_{n,d}$ à fibres de cardinal constant, donc étale sur $U_{n,d}$; de plus, $\Gamma(S_{n,d})$ est normalement plat le long de T (1.5).

Eclatons T dans $\Gamma(U_{n,d})$. On obtient une courbe

$$\gamma(U_{n,d}) \to \Gamma(U_{n,d}) \to U_{n,d}, \qquad \text{où} \quad \gamma(U_{n,d}) \to U_{n,d}$$

est lisse, et pour tout x de $U_{n,d}$,

$$\gamma(U_{n,d})_x \to \Gamma(U_{n,d})_x$$

est birationnel, et $\gamma(U_{n,d})_x$ est non singulière.

Le morphisme $\gamma(U_{n,d}) \to U_{n,d}$ est propre et plat, à fibres génériques géométriquement connexes, donc à fibres géométriquement irréductibles.

Ce morphisme définit un morphisme $\psi : U_{n,d} \to M_g$, où M_g est le module des courbes de genre $g = [((n-1)(n-2))/2] - d$.

3.3. Soient C une courbe projective lisse irréductible sur un corps algébriquement clos k, L un faisceau inversible sur C, et $V = \mathbf{V}((\Gamma(C, L)^3)^*)$ ([5], EGA II, 1.7.8). Soient

$$p : \quad V \times C \to V,$$

$$q : \quad V \times C \to C$$

les projections.

Comme $V \times C$ est universel pour la donnée de trois sections de L, on a un morphisme

$$m : \quad \mathcal{O}^3_{V \times C} \to q^* L.$$

L'ensemble U des points z de V, tels que m soit surjectif en tout point de $\{ z \} \times C$, est ouvert dans V; en effet, on a

$$U = V - p(\operatorname{Supp}(\operatorname{coker} m)),$$

coker (m) est de type fini, et p propre.

Au-dessus de U, le morphisme m définit un morphisme

$$\begin{tikzcd} U \times C \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times P^2 \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd}$$

3.4. Lemme. — *L'ensemble des points z de U, tels que h_z soit une application birationnelle de C sur son image et que $h_z(C)$ soit une courbe à points doubles ordinaires, est ouvert dans U.*

Démonstration. — 1° L'ensemble considéré est contenu dans l'ensemble U' des points z de U où h_z est fini. L'ensemble U' est ouvert dans U. En effet, soit

$$F = \{ z' \in U \times C ; \dim(h^{-1}(h(z'))) \geqq 1 \},$$

F est fermé, et $U' = U - p(F)$. Le morphisme $h : U' \times C \to U \times P^2$ est fini, car propre et quasi-fini.

2° Soit E l'image schématique de $U' \times C$ par h. Notons S le conoyau du morphisme

$$\mathcal{O}_{U' \times P^2} \to h_*(\mathcal{O}_{U' \times C}).$$

On a la suite exacte

$$(8) \qquad 0 \to \mathcal{O}_E \to h_*(\mathcal{O}_{U' \times C}) \to S \to 0.$$

Le sous-schéma E de $U' \times P^2$ est intègre, car $U' \times C$ l'est, et c'est un diviseur de $U' \times P^2$, car $U' \times P^2$ est régulier, et E intègre de codimension 1. De plus, E est un diviseur relatif au-dessus de U'. En effet, pour tout $z \in U'$, $E_z = E \times_{U'} \operatorname{spec} k(z)$ est ensemblistement l'image de $\{z\} \times C$ dans $\{z\} \times P^2$ par h_z, par suite E_z est de codimension 1 dans $\{z\} \times P^2$. En particulier, $\mathcal{O}_E$ est U'-plat.

Le morphisme h au-dessus de U' étant fini, on a

$$h_*(\mathcal{O}_{U' \times C})_{|\{z\} \times P^2} = h_{z*}(\mathcal{O}_C)$$

([5] EGA II, 1.5.2). Donc $S_{|\{z\} \times P^2}$ est le conoyau de

$$\mathcal{O}_{\{z\} \times P^2} \to h_{z*}(\mathcal{O}_C)$$

et on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{h_z(C)} \to h_{z*}(\mathcal{O}_C) \to S|_{\{z\} \times P^2} \to 0,$$

où $h_z(C)$ désigne l'image schématique de $\{z\} \times C$ par h_z, et par suite une surjection

$$\mathcal{O}_{E|\{z\} \times P^2} \xrightarrow{j_z} \mathcal{O}_{h_z(C)} \to 0.$$

Il en résulte que $h_z(C)$ est un sous-schéma de E_z.

3° L'ensemble considéré est contenu dans l'ouvert U'' des points z de U' tels que la fibre en z du support de S soit de dimension strictement inférieure à un. Au-dessus de tout point z de U'', h_z est un morphisme birationnel de C sur $h_z(C)$.

4° Le faisceau S étant génériquement plat sur U'', j_z est génériquement un isomorphisme. Donc le degré de E_z est génériquement égal au degré de $h_z(C)$, et ce dernier est égal à n pour tout z de U''. Comme E est plat sur U', le degré de E_z est constant sur U'. Donc j_z est un isomorphisme sur U''.

5° L'ensemble considéré U''' est l'ensemble des points z de U'' tels que $h_z(C)$ soit une courbe à points doubles ordinaires. Il résulte donc du 4° et de (1.3) que U''' est ouvert.

3.5. THÉORÈME. — *Soit x un point fermé de $U_{n,d}$. Si $n > (4/3)g$, toutes les composantes irréductibles de $\psi^{-1}\psi(x)$ sont de dimension inférieure ou égale à $3n-2g+2-p$ ($p = 0$ si $g \geqq 2$, $p = 1$ si $g = 1$, $p = 3$ si $g = 0$), et il y a au plus une composante irréductible de cette dimension.*

Démonstration. — Notons $A(x) = \overset{-1}{\psi}(\psi(x))$, et considérons

$$\gamma_{A(x)} \xrightarrow{u} \Gamma_{A(x)} \xrightarrow{v} A(x).$$

Les fibres fermées de $v \circ u$ sont toutes isomorphes à l'unique courbe C, projective, lisse, obtenue en désingularisant la fibre de x dans $\Gamma(U_{n,d})$. Considérons le schéma

$$I = \operatorname{Isom}(C \times A(x), \gamma_{A(x)})$$

au-dessus de $A(x)$ qui représente le foncteur qui associe à tout $A(x)$-schéma X l'ensemble

$$\operatorname{Isom}_X(C \times X, \gamma_{A(x)} \times_{A(x)} X).$$

Soit $\alpha \in \operatorname{Isom}(C \times I, \gamma_{A(x)} \times_{A(x)} I)$, l'isomorphisme universel qui est une trivialisation de $\gamma_I = \gamma_{A(x)} \times_{A(x)} I$.

Le schéma $\Gamma_I = \Gamma_{A(x)} \times_{A(x)} I$ est un sous-schéma fermé de $P^2(I)$, on a donc un morphisme

$$\gamma_I \to P^2(I),$$

et donc une surjection

$$\mathcal{O}^3_{\gamma_I} \to L \to 0,$$

L étant un faisceau inversible sur γ_I de degré n.

Le faisceau L et la trivialisation α définissent un morphisme

$$\beta : \quad I \to J^n,$$

J^n étant la composante de degré n de $\operatorname{Pic}(C)$.

3.5.1. LEMME. — *Pour tout point fermé y de I, $\beta^{-1}\beta(y)$ est irréductible de dimension $3\,l(\beta(y))-1$, où $l(\beta(y))$ désigne la dimension de l'espace vectoriel des sections globales du faisceau inversible sur C correspondant au point $\beta(y)$ de J^n.*

Démonstration. — Soit y' l'image de y dans $A(x)$. Les corps $k(y)$, $k(y')$, et k s'identifient canoniquement, ainsi que les courbes fibres dans $\gamma_{A(x)}$ et γ_I respectivement, et le morphisme

$$\operatorname{spec} k = \operatorname{spec} k(y) \to I$$

définit, par la propriété universelle de I, un isomorphisme

$$\alpha_y : \quad C \to \gamma_y.$$

Soit $L_y = L \otimes_{O_I} k(y)$. Soit $G = \alpha_y^* (L_y)$. En gardant les notations de 3.4, le diviseur relatif de $P^2(U''')$, E, de degré n au-dessus de U''', définit un morphisme

$$\nu : \quad U''' \to P^N \quad (2.1)$$

tel que $E = \Gamma_{P^N} \times_{P^N} U'''$, qui se factorise à travers $A(x)$. On notera encore ν le morphisme induit de U''' dans $A(x)$, et on remarquera que

$$E = \Gamma_{A(x)} \times_{A(x)} U'''.$$

Alors $\gamma_{U'''}$ est canoniquement isomorphe à $C \times U'''$ puisque tous deux sont des normalisations de E, et cet isomorphisme permet de factoriser ν à travers I suivant le diagramme

$$\begin{tikzcd} U''' \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\nu"'] & & I \arrow[dl] \\ & \psi^{-1}\psi(x) & \end{tikzcd}$$

Il est immédiat que ensemblistement $\lambda(U''') = \beta^{-1}\beta(y)$ et que les fibres de λ sont de dimension 1. Or U''' est irréductible, non vide, car $y' \in U_{n,d}$, de dimension $3\,l(\beta(y))$ puisque c'est un ouvert de $\mathbf{V}((\Gamma(C, G)^3)^*)$. Donc $\beta^{-1}\beta(y)$ est irréductible de dimension $3\,l(\beta(y))-1$.

3.5.2 LEMME. — *Soit $k \in N^*$, et posons*

$$J_k^n = \{ j \in J^n ;\ l(j) \geqq n-g+l+k \}.$$

Alors :

1° *J_k^n est un fermé de J^n.*

2 $\dim J_k^n \leqq 2g-n-2k$ *pour* $1 \leqq k \leqq \dfrac{2g-n}{2}$,

$J_k^n = \varnothing$ *pour* $k > \dfrac{2g-n}{2}$.

Démonstration. — *Voir* [8].

3.5.3. *Suite de la démonstration du théorème* 3.5. — Démontrons que toutes les composantes irréductibles de I sont de dimension inférieure ou égale à $3n-2g+2$, et qu'il y a au plus une composante irréductible de cette dimension.

En effet, soit $V = J^n - J_1^n$ qui est un ouvert de J^n. Considérons la restriction de β au-dessus de l'ouvert V :

$$\beta^{-1}(V) \to V.$$

Suivant 3.5.1, la dimension des fibres de β au-dessus de V est

$$3(n-g+1)-1 = 3n-3g+2.$$

La dimension de V étant g, les composantes irréductibles de $\beta^{-1}(V)$ sont de dimension inférieure ou égale à

$$3n-3g+2+g = 3n-2g+2.$$

Il y a au plus une composante de dimension $3n-2g+2$, car une telle composante est dominante, et la fibre générique est irréductible.

Montrons que les composantes irréductibles de I, qui sont au-dessus de $J^n - V$, sont de dimension strictement inférieure à $3n-2g+2$; pour cela, il suffit de le démontrer au-dessus de $J_k^n - J_{k+1}^n$, pour tout k, tel que $1 \leqq k \leqq (2g-n)/2$.

Considérons

$$\beta^{-1}(J_k^n - J_{k+1}^n) \to J_k^n - J_{k+1}^n.$$

Suivant le lemme 3.5.1, les fibres de β ont une dimension égale à $3(n-g+k+l)-1 = 3n-3g+3k+2$, et suivant le lemme 3.5.2, la dimension de $J_k^n - J_{n+1}^k$ est inférieure ou égale à $2g-n-2k$.

Donc les composantes irréductibles de $\beta^{-1}(J_k^n - J_{k+1}^n)$ sont de dimension inférieure ou égale à

$$3n-3g+3k+2+2g-n-2k = 2n-g+k+2 \leqq \frac{3}{2}n+2,$$

car

$$k \leqq \frac{2g-n}{2}.$$

Or $n > (4/3)g$, donc $(3/2)(n+2) < 3n-2g+2$, d'où le résultat.

Enfin le morphisme $I \to \psi^{-1}\psi(x)$ est surjectif à fibres de dimension p d'où le théorème.

3.6. Théorème. — *Si $n > (4/3)g$, $V_{n,d}$ est irréductible.*

Démonstration. — L'ouvert $U_{n,d}$ est dense dans $V_{n,d}$, donc il suffit de voir que $U_{n,d}$ est irréductible. Comme il est lisse, il suffit de voir qu'il est connexe (2.7).

Soit U une composante connexe de $U_{n,d}$.

$$\dim U = \frac{n(n+3)}{2} - d = 3n+g-1 \quad (2.5).$$

La dimension des composantes irréductibles des fibres de ψ étant inférieure ou égale à $3n-2g+2-p$, pour $n > (4/3)g$ (3.5), on déduit

$$\dim \overline{\psi(U)} \geqq 3n+g-l-3n+2g-2+p = 3g-3+p = \dim M_g.$$

Or M_g est irréductible [3], donc U est dominant et, par suite, la fibre générique de $U \longrightarrow M_g$ est de dimension $3n-2g+2-p$. Comme la fibre générique de ψ possède au plus une composante de cette dimension (3.5), on a $U = U_{n,d}$.

4. Droites en position générale

4.1. LEMME. — *Soit A un anneau de valuation discrète strictement hensélien. Soit $D \hookrightarrow P_A^2$ un diviseur positif relatif au-dessus de* spec A, *dont la fibre fermée D_0 est une courbe à points doubles ordinaires.*

Soit S l'ensemble des points singuliers de D_0 qui ont une générisation non lisse dans la fibre générique D_1.

Si $D_0 - S$ est connexe, D_1 est géométriquement irréductible.

Démonstration. — Soit $T \longrightarrow D$ le fermé de non-lissité (1.2) du morphisme $D \rightarrow \operatorname{spec} A$. On a

$$T \simeq \coprod_{i \in I} T_i,$$

où I est un ensemble fini, et les T_i des schémas locaux finis sur spec A. Soient $J = \{ i \in I;\ \dim T_i = 1 \}$, $T' = \coprod_{i \in J} T_i$.

Le schéma T' est étale sur spec A. Soit $\mathscr{D}$ le schéma obtenu en éclatant T' dans D. La fibre générique $\mathscr{D}_1$ de $\mathscr{D}$ est lisse (1.4.2), et la fibre fermée $\mathscr{D}_0$ connexe par hypothèse.

Le morphisme $\mathscr{D} \longrightarrow \operatorname{spec} A$ est propre et plat, il en résulte que $\mathscr{D}_1$ est géométriquement connexe, donc géométriquement irréductible.

4.2. PROPOSITION. — *Soient W une composante irréductible de $W_{n,d}$ et $x = (\Gamma;\ M_1, \ldots, M_d)$ un point de W. On suppose que Γ est une courbe formée de n droites en position générale. On suppose, de plus, que si l'on enlève de Γ les d points singuliers $M_1, \ldots, M_d$, l'espace obtenu est connexe. Alors il existe un ouvert U de W formé de points $(C;\ N_1, \ldots, N_d)$, où C représente une courbe irréductible à points doubles ordinaires dont les N_j sont les seules singularités.*

Démonstration. — Soit $\Gamma(W)$ le diviseur relatif induit au-dessus de W par $\Gamma(W_{n,d})$ (3.2). La fibre de $\Gamma(W)$ au-dessus de x est une courbe formée de n droites en position générale. En particulier, ses seules singularités sont des points doubles ordinaires.

Il existe un ouvert V contenant x tel que les fibres de $\Gamma(W)$ au-dessus des points de V soient des courbes à points doubles ordinaires (1.3). D'autre part, $\dim W = (n(n+3)/2)-d$ (2.3).

Soient $S^1, \ldots, S^r$, les composantes irréductibles de $S_{n,d+1}$ qui passent par Γ. On a

$$\dim S^i = \frac{n(n+3)}{2} - d - 1.$$

Donc si, comme précédemment, p désigne le morphisme canonique

$$p: \quad W \to S_{n,d},$$

on a

$$\dim \bigcup_{i=1}^{i=r} (p^{-1}(S^i)) \leqq \frac{n(n+3)}{2} - d - 1.$$

Par suite, $V' = V - \bigcup_{i=1}^{i=r} (p^{-1}(S^i))$ est un ouvert non vide de W. Les fibres de $\Gamma(W)$ au-dessus des points de V' sont des courbes qui ont exactement d points doubles ordinaires comme singularités. Soit η le point générique de W, $\eta \in V'$.

Le point M_j est spécialisé d'un point non lisse de la fibre générique, et cette fibre n'a pas d'autre point singulier que ces d générisations, car elle n'en a que d.

Il résulte donc, de (4.1) et de l'hypothèse de la proposition, que $\Gamma(W)_\eta$ est géométriquement irréductible. On conclut avec ([5], EGA IV, 9.7.8).

4.3. COROLLAIRE. — *Il existe un point de $V_{n,d}$ qui représente une courbe formée de n droites en position générale.*

Démonstration. — Soit Γ une courbe formée de n droites en position générale. Il existe d points singuliers de Γ, $M_1, \ldots, M_d$ tels que $\Gamma - \{M_1, \ldots, M_d\}$ soit connexe, car

$$d \leqq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Soit W une composante irréductible de $W_{n,d}$ qui contient $(\Gamma; M_1, \ldots, M_d)$. Soit S sa projection dans P^N. Il résulte de (4.2) que S contient un point représentant une courbe irréductible à points doubles ordinaires ayant d singularités.

On a donc $S \subset V_{n,d}$ (3.2), et $\Gamma \in S$, ce qui démontre le corollaire.

6. **Résultat de commutativité**

THÉORÈME. — *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geqq 0$, C une courbe projective plane irréductible, de degré n, à points doubles ordinaires.*

Soit n' le plus grand quotient premier à p de n.

Notons $\pi_1^{(p)}(P^2 - C, a)$ la limite projective des quotients du groupe fondamental $\pi_1(P^2 - C, a)$ finis, de cardinal premier à p (cf. [10]).

Si $n > (4/3)\, g$, on a

$$\pi_1^{(p)}(\mathrm{P}^2 - C, a) \simeq \frac{\mathbf{Z}}{n'\mathbf{Z}}.$$

Démonstration. — Elle résulte de (4.3), (3.6), et des résultats de POPP [10].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABHYANKAR (S. S.). — Tame coverings and fundamental groups of algebraic varieties, *Amer. J. of Math.*, t. 81, 1959, p. 46-94; t. 82, 1960, p. 120-190, 341-388.

[2] CHEVALLEY (C.). — Sur la théorie de la variété de Picard, *Amer. J. of Math.*, t. 82, 1960, p. 435-490.

[3] DELIGNE (P.) et MUMFORD (D.). — *The irreductibility of the space of curves of given genus.* — Paris, Presses Universitaires de France, 1969 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, p. 75-110).

[4] EDMUNDS (G.). — Coverings of node curves, *J. London math. Soc.*, Series 2, t. 1, 1969, p. 473-479.

[5] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.) [EGA I à IV]. — *Éléments de géométrie algébrique.* — Paris, Presses Universitaires de France, 1960, ... (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 4, ...).

[6] GROTHENDIECK (A.) [SGA 1]. — *Séminaire de géométrie algébrique*, 1960/61 : *Revêtements étales et groupe fondamental.* — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 224).

[7] GROTHENDIECK (A.) et MURRE (J. P.). — *The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossing on a scheme.* — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 208).

[8] MARTENS (H. H.). — From the classical theory of jacobian varieties, « *Proceedings of the 15th Scandinavian congress* » [1968. Oslo], p. 74-98. — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lecture Notes in Mathematics*, 118).

[9] Popp (H.). — Zur Reduktionstheorie algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad 1, *Archiv der Math.*, Basel, t. 17, 1966, p. 510-522.

[10] Popp (H.). — *Fundamentalgruppen algebraischer Mannigfaltigkeiten.* — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lecture Notes in Mathematics*, 176).

[11] Raynaud (M.). — *Anneaux locaux henséliens.* — Berlin, Springer-Verlag, 1970. (*Lecture Notes in Mathematics*, 169).

[12] Severi (F.). — *Vorlesungen über algebraische Geometrie.* — Leipzig, B. G. Teubner, 1921.

[13] Van der Waerden (B. L.). — Zur algebraischen Geometrie, XI, *Math. Ann.*, Berlin, t. 114, 1937, p. 683-699.

[14] Zariski (O.). — *Algebraic surfaces.* 2nd edition. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Ergebnisse der Mathematik*, 61).

(Texte définitif reçu le 7 juin 1974.)

Daniel Alibert,
4, allée des Amonts,
91440 Bures-sur-Yvette,
et
Georges Maltsiniotis,
40, rue Lacépède,
75005 Paris.