THIERRY VUST

Opération de groupes réductifs dans un type de cônes presque homogènes

Bulletin de la S. M. F., tome 102 (1974), p. 317-333
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__317_0>

Bull. Soc. math. France,
102, 1974, p. 317-333.

OPÉRATION DE GROUPES RÉDUCTIFS DANS UN TYPE DE CÔNES PRESQUE HOMOGÈNES

PAR

THIERRY VUST

Université de Grenoble

RÉSUMÉ. — Soient G un groupe algébrique réductif connexe, K le sous-groupe des points fixes d'un automorphisme involutif de G, le corps de base étant algébriquement clos et de caractéristique nulle. Via l'étude de l'opération de K dans certains cônes presque homogènes pour G, on détermine l'ensemble des types de G-modules rationnels irréductibles de dimension finie possédant des invariants non nuls par K.

Soient G un groupe algébrique réductif connexe, σ un automorphisme involutif du groupe algébrique G ($\sigma \neq \text{id}$), et soit K le sous-groupe de G des points fixes de σ, le corps de base étant algébriquement clos et de caractéristique nulle. Ce travail est consacré à l'étude de l'opération de K dans les cônes des G-modules rationnels irréductibles de dimension finie; il s'agit de l'adhérence de l'ensemble des éléments primitifs du G-module considéré (*cf.* [3], § 12) ou des HV-variétés de [8].

Soit M un G-module rationnel irréductible de dimension finie; on note $C(M)$ le cône de M. La variété des droites de $C(M)$ est G-isomorphe à G/P, où P est un sous-groupe parabolique de G. On commence par l'étude de l'opération de K dans G/P (§ 1). Cela conduit à l'introduction de certaines classes de tores (resp. de sous-groupes paraboliques) de G, ceux qu'on appellera σ-anisotropes; on prouve essentiellement qu'ils sont conjugués par les éléments de K lorsqu'ils sont maximaux (resp. minimaux) et que la variété G/P est presque homogène pour l'opération de K. Ainsi l'orbite $K.p$ d'un point p en position générale dans $C(M)$ est de codimension $\leqq 1$ dans $C(M)$. Les résultats du paragraphe 1 sont pour la plupart connus, et sont conséquences de la théorie des algèbres de Lie réductives involutives (*cf.* [5], par exemple).

Le critère de Hilbert-Mumford permet ensuite de préciser l'allure des orbites de K dans $C(M)$ (§ 2). Il apparaît que l'orbite $K.p$ est soit ouverte, soit fermée et de codimension 1 dans $C(M)$, et que les orbites adhérentes à 0 sont toutes des cônes.

Le paragraphe 3 est consacré à une application : la détermination, en fonction de leur poids dominant, des types de G-modules rationnels irréductibles de dimension finie M tels que $M^K \neq (0)$. Le lien avec les résultats précédents est dû à la connaissance de la structure de G-module de l'algèbre des fonctions régulières sur $C(M)$ (*cf.* [8]), et réside dans l'interprétation géométrique que voici : pour que $M^K \neq (0)$, il faut et il suffit que l'orbite $K.p$ d'un point p en position générale dans $C(M)$ ne rencontre qu'une fois la droite de M passant par p. La description obtenue « des représentations de classe 1 » est connue, et serait attribuée à SUGIURA (?); la démonstration seule fait défaut semble-t-il.

La référence générale concernant les groupes algébriques réductifs, leurs sous-groupes paraboliques, les ensembles de racines par rapport à un tore, etc., est le travail de BOREL-TITS [3]. C'est un certain « parallélisme » avec la théorie des groupes algébriques définis sur $\mathbf{R}$ qui est à la base de la terminologie utilisée au paragraphe 1 (*cf.* [3], § 4 et 14).

L'auteur tient enfin à remercier AYEL de lui avoir signalé l'existence du problème de la description « des représentations de classe 1 ».

1. L'opération de K dans G/P.

1.0. Le corps de base k est algébriquement clos et de caractéristique nulle.

Dans tout ce travail, on désigne par G un groupe algébrique réductif connexe, par σ un automorphisme involutif (différent de l'application identique) du groupe algébrique G et, par K l'ensemble des $s \in G$ tels que $\sigma(s) = s$.

Il est bien connu que K est un sous-groupe réductif de G. Cela peut se voir en considérant le produit semi-direct G' de $\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z}$ et de G correspondant à l'opération de $\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z}$ dans G décrite par $-1.s = \sigma(s)$, $s \in G$. Le sous-groupe K et le centralisateur de $(e, -1)$ dans G' ont alors la même composante neutre; puisque la classe de conjugaison de $(e, -1)$ dans G' est fermée (*cf.* [3], § 10), il résulte d'un théorème, dû à MATSUSHIMA (*cf.* [(1], [6]) que K est réductif.

Soit H un groupe linéaire algébrique; on note H^0 la composante neutre de H, $R(H^0)$ [resp. $R_u(H^0)$] le radical [resp. unipotent] de H^0. De plus, pour toute partie de E de H, on note $Z_H(E)$ le centralisateur de E dans H.

1.1. Soit B un sous-groupe de Borel de G. Puisque $B \cap \sigma(B)$ contient un tore maximal de G, il résulte de STEINBERG ([10], § 7), que $B \cap \sigma(B)$ contient un tore maximal de G invariant par σ. Par suite, pour tout sous-groupe parabolique P de G, $P \cap \sigma(P)$ contient un tore maximal de G invariant par σ.

On dira qu'un tore S de G est *σ-anisotrope* si S n'est pas réduit à $\{e\}$, et si $\sigma(s) = s^{-1}$ pour tout $s \in S$. Il est clair que le conjugué par un élément de K d'un tore σ-anisotrope de G est aussi σ-anisotrope.

PROPOSITION 1. — *L'ensemble des tores σ-anisotropes de G est non vide.*

Preuve. — On suppose que G ne contient pas de tores σ-anisotropes. Cela signifie que la restriction de σ à tout tore de G invariant par σ est l'identité. Soit alors B un sous-groupe de Borel de G; puisque B contient un tore maximal de G invariant par σ, on a $\sigma(B) = B$. Soit enfin T un tore maximal de G, B_+ et B_- deux sous-groupes de Borel opposés contenant T. D'après ce qui précède, B_+ et B_- sont invariants par σ; il en est donc de même de $B_+ \cap B_- = T$. Ainsi, $\sigma(s) = s$ pour tout élément semi-simple s de G, d'où σ est l'application identique.

PROPOSITION 2. — *Soit S un tore σ-anisotrope maximal de G. Alors :*

(i) *S est l'unique tore σ-anisotrope maximal de $Z_G(S)$;*

(ii) *le sous-groupe dérivé de $Z_G(S)$ est contenu dans K;*

(iii) *$Z_G(S)$ est produit presque direct de $(Z_G(S) \cap K)^0$ et de S;*

(iv) *tout tore maximal de G contenant S est invariant par σ.*

Preuve. — La première affirmation provient du fait que tout tore σ-anisotrope de $Z_G(S)$ est contenu dans S.

Si la restriction de σ au sous-groupe dérivé de $Z_G(S)$ n'était pas l'application identique, ce sous-groupe contiendrait un tore σ-anisotrope S' (prop. 1); or, d'après (i), $S' \subset S$, ce qui est absurde. La deuxième affirmation est donc prouvée.

On désigne par Z la composante neutre du centre de $Z_G(S)$. Il est clair que Z est produit presque direct de $(Z \cap K)^0$ et de S; comme $Z_G(S)$ est produit presque direct de son sous-groupe dérivé et de Z, (iii) provient de (ii).

Soit enfin T un tore maximal de G contenant S, et soit $g \in T$. On écrit

$$g = ks, \qquad k \in (Z_G(S) \cap K)^0, \qquad s \in S,$$

suivant (iii). On a alors $\sigma(g)g^{-1} = s^{-2} \in S$; par suite $\sigma(g) = s^{-2}g \in T$, d'où (iv).

1.2. Soit H un groupe linéaire algébrique. On note $X^*(H)$ (resp. $X_*(H)$) l'ensemble des caractères de H [resp. l'ensemble des sous-groupes (multiplicatifs) à un paramètre de H]. Si H est un tore, on note $\langle \lambda, \chi \rangle$ l'entier q tel que $(\chi \circ \lambda)(t) = t^q$, $\lambda \in X_*(H)$, $\chi \in X^*(H)$, $t \in k^*$; on obtient ainsi une forme bilinéaire qui met $X_*(H)$ et $X^*(H)$ en dualité.

Soit T un tore de G; on note $\Phi(T, G)$ l'ensemble des racines de G par rapport à T. Lorsqu'on parlera de chambres, facettes, ... de $X(T)_* \otimes \mathbf{R}$, il est sous-entendu qu'il s'agit de chambres, facettes, ... de $X(T)_* \otimes \mathbf{R}$ relativement à la famille d'hyperplans $\operatorname{Ker}(\alpha)$, $\alpha \in \Phi(T, G)$.

Soit $\lambda \in X_*(G)$; on note $Z_G(\lambda) = Z_G(\lambda(k^*))$. On désigne enfin par $P(\lambda)$ l'ensemble des $s \in G$ tels que $\lim_{t \to 0} \lambda(t)s\lambda(t)^{-1}$ existe : on entend par là que l'image de l'homomorphisme $k[G] \to k[t, t^{-1}]$, correspondant à $t \mapsto \lambda(t)s\lambda(t)^{-1}$, est contenue dans $k[t]$. Alors $P(\lambda)$ est un sous-groupe parabolique de G (*cf.* [7], chap. 2, § 2); en fait on a le résultat que voici :

PROPOSITION 3. — *Soit T un tore maximal de G tel que $\lambda \in X_*(T)$; alors $P(\lambda)$ est le sous-groupe parabolique de G contenant T correspondant à* $\{\alpha \in \Phi(T, G); \langle \lambda, \alpha \rangle \geqq 0\}$. *En particulier,* $\lambda \in X_*(R(P(\lambda)))$, *et* $Z_G(\lambda)$ *est un sous-groupe réductif maximal de* $P(\lambda)$.

Preuve. — Il est évident que $T \subset P(\lambda)$. Soient alors $\alpha \in \Phi(T, G)$, U_α le sous-groupe radiciel à un paramètre associé, et $\theta_\alpha : k \to U_\alpha$ l'isomorphisme vérifiant

$$\operatorname{ad}(s)\theta_\alpha(x) = \theta_\alpha(\alpha(s)x), \qquad s \in T, \quad x \in k.$$

On a en particulier

$$\operatorname{ad}(\lambda(t))\theta_\alpha(x) = \theta_\alpha(t^{\langle \alpha, \lambda \rangle}x), \qquad t \in k^*, \quad x \in k.$$

Ainsi, pour que U_α soit contenu dans $P(\lambda)$, il faut et il suffit que $\langle \lambda, \alpha \rangle$ soit $\geqq 0$. Les affirmations de la proposition sont dès lors claires.

REMARQUE 1. — La proposition 3 signifie que $P(\lambda)$ est le sous-groupe parabolique de G associé à la facette de $X_*(T) \otimes \mathbf{R}$ contenant λ. Comme les sous-groupes paraboliques de G contenant T sont en correspondance bijective avec les facettes de $X_*(T) \otimes \mathbf{R}$, $\lambda \mapsto P(\lambda)$ est une application surjective de $X_*(T)$ dans l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G contenant T.

PROPOSITION 4. — *Soient P un sous-groupe parabolique de G tel que P et $\sigma(P)$ soient opposés,* et *S un tore σ-anisotrope maximal de $R(P \cap \sigma(P))$. Alors il existe $\lambda \in X_*(S)$ tel que $P = P(\lambda)$ et $Z_G(\lambda) = Z_G(S) = P \cap \sigma(P)$.*

Preuve. — (*a*) Puisque $Z_G(S) \cap P$ est un sous-groupe parabolique de $Z_G(S)$, il existe un tore maximal T de P invariant par σ et contenant S. Soit alors $\mu \in X_*(T)$ tel que $P = P(\mu)$. On désigne par F la facette de $X_*(T) \otimes \mathbf{R}$ contenant μ. Si P et $\sigma(P)$ sont opposés, alors $\sigma(F) = -F$; en particulier, $-\sigma(\mu) \in F$. Comme F est un cône convexe, $\lambda = \mu - \sigma(\mu)$ appartient aussi à F; par suite, $P = P(\lambda)$ avec $\sigma(\lambda) = -\lambda$. Il est alors évident que $P \cap \sigma(P) = Z_G(\lambda)$.

(*b*) Puisque $\lambda \in X_*(R(P \cap \sigma(P)))$ (prop. 3), et puisque $S \subset T$, par maximalité de S, on a $\lambda \in X_*(S)$.

(*c*) De (*b*) résulte que $P \cap \sigma(P) = Z_G(\lambda) \supset Z_G(S)$. Comme d'autre part $S \subset R(P)$, $Z_G(S)$ contient un sous-groupe réductif maximal de P; on a donc

$$P \cap \sigma(P) = Z_G(\lambda) = Z_G(S),$$

ce qui achève la démonstration.

On dira des sous-groupes paraboliques P de G, tels que P et $\sigma(P)$ sont opposés, que ce sont des sous-groupes paraboliques *σ-anisotropes*; d'après la proposition 4, ils sont tous de la forme $P = P(\lambda)$, où $\sigma(\lambda) = -\lambda$. Enfin, de la proposition 1, résulte qu'il en existe. Il est clair que le conjugué par un élément de K d'un sous-groupe parabolique σ-anisotrope de G est aussi σ-anisotrope.

COROLLAIRE. — *Soit P un sous-groupe parabolique σ-anisotrope de G. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *P est minimal;*

(ii) *$R(P \cap \sigma(P))$ contient un tore σ-anisotrope maximal de G;*

(iii) *$P \cap \sigma(P)$ est le centralisateur dans G d'un tore σ-anisotrope maximal de G.*

Preuve. — (i) $\Rightarrow$ (ii) : Soient S un tore σ-anisotrope maximal de $R(P \cap \sigma(P))$, et S' un tore σ-anisotrope maximal de G contenant S. On sait que $P = P(\lambda)$ pour un $\lambda \in X_*(S)$. Soit alors C une chambre de $X_*(S') \otimes \mathbf{R}$ telle que $\lambda \in \bar{C}$. Si $\lambda' \in C$; alors $P(\lambda')$ est un sous-groupe parabolique σ-anisotrope de G contenu dans $P(\lambda)$ et admettant $Z_G(S')$

comme sous-groupe réductif maximal. Comme $P = P(\lambda)$ est minimal, on a donc $P = P(\lambda')$, d'où $S' \subset R(P \cap \sigma(P))$, et enfin, $S = S'$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Cela provient immédiatement de la proposition 4.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Soit P' un sous-groupe parabolique σ-anisotrope de G contenu dans P. On a alors

$$Z_G(S') = P' \cap \sigma(P') \subset P \cap \sigma(P) = Z_G(S),$$

où S' (resp. S) est un tore σ-anisotrope maximal de $R(P' \cap \sigma(P'))$ (resp. de G). D'après la proposition 2 (i), on a $S' \subset S$, d'où $Z_G(S') \supset Z_G(S)$. Ainsi P et P' ont un sous-groupe réductif maximal commun : ils coïncident donc (*cf.* [3], 4.4).

1.3. THÉORÈME 1. — *Soit P un sous-groupe parabolique σ-anisotrope de G. Alors l'ensemble $K^0 P$ est ouvert dans G.*

Preuve. — On désigne par $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{g}$ les algèbres de Lie de K^0, P, G respectivement. Puisque $K^0 P$ est l'orbite de e pour l'opération naturelle de $K^0 \times P$ dans G, il suffit de vérifier que $\mathfrak{k} + \mathfrak{p} = \mathfrak{g}$. Puisque P et $\sigma(P)$ sont opposés, tout élément $a \in \mathfrak{g}$ peut se mettre sous la forme $a = b + (d\sigma)_e(c)$ où b, $c \in \mathfrak{p}$; mais alors a s'écrit aussi $a = (b-c) + (c + (d\sigma)_e(c))$, d'où la conclusion.

COROLLAIRE. — *Soient S un tore σ-anisotrope maximal de G, et $\lambda \in X_*(S)$ tel que $Z_G(\lambda) = Z_G(S)$. Alors le sous-groupe $SR_u(P(\lambda))$ est résoluble, et $K^0 SR_u(P(\lambda))$ est ouvert dans G.*

Preuve. — La première affirmation est banale. D'après les propositions 2 et 3, on a

$$K^0 P(\lambda) = K^0 Z_G(\lambda) R_u(P(\lambda)) = K^0 Z_G(S) R_u(P(\lambda)) = K^0 SR_u(P(\lambda)).$$

La seconde affirmation provient donc immédiatement du théorème 1.

Le corollaire précédent affirme en particulier l'existence de sous-groupes de Borel B de G tels que $K^0 B$ soit ouvert dans G : on dira de ces sous-groupes qu'ils sont *opposés* de K. Les sous-groupes de Borel de G opposés de K forment un ouvert de la variété des sous-groupes de Borel de G et sont conjugués deux à deux par les éléments de K^0; ils contiennent un tore σ-anisotrope maximal de G. D'un autre côté, tout sous-groupe parabolique σ-anisotrope de G contient un sous-groupe de Borel opposé de K; en effet, d'après la proposition 4 et son corollaire, tout sous-groupe parabolique σ-anisotrope minimal P de G est de la forme $P = P(\lambda)$, où λ

est un sous-groupe à un paramètre d'un tore σ-anisotrope maximal S de G contenu dans P; par suite, tout sous-groupe de Borel de P contenant $SR_u(P)$ (donc tout sous-groupe de Borel de P) est opposé de K.

LEMME 1. — *Soit T un tore maximal de G; soit $\lambda_1, \lambda_2 \in X_*(T)$. On suppose qu'il existe une chambre C de $X_*(T) \otimes \mathbf{R}$ telle que $\lambda_1, \lambda_2 \in \overline{C}$. Alors $P(\lambda_1) \cap P(\lambda_2) = P(\lambda_1 + \lambda_2)$.*

Preuve. — Soient F et F' deux facettes de $X_*(T) \otimes \mathbf{R}$, $P(F)$ et $P(F')$ les sous-groupes paraboliques de G contenant T et associés à F et F' respectivement; on rappelle que, pour que $P(F)$ soit contenu dans $P(F')$, il faut et il suffit que F' soit contenu dans l'adhérence $\overline{F}$ de F. Ainsi, pour que $P(F)$ soit contenu dans $P(\lambda_1) \cap P(\lambda_2)$, il faut et il suffit que $\lambda_1, \lambda_2 \in \overline{F}$. Comme $\lambda_1, \lambda_2 \in \overline{C}$, $P(\lambda_1) \cap P(\lambda_2)$ est alors le sous-groupe parabolique associé à la plus petite facette F' de $X_*(T) \otimes \mathbf{R}$ telle que $\lambda_1, \lambda_2 \in \overline{F}'$. Il est alors facile de vérifier que F' est la facette de $X_*(T) \otimes \mathbf{R}$ contenant $\lambda_1 + \lambda_2$.

PROPOSITION 5. — *Le groupe K^0 opère transitivement dans l'ensemble des sous-groupes paraboliques σ-anisotropes minimaux de G.*

Preuve. — Soient P et P' deux sous-groupes paraboliques σ-anisotropes de G, B et B' deux sous-groupes de Borel de G opposés de K et contenus dans P et P' respectivement. Il existe alors $g \in K^0$ tel que $g B' g^{-1} = B$. Soient encore S un tore σ-anisotrope maximal de G contenu dans B, et T un tore maximal de B contenant S; on a $\sigma(T) = T$ (prop. 2 (iv)). La construction donnée dans la partie (*a*) de la preuve de la proposition 4 montre qu'il existe λ et $\lambda' \in X_*(S)$ tels que $P = P(\lambda)$ et $g P' g^{-1} = P(\lambda')$. Enfin, d'après le lemme 1,

$$P \cap gP' g^{-1} = P(\lambda + \lambda')$$

est un sous-groupe parabolique σ-anisotrope de G. Ainsi, si P est minimal, on a $P \subset gP' g^{-1}$, d'où la conclusion.

COROLLAIRE. — *Le groupe K^0 opère transitivement dans l'ensemble des tores σ-anisotropes maximaux de G.*

Preuve. — Soient S et S' deux tores σ-anisotropes maximaux de G. On choisit $\lambda \in X_*(S)$ (resp. $\lambda' \in X_*(S')$) tel que $Z_G(\lambda) = Z_G(S)$ (resp. $Z_G(\lambda') = Z_G(S')$). Du corollaire de la proposition 4 résulte que $P(\lambda)$ et $P(\lambda')$ sont des sous-groupes paraboliques σ-anisotropes minimaux de G; il existe donc $g \in K^0$ tel que $gP(\lambda)g^{-1} = P(\lambda')$. On a donc aussi

$$g(P(\lambda) \cap \sigma(P(\lambda)))g^{-1} = P(\lambda') \cap \sigma(P(\lambda')),$$

c'est-à-dire $g(Z_G(S))g^{-1} = Z_G(S')$. Enfin, puisque S (resp. S') est l'unique tore σ-anisotrope maximal de $Z_G(S)$ (resp. $Z_G(S')$) (prop. 2), on a $gSg^{-1} = S'$.

On dira qu'un couple (B, T), où B est un sous-groupe de Borel de G, et T un tore maximal de B, est *opposé* de K, si B est opposé de K et si T contient un tore σ-anisotrope maximal de G. L'existence de couples (B, T) opposés de K provient du corollaire du théorème 1. On remarque encore que si (B, T) est opposé de K, alors $\sigma(T) = T$ (prop. 2).

PROPOSITION 6. — *Le groupe K^0 opère transitivement dans l'ensemble des couples (B, T) opposés de K.*

Preuve. — Puisque les sous-groupes de Borel de G opposés de K sont conjugués par les éléments de K^0, il suffit de montrer que si (B, T) et (B, T') sont opposés de K, alors il existe $g \in K^0 \cap B$ tel que $gTg^{-1} = T'$. En conservant les notations du corollaire du théorème 1, on peut encore supposer que B est produit semi-direct d'un sous-groupe de Borel B' de $Z_G(S)$ par $R_u(P(\lambda))$: d'après BOREL-TITS ([3], 4.4), on sait que les sous-groupes de Borel de $P(\lambda)$ sont de ce type et, d'après le corollaire du théorème 1, qu'ils sont opposés de K. Alors, puisqu'ils sont invariants par σ, T et T' sont contenus dans B'; par suite, ils sont conjugués par un élément de l'intersection de B' avec le sous-groupe dérivé de $Z_G(S)$. La conclusion résulte alors de la proposition 2.

PROPOSITION 7. — *Soit S un tore σ-anisotrope maximal de G. Alors $K = K^0(S \cap K)$.*

Preuve. — Soit $\lambda \in X_*(S)$ tel que $Z_G(\lambda) = Z_G(S)$. D'après le théorème 1, l'orbite par K de $\{P(\lambda)\} \in G/P(\lambda)$ est ouverte, donc connexe; cela signifie que $K/K \cap P(\lambda)$ est connexe. Or

$$K \cap P(\lambda) = K \cap (P(\lambda) \cap \sigma(P(\lambda))) = K \cap Z_G(S).$$

Ainsi $K/K \cap Z_G(S)$ est connexe.

Vu ce qui précède, pour démontrer la proposition 7, il suffit de prouver que toute composante de $K \cap Z_G(S)$ rencontre $S \cap K$, ce qui provient immédiatement de la proposition 2 (iii).

REMARQUE 2. — La proposition 7 est démontrée dans [5] par des méthodes transcendantes.

2. L'opération de K dans $C(M)$.

2.0. On conserve les notations précédentes. Soit X une variété algébrique affine dans laquelle G opère (morphiquement); on note $k[X]$ l'algèbre des fonctions régulières sur X, $k[X]^G$ la sous-algèbre de $k[X]$ formée des fonctions régulières invariantes par G, $G.x$ l'orbite du point $x \in X$ et G_x le sous-groupe d'isotropie en x. On dira que X est presque homogène s'il existe $x \in X$ tel que $G.x$ soit ouverte et dense dans X.

Lorsqu'on parle de G-module (sans autre précision), il est sous-entendu qu'il s'agit de G-module rationnel de dimension finie.

Soit N un espace vectoriel; par cône de N on entend un sous-ensemble de N stable par les homothéties de N.

Dans toute la suite de ce travail, M désigne un G-module irréductible.

On note $M^{(n)}$ le sous-G-module irréductible de $\otimes^n M$ de plus grand poids dominant, $M^{(0)}$ le G-module trivial de dimension 1, et M' le dual de M. Si M est de poids dominant ϖ (relativement à un sous-groupe de Borel B de G), $M^{(n)}$ est de poids dominant $n\varpi$ (relat. B).

On note $C(M)$ l'adhérence dans M de l'orbite d'un élément primitif de M; le groupe G n'a que deux orbites dans $C(M)$, l'ensemble des éléments primitifs de M et $\{0\}$ (*cf.* [3], § 12, et [8]). La sous-variété $C(M)$ de M est un cône; on pourra donc parler de fonctions régulières homogènes sur $C(M)$, et on notera $k[C(M)]_n$ la composante homogène de degré n de $k[C(M)]$.

2.1. PROPOSITION 8.

(i) *La variété $C(M)$ est normale;*

(ii) *$k[C(M)]_n$ est G-isomorphe à $(M')^{(n)}$.*

Il s'agit des théorèmes 2 et 3 de [8].

LEMME 2. — *Soient H un groupe algébrique réductif, N un H-module, et $V \subset N$ un cône fermé invariant par H. On suppose que V est normal, et que l'algèbre $k[V]^H$ est de dimension 1. Alors $k[V]^H$ est une algèbre de polynômes à une indéterminée.*

Preuve. — On note V/H la variété algébrique affine définie par $k[V/H] = k[V]^H$. L'opération du groupe k^* dans N par homothéties induit une opération non triviale de k^* dans V/H. La variété V/H étant irréductible de dimension 1, il existe $x \in V/H$ tel que le morphisme $t \mapsto t.x$ de k^* dans V/H soit dominant; l'image du morphisme $k[V]^H \mapsto k[t, t^{-1}]$ correspondant est contenue dans $k[t]$. La conclusion résulte alors facilement de ce que, $k[V]$ étant intégralement clos, $k[V]^H$ l'est aussi.

PROPOSITION 9. — *On désigne par p un vecteur primitif de M relatif à un sous-groupe de Borel de G opposé de K. Alors :*

(i) *si l'orbite $K.p$ est un cône, cette orbite est ouverte dans $C(M)$;*

(ii) *si l'orbite $K.p$ n'est pas un cône, cette orbite est de codimension* 1 *dans $C(M)$.*

Preuve. — On note D la droite de M passant par p. La variété projective des droites de $C(M)$ est G-isomorphe à G/P, où P est le sous-groupe parabolique de G qui stabilise D. L'hypothèse sur p signifie que l'orbite de D par K est ouverte, d'où les affirmations de la proposition.

COROLLAIRE. — *On conserve les notations de la proposition* 9. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) $\overline{K.p} \not\ni 0$;

(ii) $k[C(M)]^K$ *est une algèbre de polynômes à une indéterminée*;

(iii) $k[C(M)]^K \neq$ Cte.

Preuve. — Si $\overline{K.p} \not\ni 0$, alors $k[C(M)]^K \neq$ Cte (les invariants séparent les fermés invariants disjoints) et par suite, la fibre contenant tp, $t \in k^*$, du morphisme $C(M) \to C(M)/K$ correspondant à l'injection canonique $k[C(M)]^K \to k[C(M)]$ est de codimension 1 (*cf.* prop. 9); il résulte de là que l'algèbre $k[C(M)]^K$ est de dimension 1. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) provient donc de la proposition 8 et du lemme 2.

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est banale. Enfin, si $\overline{K.p} \ni 0$, l'ensemble des homothétiques de $K.p$ est un ouvert de $C(M)$ formé d'orbites adhérentes à 0; par suite $k[C(M)]^K$ est réduit aux constantes. L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) est donc démontrée.

2.2. LEMME 3. — *Soient T un tore maximal de G, N un G-module, et $x \in N^T - (0)$. Alors $\overline{G.x} \not\ni 0$.*

Ce résultat est démontré dans KOSTANT ([4], rem. 11); la démonstration donnée ici est due à D. LUNA (*voir* aussi BIRKES [2]).

Preuve. — On raisonne par l'absurde en supposant que $\overline{G.x} \ni 0$. D'après le critère de Hilbert-Mumford (*cf.* [7], chap. 2, § 1), il existe $\lambda \in X_*(G)$ tel que $\lim_{t \to 0} \lambda(t).x = 0$. Il est clair que, pour tout $s \in P(\lambda)$, on a aussi $\lim_{t \to 0} (\operatorname{ad}(s) \circ \lambda)(t).x = 0$. Soit alors B un sous-groupe de Borel de G contenant T. Puisque B contient un tore maximal de $P(\lambda)$, il existe $s \in P(\lambda)$ tel que $\operatorname{ad}(s).\lambda \in X_*(B)$; par suite $0 \in \overline{B.x}$. D'un autre côté, on a

$$\overline{B.x} = \overline{R_u(B)\,T.x} = \overline{R_u(B).x} = R_u(B).x = R_u(B)\,T.x = B.x$$

(les orbites de $R_u(B)$ dans N sont fermées, *cf.* [9], [2]). On a donc $x = 0$, ce qui est absurde.

THÉORÈME 2. — *Soient B un sous-groupe de Borel de G, et $\varpi \in X^*(B)$ le poids d'un vecteur primitif p de M correspondant. Soit T un tore maximal de B tel que $\sigma(T) = T$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) $\overline{K.p} \ni 0$;

(ii) $\sigma(\varpi|_T) \neq -\varpi|_T$.

Preuve. — Si $\sigma(\varpi|_T) \neq -\varpi|_T$, alors il existe $\mu \in X_*(T)$ tel que $\langle \mu, \sigma(\varpi|_T) + \varpi|_T \rangle$ soit strictement positif, autrement dit, tel que $\langle \mu + \sigma(\mu), \varpi|_T \rangle$ soit strictement positif. L'image de $\lambda = \mu + \sigma(\mu)$ est contenue dans K, et on a

$$\lambda(t).p = t^{\langle \lambda, \varpi \rangle}\, p.$$

Par conséquent, $K.p$ est adhérente à 0, et on a démontré que (ii) implique (i).

On note M_σ l'espace vectoriel M muni de la structure de G-module définie par $s_* x = \sigma(s).x$, $x \in M$, $s \in G$. Soient $s \in T$, *et* $p \otimes p \in M \otimes M_\sigma$; on a

$$(\star) \qquad s.(p \otimes p) = s.\,p \otimes s_*\,p = \varpi(s)\,p \otimes \varpi(\sigma(s))\,p = (\varpi + \sigma(\varpi))(s)\,p.$$

Si $K.p$ est adhérente à 0, alors, utilisant le critère de Hilbert-Mumford, il est immédiat de vérifier que l'orbite par K (et par conséquent par G) de $p \otimes p \in M \otimes M_\sigma$ est aussi adhérente à 0. Du lemme 3 résulte alors que $p \otimes p \notin (M \otimes M_\sigma)^T$, ce qui signifie, vu $(\star)$, que $\varpi|_T + \sigma(\varpi|_T)$ est différent de zéro. On a donc démontré que (i) implique (ii).

REMARQUE 3. — On conserve les notations du théorème 2, et on note P le sous-groupe parabolique de G qui stabilise la droite D de M passant par p; le groupe P opère dans D par un caractère qu'on désigne encore par ϖ.

(*a*) Puisque $P \cap \sigma(P)$ est connexe (*cf.* [3], 4.5), et T un tore maximal de $P \cap \sigma(P)$, le morphisme de restriction $X^*(P \cap \sigma(P)) \to X^*(T)$ est injectif; de plus, il commute aux opérations de σ. La condition (ii) du théorème 2 est donc équivalente à

$$\sigma(\varpi|_{P\cap\sigma(P)}) \neq -\varpi|_{P\cap\sigma(P)}.$$

(*b*) La condition $\sigma(\varpi|_{P\cap\sigma(P)}) = -\varpi|_{P\cap\sigma(P)}$ est équivalente à $\varpi|_{(P\cap K)^0} = 0$. En effet, si

$$s \in (P \cap K)^0 = (P \cap \sigma(P) \cap K)^0$$

et si

$$\sigma(\varpi|_{P\cap\sigma(P)}) = -\varpi|_{P\cap\sigma(P)},$$

on a

$$\varpi(s) = \varpi(\sigma(s)) = \sigma(\varpi)(s) = \varpi^{-1}(s).$$

De l'autre côté, si $\sigma(\varpi|_{P\cap\sigma(P)} \neq -\varpi|_{P\cap\sigma(P)}$, on a aussi $\sigma(\varpi|_T) \neq -\varpi|_T$; il existe donc $\mu \in X_*(T)$ tel que

$$\langle \mu, \varpi+\sigma(\varpi) \rangle = \langle \mu+\sigma(\mu), \varpi \rangle$$

soit différent de zéro. Le caractère ϖ est donc non nul sur $\mu+\sigma(\mu)$ dont l'image est contenue dans $(T \cap K)^0 \subset (P \cap K)^0$.

(*c*) On désigne par $(\,,\,)$ un produit scalaire sur $X(T)^* \otimes \mathbf{R}$ invariant par le groupe des automorphismes de $\Phi(T, G)$.

On sait alors que P est le sous-groupe parabolique de G contenant T associé à $\{\alpha \in \Phi(T, G);\ (\alpha, \varpi) \geqq 0\}$. La condition $\sigma(\varpi|_T) = -\varpi|_T$ implique donc que P est σ-anisotrope.

COROLLAIRE 1. — *Soit* $p \in C(M)$:

(i) *Si* 0 *est adhérent à l'orbite* $K.p$, *alors cette orbite est un cône.*

(ii) *Si* 0 *n'est pas adhérent à l'orbite* $K.p$, *alors cette orbite est fermée et de codimension* 1 *dans* $C(M)$.

Preuve. — On conserve les notations du théorème 2. La première affirmation résulte directement du théorème 2 : on y a en fait démontré que la condition $\sigma(\varpi|_T) \neq -\varpi|_T$ entraîne que l'orbite $K.p$ est un cône.

On note D la droite de M passant par p, et P le stabilisateur de D. Si l'orbite $K.p$ n'est pas adhérente à 0, le théorème 2 implique que P est σ-anisotrope (*cf.* remarque 3 (*c*)); l'orbite de D par K est donc ouverte (*cf.* th. 1), et par suite $K.p$ est de codimension 1 dans $C(M)$. Il résulte de cela que $K.p$ est fermée : sinon $\overline{K.p}$ contiendrait une orbite fermée (non réduite à (0)) de codimension strictement plus grande que 1.

COROLLAIRE 2. — *On désigne par p un vecteur primitif de M relatif à un sous-groupe de Borel opposé de K. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *$K.p$ est fermée et de codimension* 1 *dans $C(M)$;*

(ii) *$k[C(M)]^K$ est une algèbre de polynômes à une indéterminée;*

(iii) $k[C(M)]^K \neq$ Cte.

Cela provient immédiatement du corollaire de la proposition 9 et du corollaire précédent.

COROLLAIRE 3. — *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(i) *La variété $C(M)$ est presque homogène pour l'opération de K;*

(ii) $k[C(M)]^K =$ Cte.

Preuve. — Il est clair que (i) entraîne (ii). Soit p un vecteur primitif de M relatif à un sous-groupe de Borel de G opposé de K. Si (ii) est vérifié, alors $K.p$ est adhérente à 0; du corollaire 1 résulte alors que cette orbite est un cône, et par suite est ouverte dans $C(M)$ (prop. 9). On a donc aussi (ii) entraîne (i).

3. **Application : la structure de *G*-module de $k[G/K]$.**

3.0. On conserve les notations des paragraphes précédents; en particulier, M désigne un G-module irréductible. En outre, on note (B, T) un couple opposé de K, et $S \subset$ T un tore σ-anisotrope maximal de G.

On utilise les résultats précédents pour expliciter la structure de G-module de $k[G]^K \simeq k[G/K]$; via le théorème de réciprocité de Frobenius, cela revient à calculer $\dim M^K$ pour tout M.

3.1. LEMME 4. — *Soient H un groupe algébrique réductif, N un H-module, et $V \subset N$ un cône fermé invariant par H. On suppose que $k[V]^H = k[f]$*

est la sous-algèbre engendrée par un élément f homogène de degré $r \geqq 1$. Alors, pour tout $x \in V-(0)$ tel que $H.x$ est fermée, l'orbite $H.x$ coupe r-fois la droite de V passant par x.

Preuve. — Si $t \in k^*$ vérifie $t^r = 1$, on a $f(x) = f(tx)$, d'où

$$f(H.x) = f(H.tx),$$

et enfin $H.x = H.tx$ (les invariants, donc f, séparent les fermés invariants disjoints). Réciproquement, s'il existe $h \in H$ et $t \in k^*$ tels que $h.x = tx$, on a $f(x) = f(tx)$, d'où $t^r = 1$ (puisque $x \neq 0$ et $H.x$ est fermée).

THÉORÈME 3 :

(i) *On a* $\dim M^K \leqq 1$;

(ii) *si* $\varpi \in X^*(B)$ *désigne le poids dominant de* M *relativement à* B, *alors, pour que* $M^K \neq (0)$, *il faut et il suffit que* ϖ *vérifie les deux conditions suivantes :*

1° $\sigma(\varpi|_T) = -\varpi|_T$;

2° $\varpi|_S \in 2X^*(S)$.

Preuve. — On remarque pour commencer que, puisque K est réductif, $\dim N^K = \dim (N')^K$, pour tout G-module N.

(*a*) On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des types de G-modules irréductibles M tels qu'il existe un entier $n \geqq 1$ tel que $(M^{(n)})^K \neq (0)$. Puisque $k[C(M)]$ est G-isomorphe à $\oplus_{n \geqq 0} (M')^{(n)}$ (prop. 8), $\mathscr{F}$ est aussi l'ensemble des types de G-modules irréductibles M tels que $k[(C(M)]^K \neq$ Cte. D'après le théorème 2 et son deuxième corollaire, pour que M « appartienne » à $\mathscr{F}$, il faut et il suffit que $\sigma(\varpi|_T) = -\varpi|_T$.

(*b*) On note p un vecteur primitif de M relatif à B, et P le stabilisateur de la droite D de M passant par p. Le groupe P opère dans D par un caractère qu'on désigne encore par ϖ. D'après les remarques 3 (*a*) et (*b*), pour que M « appartienne » à $\mathscr{F}$, il faut et il suffit que la restriction de ϖ à $(P \cap K)^0 = (P \cap \sigma(P) \cap K)^0$ soit identiquement nulle.

(*c*) On désigne par $\mathscr{K}$ l'ensemble des types de G-modules irréductibles M tels que $M^K \neq (0)$; c'est donc l'ensemble des types de G-modules irréductibles M tels que $k[C(M)]^K$ est une algèbre de polynômes à une indéterminée engendrée par un élément homogène de degré 1 (*cf.* cor. de la proposition 9). Si M « appartient » à $\mathscr{K}$, on a donc

$$\dim (M')^K = \dim k\,[C(M)]_1^K = 1,$$

d'où (i). D'autre part, du corollaire 1 du théorème 2 et du lemme 4 résulte que, pour que M « appartienne » à $\mathscr{K}$, il faut et il suffit que l'orbite $K.p$ ne rencontre qu'une fois D, c'est-à-dire que $K \cap P = K_p$, ou encore que la restriction de ϖ à $K \cap P = K \cap P \cap \sigma(P)$ soit identiquement nulle.

(*d*) On suppose que M « appartient » à $\mathscr{F}$. Les sous-groupes P et $\sigma(P)$ sont alors opposés (*cf.* rem. 3 (*c*)). Dans ce cas,

$$P \cap \sigma(P) \cap K = (P \cap \sigma(P) \cap K)^0 (S \cap K)$$

puisque $P \cap \sigma(P)$ est connexe (*cf.* [3], 4.5) et puisque S est un tore σ-anisotrope maximal de $P \cap \sigma(P)$ (*cf.* prop. 7). Ainsi, pour que M « appartienne » à $\mathscr{K}$, il faut et il suffit que la restriction de ϖ à $(P \cap \sigma(P) \cap K)^0$ et à $(S \cap K)$ soit identiquement nulle, autrement dit, vu (*a*) et (*b*), que

$$\sigma(\varpi|_T) = -\varpi|_T \qquad \text{et} \qquad \varpi|_{S \cap K} = 0.$$

Enfin, comme $S \cap K$ est le sous-groupe de S formé des éléments d'ordre 2, la dernière condition est équivalente à $\varpi|_S \in 2\,X^*(S)$. Le théorème est donc démontré.

REMARQUE 4. — La première affirmation du théorème est banale et peut se démontrer plus directement en utilisant le résultat que voici : soit H un sous-groupe réductif de G tel que la variété G/B soit presque homogène pour l'opération naturelle de H (B désigne un sous-groupe de Borel de G); alors G-module $k\,[G]^H$ est sans multiplicité. En effet, si la multiplicité dans $k\,[G]^H$ d'un G-module irréductible était strictement plus grande que 1, on pourrait trouver dans $k\,[G]^H \simeq k\,[G/H]$ deux vecteurs primitifs f_1 et f_2 non proportionnels et de même poids relativement à B. Le quotient f_1/f_2 fournirait alors une fonction rationnelle sur la variété G/H, invariante par B et non constante. Or l'hypothèse implique que G/H est presque homogène pour l'opération naturelle de B, d'où la contradiction.

3.2. EXEMPLE 1. — On note $e_1, \ldots, e_{2n}$ la base canonique de k^{2n}, $(e_r, \ldots, e_s)$ le sous-espace de k^{2n} engendré par $(e_i)_{i=r, \ldots, s}$, et on identifie $G = GL(2\,n, k)$ avec l'ensemble des matrices inversibles de format $2\,n \times 2\,n$.

On prend l'automorphisme $\sigma : s \mapsto J^t s^{-1} J^{-1}$, où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Le groupe K est le groupe symplectique Sp (n, k). Le tore S formé des matrices diagonales

$$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n, a_1, \ldots, a_n)$$

est σ-anisotrope maximal dans G; le stabilisateur B du drapeau.

$$(0) \subset (e_1) \subset (e_1, e_{n+1}) \subset (e_1, e_{n+1}, e_2) \subset (e_1, e_{n+1}, e_2, e_{n+2}) \subset \ldots \subset k^{2n}$$

est un sous-groupe de Borel opposé de K. On désigne par T le tore maximal de G formé des matrices diagonales; le couple (B, T) est opposé de K. Si χ_i, $i = 1, \ldots, 2n$ sont les caractères de T définis par

$$\chi_i(\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})) = a_i,$$

les poids fondamentaux relatifs à B et T sont

$$\begin{aligned}
\varpi_1 &= \chi_1, \\
\varpi_2 &= \chi_1 + \chi_{n+1}, \\
&\vdots \\
\varpi_{2i} &= \chi_1 + \chi_{n+1} + \ldots + \chi_i + \chi_{n+i}, \\
\varpi_{2i+1} &= \chi_1 + \chi_{n+1} + \ldots + \chi_i + \chi_{n+i} + \chi_{i+1}, \\
&\vdots \\
\varpi_{2n} &= \chi_1 + \chi_{n+1} + \ldots + \chi_n + \chi_{2n}.
\end{aligned}$$

Comme enfin $\sigma(\chi_i) = -\chi_{n+i}$, $i = 1, \ldots, n$, d'après le théorème 3, pour que le $GL(2n, k)$-module irréductible M de poids dominant $\varpi = \sum_{i=1}^{2n} a_i \varpi_i$ possède des invariants non triviaux par $Sp(n, k)$, il faut et il suffit que $a_{2i+1} = 0$, $i = 0, \ldots, n-1$.

EXEMPLE 2. — Soient $G = GL(n, k)$ (qu'on identifie à l'ensemble des matrices inversibles de format $n \times n$), et σ l'automorphisme $s \mapsto {}^t s^{-1}$. Le groupe K est alors le groupe orthogonal $O(n, k)$. Le tore maximal S de G formé des matrices diagonales est σ-anisotrope maximal. D'après le théorème 3, pour que le $GL(n, k)$-module irréductible M de poids dominant ϖ possède des invariants non triviaux par $O(n, k)$, il faut et il suffit que $\varpi \in 2\,X^*(S)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIALYNICKI-BIRULA (A.). — On homogeneous affine spaces of linear algebraic groups, *Amer. J. Math.*, t. 85, 1963, p. 577-582.

[2] BIRKES (D.). — Orbits of linear algebraic groups, *Annals of Math.*, Series 2, t. 93, 1971, p. 459-475.

[3] BOREL (A.) et TITS (J.). — *Groupes réductifs.* — Paris, Presses Universitaires de France, 1965 (*Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques*, 27, p. 55-152).

[4] KOSTANT (B.). — Lie group representations on polynomial rings, *Amer. J. Math.*, t. 86, 1963, p. 327-402.

[5] KOSTANT (B.) and RALLIS (S.). — Orbits and representations associated with symmetric spaces, *Amer. J. Math.*, t. 93, 1971, p. 753-809.

[6] MATSUSHIMA (Y.). — Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes, *Nagoya math. J.*, t. 16, 1950, p. 205-218.

[7] MUMFORD (D.). — *Geometric invariant theory.* — Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1965 (*Ergebnisse der Mathematik*, 34).

[8] POPOV (V. L.) et VINBERG (E. B.). — Sur une classe de variétés affines presque homogènes [en russe], *Izv. Akad. Nauk SSSR*, Ser. Mat., t. 36, 1972, p. 749-764.

[9] ROSENLICHT (M.). — On quotient varieties and the affine embedding of certain homogeneous spaces, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 101, 1961, p. 211-223.

[10] STEINBERG (R.). — *Endomorphisms of linear algebraic groups.* — Providence, American mathematical Society, 1968 (*Memoirs of the American mathematical Society*, 80).

(Texte reçu le 18 février 1974.)

Thierry VUST,
Institut de Mathématiques pures,
B. P. 116
38402 Saint-Martin d'Hères.
et Université de Genève,
Section de Mathématiques,
2-4, rue du Lièvre,
Case postale 124,
CH-1211 Genève (Suisse).