BULLETIN DE LA S. M. F.

ABDEL-ILAH BENABDALLAH

Noyau de diffusion sur les espaces homogènes compacts

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 265-283
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__265_0>

Bull. Soc. math. France,
101, 1973, p. 265-283.

NOYAU DE DIFFUSION SUR LES ESPACES HOMOGÈNES COMPACTS

PAR

ABDEL-ILAH BENABDALLAH

[Lyon]

RÉSUMÉ. — On détermine dans cet article l'expression du noyau de diffusion de l'opérateur de la chaleur sur un espace homogène riemannien compact. On calcule ensuite la trace de ce noyau et son développement asymptotique sur quelques espaces homogènes classiques.

La méthode dite de « l'équation de la chaleur » a été utilisée fréquemment ces dernières années tant en géométrie riemannienne (BERGER [3], MCKEAN-SINGER [12]) qu'en analyse et topologie sur les variétés (E. COMBET [5], T. KOTAKE [10], [11], V. K. PATODI [13], [14], ATIYAH, BOTT et PATODI [2]).

Cette méthode repose sur les propriétés de la solution fondamentale ou noyau de diffusion associé à certains opérateurs elliptiques sur les variétés considérées.

Nous nous proposons dans cette étude de construire ce noyau sur les espaces homogènes riemanniens compacts (le cas non compact a été résolu par ÈSKIN [7] avec des hypothèses de semi-simplicité que nous n'utiliserons pas ici).

Ce noyau, noté $E(t; x, y)$ est défini, pour $t > 0$, sur le produit $M \times M$ de l'espace homogène par lui-même. Rappelons qu'il est caractérisé par les égalités

$$\Delta_x \mathrm{E}(t; x, y) + \frac{\partial}{\partial t} E(t; x, y) = 0,$$

$$\varphi(x) = \lim_{t \to 0_+} \int_M E(t; x, y)\, \varphi(y) \qquad \text{pour} \quad \varphi \in C^\infty(M),$$

Δ étant le laplacien associé à la structure riemannienne considérée sur M.

Une expression explicite de ce noyau et de sa trace est donnée aux paragraphes 2 et 3 sur les sphères, ainsi que le développement asymptotique de $\int_M E(t; x, x)$ quand $t \to 0_+$ sur S^2 et S^3.

Cette expression est déduite, par passage au quotient, d'une formule donnant le noyau de diffusion sur un groupe de Lie compact. Cette formule est due à ÈSKIN [8] en hypothèse de semi-simplicité.

1. Notations. Rappels. Cas des groupes de Lie compacts connexes

Soit G un groupe de Lie réel compact connexe, de dimension N, d'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$, muni d'une structure riemannienne invariante par les translations à gauche et à droite de G.

Dans toute la suite, nous notons e l'élément neutre de G, $g \to \operatorname{Ad}(g)$ la représentation adjointe de G, pour $X \in \mathfrak{G}$; $\operatorname{Ad} X$ l'endomorphisme de $\mathfrak{G}$: $Y \to [X, Y]$, T un tore maximal de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{T}$, de dimension n, et enfin W le groupe de Weyl de G.

Il existe sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ une base orthonormale $H_1, \ldots, H_n$, (X_r, Y_r) $1 \leqq r \leqq (N-n)/2$ (pour la structure riemannienne bi-invariante considérée), $H_1, \ldots, H_n$ étant une base de $\mathfrak{T}$, telle que, quel que soit $H \in \mathfrak{T}$, on ait :

(i) $[H, X_r] = -2\pi\theta_r(H)\, Y_r$; $[H, Y_r] = 2\pi\theta_r(H)\, X_r$;

(ii) $[Y_r, X_r] = H'_r$ appartient à $\mathfrak{T}$ et $\langle H, H'_r \rangle = 2\pi\theta_r(H)$;

(iii) $\operatorname{Ad}(\exp H)$, restreint à l'espace E_r engendré par X_r et Y_r, est une rotation d'angle $2\pi\theta_r(H)$.

Les θ_r s'appellent les racines positives de G. Ce sont des formes linéaires sur $\mathfrak{T}$ prenant des valeurs entières sur le réseau Γ du tore T.

Soit Δ le laplacien scalaire associé à la structure riemannienne bi-invariante sur G. Les champs de vecteurs invariants à gauche de G étant des champs de Killing, il résulte de [6], p. 396, le résultat suivant :

1.1. LEMME. — *Pour toute base orthonormale X_α de G, $-\Delta = \sum_\alpha X_\alpha^2$. En particulier,*

$$-\Delta = H_r^2 + \ldots + H_n^2 + \sum_r (X_r^2 + Y_r^2).$$

Pour $H \in \mathfrak{T}$, posons

$$j(H) = \prod_r [\exp(\pi i\, \theta_r(H)) - \exp(-\pi i\, \theta_r(H))].$$

Un élément H de $\mathfrak{T}$ est régulier si $j(H)$ est différent de zéro, et singulier si $j(H)$ est nul.

Soit T' l'ensemble des points réguliers de $\mathfrak{T}$. $T'' = \exp T'$ est dense dans T, et on a le lemme suivant :

1.2. LEMME. — *Pour toute fonction f sur G invariante par les automorphismes intérieurs de G,*

$$[(X_r^2 + Y_r^2)(f)] \circ \exp(H) = \frac{\cos \pi\theta_r(H)}{\sin \pi\theta_r(H)} [H'_r(f)] \circ \exp H, \qquad \forall\, H \in T'.$$

Preuve. — $[X_r^2(f)] \circ \exp H = [X_r([\operatorname{Ad}(\exp -H)\, X_r](f) \circ R_h)](e)$, R_h étant la translation à droite définie par l'élément $h = \exp H$.

Des égalités

$$\operatorname{Ad}(\exp - H)\, X_r = \cos 2\pi\theta_r(H)\, X_r + \sin 2\pi\theta_r(H)\, Y_r$$

et

$$\operatorname{Ad}(\exp - H)\, Y_r = -\sin 2\pi\theta_r(H)\, X_r + \cos 2\pi\theta_r(H)\, Y_r,$$

il résulte que

$$\begin{aligned}[X_r^2(f)] \circ \exp H = {} & \cos 2\pi\theta_r(H)\, [X_r(X_r(f) \circ R_h]\,(e) \\ & + \sin 2\pi\theta_r(H)\, [X_r(Y_r(f) \circ R_h)]\,(e).\end{aligned}$$

Or

$$[X_r(X_r(f) \circ R_h)]\,(e) = [X_r^2(f)] \circ \exp H$$

et

$$[X_r(Y_r(f) \circ R_h)]\,(e) = [Y_r . X_r(f)] \circ \exp H.$$

D'où finalement :

$$\begin{aligned}[X_r^2(f)] \circ \exp H = {} & \cos 2\pi\theta_r(H)\, [X_r^2(f)] \circ \exp H \\ & + \sin 2\pi\theta_r(H)\, [Y_r . X_r(f)] \circ \exp H \\ [Y_r^2(f)] \circ \exp H = {} & -\sin 2\pi\theta_r(H)\, [X_r . Y_r(f)] \circ \exp H \\ & + \cos 2\pi\theta_r(H)\, [Y_r^2(f)] \circ \exp H.\end{aligned}$$

Soit encore

$$[(X_r^2 + Y_r^2)(f)] \circ \exp H = \frac{\cos \pi\theta_r(H)}{\sin \pi\theta_r(H)} [H'_r(f)] \circ \exp H.$$

1.3. LEMME. — *Soit* $\rho = 1/2 \sum_r \theta_r$. *Pour toute fonction* f *sur* G, *invariante par les automorphismes intérieurs de* G, *et* $H = \sum_i h_i H_i$ *appartenant à* T',

$$-(\Delta f) \circ \exp H = \frac{1}{j(H)} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial h_i^2} + 4\pi^2 \langle \rho, \rho \rangle \right) (j \times f \circ \exp)(H).$$

Preuve. — D'après le lemme 1.1 et 1.2, on a, pour $H = \sum h_i H_i$ appartenant à T',

$$\begin{aligned} -[\Delta f] \circ \exp H = {} & \sum_i \frac{\partial^2}{\partial h_i^2} (f \circ \exp) \left(\sum_{i=1}^{n} h_i H_i\right) \\ & + \sum_r \frac{\cos \pi\theta_r(H)}{\sin \pi\theta_r(H)} \sum_i 2\pi\theta_r(H_i) \frac{\partial}{\partial h_i} (f \circ \exp) \left(\sum_i h_i H_i\right) \\ = {} & \sum_i \frac{\partial^2}{\partial h_i^2} (f \circ \exp)(H) \\ & + \sum_i \left(\sum_r \left(\frac{\cos \pi\theta_r(H)}{\sin \pi\theta_r(H)} . 2\pi\theta_r(H_i) \right) \right) \frac{\partial}{\partial h_i} (f \circ \exp)(H) \\ = {} & \sum_i \frac{\partial^2}{\partial h_i^2} (f \circ \exp)(H) + \frac{2}{j(H)} \sum_i \frac{\partial j}{\partial h_i}(H) . \frac{\partial}{\partial h_i} (f \circ \exp)(H) \\ = {} & \frac{1}{j(H)} \left[\left(\sum_i \frac{\partial^2}{\partial h_i^2} \right) (j \times f \circ \exp) \right] (H) \\ & - \frac{f \circ \exp(H)}{j(H)} \left[\left(\sum \frac{\partial^2}{\partial h_i^2} \right) j \right] (H).\end{aligned}$$

Or $j(H)$ est égale à $\Sigma_{\varphi \in W}$ (signe φ) $\exp(2\pi i\, \varphi.\rho(H))$ et

$$\left(\Sigma_i \frac{\partial^2}{\partial h_i^2}\right) j = -4\pi^2 \langle \rho, \rho \rangle j.$$

D'où le résultat cherché.

Soit $E(t; x, y)$ le noyau de diffusion sur G de l'opérateur de la chaleur $\Delta + (\partial/\partial t)$. On a

$$E(t; x, y) = E(t; y^{-1}.x, e) = E(t; y^{-1}.x)$$

et l'application $z \to E(t; z)$ est invariante par les automorphismes intérieurs de G. Donc cette fonction est parfaitement déterminée par sa restriction au tore maximal T et, d'après le lemme 1.3, $E(t; \exp .)$ satisfait à l'équation différentielle :

$$\left(\Sigma_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial h_i^2} + 4\pi^2 \langle \rho, \rho \rangle\right)(j \times E(t; \exp .))(H) = \frac{\partial}{\partial t} E(t; \exp H)\, j(H),$$

pour $H = \Sigma\, h_i H_i$ appartenant à T'.

1.4. Théorème (Èskin [8]). — *Le noyau de diffusion sur G est la fonction*

$$h \in T' \to \frac{V_\Gamma\, \Delta^{1/2} \exp(4\pi^2 \langle \rho, \rho \rangle t}{2^{N(+n)/2}\, \pi^{N/2}\, (i)^{(N-n)/2}\, \Pi_r \langle \rho, H'_r \rangle\, t^{n/2}} \Sigma_{\gamma \in \Gamma} \times \frac{[L(h) \exp(-\langle h, h \rangle)/4t]\,(h+\gamma)}{j(H+\gamma)}$$

où V_Γ est le volume de $\mathfrak{T}/\Gamma$, Δ le discriminant du produit scalaire sur $\mathfrak{T}$ par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et enfin $L(h) = \Pi_r L(h; H'_r)$, $L(h, H'_r)$ étant la dérivation en h suivant H'_r.

(Pour faciliter la lecture de cet article, nous donnons en appendice une démonstration de cette formule.)

2. Noyau de diffusion des espaces homogènes compacts

Soient G un groupe de Lie compact connexe, muni d'une structure riemannienne bi-invariante, H un sous-groupe fermé de G, π la projection canonique $G \to G/H$, et $\tau(g)$ la translation $xH \to gxH$ définie par l'élément g de G.

L'espace homogène G/H est réductif : si $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ sont les algèbres de Lie de G et H, l'orthogonal $\mathfrak{T}$ de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{G}$ (pour le produit scalaire bi-invariant considéré sur G) vérifie $\mathrm{Ad}(H)\,\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}$.

Munissons l'espace homogène de la structure riemannienne invariante par les translations $\tau(g)$, déduite de celle de G et qui est telle que la projection π soit une submersion riemannienne.

2.1. Lemme. — *Soient $\Delta_{G/H}$ et Δ_G les laplaciens scalaires associés aux structures riemanniennes considérées sur les espaces G/H et G.*

Pour toute fonction f, définie sur G/H, on a

$$\Delta_{G/H}(f)\circ\pi = \Delta_G(f\circ\pi).$$

Preuve. — La projection π est une submersion riemannienne de fibre type H. Comme H est un sous-groupe fermé et que les géodésiques de G issues de e sont les sous-groupes à un paramètre, H est totalement géodésique; d'où le résultat ([4], p. 128).

2.2. THÉORÈME. — *Soit dh la mesure de Haar normalisée de H. Le noyau de diffusion $E_{G/H}(t; xH, yH)$ de l'espace homogène G/H vérifie*

$$E_{G/H}(t; gxH, gyH) = E_{G/H}(t; xH, yH), \qquad \forall\, g\in G.$$

Si on pose $E_{G/H}(t; y^{-1}xH, H) = E_{G/H}(t; zH)$ et si E_G est le noyau de diffusion de G, alors l'application $zH \to E_{G/H}(t; zH)$ est invariante par les translations $\tau(k)$, $k\in H$, et

$$E_{G/H}(t; zH) = \int_H E_G(t; zh)\,dh.$$

Preuve. — Du fait de l'unicité de la solution de l'équation de la chaleur et de l'invariance du laplacien $\Delta_{G/H}$ par les translations $\tau(g)$, il est facile de vérifier que, pour tout $g\in G$,

$$E_{G/H}(t; gxH, gyH) = E_{G/H}(t; xH, yH).$$

Donc

$$\begin{aligned} E_{G/H}(t; xH, yH) &= E_{G/H}(t; y^{-1}xH, H)\\ &= E_{G/H}(t; zh), \end{aligned}$$

et l'application $zH \to E_{G/H}(t; zH)$ est invariante par les translations $\tau(k)$, $k\in H$.

Soit dg_H la mesure G-invariante de l'espace homogène G/H (qui est la mesure image de la mesure de Haar normalisée dg de G par la projection π).

Posons

$$\begin{aligned} \tilde{E}(t; zH) &= \int_H E_G(t; zh)\,dh\\ &= \int_H E_G(t; z, h^{-1})\,dh.\\ [\Delta_{G/H}\tilde{E}](gH) &= \left[\Delta_G\left(\int_H E_G(t; ., h^{-1})\,dh\right)\right](g)\\ &= \left[\int_H \Delta_G E_G(t; ., h^{-1})\,dh\right](g)\\ &= \left[\int_H -\frac{\partial}{\partial t}E_G(t; ., h^{-1})\,dh\right](g)\\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_H E_G(t; ., h^{-1})\,dh\right](g)\\ &= -\left[\frac{\partial}{\partial t}\tilde{E}\right](gH). \end{aligned}$$

De plus, pour toute fonction f définie sur G/H,

$$\int_{G/H} \tilde{E}(t;\, gH)\, f(gH)\, dg_H = \int_{G/H} f(gH) \left[\int_H E_G(t;\, gh)\, dh \right] dg_H$$
$$= \int_G f \circ \pi(g)\, E_G(t;\, g)\, dg.$$

Lorsque $t \to 0_+$, $\int_G f \circ \pi(g)\, E_G(t;\, g)\, dg$ tend vers $f \circ \pi(e) = f(H)$.

Donc

$$\tilde{E}(t;\, gH) = E_{G/H}(t;\, gH) = \int_H E_G(t;\, gh)\, dh.$$

2.3. Remarque. — Soient $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ la famille de toutes les représentations irréductibles de G, $(\chi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ les caractères associés, et dg la mesure de Haar normalisée de G. Pour chaque $\alpha \in \Lambda$, soient $\mathcal{H}_\alpha$ l'espace de la représentation π_α, d_α sa dimension, et $Z(\mathcal{H}_\alpha)$ le sous-espace de $\mathcal{H}_\alpha$ formé des éléments x tels que $\pi_\alpha(h)\, x = x$, quel que soit $h \in H$. Posons $\varphi_\alpha(gH) = \int_H \chi_\alpha(gh)\, dh$, et soit Λ_H l'ensemble des indices α de Λ tel que la représentation π_α soit de classe 1 par rapport à H.

La fonction $E(t;\, g)$ étant invariante par les automorphismes intérieurs de G, on peut écrire :

$$E(t;\, g) = \sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha(t)\, \chi_\alpha(g), \qquad \text{avec} \quad a_\alpha(t) = \int_G E(t;\, g)\, \chi_\alpha(g^{-1})\, dg.$$

Comme $\Delta_G E(t;\, g) + (\partial/\partial t)\, E(t;\, g) = 0$, $a_\alpha(t)$ vérifie $a'_\alpha(t) = -\lambda_\alpha\, a_\alpha(t)$, λ_α étant la valeur propre de Δ_G relative à la fonction propre χ_α. Donc $a_\alpha(t) = k_\alpha \exp(-\lambda_\alpha t)$ avec

$$k_\alpha = a_\alpha(0) = \lim_{t \to 0_+} \int_G E(t;\, g)\, \chi_\alpha(g^{-1})\, dg = \chi_\alpha(e) = d_\alpha.$$

Du théorème 2.2, on déduit que

$$E_{G/H}(t;\, gH) = \sum_{\alpha \in \Lambda_H} d_\alpha \exp(-\lambda_\alpha t)\, \varphi_\alpha(gH).$$

En particulier, pour $g = e$, on obtient

$$E_{G/H}(t;\, xH,\, xH) = \sum_{\alpha \in \Lambda_H} d_\alpha [\dim Z(\mathcal{H}_\alpha)] \exp(-\lambda_\alpha t), \qquad \forall\, x \in G.$$

Si l'espace homogène G/H est un espace symétrique, il est bien connu que, pour tout $\alpha \in \Lambda_H$, $\dim Z(\mathcal{H}_\alpha) = 1$. Dans ce cas, l'égalité précédente devient

$$E_{G/H}(t;\, xH,\, xH) = \sum_{\alpha \in \Lambda_H} d_\alpha \exp(-\lambda_\alpha t), \qquad \forall\, x \in G.$$

3. Noyau de diffusion des sphères

Soient $(e_0, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$, et S^n la sphère unité de $\mathbf{R}^{n+1}$ munie de sa métrique standard.

$SO(n+1)$ opère transitivement sur S^n. Le groupe d'isotropie au point e_0 s'identifie à $SO(n)$ au noyau de l'application

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \to B \in SO(n).$$

L'espace homogène $SO(n+1)/SO(n)$ est donc difféomorphe à la sphère S^n par l'application $\pi(A) \to A(e_0)$, $A \in SO(n+1)$.

Munissons l'algèbre de Lie $\mathbf{SO}(n+1)$ de $SO(n+1)$ du produit scalaire :

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{trace}(X \circ Y), \qquad X, Y \in \mathbf{SO}(n+1).$$

Le difféomorphisme précédent est alors une isométrie; ce qui permet d'identifier la sphère S^n à l'espace homogène $SO(n+1)/SO(n)$.

Soit $\mathfrak{T}$ l'orthogonal de $\mathbf{SO}(n)$ pour le produit scalaire considéré. $\mathfrak{T}$ est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & -{}^t\xi \\ \xi & 0 \end{bmatrix}, \qquad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

L'espace $\mathfrak{T}$ vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) Soient

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -{}^t\xi \\ \xi & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & -{}^t\eta \\ \eta & 0 \end{bmatrix}$$

deux éléments de $\mathfrak{T}$, avec $|\xi| = |\eta|$.

Il existe $B \in SO(n)$ tel que $B\xi = \eta$. Par suite :

$$BXB^{-1} = \operatorname{Ad}(B)X = \begin{bmatrix} 0 & -{}^t(B\xi) \\ B\xi & 0 \end{bmatrix} = Y.$$

Ainsi $\operatorname{Ad}(SO(n))$ opère transitivement sur chaque sphère d'origine O de $\mathfrak{T}$. On peut remarquer alors que le noyau de diffusion $E(t; x, y)$ sur les sphères, et en fait sur les espaces symétriques de rang 1, ne dépend que de t et de $d(x, y) = r$. Il semble qu'actuellement on ne possède pas la formule explicite donnant $E(t; x, y) = F(t; r)$. Cependant on la possède sous forme de série avec les fonctions zonales (remarque 2.3).

(ii) Soit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & 0 & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}.$$

Si $X = \begin{bmatrix} 0 & -{}^t\xi \\ \xi & 0 \end{bmatrix}$ est un autre élément de $\mathfrak{L}$, d'après (i), il existe $B \in SO(n)$ tel que $X = \mathrm{Ad}(B)(|\xi| A)$. Donc $\mathfrak{L} = \mathrm{Ad}(SO(n))(\mathbf{R} A)$.

Soient maintenant x un point de S^n, l l'arc géodésique joignant x et e_0, et $d\pi X$, $X \in \mathfrak{L}$, le vecteur unitaire tangent à l en e_0. On a $x = (\exp u X)(e_0)$. D'après (ii), il existe $B \in SO(n)$ tel que $X = BAB^{-1}$. Donc $x = B(\exp u A)(e_0)$. Notons E_{S^n} (resp. $E_{SO(n+1)}$) le noyau de diffusion de S^n (resp. de $SO(n+1)$). On a, d'après le théorème 2.2 :

$$E_{S^n}(t; x) = \int_{SO(n)} E_{SO(n+1)}(t; \exp u A . h)\, dh.$$

Désignons par $g_k(\alpha)$ la rotation d'angle α dans le plan (x_{n-k}, x_{n-k+1}). La rotation $h \in SO(n)$ se décompose alors sous la forme

$$h = g^{(n-1)} \times \dots \times g^{(1)} \qquad \text{avec} \quad g^{(k)} = g_1(\theta_1^k) \times \dots \times g_k(\theta_k^k),$$

et la mesure dh est donnée par

$$dh = \Pi_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(k/2)}{2\pi^{k/2}} \Pi_{k=1}^{n-1} \Pi_{j=1}^{k} \sin^{j-1} \theta_j^k \, d\theta_j^k \qquad \text{([15], p. 438).}$$

Posons

$$\exp u A . h = M(\theta_j^k), \qquad D_i = \begin{bmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{bmatrix},$$

et considérons les fonctions polynomiales $f_1(M), \dots, f_m(M)$ ($n = 2m$ ou $n = 2m + 1$), définies par

$$(1) \qquad \det(\lambda I_n - M) = \lambda^n + \lambda^{n-1} f_1(M) + \lambda^{n-2} f_2(M) + \dots + \lambda^2 f_2(M) + \lambda f_1(M) + 1.$$

On peut écrire $M = k\,D\,k^{-1}$ avec $k \in SO(n)$ et

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_m \end{bmatrix} \text{ si } n = 2m$$

et

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & D_n & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ si } n = 2m+1$$

On a

$$(2) \qquad \det(\lambda I_n - D) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{m} (\lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi_j + 1) & \text{si } n = 2m, \\ \lambda \prod_{j=1}^{m} (\lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi_j + 1) & \text{si } n = 2m + 1, \end{cases}$$

M étant conjuguée à D, $\det(\lambda I_n - M) = \det(\lambda I_n - D)$.

En identifiant (1) et (2), on obtient m équations qui permettent de calculer $\cos \varphi_j$, $1 \leqq j \leqq m$.

Exemples : *Cas de S^2 et S^3.*

(*a*) *Cas de S^2 :*

$$E_{S^2}(t;\, x) = \int_{SO(2)} E_{SO(3)}(t;\, \exp u A\,.\,h)\, dh,$$

avec

$$\exp u A\,.\,b = \begin{bmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos u & -\sin u \cos\theta & \sin u \sin\theta \\ \sin u & \cos u \cos\theta & -\cos u \sin\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= k \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} k^{-1},$$

φ vérifiant :

$$(3) \qquad 1 + 2\cos\varphi = \cos u \cos\theta + \cos u + \cos\theta.$$

Donc

$$E_{S^2}(t;\, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{SO(3)}(t;\, \varphi)\, d\theta.$$

Si on calcule $d\theta$ en fonction de $d\varphi$ à partir de la relation (3), on obtient

$$E_{S^2}^{\omega}(t;x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}E_{SO(3)}(t;\varphi)\,d\varphi & \text{si}\quad u=0,\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_u^{2\pi-u}\dfrac{E_{SO(3)}(t;\varphi)\sin\varphi}{\sqrt{(\cos u-\cos\varphi)(1+\cos\varphi)}}\,d\varphi \\ \qquad\text{si}\quad 0<u<2\pi,\qquad u\neq\pi,\\ E_{SO(3)}(t;\pi) & \text{si}\quad u=\pi.\end{cases}$$

(*b*) *Cas de* S^3 :

$$E_{S^3}(t;x)=\int_{SO(3)}E_{SO(4)}(t;\exp A.h)\,dh,$$

avec

$$\exp uA.h=\begin{bmatrix}\cos u & -\sin u & 0 & 0\\ \sin u & \cos u & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\psi & -\sin\psi\\ 0 & 0 & \sin\psi & \cos\psi\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos u & -\sin u & 0 & 0\\ \sin u & \cos u & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\psi & -\sin\psi\\ 0 & 0 & \sin\psi & \cos\psi\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$=a(u,\psi).b(\theta).c(\varphi).$$

Or

$$E_{SO(4)}(t;a(u,\psi).b(\theta).c(\varphi))=E_{SO(4)}(t;b(\theta).c(\varphi).a(u,\psi)),$$

et

$b(\theta).c(\varphi).a(u,\psi)$

$$=\begin{bmatrix}\cos u & -\sin u & 0 & 0\\ \sin u\cos\theta & \cos u\cos\theta & -\sin\theta\cos(\varphi+\psi) & \sin\theta\sin(\varphi+\psi)\\ \sin u\sin\theta & \cos u\sin\theta & \cos\theta\cos(\varphi+\psi) & -\cos\theta\sin(\varphi+\psi)\\ 0 & 0 & \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi)\end{bmatrix}$$

$$=k\begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 & 0\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2\\ 0 & 0 & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2\end{bmatrix}k^{-1},$$

$\cos \varphi_1$ et $\cos \varphi_2$ vérifiant :

$$\begin{aligned} &2(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \\ &\quad = \cos u + \cos u \cos \theta + \cos \theta \cos(\varphi + \psi) + \cos(\varphi + \psi), \\ &2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + 1 \\ &\quad = 2(\cos \theta + \cos u \cos(\varphi + \psi) + \cos u \cos \theta \cos(\varphi + \psi)). \end{aligned}$$

Donc

$$E_{S^3}(t; x) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} E_{SO(4)}(t; \varphi_1, \varphi_2) \sin \theta \, d\theta.$$

REMARQUE. — Connaissant le noyau de diffusion sur S^n, on déduit immédiatement le noyau de diffusion sur l'espace projectif réel $P_n(\mathbf{R}) = S^n / \pm I$:

$$E_{P_n(\mathbf{R})}(t; x(\pm 1)) = E_{S^n}(t; x) + E_{S^n}(t; -x).$$

4. Traces des noyaux de diffusion des sphères

Notons Z_{S^n} la trace du noyau de diffusion de la sphère S^n. On a

$$\begin{aligned} Z_{S^n} &= E_{S^n}(t; e_0) = \int_{SO(n)} E_{SO(n+1)}(t; h) \, dh \\ &= \frac{1}{|W|} \int_T E_{SO(n+1)}(t; u) \, |j(u)|^2 \, du \qquad (\textit{voir } [1], \text{ p. } 142), \end{aligned}$$

$|W|$ étant l'ordre du groupe de Weyl W de $SO(n)$.

(*a*) *Cas des sphères* S^{2n} :

$$\begin{aligned} &E_{SO(2n+1)}(t; h_1, \ldots, h_n) \\ &\quad = \frac{(2\pi)^n \exp(4\pi^2 \langle \rho, \rho \rangle t)}{2^{n(n+1)} \pi^{(n(2n+1))/2} (i)^{n^2} \prod_r \langle \rho, H'_r \rangle t^{n/2}} \times \ldots \\ &\quad \times \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{Z}} \frac{[L(h) \exp((-\langle h, h \rangle)/4t)](h_1 + 2\pi\alpha_1, \ldots, h_n + 2\pi\alpha_n)}{\left\{ \begin{array}{l} 2^{n^2} (i)^{n^2} \prod_{i<j} \sin((h_i - h_j + 2\pi(\alpha_i - \alpha_j))/2) \\ \quad \times \sin((h_i + h_j + 2\pi(\alpha_i + \alpha_j))/2) \\ \quad \times \prod_{i=1}^n \sin((h_i + 2\pi\alpha_i)/2) \end{array} \right\}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} Z_{S^{2n}} &= \frac{2^{2n(n-1)}}{n! \, 2^{n-1} (2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} E_{SO(2n+1)}(t; h_1, \ldots, h_n) \\ &\quad \times \left[\prod_{i<j} \sin \frac{h_i - h_j}{2} \sin \frac{h_i + h_j}{2} \right]^2 dh_1 \ldots dh_n \\ &= \frac{(-1)^{n^2} \exp(4\pi^2 \langle \rho, \rho \rangle t)}{n! \, 2^{4n-1} \pi^{(n(2n+1))/2} \prod_r \langle \rho, H'_r \rangle t^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{L(h) \exp((-\langle h, h \rangle)/4t)}{\prod_{i=1}^n \sin(h_i/2)} \\ &\quad \times \prod_{i<j} \sin \frac{h_i - h_j}{2} \sin \frac{h_i + h_j}{2} \, dh_1 \ldots dh_n. \end{aligned}$$

Par exemple, pour $n = 1$, on obtient

$$
\begin{aligned}
Z_{S^2} &= \frac{\exp(t/4)}{4\,t\sqrt{\pi\,t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h \exp(-h^2/4\,t)}{\sin(h/2)}\,dh \\
&= \frac{2\exp(t/4)}{t\sqrt{\pi\,t}} \int_{0}^{+\infty} \frac{h \exp(-h^2/t)}{\sin h}\,dh \\
&= \frac{2\exp(t/4)}{t\sqrt{\pi\,t}} \Bigg[\int_{0}^{\pi/2} \frac{h \exp(-h^2/t)}{\sin h}\,dh \\
&\qquad + \Sigma_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \int_{0}^{\pi/2} \frac{\exp(-\pi^2 n^2 - (h^2/t))}{\sin h} \\
&\qquad \times \left[\ldots 2\,\pi \,\mathrm{sh}\left(\frac{2\,\pi\,nh}{t}\right) - 2\,h\,\mathrm{ch}\left(\frac{2\,\pi\,nh}{t}\right)\right] dh \Bigg].
\end{aligned}
$$

Lorsque $t \to 0_+$, l'intégrale $1/\sqrt{\pi\,t} \int_0^{\pi/2} h \exp(-h^2/t)/\sin h$ donne le

développement limité suivant les puissances de t. On obtient

$$
Z_{S^2} \underset{t \to 0_+}{\sim} \frac{1}{t}\left(1 + \frac{t}{3} + \frac{t^2}{15} + \frac{t^3}{972} + \ldots\right)
$$

données dans [12] sans démonstration.

(*b*) *Cas des sphères* S^{2n+1} :

$$
Z_{S^{2n+1}} = \frac{1}{|W|} \int_T E_{SO(2n+2)}(t;\, u) \mid j(u) \mid^2 du,
$$

avec

$$
u = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & D_1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & D_n & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
$$

et

$$
D_i = \begin{bmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{bmatrix}.
$$

Sachant que

$$
\begin{bmatrix} \cos & -\sin & 0 \\ \sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos & -\sin \\ 0 & \sin & \cos \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},
$$

on peut écrire

$$u = A \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & 0 & \\ \hline & & D_1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & D_n \end{array}\right] A^{-1},$$

avec A indépendant de u.

Par suite :

$$Z_{S^{2n+1}} = \frac{1}{|W| V_\Gamma} \int_0^{2\pi} \times \ldots \times \int_0^{2\pi} E_{SO(2n+2)}(t;\, H) \,|\, j(H) \,|^2 \, dH,$$

avec

$$H = \left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ \hline & & 0 & -h_2 & & & \\ & & h_2 & 0 & & & \\ \hline & & & & \ddots & & \\ \hline & & & & & 0 & -h_{n+1} \\ & & & & & h_{n+1} & \end{array}\right]$$

$$E_{SO(2n+2)}(t;\, 0,\, h_2,\, \ldots,\, h_{n+1})$$

$$= \frac{(2\pi)^{n+1} \exp(4\pi^2 \langle \rho, \rho \rangle)}{2^{(n+1)^2} \pi^{((n+1)(2n+1))/2} (i)^{n(n+1)} \prod_r \langle \rho, H'_r \rangle t^{(n+1)/2}} \times \ldots$$

$$\times \Sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbf{Z}} \frac{\left\{\begin{array}{l} [L(h) \exp((-\langle h, h \rangle)/4t)] \\ \quad \times (2\pi\alpha_1,\, h_2 + 2\pi\alpha_2,\, \ldots,\, h_{n+1} + 2\pi\alpha_{n+1}) \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} 2^{n(n+1)} (i)^{n(n+1)} \prod_{i<j} \sin((h_i - h_j + 2\pi(\alpha_i - \alpha_j))/2 \\ \quad \times \sin((h_i + h_j + 2\pi(\alpha_i + \alpha_j))/2) \prod_{j=2}^{n+1} \\ \quad \times \sin(-h_j/2) \sin(h_j/2) \end{array}\right\}}.$$

D'où

$$Z_{S^{2n+1}} = \frac{(-1)^{n^2} \pi \exp(4\pi^2 \langle \rho, \rho \rangle t)}{n!\, \pi^{((n+1)(2n+1))/2}\, 2^{4n} \prod_r \langle \rho, H'_r \rangle t^{(n+1)/2}} \times \ldots$$

$$\times \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \Sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbf{Z}} [L(h) \exp((-\langle h, h \rangle)/4t)]$$

$$\times (2\pi\alpha_1,\, h_2 + 2\pi\alpha_2,\, \ldots,\, h_{n+1} + 2\pi\alpha_{n+1}) \times \ldots$$

$$\times \prod_{i<j} \sin \frac{h_i - h_j + 2\pi(\alpha_i - \alpha_j)}{2}$$

$$\times \sin \frac{h_i + h_j + 2\pi(\alpha_i + \alpha_j)}{2} \, dh_2 \ldots dh_{n+1}.$$

Par exemple, pour $n = 1$, on obtient

$$
\begin{aligned}
Z_{S^3} &= \frac{\exp t}{16\, t^3} \int_0^{2\pi} \Sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_2 \in \mathbf{Z}} [(h_2 + 2\,\pi\alpha_2)^2 - 4\,\pi^2\,\alpha_1^2] \\
&\quad \times \exp\,(-[4\,\pi^2\,\alpha_1^2 + (h_2 + 2\,\pi\alpha_2)^2]/4\,t)\, dh_2 \\
&= \frac{\exp t}{4\,t} \left[\int_0^{2\pi} \left(\Sigma_{\alpha_2 \in \mathbf{Z}} \frac{(h_2 + 2\,\pi\alpha_2)^2}{4\,t} \exp\,(-(h_2 + 2\,\pi\alpha_2)^2/4\,t) \right) dh_2 \right] \\
&\quad \times \left[\Sigma_{\alpha_1 \in \mathbf{Z}} \frac{\exp\,((-\pi^2\,\alpha_1^2)/t)}{t} \right] \\
&\quad - \left[\int_0^{2\pi} (\Sigma_{\alpha_2 \in \mathbf{Z}} \exp\,(-(h_2 + 2\,\pi\alpha_2)^2/4\,t))\, dh_2 \right] \\
&\quad \times \left[\Sigma_{\alpha_1 \in \mathbf{Z}} \frac{\pi^2\,\alpha_1^2}{t^2} \exp\,((-\pi^2\,\alpha_1^2)/t) \right] \\
&= \frac{\exp t}{4\,t} \left[\left[2\sqrt{t} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\,(-x^2)\, dx \right] \left[\Sigma_{\alpha_1 \in \mathbf{Z}} \frac{\exp\,((-\pi^2\,\alpha_1^2)/t)}{t} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[2\sqrt{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\,(-x^2)\, dx \right] \left[\Sigma_{\alpha_1 \in \mathbf{Z}} \frac{\pi^2\,\alpha_1^2}{t^2} \exp\,((-\pi^2\,\alpha_1^2)/t) \right] \right] \\
&= \frac{\exp t\sqrt{\pi}}{4\,t} \left[\sqrt{t} \left[\Sigma_{\alpha_1 \in \mathbf{Z}} \frac{\exp\,((-\pi^2\,\alpha_1^2)/t)}{t} \right] \right. \\
&\quad \left. - 2\sqrt{t} \left[\Sigma_{\alpha_1 \in \mathbf{Z}} \frac{\pi^2\,\alpha_1^2}{t^2} \exp\,((-\pi^2\,\alpha_1^2)/t) \right] \right] \\
&= \frac{\exp t\sqrt{\pi}}{4\,t} \left[\sqrt{t} \left[\frac{1}{t} + 2\, \Sigma_{\alpha_1 \geq 1} \frac{\exp\,((-\pi^2\,\alpha_1^2)/t)}{t} \right] \right. \\
&\quad \left. - 4\sqrt{t} \left[\Sigma_{\alpha_1 \geq 1} \frac{\pi^2\,\alpha_1^2}{t^2} \exp\,((-\pi^2\,\alpha_1^2)/t) \right] \right] \\
&= \frac{\exp t\sqrt{\pi\, t}}{4\,t^2} \left[1 + 2\, \Sigma_{\alpha_1 \geq 1} \exp\,((-\pi^2\,\alpha_1^2)/t) \right. \\
&\quad \left. - 4\, \Sigma_{\alpha_1 \geq 1} \frac{\pi^2\,\alpha_1^2}{t} \exp\,((-\pi^2\,\alpha_1^2)/t) \right] \\
&= \frac{\exp t\sqrt{\pi}}{4\,t^{3/2}} \left[1 + 2\, \Sigma_{\alpha_1 \geq 1} \exp\,((-\pi^2\,\alpha_1^2)/t) \right. \\
&\quad \left. - 4\, \Sigma_{\alpha_1 \geq 1} \frac{\pi^2\,\alpha_1^2}{t} \exp\,((-\pi^2\,\alpha_2^2)/t) \right].
\end{aligned}
$$

Lorsque $t \to 0_+$, on obtient

$$Z_{S^3} \underset{t \to 0_+}{\sim} \frac{\exp t\sqrt{\pi}}{4\,t^{3/2}} \qquad (\textit{voir } [12]).$$

APPENDICE : *Preuve de la formule d'Eskin.*

Conservons les notations du paragraphe 1.

Une fonction f sur $\mathfrak{T}$ est dite symétrique ou invariante par le groupe de Weyl W de G si $f(\varphi.h) = f(h)$ pour $\varphi \in W$, et antisymétrique si $f(\varphi.h) = (\text{signe } \varphi) f(h)$ (signe φ étant le signe du déterminant de φ).

Le noyau de diffusion $E(t; x, y)$ de G vérifie :

$$E(t; x, y) = E(t; y^{-1}.x, e) = E(t; y^{-1}.x)$$

et la fonction $E(t; \exp .)$ satisfait à l'équation différentielle :

$$\left(\Sigma_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial h_i^2} + 4\pi^2 \langle \rho, \rho \rangle\right) j = \frac{\partial}{\partial t} j \tag{4}$$ (*voir* p. 4).

La détermination du noyau de diffusion de G se ramène donc à trouver une solution de cette équation différentielle, Γ-périodique sur $\mathfrak{T}$ et invariante par le groupe de Weyl W de G.

La fonction

$$E_1 : \quad h \in T' \to \frac{\exp(4\pi^2 \langle \rho, \rho \rangle t)}{t^{n/2}} \frac{\exp((- \langle h, h \rangle)/4t)}{j(h)}$$

satisfait à (4) et est antisymétrique.

Pour la rendre symétrique, considérons l'opérateur $L = \Pi_r L(h, H'_r)$, où $L(h, H'_r)$ est la dérivation en h suivant la direction H'_r.

Il est facile de vérifier que l'opérateur L met en bijection l'ensemble des fonctions sur $\mathfrak{T}$ invariantes par le groupe de Weyl W avec l'ensemble des fonctions antisymétriques sur $\mathfrak{T}$.

Considérons alors la fonction

$$E_2 : \quad h \to \frac{\exp(4\pi^2 \langle \rho, \rho \rangle t)}{t^{n/2}} \frac{[L(h) \exp((- \langle h, h \rangle)/4t)](h)}{j(h)}.$$

La fonction E_2 est invariante par W, et satisfait à l'équation différentielle (4).

Γ étant un sous-groupe discret de $\mathfrak{T}$, la fonction

$$h \in T' \to \frac{\exp(4\pi^2 \langle \rho, \rho \rangle t)}{t^{n/2}} \Sigma_{\gamma \in \Gamma} \frac{[L(h) \exp((- \langle h, h \rangle)/4t)](h + \gamma)}{j(h + \gamma)}$$

est Γ-périodique, invariante par le groupe de Weyl W, et vérifie encore l'équation différentielle (4).

Soient maintenant f une fonction sur G, dg et du les mesures de Haar normalisées de G et T. Calculons $\lim_{t \to 0+} \int_G f(g) E(t; g)\, dg$ en suivant de près le calcul d'Eskin [7] :

$$\begin{aligned} \int_G f(g) E(t; g)\, dg &= \frac{1}{|W|} \int_T |j(u)|^2 \left[\int_G f(gug^{-1}) E(t; gug^{-1})\, dg\right] du \\ &= \frac{1}{|W|} \int_T |j(u)|^2 E(t; u) F(u)\, du, \end{aligned}$$

avec

$$F(u) = \int_G f(gug^{-1})\, dg \qquad \text{et} \qquad |W| = \text{ordre de } W.$$

Soient dh la mesure de Lebesgue, $d\dot{h}$ la mesure de $\mathfrak{T}/\Gamma$, définie par $\int_{\mathfrak{T}} f(h)\, dh = \int_{\mathfrak{T}/\Gamma} \Sigma_\gamma f(h + .)\, d\dot{h}$, et V_Γ le volume de $\mathfrak{T}/\Gamma$. On a

$$V_\Gamma \int_T |j(u)|^2 E(t;\, u) F(u)\, du$$
$$= \int_{\mathfrak{T}/\Gamma} |j_0 \exp(\dot{h})|^2 E(t;\, \exp \dot{h}) F \circ \exp(\dot{h})\, d\dot{h}.$$

Comme

$$|j_0 \exp(\dot{h})| = |j_0 \exp(h)| = |j(h)|$$

et

$$F_0 \exp(\dot{h}) = F_0 \exp(h) = F(h),$$

l'intégrale précédente est encore égale à

$$\frac{\exp(4\pi^2 \langle \rho, \rho \rangle t)}{t^{n/2}} \int_{\mathfrak{T}/\Gamma} [\Sigma_{\gamma \in \Gamma} F(h+\gamma) \overline{j(h+\gamma)}$$
$$\times [L(h) \exp((-\langle h, h \rangle)/4t)](h+\gamma)]\, dh$$
$$= \frac{\exp(4\pi^2 \langle \rho, \rho \rangle t)}{t^{n/2}} \int_{\mathfrak{T}} F(h) \overline{j(h)} [L(h) \exp((-\langle h, h \rangle)/4t)](h)\, dh.$$

D'où

$$\int_G f(g) E(t;\, g)\, dg$$
$$= \frac{\exp(4\pi^2 \langle \rho, \rho \rangle t)}{V_\Gamma . |W| . t^{n/2}} \int_{\mathfrak{T}} F(h) \overline{j(h)} [L(h) \exp((-\langle h, h \rangle)/4t)](h)\, dh.$$

Posons $h = 2h'\sqrt{t}$,

$$[L(h) \exp((-\langle h, h \rangle)/4t)](h)$$
$$= \frac{[L(h) \exp(-\langle h', h' \rangle)](h')}{(2\sqrt{t})^{(N-n)/2}} = \frac{[L(h') \exp(-\langle h', h' \rangle)](h')}{(2\sqrt{t})^{(N-n)/2}}.$$

Par suite :

$$\int_G f(g) E(t;\, g)\, dg$$
$$= \frac{2^n \exp(4\pi^2 \langle \rho, \rho \rangle t)}{V_\Gamma . |W|} \int_{\mathfrak{T}} \frac{\overline{j(2\sqrt{t}\, h')}}{(2\sqrt{t})^{(N-n)/2}} F(2\sqrt{t}\, h')$$
$$\times [L(h') \exp(-\langle h', h' \rangle)](h')\, dh',$$

et

$$\lim_{t \to 0+} \int_G f(g) E(t;\, g)\, dg = \frac{2^n}{V_\Gamma . |W|} \lim_{t \to 0+} \int_{\mathfrak{T}} \frac{\overline{j(2\sqrt{t}\, h')}}{(2\sqrt{t})^{(N-n)/2}} F(2\sqrt{t}\, h')$$
$$\times [L(h') \exp(-\langle h', h' \rangle)](h')\, dh'.$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $\eta > 0$ tel que, pour $|t| < \eta$, on ait $|F(2\sqrt{t}h') - F(0)| < \varepsilon$,

$$\int \frac{\overline{j(2\sqrt{t}h')}}{(2\sqrt{t})^{(N-n)/2}} F(2\sqrt{t}h')\,[L(h')\exp(-\langle h', h'\rangle)](h')\,dh'$$

$$= F(0)\int_{\mathfrak{T}} \frac{\overline{j(2\sqrt{t}h')}}{(2\sqrt{t})^{(N-n)/2}}[L(h')\exp(-\langle h', h'\rangle)](h')\,dh' + \ldots$$

$$+ \int_{\mathfrak{T}} \frac{\overline{j(2\sqrt{t}h')}}{(2\sqrt{t})^{(N-n)/2}}[F(2\sqrt{t}h') - F(0)][L(h')\exp(-\langle h', h'\rangle)](h')\,dh'.$$

D'où

$$\lim_{t\to 0+}\int_{\mathfrak{T}} \frac{\overline{j(2\sqrt{t}h')}}{(2\sqrt{t})^{(N-n)/2}} F(2\sqrt{t}h')\,[L(h')\exp(-\langle h', h'\rangle)](h')\,dh'$$

$$= F(0)\lim_{t\to 0+}\int_{\mathfrak{T}} \frac{\overline{j(2\sqrt{t}h')}}{(2\sqrt{t})^{(N-n)/2}}[L(h')\exp(-\langle h', h'\rangle)](h')\,dh',$$

et

$$\lim_{t\to 0+}\int_C f(g)\,E(t;g)\,dg$$

$$= \frac{2^n F(0)}{V_\Gamma . |W|}\lim_{t\to 0+}\int_{\mathfrak{T}} \frac{\overline{j(2\sqrt{t}h')}}{(2\sqrt{t})^{(N-n)/2}}[L(h')\exp(-\langle h', h'\rangle)](h')\,dh'$$

$$= \frac{(-1)^{(N-n)/2}.2^n.F(0)}{V_\Gamma . |W|}\lim_{t\to 0+}$$

$$\times\int_{\mathfrak{T}} \frac{\exp(-\langle h', h'\rangle)}{(2\sqrt{t})^{(N-n)/2}}\Big[L(h')\,\overline{j(2\sqrt{t}h')}\Big](h')\,dh'$$

puisque l'adjoint de l'opérateur L est égal à $(-1)^{(N-n)/2}L$.

$$\overline{j(2\sqrt{t}h')} = \Sigma_{\varphi\in W}(\text{signe }\varphi)\exp(-2\pi i(2\sqrt{t})\langle \rho, \varphi.h'\rangle)$$

et

$$[L(h')\exp(-2\pi i(2\sqrt{t})\langle \rho, \varphi.h'\rangle)](h')$$
$$= (-1)^{(N-n)/2}.(2\pi i)^{(N-n)/2}.(2\sqrt{t})^{(N-n)/2}$$
$$\times(\text{signe }\varphi).\Pi_r\langle \rho, H'_r\rangle.\exp(-2\pi i(2\sqrt{t})\langle \rho, \varphi.h'\rangle).$$

D'où

$$\frac{\Big[L(h')\,\overline{j(2\sqrt{t}h')}\Big](h')}{(2\sqrt{t})^{(N-n)/2}}$$
$$= (-1)^{(N-n)/2}.(2\pi i)^{(N-n)/2}$$
$$\times\Pi_r\langle \rho, H'_r\rangle\,\Sigma_{\varphi\in W}\exp(-2\pi i(2\sqrt{t})\langle \rho, \varphi.h'\rangle)$$

et

$$\lim_{t \to 0+} \int_C f(g)\, E(t;\, g)\, dg$$

$$= \frac{(-1)^{(N-n)/2} . 2^n . F(0)}{V_\Gamma . |W|} . (-1)^{(N-n)/2} . (2\pi i)^{(N-n)/2}$$

$$\times \Pi_r \langle \rho, H'_r \rangle . |W| . \int_{\mathfrak{T}} \exp(-\langle h', h' \rangle)\, dh'$$

$$= \frac{1}{V_\Gamma} . 2^{(N+n)/2} . \pi^{(N-n)/2} . (i)^{(N-n)/2} . F(0) . \Pi_r \langle \rho, H'_r \rangle . \pi^{n/2} . \Delta^{-1/2},$$

Δ étant le discriminant du produit scalaire sur $\mathfrak{T}$ par rapport à la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Finalement,

$$\lim_{t \to 0+} \int_G f(g)\, E(t;\, g)\, dg$$

$$\frac{1}{V_\Gamma} . 2^{(N+n)/2} . \pi^{N/2} . (i)^{(N-n)/2} . \Pi_r \langle \rho, H'_r \rangle . F(0) . \Delta^{-1/2}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Adams (J. F.). — *Lectures on Lie groups.* — New York, W. A. Benjamin, 1969 (*Mathematics Lecture Note Series*).

[2] Atiyah (M.), Bott (R.) and Patodi (V. K.). — On the heat equation and the index theorem, *Inventiones Math.*, t. 19, 1973, p. 273-330.

[3] Berger (M.). — Le spectre des variétés riemanniennes, *Revue roumaine Math. pures et appl.*, t. 13, 1968, p. 915-931.

[4] Berger (M.), Gauduchon (P.) et Mazet (E.). — *Le spectre d'une variété riemannienne.* — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in mathematics*, 194).

[5] Combet (E.). — Paramétrix et invariants sur les variétés compactes, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 3, 1970, p. 247-271.

[6] d'Atri (J. E.) and Nickerson (H. K.). — The existence of special orthonormal frames, *J. of diff. Geom.*, t. 2, 1968, p. 393-409.

[7] Èskin (L. D.). — The heat equation and the Weierstrass transformation on certain symmetric spaces, *Amer. math. Soc. Transl.*, t. 75, 1968, p. 239-254.

[8] Èskin (L. D.). — *The heat equation on Lie groups*, In memoriam N. G. Cebotarev [in Russian], Izdat. Kazan Univ., 1964, p. 113-132.

[9] Kobayashi (S.) and Nomizu (K.). — *Foundations of differential Geometry*, Vol. 2. — New York, Interscience Publishers, 1969 (*Interscience Tracts in pure and applied Mathematics*, 15).

[10] Kotake (T.). — The fixed point theorem of Atiyah-Bott via parabolic operators, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 22, 1969, p. 789-806.

[11] Kotake (T.). — An analytic proof of the classical Riemann-Roch theorem, *Global analysis*, III, p. 137-146. — Providence American mathematical Society (*Proceedings of Symposia in pure Mathematics*, 16).

[12] Mc Keans (H. P.) and Singer (I. M.). — Curvature and the eigenvalues of the Laplacian, *J. of differ Geom.*, t. 1, 1967, p. 43-69.

[13] PATODI (V. K.). — An analytic proof of Riemann-Roch-Hirzebruch theorem of Kaehler manifolds, *J. of differ Geom.*, t. 5, 1971, p. 251-281.
[14] PATODI (V. K.). — Curvature and the eigenforms of the Laplace operator, *J. of diff. Geom.*, t. 5, 1971, p. 223-249.
[15] VILENKIN (N. J.). — *Special functions and the theory of group representations.* — Providence, american mathematical Society, 1968 (*Translations of mathematical Monographs*, 22).

(Texte reçu le 9 février 1973.)

Abdel-ilah BENABDALLAH,
Université de Lyon,
Département de Mathématiques,
43, boulevard du 11-Novembre-1918,
69621 Villeurbanne.