BULLETIN DE LA S. M. F.

P. SCHAPIRA

Hyperfonctions et problèmes aux limites elliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 99 (1971), p. 113-141

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__113_0>

Bull. Soc. math. France,
99, 1971, p. 113 à 141.

HYPERFONCTIONS ET PROBLÈMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES

PAR

PIERRE SCHAPIRA.

Table des matières.

Introduction.

Dans sa « théorie des hyperfonctions » [17], M. SATO remarquait que les hyperfonctions sur R pouvaient être obtenues comme « valeurs au bord » de fonctions harmoniques dans le demi-plan supérieur.

Par ailleurs, étudiant le problème de Dirichlet, J.-L. LIONS et E. MAGENES [12] démontraient que si Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ à frontière analytique Γ, et P un opérateur proprement elliptique d'ordre $2m$ à coefficients analytiques au voisinage de $\overline{\Omega}$, on avait un quasi-isomorphisme entre les m-uples de fonctionnelles analytiques de Γ et les solutions analytiques dans Ω de l'équation $Pu = 0$.

Nous nous proposons, dans ce travail, de généraliser le théorème de Lions et Magenes au cas ou $\Omega \cup \Gamma$ est une variété analytique réelle à bord. Ce sont alors, Γ n'étant plus nécessairement compacte, les hyperfonctions qui vont jouer le rôle des fonctionnelles analytiques.

Nous démontrons que si $\Omega \cup \Gamma$ est connexe et non compacte, les m-uples d'hyperfonctions de Γ peuvent toujours être obtenues comme « valeur au bord » des solutions analytiques de l'équation $Pu = 0$ dans Ω (P étant d'ordre $2m$), et que les fonctions de valeur au bord nulle se prolongent à travers Γ (c'est alors une généralisation du théorème de Morrey-Nirenberg [16]).

Pour cela, nous commencerons par démontrer des théorèmes d'existence et de régularité dans le cas des fonctions de classe C^∞ ou des distributions, puis, utilisant une méthode classique, nous démontrerons un « théorème de dualité » analogue à un théorème de Grothendieck [7]. Nous « recolleront » alors nos isomorphismes en utilisant des techniques de la théorie des faisceaux.

Nous montrerons comment ces résultats permettent de retrouver ceux de Lions et Magenes et permettent de démontrer la régularité (intérieure et au bord) des solutions hyperfonctions des équations elliptiques.

1. Préliminaires.

Nous ne rappellerons pas les principales définitions utilisées dans l'étude du problème de Dirichlet (opérateurs proprement elliptiques, espaces H^s, etc.). Nous renvoyons le lecteur au livre de J.-L. Lions et E. Magenes [11] pour cela. Les paragraphes 3 et 4 nécessitent une certaine connaissance des techniques de ce livre, mais on pourra lire les énoncés de ces paragraphes sans leurs démonstrations, sans rien perdre de la compréhension générale.

Nous utiliserons le langage des faisceaux, et nous renvoyons au livre de R. Godement [4] à ce sujet.

Cependant, nous avons évité le plus souvent l'utilisation de la cohomologie.

Enfin, nous renvoyons au livre de A. Grothendieck [6] pour ce qui concerne les espaces vectoriels topologiques.

On supposera donnés :

(*a*) Une variété Ω' analytique réelle dénombrable à l'infini de dimension n sans bord, et une sous-variété à bord Ω de Ω', elle aussi de dimension n, fermée dans Ω'.

On désignera par Γ le bord de Ω, et par $\dot{\Omega}$ l'intérieur de Ω.

On supposera Ω' et Γ orientées et munies de mesures analytiques positives dv et $d\sigma$.

(*b*) Un opérateur P proprement elliptique d'ordre $2m$ à coefficients analytiques dans Ω'.

(*c*) $2m$ opérateurs frontières sur Γ, $(P_j)_{j=1}^m$, $(P'_j)_{j=1}^m$ à coefficients analytiques.

On supposera (*cf.* la remarque 3 du § 11) :

— P_j d'ordre $m_j = j - 1$;

— P'_j d'ordre $m'_j = 2m - j$;

— les opérateurs sont normaux.

On désignera par $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}$, H^s_{loc}, $\mathcal{D}'$, B les faisceaux (d'espaces vectoriels complexes) sur Ω', des germes de fonctions analytiques, de fonctions de classe C^∞, de distributions localement dans $H^s (s \in \mathbf{R})$, de distributions, d'hyperfonctions.

On désignera par $\tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{\mathcal{E}}$, $\tilde{H}^s_{\mathrm{loc}}$, $\tilde{\mathcal{D}}'$, $\tilde{B}$, les faisceaux analogues sur la variété Γ. Rappelons ([17], [15], [18]) que le faisceau B est caractérisé par les propriétés :

1° Le faisceau B est flasque (i. e. : les opérations de restriction sont surjectives);

2° Soit K un compact de Ω', et soit $\mathcal{A}(K)$ l'espace des fonctions analytiques au voisinage de K. L'espace $\mathcal{A}(K)$ peut être muni d'une topologie « naturelle » du type $\mathcal{D}\,\mathcal{F}\,\mathcal{S}$. Son dual, $\mathcal{A}'(K)$, est l'espace des fonctionnelles analytiques portable par K. Alors

$$\Gamma_K(\Omega', B) = \mathcal{A}'(K),$$

où $\Gamma_K(\Omega', B)$ est l'espace des hyperfonctions sur Ω' à support dans K, espace que nous noterons aussi $B_K(\Omega')$ [et de manière analogue pour $\mathcal{D}'_K(\Omega')$].

Ces deux propriétés entraînent que, si ω' est un ouvert relativement compact de Ω', on a un isomorphisme

$$B(\omega') \simeq \mathcal{A}'(\overline{\omega}')/\mathcal{A}'(\partial\omega').$$

Rappelons aussi que $\mathcal{D}'$ est un sous-faisceau de B.

Nous utiliserons les faisceaux $\mathcal{D}'_0$ et B_0 sur Ω définis ainsi : soit ω' un ouvert de Ω' avec $\omega' \cap \Omega = \omega$. On pose

$$\mathcal{D}'_0(\omega) = \mathcal{D}'_\omega(\omega'),$$
$$B_0(\omega) = B_\omega(\omega').$$

où $\mathcal{D}'_\omega(\omega')$ [resp. $B_\omega(\omega')$] désigne l'espace des distributions (resp. des hyperfonctions) sur ω' à support dans ω, espace qui ne dépend que de ω.

Nous utiliserons aussi les faisceaux $\mathcal{D}'_\Gamma$ et B_Γ sur Γ, définis par

$$\mathcal{D}'_\Gamma(\tilde{\omega}) = \mathcal{D}'_{\tilde{\omega}}(\omega'),$$
$$B_\Gamma(\tilde{\omega}) = B_{\tilde{\omega}}(\omega'),$$

où ω' est un ouvert de Ω' rencontrant Γ suivant $\tilde{\omega}$.

Si A est une partie de Ω', on pose

$$\tilde{A} = A \cap \Gamma.$$

Si ω est un ouvert de Ω, on pose

$$\dot{\omega} = \dot{\Omega} \cap \omega.$$

Nous désignerons encore par $\mathcal{A}$, et $\mathcal{E}$ la restriction à Ω des faisceaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$.

L'espace $\mathcal{E}(\Omega) = \Gamma(\Omega, \mathcal{E})$ est l'espace des fonctions sur Ω, qui se prolongent en fonctions de classe C^∞ au voisinage de Ω [et de même $\mathcal{A}(\Omega)$ est l'espace des fonctions analytiques au voisinage de Ω dans Ω'].

L'espace $\mathcal{E}(\Omega)$ a une topologie naturelle d'espace de Fréchet.

Nous désignerons par $\mathcal{E}'(\Omega')$ [resp. $\mathcal{D}(\Omega')$] le sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega')$ [resp. de $\mathcal{E}(\Omega')$] des distributions (resp. des fonctions) à support compact dans Ω' [et de même pour $\tilde{\mathcal{E}}'(\Gamma)$ et $\tilde{\mathcal{D}}(\Gamma)$].

Nous désignerons par $\mathcal{D}(\Omega)$ le sous espace de $\mathcal{E}(\Omega)$ des fonctions à support compact dans Ω. Ce n'est pas toujours un sous-espace de $\mathcal{D}(\Omega')$. Par contre, $\mathcal{E}'(\Omega)$, dual de $\mathcal{E}(\Omega)$, est le sous-espace de $\mathcal{E}'(\Omega')$ des distributions à support dans Ω. On définit de même les espaces $\mathcal{E}(\omega)$, $\mathcal{A}(\omega)$, $\mathcal{D}(\omega)$, $\mathcal{E}(\omega)$ si ω est un ouvert de Ω.

Enfin, nous utiliserons aux paragraphes 3 et 4 les espaces suivants, où $r \in \mathbf{R}^+$, K est un compact de Ω.

$$\begin{aligned}
H^r_{\text{loc}}(\Omega) &= \{ f \in \mathcal{D}'(\dot{\Omega}) \mid \varphi f \in H^r(\dot{\Omega}),\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \},\\
H^r_K(\Omega) &= H^r_K(\Omega') = \mathcal{D}'_K(\Omega') \cap H^r(\Omega'),\\
H^{-r}_{0,\text{loc}}(\Omega) &= \{ u \in \mathcal{D}'_0(\Omega) \mid \varphi u \in H^{-r}(\Omega'),\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \},\\
H^{-r}_K(\Omega) &= H^{-r}_K(\Omega') = \mathcal{D}'_K(\Omega') \cap H^{-r}(\Omega').
\end{aligned}$$

Les espaces $\mathrm{H}^r_{\text{loc}}(\Omega)$ et $H^{-r}_{0,\text{loc}}(\Omega)$ sont des espaces de Fréchet réflexifs, et leurs duals sont respectivement

$$H^{-r}_{\star}\,\Omega = \bigcup_{K \subset \Omega} H^{-r}_K(\Omega) \qquad \text{et} \qquad H^r_{\star}(\Omega) = \bigcup_{K \subset \Omega} H^r_K(\Omega).$$

Enfin on a

$$\bigcap_{r \in \mathbf{N}} H^r_{\text{loc}}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega).$$

Rappelons que si R_j est un opérateur frontière sur Γ d'ordre r_j à coefficients C^∞, R_j opère pour $r > r_j + 1/2$ de $H^r_{\text{loc}}(\Omega)$ dans $\tilde{H}^{r-r_j-1/2}_{\text{loc}}(\Gamma)$ et son transposé de $\tilde{H}^{-r+r_j+1/2}_{\text{loc}}(\Gamma)$ dans $H^{-r}_{0,\text{loc}}(\Omega)$.

2. Valeurs au bord.

Désignons par γ l'application « trace » qui à une fonction définie au voisinage de Γ associe sa restriction à Γ.

Pour tout ouvert ω de Ω, γ définit une application linéaire continue de $\mathcal{E}(\omega)$ dans $\tilde{\mathcal{E}}(\tilde{\omega})$ et, pour tout compact K de Γ, une application linéaire continue de $\mathcal{A}(K)$ dans $\tilde{\mathcal{A}}(K)$.

Un opérateur frontière R_j est le composé $\gamma \circ R'_j$ de γ par un opérateur différentiel R'_j défini au voisinage de Γ.

L'opérateur R_j est normal si Γ est non caractéristique pour R'_j.

Son transposé, ${}^tR_j$, opère donc pour tout compact K de Γ de $\tilde{\mathcal{D}}'_K(\Gamma)$ dans $\mathcal{D}'_K(\Omega')$ et de $\tilde{B}_K(\Gamma)$ dans $B_K(\Omega')$, et par suite se prolonge en un opérateur linéaire de $\tilde{\mathcal{D}}'(\Gamma)$ dans $\mathcal{D}'_0(\Omega)$ et de $\tilde{B}(\Gamma)$ dans $B_0(\Omega)$.

Soit $f \in \mathcal{E}(\Omega)$. On désignera par f_0 la distribution de $\mathcal{D}'_0(\Omega)$, définie par

$$\varphi \to \int_\Omega f\varphi\, dv, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega').$$

Il est classique ([11], [20]) et facile de voir qu'il existe des opérateurs frontières sur Γ, normaux à coefficients analytiques, Q_j d'ordre m_j, Q'_j d'ordre m'_j $(j = 1, \ldots, m)$ tels que l'on ait la formule ci-dessous, dite « formule des sauts » :

$$\forall f \in \mathcal{E}(\Omega), \quad P(f_0) = P(f)_0 + \sum_{j=1}^{m} {}^tQ'_j(P_j f) + \sum_{j=1}^{m} {}^tQ_j(P'_j f).$$

Les Q_j, Q'_j sont uniquement déterminés par P, P_j, P'_j $(j = 1, \ldots, m)$. On a aussi la formule « duale » :

$$\forall f \in \mathcal{E}(\Omega), \quad ({}^tPf)_0 = {}^tP(f_0) + \sum_{j=1}^{m} {}^tP_j(Q'_j f) + \sum_{j=1}^{m} {}^tP'_j(Q_j f).$$

LEMME 2.1. — *Soit $u \in B_\Gamma(\Omega')$. Alors u s'écrit de manière unique*

$$u = Pv + \sum_{j=1}^{m} {}^tQ_j u_j + \sum_{j=1}^{m} {}^tQ'_j u'_j,$$

avec $v \in B_\Gamma(\Omega')$, u_j, $u'_j \in \tilde{B}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Démonstration. — Pour tout compact K de Γ, il résulte du théorème de Cauchy-Kowalewski et du théorème du graphe fermé que l'application :

$$\mathcal{A}(K) \to \mathcal{A}(K) \times \tilde{\mathcal{A}}(K)^{2m},$$
$$f \to ({}^tPf, (Q_j f, Q'_j f)_{j=1}^{m})$$

est un isomorphisme vectoriel topologique.

Par transposition, on en déduit que le morphisme de faisceaux sur Γ :

$$B_\Gamma \times \tilde{B}^{2m} \to B_\Gamma,$$
$$(v, (u_j, u'_j)_{j=1}^m) \to \left(Pv + \sum_{j=1}^m {}^tQ_j u_j + \sum_{j=1}^m {}^tQ'_j u'_j \right)$$

induit pour tout compact K un isomorphisme entre les sections à support dans K de ces faisceaux.

Comme les faisceaux B_Γ et $\tilde{B}$ sur Γ sont flasques, le lemme 2.1 résulte du lemme suivant :

LEMME 2.2. — *Soient F et G deux faisceaux flasques de groupes abéliens sur un espace localement compact X. Soit v un morphisme de F dans G tel que, pour tout compact K de X, v induise un isomorphisme*

$$\Gamma_K(X, F) \to \Gamma_K(X, G).$$

Alors v est un isomorphisme et, en particulier, induit un isomorphisme

$$\Gamma(X, F) \to \Gamma(X, G).$$

La démonstration est évidente puisque si ω est un ouvert relativement compact de X, on a un isomorphisme

$$\Gamma(\omega, F) \simeq \frac{\Gamma_{\overline{\omega}}(X, F)}{\Gamma_{\partial\omega}(X, F)}$$

et de même pour G.

Soit maintenant $f \in \mathfrak{A}(\dot{\Omega})$ vérifiant l'équation $Pf = 0$. Soit $\bar{f} \in B_0(\Omega)$ un prolongement de f (qui existe puisque le faisceau B est flasque)

$$P\bar{f} \in B_\Gamma(\Omega').$$

D'après le lemme 2.1, on peut écrire de manière unique

$$P\bar{f} = Pv + \sum_{j=1}^m {}^tQ_j u_j + \sum_{j=1}^m {}^tQ'_j u'_j,$$

et les hyperfonctions $\bar{f} - v \in B_0(\Omega)$, u_j, $u'_j \in \tilde{B}(\Gamma)$, ne dépendent que de f et pas du prolongement choisi.

DÉFINITION. — *On pose*

$$f_0 = \bar{f} - v,$$
$$P_j f = u'_j,$$
$$P'_j f = u_j,$$
$$b(f) = (P_j f)_{j=1}^m.$$

On dira que f_0 est le prolongement canonique de f, et que $b(f)$ est la valeur au bord de f.

Remarquons que si f appartient à $\mathcal{E}(\overline{\Omega})$ ces définitions coïncident avec les précédentes.

Désignons par $\mathcal{A}_P$ et $\mathcal{A}^0_{P}$ (resp. $\mathcal{A}_{{}^tP}$ et $\mathcal{A}^0_{{}^tP}$) les faisceaux sur Ω des germes de solutions analytiques des équations $Pf = 0$ et des équation $Pf = 0$, $P_j f = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ [resp. ${}^tPf = 0$ et ${}^tPf = 0$, $Q_j f = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$].

L'application b définit une application linéaire

$$\mathcal{A}_P(\dot{\Omega})/\mathcal{A}^0_P(\Omega) \to \tilde{B}(\Gamma)^m$$

qui induit l'application

$$\mathcal{A}_P(\Omega)/\mathcal{A}^0_P(\Omega) \to \tilde{\mathcal{A}}(\Gamma)^m,$$
$$f \to (P_j f)_{j=1}^m.$$

Posons maintenant

$$\mathcal{A}_P(\dot{\Omega}, \mathcal{D}') = \{ f \in \mathcal{A}_P(\dot{\Omega}) \mid \exists \bar{f} \in \mathcal{D}'_0(\Omega), \bar{f} \mid \dot{\Omega} = f \}.$$

LIONS ET MAGENES [11] ont défini une application linéaire que nous noterons b' qui envoie $\mathcal{A}_P(\dot{\Omega}, \mathcal{D}')$ dans $\tilde{\mathcal{D}}'(\Gamma)^m$.

LEMME 2.3. — *Soit $u \in \mathcal{D}'_\Gamma(\Omega')$. Alors u s'écrit de manière unique :*

$$u = Pv + \sum_{j=1}^m {}^tQ_j u_j + \sum_{j=1}^m {}^tQ'_j u'_j,$$

avec $v \in \mathcal{D}'_\Gamma(\Omega')$, $u_j, u'_j \in \tilde{\mathcal{D}}'(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Nous ne démontrerons pas ce lemme qui ne présente d'ailleurs pas de difficultés (*cf.* [20], t. 1, p. 102).

THÉORÈME 2.1. — *La restriction de b à $\mathcal{A}_P(\dot{\Omega}, \mathcal{D}')$ coïncide avec l'application b' de Lions et Magenes.*

Démonstration. — Soit $f \in \mathcal{A}_P(\dot{\Omega}, \mathcal{D}')$.

Posons $b'(f) = (B_j f)_{j=1}^m$. Soit f_0 le prolongement canonique de f,

$$Pf_0 = \sum_{j=1}^m {}^tQ_j u_j + \sum_{j=1}^m {}^tQ'_j u'_j.$$

Il résulte du lemme 2.3 que f_0 appartient à $\mathcal{D}'_0(\Omega)$ et u_j, u'_j à $\tilde{\mathcal{D}}'(\Gamma)$.

Soit $(\varphi_j)_{j=1}^m \in \tilde{\mathcal{D}}(\Gamma)^m$, et soit $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec

$$Q_j \theta = 0, \qquad Q'_j \theta = \varphi_j \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

Il est facile de construire un tel θ $\Big[$on se ramène au cas où Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n_+ = \mathbf{R}^n \cap \{x_n \geq 0\}$, et où $Q_j = \gamma \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j-1}\Big]$ (*cf.* [11], t. 1, p. 129).

$$\sum_{j=1}^{m} \langle u'_j, \varphi_j \rangle = \sum_{j=1}^{m} \langle {}^t Q'_j u'_j, \theta \rangle = \langle P f_0, \theta \rangle$$

(puisque $Q_j \theta = 0$).

Or, d'après le théorème 6.5 de Lions et Magenes ([11], t. 1, p. 188), on a aussi

$$\langle P f_0, \theta \rangle = \sum_{j=1}^{m} \langle B_j f, \varphi_j \rangle,$$

donc $B_j f = u'_j = P_j f$.

Remarque. — On pourrait définir, grâce au lemme 2.1, les valeurs au bord sur Γ d'une solution hyperfonction de l'équation $Pu = 0$ sur Ω, sous les seules hypothèses que P est à coefficients analytiques et que Γ est non caractéristique.

3. Théorèmes de régularité.

Lemme 3.1. — *Pour tout point $x \in \Gamma$, il existe un voisinage compact K de x dans Ω tel que*

$$\begin{aligned} &\forall s \in \mathbf{N}, \\ &\forall u \in H_K^{m-s}(\Omega), \\ &\forall u_j \in \tilde{H}_K^{-m+m_j+1/2-s}(\Gamma) \qquad (j = 1, \ldots, m), \end{aligned}$$

l'hypothèse

$$ {}^t P u + \sum_{j=1}^{m} {}^t P_j u_j \in H_K^{-m-s+1}(\Omega)$$

entraîne

$$u \in H_K^{m-s+1}(\Omega), \qquad u_j \in \tilde{H}_K^{-m+m_j+3/2-s}.$$

Démonstration. — On peut supposer, en se plaçant dans une carte de Ω, que K est contenu dans une demi-boule de $\mathbf{R}^n$.

Comme les opérateurs P_j sont normaux d'ordre $j-1$, on peut supposer (*cf.* [11], t. 1, p. 128) que

$$\Gamma = \Omega \cap \{x_n = 0\},$$

$$P_j = \gamma \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j-1}.$$

On peut alors trouver une variété ω compacte de classe C^∞ à bord $\partial\omega$, plongée dans $\mathbf{R}^n$, telle que

$$K \subset \omega,$$
$$\partial\omega = \Gamma \quad \text{au voisinage de } K,$$
$$P \text{ est proprement elliptique au voisinage de } \omega.$$

Les opérateurs P_j se prolongent naturellement à $\partial\omega$, et on sait (*cf.* [11], t. 1, p. 208) que l'application

$$f \to (Pf, (P_j f)_{j=1}^m)$$

est, pour tout $s \in \mathbf{N}$, un quasi-isomorphisme de $H^{m+s}(\omega)$ sur

$$H^{-m+s}(\omega) \times \prod_{j=1}^{m} \tilde{H}^{m+s-j+1/2}(\partial\omega),$$

dont le noyau et le conoyau ne dépendent pas de s. On en déduit que l'application transposée

$$(u, (u_j)_{j=1}^m) \to \left({}^tPu + \sum_{j=1}^{m} {}^tP_j u_j\right)$$

est, pour tout entier $s \in \mathbf{N}$, un quasi-isomorphisme de

$$H_{\overline{\omega}}^{m-s}(\mathbf{R}^n) \times \prod_{j=1}^{m} \tilde{H}^{-m-s+j-1/2}(\partial\omega) \quad \text{sur } H_{\overline{\omega}}^{-m-s}(\mathbf{R}^n),$$

dont le noyau et le conoyau ne dépendent pas de s.

Le lemme en résulte.

LEMME 3.2. — *Soit* $u \in H_{\text{loc}}^m(\Omega)$ *avec* ${}^tP(u \mid \dot{\Omega}) = 0$.

Soit u_0 *son image canonique dans* $\mathcal{D}'_0(\Omega)$. *Supposons qu'il existe* $u_j \in \mathcal{D}'(\Gamma)^m$ *avec*

$${}^tPu_0 + \sum_{j=1}^{m} {}^tP_j u_j = 0.$$

Alors $u \in \mathcal{A}_{{}^tP}^0(\Omega)$, $u_j \in \tilde{\mathcal{A}}(\Gamma)$ et $u_j = Q'_j u$.

Démonstration. — Les applications Q_j, qui opèrent de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans $\tilde{\mathcal{E}}(\Gamma)$, se prolongent en applications linéaires continues de $H_{\text{loc}}^m(\Omega)$ dans $\tilde{H}_{\text{loc}}^{m-m_j-1/2}(\Gamma)$.

Il résulte du théorème 2.1 que si $u \in H_{\text{loc}}^m(\Omega)$ vérifie ${}^tP(u \mid \Omega) = 0$, cette définition de $Q_j u$ coïncide avec celle du paragraphe 2 (en remplaçant P par ${}^tP$, et P_j par Q_j).

Le lemme résulte alors du théorème de Morrey-Nirenberg [16].

THÉORÈME 3.1. — *Soit* $u \in \mathcal{D}'_0(\Omega)$, $u_j \in \tilde{\mathcal{D}}'(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$ *vérifiant*

$$ {}^tPu + \sum_{j=1}^{m} {}^tP_j u_j = 0, $$

Alors il existe $f \in \mathcal{A}^0_{{}^tP}(\Omega)$ *tel que* $f_0 = u$, $Q'_j f = u_j$.

Démonstration. — D'après le lemme 3.2, il suffit de démontrer que

$$ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \varphi u \,|\, \dot{\Omega} \in H^m(\dot{\Omega}). $$

On peut supposer que $\dot{\Omega}$ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, que Γ est contenu dans $\{x_n = 0\}$, et que

$$ P_j = \gamma \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j-1}. $$

On peut aussi supposer qu'il existe un entier $s \geqq 0$ tel que

$$ u \,|\, \dot{\Omega} \in H^{m-s}(\dot{\Omega}), $$
$$ u_j \in \tilde{H}^{-m+m_j+1/2-s}(\Gamma). $$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support K assez petit pour que l'on puisse appliquer le lemme 3.1, et tel que

$$ \varphi(x', x_n) = \varphi(x', 0), $$

au voisinage de Γ.

$$ \varphi u \in H^{m-s}_K(\mathbf{R}^n), $$
$$ \varphi u_j \in \tilde{H}_K^{-m+m_j+1/2-s}(\Gamma) $$

et

$$ {}^tP\varphi u + \sum_{j=1}^{m} {}^tP_j \varphi u_j = {}^tP\varphi u - \varphi\, {}^tPu, $$

d'où

$$ {}^tP\varphi u + \sum_{j=1}^{m} {}^tP_j \varphi u_j \in H^{m-s+1}_K(\mathbf{R}^n). $$

Il suffit alors d'appliquer un nombre fini de fois le lemme 3.1.

4. Théorèmes d'existence.

LEMME 4.1. — *Soit K un compact de Ω. Soit $\hat{K}$ la réunion de K et des composantes connexes relativement compactes de $\Omega - K$. Alors $\hat{K}$ est compact.*

La démonstration est la même que celle de B. MALGRANGE ([13], p. 333) concernant les variétés sans bord.

LEMME 4.2. — *Soit K un compact de Ω. L'application*

$$f \to (Pf, (P_j f)_{j=1}^m)$$

induit, pour tout $r \in \mathbf{N}$, un homomorphisme :

$$H_K^{2m+r}(\Omega) \to H_K^r(\Omega) \times \prod_{j=1}^m \tilde{H}_{\tilde{K}}^{2m-m_j-1/2+r}(\Gamma).$$

Démonstration. — D'après l'inégalité 4.3, de [11], (t. 1, p. 157), tout point de Ω a un voisinage compact L, tel que

$$\exists C > 0, \quad \forall f \in H_L^{2m+r}(\Omega), \quad \| f \|_{H_L^{2m+r}(\Omega)}$$
$$\leq C \left[\| Pf \|_{H_L^r(\Omega)} + \sum_{j=1}^m \| P_j f \|_{\tilde{H}_{\tilde{L}}^{2m-m_j-1/2+r}(\Gamma)} + \| f \|_{H_L^{2m+r-1}(\Omega)} \right].$$

En considérant une partition de l'unité au voisinage de K, on en déduit que cette inégalité est encore vraie (avec une autre constante C) si f est à support dans K, car

$$\forall r \geq 0, \quad \exists c > 0, \quad \forall f \in H_K^{s+2m-1}(\Omega),$$
$$\| P\varphi f - \varphi Pf \|_{H_K^s(\Omega)} \leq C \| f \|_{H_K^{s+2m-1}(\Omega)},$$
$$\| P_j \varphi f - \varphi P_j f \|_{\tilde{H}_{\tilde{K}}^{s-m_j-1/2+2m}(\Gamma)} \leq C \| f \|_{H_K^{s-1+2m}(\Omega)}.$$

Le lemme en résulte de manière classique (*cf.* par exemple [11], t. 1, p. 171).

LEMME 4.3. — *Soit K un compact de Ω. L'application*

$$(u, (u_j)_{j=1}^m) \to \left({}^tPu + \sum_{j=1}^m {}^tP_j u_j \right)$$

induit un homomorphisme de $H_K^0(\Omega) \times \prod_{j=1}^m \tilde{H}_{\tilde{K}}^{-2m+m_j+1/2}(\Gamma)$ dans $H_K^{-2m}(\Omega)$.

La démonstration est analogue à celle du lemme 4.2, compte tenu de l'inégalité 4.40′ de [11] (t. 1, p. 158). On utilise l'inégalité

$$\exists C > 0, \quad \forall u_j \in \tilde{H}_{\tilde{K}}^{-2m+m_j+1/2}(\Gamma),$$
$$\| {}^tP_j \varphi u_j - \varphi {}^tP_j u_j \|_{H_K^{-2m}(\Omega)} \leq \| u_j \|_{\tilde{H}_{\tilde{K}}^{-2m+m_j-1/2}(\Gamma)}$$

THÉORÈME 4.1. — *Supposons que Ω n'ait pas de composantes connexes compactes. Alors l'application*

$$\mathcal{E}(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega) \times \tilde{\mathcal{E}}(\Gamma)^m$$
$$f \to (Pf, (P_j f)_{j=1}^m)$$

est surjective.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que l'application

$$H_{\text{loc}}^{2m}(\Omega) \to H_{\text{loc}}^{0}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} \tilde{H}_{\text{loc}}^{2m-m_j-1/2}(\Gamma),$$
$$f \to (Pf, (P_j f)_{j=1}^m)$$

est surjective.

Comme les espaces considérés sont des espaces de Fréchet réflexifs des raisonnements classiques en la matière (*cf.* par exemple [13]) montrent qu'il suffit de vérifier :

(*a*) $\forall\, K \subset \Omega$, l'application

$$H_K^0(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} \tilde{H}_{\tilde{K}}^{-2m+m_j+1/2}(\Gamma) \to H_K^{-2m}(\Omega),$$
$$(u, (u_j)_{j=1}^m) \to \left({}^t P_u + \sum_{j=1}^{m} {}^t P_j u_j\right)$$

est un homomorphisme.

(*b*) Pour tout compact K de Ω, il existe un compact K' tel que

$$\left\{\begin{matrix} u \in H_*^0(\Omega), \quad u_j \in \tilde{H}_*^{-2m+m_j+1/2}(\Gamma) \\ {}^t Pu + \sum_{j=1}^{m} {}^t P_j u_j \in H_K^{-2m}(\Omega) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u \in H_{K'}^0(\Omega) \\ u_j \in \tilde{H}_{\tilde{K}'}^{-2m+m_j+1/2}(\Gamma) \end{matrix}\right\}.$$

(*c*) L'application du (*a*) est injective.

Or (*a*) n'est autre que le lemme 4.3.

(*b*) résulte du théorème 3.1 et du lemme 4.1 (on prend $K' = \hat{K}$ avec les notations du lemme 4.1).

(*c*) résulte du théorème 3.1, sous l'hypothèse « Ω n'a pas de composante connexes compactes ».

THÉORÈME 4.2. — *On a la suite exacte de faisceaux sur Ω :*

$$0 \to \mathcal{A}_P^0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E} \times \tilde{\mathcal{E}}^m \to 0,$$

la deuxième flèche désignant l'identité, et la troisième le morphisme

$$f \to (Pf, (P_j f)_{j=1}^m).$$

Démonstration. — Le théorème résulte du théorème de Morrey-Nirenberg (*loc. cit.*) et du théorème 4.1, puisque tout point de Ω a un voisinage qui est une variété sans composantes connexes compactes.

COROLLAIRE 1. — *Si Ω n'a pas de composantes connexes compactes, on a*

$$H^1(\Omega, \mathcal{A}_P^0) = 0.$$

Démonstration. — On déduit (*cf.* [4]) du théorème 4.2 la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{A}_P^0(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega) \times \tilde{\mathcal{E}}^m(\Gamma) \to H^1(\Omega, \mathcal{A}_P^0) \to H^1(\Omega, \mathcal{E}) \to \dots$$

et comme le faisceau $\mathcal{E}$ sur Ω est mou, $H^1(\Omega, \mathcal{E}) = 0$.

Le corollaire résulte alors du théorème 4.1.

COROLLAIRE 2. — *Supposons Ω sans composantes connexes compactes. Soit $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ un recouvrement ouvert de Ω, et soit*

$$f_{i,j} \in \mathcal{A}_p^0(\Omega_i \cap \Omega_j), \qquad i, j \in I$$

vérifiant

$$f_{i,j} = -f_{j,i},$$
$$f_{i,j} + f_{j,k} + f_{k,i} = 0 \quad \text{sur } \Omega_i \cap \Omega_j \cap \Omega_k, \quad \forall\, i, j, k.$$

Aors il existe $f_i \in \mathcal{A}_P^0(\Omega_i)$, avec $f_{i,j} = f_i - f_j$, $\forall\, i, j$.

Démonstration. — On peut démontrer le corollaire 2 en reprenant, par exemple, la méthode de la démonstration du théorème 1.4.5 de [9].

THÉORÈME 4.3. — *On a la suite exacte de faisceaux sur Ω :*

$$0 \to \mathcal{A}_{{}^tP}^0 \to \mathcal{D}'_0 \times \tilde{\mathcal{D}}'^m \to \mathcal{D}'_0 \to 0,$$

la deuxième flèche désignant le morphisme

$$f \to (f_0, (Q'_j f)_{j=1}^m),$$

et la troisième flèche le morphisme

$$(u, (u_j)_{j=1}^m) \to \left({}^tPu + \sum_{i=1}^m {}^tP_j u_j \right).$$

Démonstration. — Si Ω est sans composantes connexes compactes, on démontre comme pour le théoréme 4.1 (en utilisant le lemme 4.2, au lieu du lemme 4.3) que, pour tout $r \in \mathbf{N}$, l'application

$$(u, (u_j)_{j=1}^m) \to \left({}^tPu + \sum_{j=1}^m {}^tP_j u_j \right)$$

induit une application surjective de

$$H_{0,\mathrm{loc}}^{-r}(\Omega) \times \prod_{j=1}^m \tilde{H}_{\mathrm{loc}}^{-2m+m_j+1/2-r}(\Gamma) \quad \text{sur } H_{0,\mathrm{loc}}^{-r-2m}(\Omega).$$

Comme toute distribution est localement d'ordre fini, et comme tout point de Ω a un visinage qui est une variété sans composantes connexes compactes, la suite de faisceaux

$$\mathcal{D}'_0 \times \tilde{\mathcal{D}}'^m \to \mathcal{D}'_0 \to 0$$

est exacte.

Le théorème résulte alors du théorème 3.1.

THÉORÈME 4.4. — *Supposons que Ω n'ait pas de composantes connexes compactes. Alors la suite*

$$0 \to \mathcal{A}^0_{{}^tP}(\Omega) \to \mathcal{D}'_0(\Omega) \times \tilde{\mathcal{D}}'(\Gamma)^m \to \mathcal{D}'_0(\Omega) \to 0$$

est exacte.

Démonstration. — On a ,d'après le théorème 4.3, la suite exacte

$$0 \to \mathcal{A}^0_{{}^tP}(\Omega) \to \mathcal{D}'_0(\Omega) \times \tilde{\mathcal{D}}'(\Gamma)^m \to \mathcal{D}'_0(\Omega) \to \mathrm{H}^1(\Omega, \mathcal{A}^0_{{}^tP}) \to \dots$$

et, d'après le corollaire 1 du théorème 4.2, l'hypothèse entraîne $\mathrm{H}^1(\Omega, \mathcal{A}^0_{{}^tP}) = 0$, car $({}^tP, (Q_j)_{j=1}^m)$ vérifie les mêmes hypothèses que $(P, (P_j)_{j=1}^m)$.

On pourrait aussi démontrer le théorème 4.4, en utilisant le corollaire 2 à la place du corollaire 1.

5. Théorème de dualité.

Soit ω un ouvert de Ω. Il résulte du théorème de Morrey-Niremberg que l'espace $\mathcal{A}^0_P(\omega)$ est fermé dans $\mathcal{E}(\omega)$. Nous le munirons de la topologie induite par cet espace. C'est alors un espace de Fréchet.

Si K est un compact de Γ, nous munirons l'espace $\mathcal{A}^0_{{}^tP}(K)$ de la topologie induite par $\mathcal{A}(K)$. C'est un espace du type $\mathcal{DFS}$.

THÉORÈME 5.1. — *On suppose Ω sans composantes connexes compactes. Soir K un compact de Γ. L'espace $\mathcal{A}^0_P(\Omega)$ est fermé dans $\mathcal{A}^0_P(\Omega - K)$, et l'application b induit un isomorphisme vectoriel topologique :*

$$\mathcal{A}^0_P(\Omega - K)/\mathcal{A}^0_P(\Omega) \xrightarrow[b]{} \tilde{\mathcal{A}}'(K)^m.$$

Démonstration. — L'application b se factorise par les applications :

$$\mathcal{A}_P^0(\Omega - K)/\mathcal{A}_P^0(\Omega) \xrightarrow[\lambda]{} \mathcal{A}_{{}^tP}^0(K)' \xrightarrow[\nu]{} \tilde{\mathcal{A}}'(K)^m,$$

où ν est l'isomorphisme vectoriel topologique défini par

$$^t\nu^{-1}(g) = (Q_j\, g)_{j=1}^m, \qquad g \in \mathcal{A}_{{}^tP}^0(K),$$

et où l'application λ est définie par

$$\langle \lambda(f), g \rangle = \left\langle Pf_0 - \sum_{j=1}^m {}^tQ_j(P'_j f), g \right\rangle,$$

où $f \in \mathcal{A}_P^0(\Omega - K)$, $g \in \mathcal{A}_{{}^tP}^0(K)$.

Soit ω un ouvert contenant K, et soit $g \in \mathcal{A}_{{}^tP}^0(\omega)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, $\varphi = 1$ au voisinage de K. Soit $\theta = 1 - \varphi$,

$$f_0 - (\theta f) \in \mathcal{A}'(\omega),$$
$$P'_j f - \theta P'_j f_0 \in \tilde{\mathcal{A}}'(\tilde{\omega}).$$

Donc

$$\langle \lambda(f), g \rangle = \left\langle P(\theta f)_0 - \sum_{j=1}^m {}^tQ_j(\theta P'_j f), g \right\rangle.$$

L'application λ est donc continue.

Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\omega)$, $\alpha = 1$ au voisinage du support de φ,

$$\langle P(\theta f)_0, g \rangle = \langle P(\theta f)_0, \alpha g \rangle = \langle (\theta f)_0, {}^tP(\alpha g) \rangle = \langle f, ({}^tP(\alpha g))_0 \rangle,$$
$$\langle {}^tQ_j(\theta P'_j f), g \rangle = \langle {}^tQ_j(\theta P'_j f), \alpha g \rangle = \langle \theta P'_j f, Q_j \alpha g \rangle = \langle f, {}^tP'_j(Q_j \alpha g) \rangle.$$

Donc

$$\langle \lambda(f), g \rangle = \left\langle f, ({}^tP(\alpha g))_0 - \sum_{j=1}^m {}^tP'_j(Q_j \alpha g) \right\rangle$$
$$= \left\langle f, {}^tP(\alpha g)_0 + \sum_{j=1}^m {}^tP_j(Q'_j \alpha g) \right\rangle.$$

Désignons par μ l'application de $\mathcal{A}_{{}^tP}(\omega)$ dans

$$\frac{\mathcal{E}'(\Omega - K)}{{}^tP\mathcal{E}'(\Omega - K) + \sum_{j=1}^m {}^tP_j \tilde{\mathcal{E}}'(\Gamma - K)}$$

définie par $\mu(g) =$ classe de $\left[{}^tP(\alpha g)_0 + \sum_{j=1}^m {}^tP_j(Q'_j \alpha g) \right]$, où $\alpha \in \mathcal{D}(\omega)$,

$\alpha = 1$ au voisinage de K (on vérifie immédiatement que le second membre ne dépend que de g).

Il résulte du théorème du graphe fermé que l'isomorphisme vectoriel

$$\mathcal{Q}^0_{tP}(K) = \varinjlim_{\omega \supset K} \mathcal{Q}^0_{tP}(\omega)$$

est un isomorphisme vectoriel topologique.

L'application μ définit donc une application continue (encore notée μ) de $\mathcal{Q}^0_{tP}(K)$ dans

$$\frac{\mathcal{E}'(\Omega - K)}{{}^tP\mathcal{E}'(\Omega - K) + \sum_{j=1}^{m} {}^tP_j \tilde{\mathcal{E}}'(\Gamma - K)}.$$

Mais ce dernier espace n'est autre, d'après le théorème 4.1, que le dual de l'espace $\mathcal{Q}^0_P(\Omega - K)$.

L'application

$$\mu : \quad \mathcal{Q}^0_{tP}(K) \to (\mathcal{Q}^0_P(\Omega - K))'$$

est donc l'application transposée de l'application

$$\lambda : \quad \mathcal{Q}^0_P(\Omega - K) \to (\mathcal{Q}^0_{tP}(K))'.$$

Désignons par s l'application canonique

$$(\mathcal{Q}^0_P(\Omega - K))' \xrightarrow[s]{} (\mathcal{Q}^0_P(\Omega))',$$

transposée de l'application

$$\mathcal{Q}^0_P(\Omega) \to \mathcal{Q}^0_P(\Omega - K).$$

On a évidemment $s \circ \mu = 0$.

LEMME 5.1. — *Le complexe*

$$0 \to \mathcal{Q}^0_{tP}(K) \xrightarrow[\mu]{} (\mathcal{Q}^0_P(\Omega - K))' \xrightarrow[s]{} (\mathcal{Q}^0_P(\Omega))' \to 0$$

est une suite exacte d'espaces vectoriels.

Démonstration du lemme.

(a) L'application μ est injective. Supposons que

$${}^tP(\alpha g)_0 + \sum_{j=1}^{m} {}^tP_j (Q'_j \alpha g) = {}^tPv + \sum_{j=1}^{m} {}^tP_j v_j,$$

où $v \in \mathcal{E}'(\Omega - K)$, $v_j \in \tilde{\mathcal{E}}'(\Gamma - K)$.

D'après le théorème 3.1, $(\alpha g)_0 - v$ est analytique dans Ω, et Ω n'ayant pas de composantes connexes compactes, $(\alpha g)_0 - v$ est nulle. Donc g est nulle au voisinage de K.

(*b*) $\operatorname{Im} \mu = \operatorname{Ker} s$. Soit $u \in \mathcal{E}'(\Omega - K)$ avec

$$u = {}^tPv + \sum_{j=1}^{m} {}^tP_j v_j, \quad \text{où} \quad v \in \tilde{\mathcal{E}}'(\Omega), \quad v_j \in \mathcal{E}'(\Gamma).$$

$$\left[\text{On a identifié } (\mathcal{A}_P^0(\Omega))' \text{ à } \mathcal{E}'(\Omega) \bigg/ \left({}^tP\mathcal{E}'(\Omega) + \sum_{j=1}^{m} {}^tP_j \tilde{\mathcal{E}}'(\Gamma) \right). \right]$$

Il résulte du théorème 3.1 que v et les v_j ($j = 1, \ldots, m$) sont analytiques dans un voisinage de K.

Si f désigne la restriction de v à un tel voisinage, on aura

$$u = \mu(f) + {}^tPv' + \sum_{j=1}^{m} {}^tP_j v'_j,$$

où $v' \in \mathcal{E}'(\Omega - K)$, $v'_j \in \mathcal{E}'(\Gamma - K)$.

(*c*) L'application s est surjective. Soit $v \in \mathcal{E}'(\Omega)$. D'après le théorème 4.4 il existe $u \in \mathcal{D}'_0(\Omega)$, $u_j \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ ($j = 1, \ldots, m$) avec

$${}^tPu + \sum_{j=1}^{m} {}^tP_j u_j = v.$$

Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\alpha = 1$ au voisinage de K,

$${}^tP\alpha u + \sum_{j=1}^{m} {}^tP_j(\alpha u_j) = v + w,$$

où $w \in \mathcal{E}'(\Omega - K)$.

Fin de la démonstration du théorème. — Les espaces $(\mathcal{A}_P^0(\Omega))'$ et $(\mathcal{A}_P^0(\Omega - K))'$ sont du type $\mathcal{DFS}$. L'application s étant surjective, sera un homomorphisme, et par suite l'espace $\mathcal{A}_P^0(\Omega)$ est fermé dans $\mathcal{A}_P^0(\Omega - K)$.

L'application

$$\lambda : \mathcal{A}_P^0(\Omega - K)/\mathcal{A}_P^0(\Omega) \to (\mathcal{A}_{{}^tP}^0(K))'$$

est alors l'application transposée de l'application $\mu : \mathcal{A}_{{}^tP}^0(K) \to \operatorname{Ker} s$, et μ est un isomorphisme vectoriel topologique, d'après le lemme 5.1 et le théorème du graphe fermé.

Il en est donc de même de l'application λ.

Remarque. — La méthode de démonstration du théorème 5.1 est très voisine de celle utilisée par A. MARTINEAU dans [15].

On peut traduire le lemme 5.1 par « la suite

$$0 \to H^0_\star(K, \mathcal{A}^0_{tP}) \to H^1_\star(\Omega - K, \mathcal{A}^0_{tP}) \to H^1_\star(\Omega, \mathcal{A}^0_{tP}) \to 0$$

est exacte », et utiliser alors l'isomorphisme

$$(H^0(\omega, \mathcal{A}^0_P))' \simeq H^1_\star(\omega, \mathcal{A}^0_{tP}),$$

qui résulte des suites exactes du paragraphe 4.

6. Le faisceau des valeurs au bord.

Nous supposerons, dans ce paragraphe, Ω sans composantes connexes compactes. Rappelons que si ω est un ouvert de Ω, on a posé

$$\tilde{\omega} = \omega \cap \Gamma, \qquad \dot{\omega} = \omega \cap \dot{\Omega}.$$

Lemme 6.1. — *Soit* ω_1 *et* ω_2 *deux ouverts de* Ω *avec* $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2$. *On a un isomorphisme*

$$\mathcal{A}_P(\dot{\omega}_1)/\mathcal{A}^0_P(\omega_1) \simeq \mathcal{A}_P(\dot{\omega}_2)/\mathcal{A}^0_P(\omega_2).$$

Démonstration. — En remplaçant ω_1 par $\omega_1 \cap \omega_2$, on peut supposer $\omega_1 \subset \omega_2$. L'application naturelle

$$\mathcal{A}_P(\dot{\omega}_2)/\mathcal{A}^0_P(\omega_2) \to \mathcal{A}_P(\dot{\omega}_1)/\mathcal{A}^0_P(\omega_1)$$

est injective, et sera surjective d'après le corollaire 2 du théorème 4.2, appliqué au recouvrement de ω_2 par les ouverts ω_1 et $\dot{\omega}_2$:

$$\forall f \in \mathcal{A}^0_P(\omega_1 \cap \dot{\omega}_2),$$
$$f = g + h,$$
$$g \in \mathcal{A}^0_P(\omega_1), \qquad h \in \mathcal{A}^0_P(\dot{\omega}_2)$$

et

$$\mathcal{A}^0_P(\omega_1 \cap \dot{\omega}_2) = \mathcal{A}_P(\dot{\omega}_1),$$
$$\mathcal{A}^0_P(\dot{\omega}_2) = \mathcal{A}_P(\dot{\omega}_2).$$

Définition. — *Soit* ω *un ouvert de* Ω. *Nous poserons*

$$\mathcal{K}(\tilde{\omega}) = \mathcal{A}_P(\dot{\omega})/\mathcal{A}^0_P(\omega)$$

[plus exactement, $\mathcal{K}(\tilde{\omega})$ sera la classe d'équivalence de $\mathcal{A}_P(\dot{\omega})/\mathcal{A}^0_P(\omega)$] Si ω et ω' sont deux ouverts de Ω avec $\omega' \subset \omega$, l'application de restriction

$$\mathcal{A}_P(\dot{\omega}) \to \mathcal{A}_P(\dot{\omega}')$$

induit une application

$$\mathcal{K}(\tilde{\omega}) \to \mathcal{K}(\tilde{\omega}'),$$

et il est clair que l'on défini ainsi un préfaisceau sur Γ que nous noterons $\mathcal{K}$. Si $f \in \mathcal{A}_P(\dot{\omega})$, nous désignerons par $\rho(f)$ son image dans $\mathcal{K}(\tilde{\omega})$.

THÉORÈME 6.1. — *Le préfaisceau $\mathcal{K}$ est un faisceau.*

Démonstration. — Soit $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$ un recouvrement ouvert de l'ouvert ω de Ω.

(*a*) Soit $\varphi \in \mathcal{K}(\tilde{\omega})$ avec $\varphi \mid \tilde{\omega}_i = 0$, $\forall\, i \in I$. Il existe $f \in \mathcal{A}_P(\dot{\omega})$, avec $\rho(f) = \varphi$, et on a

$$f \mid \dot{\omega}_i \in \mathcal{A}_P^0(\omega_i),$$

donc $f \in \mathcal{A}_P^0(\omega)$ et par suite $\rho(f) = 0$.

(*b*) Soit, pour tout $i \in I$,

$$\varphi_i \in \mathcal{K}(\tilde{\omega}_i), \qquad \text{avec} \quad \varphi_i \mid \tilde{\omega}_i \cap \tilde{\omega}_j = \varphi_j \mid \tilde{\omega}_i \cap \tilde{\omega}_j.$$

Soit $f_i \in \mathcal{A}_P(\dot{\omega}_i)$, avec $\rho(f_i) = \varphi_i$. Posons

$$f_{i,j} = f_i - f_j \qquad \text{sur} \quad \dot{\omega}_i \cap \dot{\omega}_j.$$

On a

$$f_{i,j} \in \mathcal{A}_P^0(\omega_i \cap \omega_j).$$

La famille des $(f_{i,j})_{i,j \in I}$ vérifie les condition du corollaire 2 du théorème 4.2. Donc il existe $h_i \in \mathcal{A}_P^0(\omega_i)$, vérifiant

$$f_{i,j} = h_i - h_j.$$

Comme le préfaisceau $\mathcal{A}_P$ est un faisceau, il existe $f \in \mathcal{A}_P(\dot{\omega})$ avec $f \mid \dot{\omega}_i = f_i - h_i$. Posons $\rho(f) = \varphi$. On a

$$\begin{aligned} \varphi \mid \tilde{\omega}_i &= \rho(f \mid \dot{\omega}_i) \\ &= \rho(f_i - h_i) \\ &= \varphi_i. \end{aligned}$$

THÉORÈME 6.2. — *Le faisceau $\mathcal{K}$ est flasque.*

Démonstration. — Soit ω un ouvert de Ω. Il faut montrer que l'application

$$\mathcal{A}_P(\dot{\Omega}) / \mathcal{A}_P^0(\Omega) \to \mathcal{A}_P(\dot{\omega}) / \mathcal{A}_P^0(\omega)$$

est surjective.

C'est une conséquence du corollaire 2 du théorème 4.2, puisque

$$\dot{\omega} = \dot{\Omega} \cap \omega.$$

Remarque. — On aurait pu dans ce paragraphe utiliser le corollaire 1 du théorème 4.2 au lieu du corollaire 2, et les théorèmes de la cohomologie (à support) des faisceaux.

Il est immédiat que l'on a un isomorphisme

$$\mathcal{K}(\tilde{\omega}) \simeq H^1_{\tilde{\omega}}(\Omega, \mathcal{A}^0_P).$$

7. Le théorème d'isomorphisme.

Théorème 7.1. — *On suppose Ω sans composantes connexes compactes. L'application b*

$$\mathcal{A}_P(\dot{\Omega})/\mathcal{A}^0_P(\Omega) \to \tilde{B}(\Gamma)^m$$

est un isomorphisme.

De plus, pour tout compact K de Γ, b induit un isomorphisme vectoriel topologique

$$\mathcal{A}^0_P(\Omega - K)/\mathcal{A}^0_P(\Omega) \to \tilde{\mathcal{A}}'(K)^m.$$

Démonstration. — L'application b commute aux restrictions, et par suite définit un morphisme de faisceaux sur Γ.

$$\mathcal{K} \to \tilde{B}^m.$$

Soit K un compact de Γ. L'ensemble des sections à support dans K de $\mathcal{K}$ est isomorphe à $\mathcal{A}^0_P(\Omega - K)/\mathcal{A}^0_P(\Omega)$. Le théorème résulte donc du lemme 2.2 et des théorèmes 5.1 et 6.2.

8. Le cas des variétés compactes.

Nous nous proposons de redémontrer le théorème de quasi-isomorphisme de Lions et Magenes ([11], t. 3, chap. 8 et [12]).

Comme il s'agit d'un résultat déjà connu nous utiliserons, contrairement aux paragraphes précédents, quelques théorèmes de la cohomologie des faisceaux.

Théorème 8.1. — *Supposons Ω connexe et compacte (et $\Gamma \neq \emptyset$). L'application*

$$b : \quad \mathcal{A}_P(\dot{\Omega}) \to \tilde{\mathcal{A}}'(\Gamma)^m$$

est un quasi-isomorphisme d'espaces de Fréchet.

Le noyau de b est l'espace $\mathcal{A}^0_P(\Omega)$. Le conoyau de b est l'espace $H^1(\Omega, \mathcal{A}^0_P)$. L'image de b est le polaire dans $\mathcal{A}'(\Gamma)^m$ de l'espace

$$N = \{ (Q'_j g)_{j=1}^m \in \tilde{\mathcal{A}}(\Gamma)^m \mid g \in \mathcal{A}^0_{{}^tP}(\Omega) \}.$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que, d'après ce que l'on a vu au pragraphe 5, l'application b est continue.

Remarquons aussi que, si u est une application continue d'image de codimension finie de E dans F, deux espaces de Fréchet (ou deux espaces de type $\mathcal{DFS}$), u est d'image fermée.

Soit alors $\alpha \in \dot{\Omega}$. Posons

$$\Omega_\alpha = \Omega - \{\alpha\},\ \dot{\Omega}_\alpha = \dot{\Omega} - \{\alpha\}.$$

On a

$H^1(\dot{\Omega}, \mathcal{A}_P) = 0$ [13],

$H^1(\Omega_\alpha, \mathcal{A}_P^0) = 0$ d'après le corollaire 1 du théorème 4.2).

On en déduit que la suite

$$0 \to \mathcal{A}_P^0(\Omega) \to \mathcal{A}_P(\dot{\Omega}) \times \mathcal{A}_P^0(\Omega_\alpha) \to \mathcal{A}_P(\dot{\Omega}_\alpha) \to H^1(\Omega, \mathcal{A}_P^0) \to 0$$

est exacte, si la troisième flèche désigne l'application :

$$(f, g) \to f \mid \dot{\Omega}_\alpha - g \mid \dot{\Omega}_\alpha$$

(c'est une conséquence du théorème des recouvrements acycliques de J. Leray, appliqué au faisceau $\mathcal{A}_P^0$ et au recouvrement de Ω par les ouverts Ω_α et $\dot{\Omega}$).

Considérons alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_P(\dot{\Omega})/\mathcal{A}_P^0(\Omega) \arrow[rr, "i"'] \arrow[dr, "b"'] & & \mathcal{A}_P(\dot{\Omega}_\alpha)/\mathcal{A}_P^0(\dot{\Omega}_\alpha) \arrow[dl, "b_\alpha"] \\
& \tilde{\mathcal{A}}'(\Gamma)^m &
\end{tikzcd}$$

où i désigne l'application canonique et b_α la restriction de b à Ω_α.

D'après le théorème 7.1, b_α est un isomorphisme. On en déduit que la suite

$$0 \to \mathcal{A}_P^0(\Omega) \to \mathcal{A}_P(\dot{\Omega}) \to \tilde{\mathcal{A}}'(\Gamma)^m \to H^1(\Omega, \mathcal{A}_P^0) \to 0$$

est exacte.

[Nous n'expliciterons pas l'application de $\tilde{\mathcal{A}}'(\Gamma)^m$ dans $H^1(\Omega, \mathcal{A}_P^0)$.]

Considérons, d'autre part, la suite exacte (qui résulte du théorème 4.2) :

$$0 \to \mathcal{A}_P^0(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega) \xrightarrow[P_e]{} \mathcal{E}(\Omega) \times \tilde{\mathcal{E}}(\Gamma)^m \to H^1(\Omega, \mathcal{A}_P^0) \to 0,$$

où $P_e(f) = (Pf, (P_j f)_{j=1}^m)$.

Il est bien connu [(11), t. 1, p. 172) que P_e est un quasi-isomorphisme, et que l'image de P_e est le polaire dans $\mathcal{E}(\Omega) \times \tilde{\mathcal{E}}(\Gamma)^m$ de l'image de $\mathcal{A}_{{}^tP}^0(\Omega)$ dans $\mathcal{E}'(\Omega) \times \mathcal{E}'(\Gamma)^m$ par l'application

$$f \to (f_0, (Q'_j f)_{j=1}^m).$$

Donc $\mathcal{A}_P^0(\Omega)$ et $\mathrm{H}^1(\Omega, \mathcal{A}_{{}^tP}^0)$ sont des espaces de dimension finie, la dimension de $H^1(\Omega, \mathcal{A}_{{}^tP}^0)$ étant celle de $\mathcal{A}_{{}^tP}^0(\Omega)$.

Par suite, b est un quasi-isomorphisme d'espaces de Fréchet.

Soit N^0 le polaire dans $\tilde{\mathcal{A}}'(\Gamma)^m$ de l'espace N. On a

$$\operatorname{Im} b \subset N^0,$$

car, soit $g \in \mathcal{A}^0_{tP}(\Omega)$ et $f \in \mathcal{A}_P(\dot{\Omega})$:

$$\langle b(f), (Q'_j g)_{j=1}^m \rangle = \left\langle Pf_0 - \sum_1^m {}^tQ_j(P'_j f), g \right\rangle = 0.$$

Comme les deux sous-espaces $\operatorname{Im} b$ et N^0 de $\mathcal{A}'(\Gamma)^m$ sont fermés, et de même codimension, ils sont égaux.

9. Théorèmes de régularité dans l'espace des hyperfonctions.

Nous reprenons, pour le théorème 9.1, une démonstration faite dans [10]. Ce théorème a été démontré par d'autres méthodes par divers auteurs ([1], [8], [3], [18]).

Théorème 9.1. — *Soit Q un opérateur elliptique à coefficients analytiques dans un ouvert ω de $\mathbf{R}^n$. Soit $u \in B(\omega)$, solution de l'équation $Qu = 0$. Alors u est analytique dans ω.*

Démonstration. — Posons $P = \bar{Q}Q$. L'opérateur P est proprement elliptique, d'ordre $2m$ si m est l'ordre de Q. Soient Ω une boule fermée contenue dans ω, Γ le bord de Ω, et $\vec{n}$ la normale intérieur à Γ.

Posons

$$P'_j = \gamma \circ \left(\frac{\partial}{\partial \vec{n}}\right)^{j-1}, \qquad j = 1, \dots, m,$$

$$P_j = \gamma \circ \left(\frac{\partial}{\partial \vec{n}}\right)^{2m-j}, \qquad j = 1, \dots, m$$

(γ est l'opérateur de trace sur Γ). On est dans la situation du paragraphe 1.

Soit $\bar{u} \in \mathcal{A}'(\Omega)$ un prolongement de $u \mid \dot{\Omega}$. D'après le lemme 2.1,

$$P\bar{u} = Pv + \sum_{j=1}^m {}^tQ_j v_j + \sum_{j=1}^m {}^tQ'_j v'_j,$$

où $v \in \mathcal{A}'(\Gamma)$, v_j, $v'_j \in \tilde{\mathcal{A}}'(\Gamma)$ (les opérateurs Q_j, Q'_j ont été définis au paragraphe 2).

D'après le théorème 8.1, il existe $f \in \mathcal{A}_P(\dot{\Omega})$ avec $b(f) = (v'_j)_{j=1}^m$.

En effet, si $g \in \mathcal{A}^0_{tP}(\Omega)$, on a

$$\sum_{j=1}^m \langle v'_j, Q'_j g \rangle = \langle \bar{u} - v, {}^tPg \rangle - \sum_{j=1}^m \langle v_j, Q_j g \rangle = 0.$$

Donc, en remplaçant $u \mid \dot{\Omega}$ par $u \mid \dot{\Omega} - f$, on peut supposer que

$$P\bar{u} - \sum_{j=1}^{m} {}^tQ_j v_j = 0$$

pour un prolongement $\bar{u} \in \mathcal{A}'(\Omega)$ bien choisi.

Le théorème résultera alors du théorème de régularité dans l'espace des distributions et du lemme suivant :

LEMME 9.1. — *Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème* 8.1. *L'application*

$$\mathcal{A}'(\Omega) \times \tilde{\mathcal{A}}'(\Gamma)^m \to \mathcal{A}'(\Omega),$$
$$(u, (u_j)_{j=1}^m) \to \left(Pu + \sum_{j=1}^{m} {}^tQ_j u_j \right)$$

a même noyau que sa restriction à $\mathcal{E}'(\Omega) \times \mathcal{E}'(\Gamma)^m$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que les applications

$$\begin{aligned} {}^tP_a &: \quad \mathcal{A}(\Omega) \to \mathcal{A}(\Omega) \times \tilde{\mathcal{A}}(\Gamma)^m, \\ {}^tP_e &: \quad \mathcal{E}(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega) \times \tilde{\mathcal{E}}(\Gamma)^m, \\ & \quad f \to ({}^tPf, (Q_j f)_{j=1}^m) \end{aligned}$$

ont des images fermées, et que leurs conoyaux sont isomorphes.

D'après le théorème de Morrey-Nirenberg (*loc. cit.*), l'application

$$(\mathcal{A}(\Omega) \times \tilde{\mathcal{A}}(\Gamma)^m)/\operatorname{Im} {}^tP_a \to (\mathcal{E}(\Omega) \times \tilde{\mathcal{E}}(\Gamma)^m)/\operatorname{Im} {}^tP_e$$

est injective : comme le deuxième espace est de dimension finie, il en est de même du premier.

Comme les espaces $\mathcal{A}(\Omega)$ et $\tilde{\mathcal{A}}(\Gamma)$ sont du type $\mathcal{DFS}$, cela entraîne que ${}^tP_a$ est d'image fermée.

Enfin $\mathcal{A}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{E}(\Omega)$, et $\tilde{\mathcal{A}}(\Gamma)$ est dense dans $\tilde{\mathcal{E}}(\Gamma)$, donc $(\mathcal{A}(\Omega) \times \tilde{\mathcal{A}}(\Gamma)^m)/\operatorname{Im} {}^tP_a$ est dense dans $(\mathcal{E}(\Omega) \times \tilde{\mathcal{E}}(\Gamma)^m)/\operatorname{Im} {}^tP_e$.

Par suite, ces deux espaces sont égaux.

On aurait pu aussi démontrer ce fait en utilisant les deux suites exactes :

$$0 \to \mathcal{A}_P^0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{A} \times \tilde{\mathcal{A}}^m \to 0,$$
$$0 \to \mathcal{A}_P^0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E} \times \mathcal{E}^m \to 0$$

et le fait que $H^1(\Omega, \mathcal{E}) = 0$ et $H^1(\Omega, \mathcal{A}) = 0$ (d'après le théorème de GRAUERT [5]).

THÉORÈME 9.2. — *Plaçons-nous à nouveau dans la situation du paragraphe* 1.

Soit $u \in B_0(\Omega)$, $u_j \in \tilde{B}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$, *avec*

$$Pu + \sum_{j=1}^{m} {}^tQ_j u_j = 0.$$

Alors $u \in \mathcal{A}_P^0(\Omega)$, $u_j \in \tilde{\mathcal{A}}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Démonstration. — Soit $f = u \,|\, \dot{\Omega}$. D'après le théorème 9.1, $f \in \mathcal{A}_P(\dot{\Omega})$. L'hypothèse entraîne

$$b(f) = 0 \quad \text{et} \quad u = f_0.$$

Le théorème résulte alors du théorème 7.1.

10. Résolution flasque du faisceau $\mathcal{A}_P^0$.

On se place dans la situation du paragraphe 1.

THÉORÈME 10.1. — *La suite de faisceaux sur* Ω'

$$0 \to \mathcal{A}_P \to B \to B \to 0$$

(*où la troisième flèche est l'application* : $u \to Pu$) *est exacte.*

Démonstration. — D'après le théorème 9.1, la suite de faisceaux sur Ω'

$$0 \to \mathcal{A}_P \to B \to B$$

est exacte.

Il faut montrer que « localement », on peut résoudre l'équation

$$Pu = v.$$

On peut donc supposer Ω' connexe non compacte. Munissons l'espace $\mathcal{A}(\Omega')$ de la topologie

$$\mathcal{A}(\Omega') = \varprojlim_{K \subset \Omega'} \mathcal{A}(K)$$

(K parcourt la famille des compacts de Ω').

L'espace $\mathcal{A}(\Omega')$ est alors un espace ultrabornologique, d'après un théorème de A. MARTINEAU [14]. Cet espace peut être obtenu comme limite inductive dénombrable et limite projective dénombrable d'espaces de Banach.

On munira l'espace $\mathcal{A}_{{}^tP}(\Omega')$ de la topologie induite par $\mathcal{A}(\Omega')$.

Soit $\mathcal{E}_{{}^tP}(\Omega')$ le sous-espace de Fréchet de $\mathcal{E}(\Omega')$ des solutions de l'équation ${}^tP f = 0$.

Il résulte du théorème du graphe fermé généralisé (*cf.* par exemple [22]) que l'isomorphisme vectoriel

$$\mathcal{A}_{{}^tP}(\Omega') = \mathcal{E}_{{}^tP}(\Omega')$$

est un isomorphisme vectoriel topologique.

De plus, l'application

$$\mathcal{A}(\Omega') \to \mathcal{A}(\Omega'),$$
$$f \to {}^tPf$$

étant surjective [13], est un homomorphisme, toujours d'après le théorème du graphe fermé généralisé.

On a donc

$$(\mathcal{A}_{{}^tP}(\Omega'))' = \mathcal{A}'(\Omega')/P\mathcal{A}'(\Omega'),$$
$$(\mathcal{E}_P(\Omega'))' = \mathcal{E}'(\Omega')/P\mathcal{E}'(\Omega').$$

Soit alors ω un ouvert relativement compact de Ω', et soit $u \in B(\omega)$.

Il existe $\bar{u} \in \mathcal{A}'(\bar{\omega})$ qui prolonge u. D'après ce qui précède, on peut trouver $v \in \mathcal{A}'(\Omega')$, $\rho \in \mathcal{E}'(\Omega')$ vérifiant

$$Pv + \rho = u.$$

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega')$ vérifiant

$$PT = \rho.$$

Une telle distribution existe, d'après [13], et on a

$$P(v \mid \omega + T \mid \omega) = u.$$

COROLLAIRE 1. — *Si Ω' n'a pas de composantes connexes compactes, la suite*

$$0 \to \mathcal{A}_P(\Omega') \to B(\Omega') \to B(\Omega') \to 0$$

est exacte.

THÉORÈME 10.2. — *On a la suite exacte de faisceaux sur Ω :*

$$0 \to \mathcal{A}_P^0 \to B_0 \times \tilde{B}^m \to B_0 \to 0,$$

ou la deuxième flèche désigne le morphisme

$$f \to ((f_0), (-P'_j f)_{j=1}^m),$$

et la troisième flèche le morphisme

$$(u, (u_j)_{j=1}^m) \to \left(Pu + \sum_{j=1}^m {}^tQ_j u_j\right).$$

Démonstration. — D'après le théorème 9.2, la suite

$$0 \to \mathcal{A}_P^0 \to B_0 \times \tilde{B}^m \to B_0$$

est exacte.

Supposons, ce que l'on peut faire, Ω et Ω' sans composantes connexes compactes.

Soit $u \in B_0(\Omega) = B_\Omega(\Omega')$. Soit $v \in B(\Omega')$ vérifiant

$$Pv = u.$$

Un tel v existe d'après le corollaire 1 précédent.

Soit $v_0 \in B_0(\Omega)$ avec

$$v_0 | \dot{\Omega} = v | \dot{\Omega}.$$

On a

$$Pv_0 - u \in B_\Gamma(\Omega),$$

donc il existe, d'après le lemme 2.1, u_j, $u'_j \in \tilde{B}(\Gamma)$ $(j = 1, \ldots, m)$, et $w \in B_\Gamma(\Omega)$ vérifiant

$$Pv_0 - u = Pw + \sum_{j=1}^{m} {}^tQ_j u_j + \sum_{j=1}^{m} {}^tQ'_j u'_j.$$

D'après le théorème 7.1, il existe $f \in \mathcal{A}_P(\dot{\Omega})$ avec $b(f) = (u'_j)_{j=1}^m$, c'est à-dire

$$Pf_0 = \sum_{j=1}^{m} {}^tQ'_j u'_j + \sum_{j=1}^{m} {}^tQ_j v_j.$$

Donc

$$P(v_0 - w - f_0) + \sum_{j=1}^{m} {}^tQ_j (v_j - u_j) = u.$$

COROLLAIRE 1. — *Supposons Ω sans composantes connexes compactes. Alors la suite*

$$0 \to \mathcal{A}_P^0(\Omega) \to B_0(\Omega) \times \tilde{B}(\Gamma)^m \to B_0(\Omega) \to 0$$

est exacte.

Remarquons que l'on a aussi la suite exacte de faisceaux sur Ω.

$$0 \to \mathcal{A}_{{}^tP}^0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{A} \times \tilde{\mathcal{A}}^m \to 0$$

[la troisième flèche désigne le morphisme $f \to ({}^tPf, (Q_j f)_{j=1}^m)$].

Si Ω n'a pas de composantes connexes compactes, pour tout compact K de Ω, on a

$$H^1(K, \mathcal{A}_{{}^tP}^0) = 0,$$

et les deux suites exactes

$$0 \to \mathcal{A}'(K) \times \tilde{\mathcal{A}}'(K)^m \to \mathcal{A}'(K) \to H_K^1(\Omega, \mathcal{A}_P^0) \to 0,$$
$$0 \to \mathcal{A}_{{}^tP}^0(K) \to \mathcal{A}(K) \to \mathcal{A}(K) \times \tilde{\mathcal{A}}(K)^m \to 0$$

permettent (*cf.* [21]) de redémontrer très simplement le théorème 5.1 grâce à l'isomorphisme

$$H_K^1(\Omega, \mathcal{A}_P^0) = \mathcal{A}_P^0(\Omega - K)/\mathcal{A}_P^0(\Omega).$$

Remarquons aussi que le théorème 10.2 donne une interprétation « cohomologique » de l'application « valeur au bord ».

En effet, on a les suites exactes :

$$0 \to \mathcal{A}_P^0(\Omega) \to \mathcal{A}_P(\dot{\Omega}) \xrightarrow[\partial]{} H_\Gamma^1(\Omega, \mathcal{A}_P^0) \to H^1(\Omega, \mathcal{A}_P^0) \to 0$$

et

$$0 \to B_\Gamma(\Omega) \times \tilde{B}(\Gamma)^m \to B_\Gamma(\Omega) \to H_\Gamma^1(\Omega, \mathcal{A}_P^0) \to 0,$$

d'où, si Ω est sans composantes connexes compactes, des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\mathcal{A}_P(\dot{\Omega})}{\mathcal{A}_P^0(\Omega)} & \xrightarrow{\sim} & H_\Gamma^1(\Omega, \mathcal{A}_P^0) \\ \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ \tilde{B}(\Gamma)^m & \xrightarrow{\sim} & \dfrac{B_\Gamma(\Omega)}{PB_\Gamma(\Omega) + \sum\limits_{j=1}^{m} {}^tQ_j \tilde{B}(\Gamma)} \end{array}$$

et le diagramme est commutatif.

11. Remarques.

1° L'étude des problèmes bilatéraux est plus simple que celle des problèmes unilatéraux.

Si Γ est une hypersurface analytique d'une variété analytique réelle sans bord, dénombrable à l'infini, sans composantes connexes compactes, et si P est un opérateur elliptique d'ordre m sur Ω, on a un isomorphisme

$$\mathcal{A}_P(\Omega - \Gamma)/\mathcal{A}_P(\Omega) \simeq \tilde{B}(\Gamma).$$

Ce théorème est alors une généralisation de théorèmes de A. Grothendieck [7] et de G. Bengel [1]. Il permet, en adaptant une méthode de [1] de démontrer le théorème 9.1 [18].

2° Indépendamment de nous, H. Komatsu [10] a défini la valeur au bord des solutions d'une équation aux dérivées partielles homogène, en utilisant le théorème de Cauchy-Kowalewski et la théorie des faisceaux.

3° On pourrait, dans tout cet article, affaiblir l'hypothèse du paragraphe 2 :

« P_j d'ordre $j - 1$ »

par

« les opérateurs P_j ($j = 1, \ldots, m$) sont normaux d'ordre m_j, avec $0 \leq m_j < 2m$, $m_j \neq m_{j'}$, pour $j \neq j'$ et le système $(P_j)_{j=1}^{m}$ recouvre P (au sens de [11]) ».

La seule « difficulté » réside dans la démonstration du théorème 3.1 pour laquelle on peut alors utiliser les opérateurs pseudo-différentiels (communication de G. Grubb et aussi de L. Boutet de Monvel, *cf.* [2]).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bengel (G.). — Das Weylche Lemma in der Théorie der Hyperfunkionen, *Math. Z.*, t. 96, 1967, p. 373-392.

[2] Boutet de Monvel (L.). — Boundary problems for pseudo-différential operators (à paraître).

[3] Boutet de Monvel (L.) and Krée (P.). — Pseudo-différential operators and Gevrey classes, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 17, 1967, fasc. 1, p. 295-323.

[4] Godement (R.). — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* — Paris, Hermann, 1964 (*Act. scient. et ind.*, 1252; *Publ. Inst. Math. Univ. Shasbourg*, 13).

[5] Grauert (H.). — On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds, *Annals of Math.*, séries 2, t. 68, 1958, p. 470-472.

[6] Grothendieck (A.). — *Espaces vectoriels topologiques.* — Soc. Mat. São-Paulo, 1964.

[7] Grothendieck (A.). — Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles, *J. Anal. math.* Jérusalem, t. 2, 1952-1953, p. 243-280.

[8] Harvey (R.). — *Hyperfunctions and partial différential operators* (*Thesis*, Stanford Univ., 1966).

[9] Hörmander (L.). — *Introduction to complex analysis in several variables.* — Princeton, D. Van Nostrand, 1966 (*University Series in higher Mathematics*).

[10] Komatsu (H.). — Boundary value for solutions of elliptic equations, Congrès d'Analyse fonctionnelle (1969, Tokyo] (à paraître).

[11] Lions (J. -.L.) et Magenes (E.). — *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* Paris, Dunod. — Tome 1, 1968, Tome 2, 1968; Tome 3, 1970 (*Travaux et Recherches mathématiques*, 17, 18 et 20).

[12] Lions (J.-L.) et Magenes (E.). — Problèmes aux limites non homogènes (7), *Ann Mat. pura e appl.*, t. 63, 1953, p. 201-224.

[13] Malgrange (B.). — Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 271-355.

[14] Martineau (A.). — Sur les fonctionnelles analytiques et la transformée de Fourier-Borel, *J. Anal. math.*, Jérusalem, t. 11, 1963, p. 1-164 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[15] Martineau (A.). — Les hyperfonctions de M. Sato, *Séminaire Bourbaki*, 13e année, 1960-1961, n° 214, 13 p.

[16] Morrey (C.-B.) and Nirenberg (L.). — On the analycity of the solutions of linear elliptic system of partial différential equations, *Comm. pure and appl. Math.*, t. 10, 1957, p. 261-290.

[17] SATO (M.). — Theory of hyperfonctions, *J. Fac. Sc. Univ. Tokyo*, t. 8, 1950-1960, p. 139-193 et 387-437.

[18] SCHAPIRA (P.). — *Théorie des hyperfonctions*. — Berlin, Springer-Verlag, 1970, (*Lecture Notes in Mathematics*, 126).

[19] SCHAPIRA (P.). — Problème de Dirichlet et solution hyperfonctions des équations elliptiques, *Boll. Unione mat. ital.*, Série 4, 1969, p. 367-372.

[20] SCHWARTZ (L.). — *Théorie des distributions*, 2e édition. — Paris, Hermann. t. 1, 1957; t. 2, 1959 (*Act. Scient. et ind.*, 1091 et 1122; *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 9 et 10); Nouvelle édition. — Paris, Hermann, 1966.

[21] SERRE (J.-P.). — Un théorème de dualité, *Comment. Math. Helvet*; t. 29, 1955, p. 9-26.

[22] DE WILDE (M.). — Théorème du graphe fermé et espaces à réseaux absorbants, *Bull. math. Soc. scient. Rep. soc. Roumanie*, t. 11, 1967, fasc. 2, p. 225-238.

(texte reçu le 8 juin 1970).

Pierre SCHAPIRA,
Att. Rech. C. N. R. S.
57, rue Boissonade,
75-Paris 14.