

BULLETIN DE LA S. M. F.

G. MAURY

La condition « intégralement clos » dans quelques structures algébriques. II

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 369-399

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__369_0

© Bulletin de la S. M. F., 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**LA CONDITION « INTÉGRALEMENT CLOS »
DANS QUELQUES STRUCTURES ALGÈBRIQUES II**

PAR

GUY MAURY.

(Lyon).

Cet article se compose de cinq parties. Il fait suite au Mémoire [15]. *La condition « intégralement clos » dans quelques structures algébriques*, dont les résultats du chapitre III sont utilisés dans les parties III, IV et V du présent travail. Nous faisons agir en même temps que la théorie, déjà ancienne, des ordres maximaux réguliers au sens d'ASANO ([1], [2]), des méthodes récentes de théorie des anneaux : C'est ainsi que nous considérons, dans les parties I et II de cet article, des localisations au sens de GABRIEL, en particulier des localisations plates, d'un anneau noethérien \mathcal{O} , sans diviseurs de zéro, ordre maximal régulier de son corps des fractions K ; de même, dans la partie IV, nous utilisons la puissance symbolique n -ième d'un idéal premier, introduite récemment par GOLDIE [8].

La première partie définit et caractérise les localisations bilatères de \mathcal{O} . Signalons le résultat suivant, obtenu grâce à un résultat récent de HACQUE [9] : Si \mathcal{O} est un ordre maximal régulier, noethérien, sans diviseurs de zéro, ordre maximal de son corps des fractions K , dont tous les idéaux premiers non nuls sont maximaux, tout sous-anneau B de K contenant \mathcal{O} est plat en tant que \mathcal{O} -module à gauche et en tant que \mathcal{O} -module à droite.

La deuxième partie, assez maigre, étudie les suranneaux plats d'un ordre maximal \mathcal{O} contenus dans K .

La troisième partie caractérise, parmi les anneaux, noethériens, sans diviseurs de zéro, ordres maximaux réguliers de leurs corps de fractions, ceux qui sont à idéaux (à gauche, à droite) tous bilatères. Il existe de tels anneaux qui ne sont pas commutatifs.

La quatrième partie constitue un essai pour étendre au cas non commutatif la caractérisation de MORI-YOSIDA ([21], [26]), appelée caractérisation (C) en [15], des domaines d'intégrité, noethériens, intégralement

clos. En réalité, nous ne parvenons à généraliser la caractérisation (C) que pour les seuls ordres maximaux, noethériens, sans diviseurs de zéro, dont tous les idéaux (à gauche, à droite) sont bilatères. Cependant quelques résultats sont obtenus sous des hypothèses plus générales.

La cinquième partie établit principalement que la localisation $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, associée à un idéal premier \mathfrak{P} minimal non nul d'un ordre maximal régulier, noethérien, sans diviseurs de zéro, est un anneau de fraction classique selon un sous-demi-groupe \mathcal{C}' défini à partir de \mathfrak{P} , sous une certaine condition (H).

Si on applique au cas commutatif les résultats obtenus dans les cinq parties, on retrouve des résultats connus.

I

I.1. LEMME. — Soit \mathfrak{F}' une famille non vide d'idéaux bilatères non nuls d'un anneau unitaire, noethérien à gauche \mathcal{O} telle que $(u \in \mathfrak{F}', u' \in \mathfrak{F}') \Rightarrow (uu' \in \mathfrak{F}')$. La famille \mathfrak{F} de tous les idéaux à gauche de \mathcal{O} , qui contiennent un idéal bilatère appartenant à \mathfrak{F}' , est topologisante et idempotente ([4], exercices, p. 157 et suiv.).

Démonstration. — $(F \in \mathfrak{F}, F \subseteq G)$ entraîne $(G \in \mathfrak{F})$; et $(F \in \mathfrak{F}, F' \in \mathfrak{F})$ entraîne $(F \cap F' \in \mathfrak{F})$. On peut écrire par ailleurs :

$$(F \in \mathfrak{F}, \forall a \in \mathcal{O}, \exists u \in \mathfrak{F}' \text{ tel que } u \subseteq F) \Rightarrow (ua \subseteq u \subseteq F \text{ et } F \cdot a \in \mathfrak{F}).$$

Soit enfin un idéal à gauche I de \mathcal{O} , soit $F \in \mathfrak{F}$, démontrons :

$$(\forall a \in F, I \cdot a \in \mathfrak{F}) \Rightarrow (I \in \mathfrak{F}).$$

On a $F = \sum_{i=1}^n \mathcal{O}a_i$; il existe $u_i \in \mathfrak{F}'$ tel que $u_i a_i = u_i \mathcal{O}a_i \subseteq I$, $i = 1, \dots, n$.

Posons $u = u_1 \dots u_n$, on a $u \in \mathfrak{F}'$ et $uF \subseteq I$. Soit $u' \in \mathfrak{F}'$ tel que $u' \subseteq F$, on peut écrire $uu' \subseteq I$, ce qui prouve $I \in \mathfrak{F}$.

I.2. Définition. — Une famille \mathfrak{F} qui satisfait aux conditions du lemme I.1 est dite *bilatère*. La famille \mathfrak{F}' correspondante est dite une *base de \mathfrak{F}* .

I.3. LEMME. — Soit \mathfrak{F} une famille bilatère. Soit \mathfrak{F}' une base de \mathfrak{F} . Soit $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}$ le localisé de \mathcal{O} selon \mathfrak{F} ([4], exercices, p. 157 et suiv.), \mathcal{O} désignant un anneau unitaire, noethérien, sans diviseurs de zéro, dont K désigne le corps des fractions [7]. On a

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{F}} = \{x \in K \mid \exists F \in \mathfrak{F}, Fx \subseteq \mathcal{O}\} = \{x \in K \mid \exists u \in \mathfrak{F}', ux \subseteq \mathcal{O}\}.$$

Démonstration. — En effet, comme \mathcal{O} n'a pas de diviseurs de zéro, $\mathfrak{F}\mathcal{O} = \{x \in \mathcal{O} \mid \mathcal{O} \cdot x \in \mathfrak{F}\} = \mathcal{O}$. On sait qu'alors $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}$ est l'enveloppe

\mathcal{F} -injective [24] de \mathcal{O} . Comme K est une enveloppe injective de \mathcal{O} , considérée comme \mathcal{O} -module à gauche (appliquer l'exercice 22 de [4], p. 162, au cas où la famille \mathcal{F} considérée dans cet exercice est la famille des idéaux à gauche essentiels \mathcal{F}_0 de \mathcal{O}). Le corps des fractions K de \mathcal{O} est alors isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathcal{F}_0}$ qui est l'enveloppe injective du \mathcal{O} -module à gauche \mathcal{O}). On montre alors que l'enveloppe \mathcal{F} -injective de \mathcal{O} , comprise dans K , est alors définie par

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}} = \{ x \in K \mid \exists F \in \mathcal{F} \text{ tel que } Fx \subseteq \mathcal{O} \}.$$

1.4. *Définition.* — Une localisation $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, associée à une famille bilatère \mathcal{F} de \mathcal{O} , sera dite une *localisation bilatère*. Si \mathcal{F}' désigne une base de \mathcal{F} , on notera aussi $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$ au lieu de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$.

1.4 bis. *Exemples de localisations bilatères.*

1° Soit, dans cet exemple, comme dans le suivant, \mathcal{O} un anneau noethérien, sans diviseurs de zéro, unitaire, de corps des fractions K . Soit \mathcal{X} un idéal premier de \mathcal{O} . Soit $\mathcal{F}'_{\mathcal{X}}$ la famille des idéaux bilatères $\mathcal{O}s\mathcal{O}$, $s \notin \mathcal{X}$. Soit $\mathcal{F}_{\mathcal{X}}$ la famille des idéaux à gauche de \mathcal{O} contenant un idéal bilatère $\mathcal{O}s\mathcal{O}$, $s \notin \mathcal{X}$; $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'_{\mathcal{X}}}$ sera noté aussi $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ (la famille $\mathcal{F}_{\mathcal{X}}$ est une famille bilatère). D'après (I.3), on a

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}} = \{ x \in K \mid \exists s \notin \mathcal{X}, s\mathcal{O}x \subseteq \mathcal{O} \}.$$

2° Soit p une famille d'idéaux premiers \mathcal{X}_i , $i \in I$, de \mathcal{O} . Soit \mathcal{F}'_p la famille des idéaux bilatères de \mathcal{O} qui contiennent, pour tout i , $i \in I$, un élément s_i , $s_i \notin \mathcal{X}_i$. Le produit de deux idéaux de \mathcal{F}'_p , u et u' , est un idéal de \mathcal{F}'_p . Soit \mathcal{F}_p la famille des idéaux à gauche de \mathcal{O} , qui contiennent un idéal de \mathcal{F}'_p , $\mathcal{O}_{\mathcal{F}'_p}$, sera notée \mathcal{O}_p et, d'après le lemme I.3, on peut écrire

$$\mathcal{O}_p = \{ x \in K \mid \exists u \in \mathcal{F}'_p, ux \subseteq \mathcal{O} \}.$$

1.5. THÉORÈME. — Si l'ensemble \mathcal{F} , \mathcal{F} désignant une famille bilatère, possède un sous-ensemble cofinal constitué d'idéaux à gauche projectifs de l'anneau \mathcal{O} unitaire, sans diviseurs de zéro, noethérien, l'inclusion canonique $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est un épimorphisme d'anneaux plats (à gauche). En particulier, si \mathcal{O} est un ordre maximal régulier de son corps des fractions K [1], dont tous les idéaux premiers non nuls sont maximaux, toute localisation bilatère de \mathcal{O} , est plate (à gauche).

Démonstration. — La première partie résulte d'un résultat de M. HACQUE ([9], corollaire 3.7, p. 111). La seconde partie résulte du fait que, dans un ordre maximal régulier, noethérien, sans diviseurs de zéro, de son corps des fractions K , dont tous les idéaux premiers non nuls sont maximaux, tout idéal bilatère de \mathcal{O} est projectif de type fini en tant qu'idéal à gauche (et d'ailleurs aussi en tant qu'idéal à droite) : en effet,

tout idéal bilatère de \mathcal{O} est maximal dans sa classe modulo l'équivalence \mathcal{R} de ARTIN [1], donc inversible, et on utilise alors le lemme 1.2 de ROBSON [23].

I.5 bis. Exemples de localisation bilatère plate.

1° Soit \mathcal{O} un anneau unitaire, noethérien, sans diviseurs de zéro, \mathcal{Q} désignant un idéal premier de \mathcal{O} . Supposons, de plus, que tous les idéaux (à gauche, à droite) de \mathcal{O} sont bilatères. Les idéaux $\mathcal{O}s$, $s \notin \mathcal{Q}$, sont libres en tant que \mathcal{O} -module à gauche, et forment un système cofinal de $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$: le théorème I.5 prouve que l'inclusion canonique $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}}$ est un épimorphisme plat d'anneau (à gauche).

2° Si maintenant \mathcal{O} n'est pas à idéaux (à gauche, à droite) tous bilatères, mais si $S = \mathcal{O} - \mathcal{Q}$ vérifie la condition suivante : $\forall s \in S, \exists s' \in S$ tel que $\mathcal{O}s \supseteq s'\mathcal{O}$, un système cofinal d'idéaux à gauche de $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ est constitué par les idéaux à gauche libres $\mathcal{O}s$, $s \in S$, et $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$ est plat (en tant que \mathcal{O} -module à droite).

I.6. — Dans toute la suite de cette première partie, nous allons supposer que \mathcal{O} est un anneau noethérien, sans diviseurs de zéro, ordre maximal régulier de son corps des fractions K [1]. Nous nous proposons d'étudier les localisations bilatères de \mathcal{O} . Pour cela, nous nous inspirons directement d'une méthode mise en œuvre par ASANO [2] pour l'étude de $\mathcal{O}'_{\mathcal{Q}}$, \mathcal{Q} désignant une famille d'idéaux premiers minimaux non nuls du demi-groupe \mathcal{O}' , ordre maximal régulier d'un demi-groupe S .

Soit donc le treillis multiplicatif \mathfrak{S} des \mathcal{O} -idéaux (bilatères) de \mathcal{O} [2]. Considérons l'application qui, à $\alpha \in \mathfrak{S}$, fait correspondre

$$\alpha' = \mathcal{O} \cdot (\mathcal{O} \cdot \alpha) = \mathcal{O} \cdot (\mathcal{O}' \cdot \alpha),$$

le plus grand \mathcal{O} -idéal (bilatère) de la classe de α modulo l'équivalence d'Artin \mathcal{R} . Les \mathcal{O} -idéaux α' seront appelés les c -idéaux (\mathcal{O} -idéaux clos). Si l'on définit, dans l'ensemble des c -idéaux, une multiplication $\alpha' \cdot \beta' = (\alpha' \beta')'$, il est bien connu que les c -idéaux forment un groupe [2]. Rappelons que, pour un \mathcal{O} -idéal α , on pose $\alpha^{-1} = \mathcal{O}' \cdot \alpha = \mathcal{O} \cdot \alpha$, et que l'on a $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$ et

$$\alpha' \cdot \alpha'^{-1} = \alpha'^{-1} \cdot \alpha' = \mathcal{O}, \quad \text{avec} \quad \alpha'^{-1} = (\alpha^{-1})'.$$

I.6 bis. LEMME. — On a la condition de chaîne ascendante pour les c -idéaux contenus dans un c -idéal fixé c .

Démonstration. — Soit N un ensemble de c -idéaux contenus dans c . Soit $\alpha \in N$, on a alors $c^{-1} \cdot \alpha \subseteq \mathcal{O}$. Il existe donc un c -idéal maximal \mathfrak{b} dans l'ensemble $\{c^{-1} \cdot \alpha, \alpha \in N\}$. On a alors

$$c \cdot \mathfrak{b} = c \cdot c^{-1} \cdot \alpha_0 = \alpha_0$$

en posant $\mathfrak{b} = c^{-1} \cdot \alpha_0$, $\alpha_0 \in N$, et α_0 est visiblement maximal dans N .

I.7. LEMME. — Si a est un \mathfrak{o} -idéal, il existe des éléments c_1, \dots, c_n dans a , tels que a' est un c -idéal engendré par c_1, \dots, c_n :

$$a' = (c_1, \dots, c_n)' = (\mathfrak{o}c_1\mathfrak{o}, \dots, \mathfrak{o}c_n\mathfrak{o})' = \left(\sum_1^n (c_i) \right)'$$

(a) = $\mathfrak{o}a\mathfrak{o}$ désignant le \mathfrak{o} -idéal engendré par a ([1], th. 1.5), noté aussi $(\mathfrak{o}a\mathfrak{o})$.

Démonstration. — Remarquons d'abord que

$$\mathfrak{o}a\mathfrak{o} = \left\{ \sum_1^n \lambda_i a \mu_i, n \in N, \lambda_i, \mu_i \in \mathfrak{o} \right\}$$

est un \mathfrak{o} -idéal, car \mathfrak{o} est un ordre régulier ([1], th. 1.5). Soient c_1, \dots, c_m , m éléments non nuls de a . S'il existe $c_{m+1} \notin (c_1, \dots, c_m)$, alors nous formons $(c_1, \dots, c_m, c_{m+1})' \subseteq a'$. En utilisant le lemme I.6 bis, on voit qu'il existe n tel que $(c_1, \dots, c_n)' \supseteq a$, donc $(c_1, \dots, c_n)' = a'$.

I.8. Définition. — Soit A un \mathfrak{o} - \mathfrak{o} -bimodule non nul, sous-bimodule de K . La réunion ensembliste de tous les c -idéaux engendrés par un nombre fini d'éléments de A s'appelle la *clôture* de A , et se note \bar{A} . Si l'on a $\bar{A} = A$, A est dit *clos*.

I.8 bis. Remarque. — Il résulte du lemme I.7 que la clôture \bar{a} d'un \mathfrak{o} -idéal est a' .

I.9. PROPOSITION. — \bar{A} est un \mathfrak{o} - \mathfrak{o} -bimodule, sous-bimodule de K , et l'on a :

1° $A \subseteq \bar{A}$;

2° $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$;

3° $A \subseteq B$ implique $\bar{A} \subseteq \bar{B}$;

4° $\bar{A}\bar{B} \subseteq \overline{AB}$ (par AB , on entend l'ensemble des sommes finies $\sum a_i b_i$, $a_i \in A, b_i \in B$, lorsque A et B sont des sous- \mathfrak{o} - \mathfrak{o} -bimodules de K).

Démonstration. — Soient x et y appartenant à \bar{A} , il existe des éléments $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_l$ appartenant à A , tels que $x \in \overline{\sum_1^n (a_i)}$,

$y \in \overline{\sum_{n+1}^l (a_i)}$, donc tels que

$$x + y \in \overline{\sum_1^n (a_i)} + \overline{\sum_{n+1}^l (a_i)} = \overline{\sum_1^l (a_i)}$$

(propriété de la fermeture $a \rightarrow a' = \bar{a}$, a \mathcal{O} -idéel, voir [2]). De façon immédiate, on établit, pour $x \in \bar{A}$, $a \in A$, $xa \in \bar{A}$, $ax \in \bar{A}$. Ainsi \bar{A} est \mathcal{O} - \mathcal{O} -sous-bimodule de K . Les relations 1^o et 3^o sont évidentes. Soit a un élément non nul de \bar{A} , il existe un \mathcal{C} -idéel $(a_1, \dots, a_r)'$ contenant a , $a_i \in \bar{A}$, $i = 1, \dots, r$. Il existe $(b_{i_1}, \dots, b_{i_{s_i}})$ contenant a_i , avec $b_{i_j} \in A$, $j = 1, \dots, s_i$, $i = 1, \dots, r$. Soit b_1, \dots, b_n l'ensemble de tous les b_{i_j} . Alors on peut écrire $a_i \in (b_1, \dots, b_n)'$, $i = 1, \dots, r$ et $(b_1, \dots, b_n)' \subseteq \bar{A}$, donc

$$\overline{\sum_1^r (a_i)} \subseteq \overline{(b_1, \dots, b_n)} = (b_1, \dots, b_n)' \subseteq \bar{A}$$

et $a \in \bar{A}$. On en déduit $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

Soient maintenant A et B deux \mathcal{O} - \mathcal{O} -sous-bimodules de K non nuls. Soient $a \in \bar{A}$, $a \neq 0$, $b \in \bar{B}$, $b \neq 0$, il existe $a_1, \dots, a_r \in A$ et $b_1, \dots, b_s \in B$ tels que $a \in (a_1, \dots, a_r)'$ et $b \in (b_1, \dots, b_s)'$; on a donc

$$ab \in (a_1, \dots, a_r)' \cdot (b_1, \dots, b_s)'$$

$$= \overline{\sum_1^r (a_i)} \cdot \overline{\sum_1^s (b_j)} = \left[\overline{\sum_1^r (a_i)} \right] \left[\overline{\sum_1^s (b_j)} \right] = (c_1, \dots, c_t)'$$

où c_i appartient à $\left[\overline{\sum_1^r (a_i)} \right] \left[\overline{\sum_1^s (b_j)} \right] \subseteq AB$ pour $i = 1, \dots, t$. On en déduit

$ab \in \overline{AB}$. Toute somme finie d'éléments de la forme ab est donc dans \overline{AB} qui est un \mathcal{O} - \mathcal{O} -sous-bimodule de K , et $\bar{A}\bar{B} \subseteq \overline{AB}$.

I.10. LEMME. — Soient A, B , deux \mathcal{O} - \mathcal{O} -sous-bimodules de K non nuls. Soit M un sous-ensemble de K tel que $AM \subseteq B$, alors $\bar{A}M \subseteq \bar{B}$. En particulier, si \mathfrak{a} et \mathfrak{b} sont des \mathcal{O} -idéaux :

$$\mathfrak{a}M \subseteq \mathfrak{b} \Rightarrow \bar{\mathfrak{a}}M \subseteq \bar{\mathfrak{b}}$$

(on note $AM = \{am \mid a \in A, m \in M\}$ lorsque M n'est pas un sous- \mathcal{O} - \mathcal{O} -bimodule de K).

Démonstration. — Lorsque M est nul, le lemme est évident. Lorsque M est non nul, $(\mathcal{O}M\mathcal{O})$ est un \mathcal{O} - \mathcal{O} -sous-bimodule de K , en notant

$$(\mathcal{O}M\mathcal{O}) = \left\{ \sum_1^n \lambda_i m_i \mu_i, n \in \mathbb{N}, \lambda_i, \mu_i \in \mathcal{O}, m_i \in M \right\} :$$

$$\bar{A}M \subseteq \bar{A}(\mathcal{O}M\mathcal{O}) \subseteq \overline{\bar{A}(\mathcal{O}M\mathcal{O})} \subseteq \bar{B}.$$

I.11. LEMME. — Soient a, b, c des c -idéaux. Soit $aM \subseteq b$, on a $(c.a)M \subseteq c.b$. En particulier, $c \in K, ac \subseteq b \Rightarrow c \in a^{-1}.b$.

Démonstration. — Puisque $(ca)M \subseteq cb$, on peut écrire $\overline{ca}M \subseteq \overline{cb}$, c'est-à-dire $(c.a)M \subseteq c.b$.

I.12. Définition. — Soit a un c -idéal. Soit \mathcal{F} une famille bilatère d'idéaux à gauche de \mathcal{O} de base \mathcal{F}' . Soit \mathcal{G} la famille bilatère d'idéaux à droite de base \mathcal{F}' . Posons

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{F}} &= a_{\mathcal{F}'} = \{x \in K \mid \exists u \in \mathcal{F}', ux \subseteq a\}, \\ {}_{\mathcal{G}}a &= {}_{\mathcal{F}'}a = \{x \in K \mid \exists u \in \mathcal{F}', xu \subseteq a\}. \end{aligned}$$

I.12 bis. Remarque. — $a_{\mathcal{F}}$ est la réunion ensembliste des $u^{-1}.a$ lorsque u parcourt \mathcal{F}' : en effet, de $ux \subseteq a, u \in \mathcal{F}'$, résulte d'après (I.10) et (I.11), $x \in \bar{u}^{-1}.a$. Réciproquement, de $x \in \bar{u}^{-1}.a$ résulte $(x) \in \bar{u}^{-1}.a$, donc $\bar{u}(x) \subseteq \bar{u}.\bar{(x)} \subseteq a$ et $ux \subseteq a$. Mais $a_{\mathcal{F}}$ est un \mathcal{O} - \mathcal{O} -sous-bimodule de K : soient x et y appartenant à $a_{\mathcal{F}}$, il existe u, u' appartenant à \mathcal{F}' tels que $ux \subseteq a$ et $u'y \subseteq a$, donc

$$uu'(x+y) \subseteq ux + u'y \subseteq a, \quad \text{avec } uu' \in \mathcal{F}'.$$

On voit donc que $a_{\mathcal{F}}$ est aussi la somme des \mathcal{O} -idéaux $\bar{u}^{-1}.a$ lorsque u parcourt \mathcal{F}' .

I.13. LEMME. — Si a et b sont des c -idéaux tels que $ax \subseteq b$, alors on a $a_{\mathcal{F}}x \subseteq b_{\mathcal{F}}$.

Démonstration. — De $ax \subseteq b$ résulte $(\bar{u}^{-1}.a)x \subseteq \bar{u}^{-1}.b$, d'après (I.11), et

$$\bigcup [(\bar{u}^{-1}.a)x] = \left[\bigcup \bar{u}^{-1}.a \right] x \subseteq \bigcup (\bar{u}^{-1}.b),$$

donc $a_{\mathcal{F}}x \subseteq b_{\mathcal{F}}$.

I.14. LEMME. — ${}_{\mathcal{F}'}a = a_{\mathcal{F}'}$, pour tout c -idéal a .

Démonstration. — On sait que $\bar{u}^{-1}.a = a.\bar{u}^{-1}$, et par suite ${}_{\mathcal{F}'}a = a_{\mathcal{F}'}$.

I.14 bis. LEMME. — $a_{\mathcal{F}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ -idéal.

Démonstration. — Compte tenu de la remarque I.12 bis, il suffit de démontrer que si $\lambda \in K, \lambda \neq 0$ est tel que $a\lambda \subseteq \mathcal{O}$, on en déduit $a_{\mathcal{F}}\lambda \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. Or ceci résulte du lemme I.13. De même, $\mu \in K, \mu \neq 0, \mu a \subseteq \mathcal{O}$ entraîne $\mu({}_{\mathcal{F}'}a) \subseteq {}_{\mathcal{F}'}\mathcal{O}$, donc $\mu a_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$.

I.15. LEMME. — $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est un ordre régulier de K .

Démonstration. — Pour tout $x \in K$, il existe un élément non nul $\alpha \in \mathcal{O}$, tel que $(\mathcal{O}\alpha\mathcal{O})x \subseteq \mathcal{O}$, donc

$$\alpha \mathcal{O}_{\mathcal{F}'} x \subseteq {}_{\mathcal{F}'}(\overline{\mathcal{O}\alpha\mathcal{O}})x = (\overline{\mathcal{O}\alpha\mathcal{O}})_{\mathcal{F}'} x :$$

en effet, pour $z \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, il existe $u \in \mathcal{F}'$ tel que $zu \subseteq \mathcal{O}$, donc

$$\alpha zu \subseteq \alpha \mathcal{O} \subseteq \overline{\mathcal{O} \alpha \mathcal{O}},$$

$$\alpha z \in_{\mathcal{F}'} \overline{(\mathcal{O} \alpha \mathcal{O})} = \overline{(\mathcal{O} \alpha \mathcal{O})}_{\mathcal{F}'}$$

et

$$\alpha \mathcal{O}_{\mathcal{F}'} \subseteq \overline{(\mathcal{O} \alpha \mathcal{O})}_{\mathcal{F}'}, \quad \alpha \mathcal{O}_{\mathcal{F}'} x \subseteq \overline{(\mathcal{O} \alpha \mathcal{O})}_{\mathcal{F}'}, x \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}, \quad (\text{lemme I.13}).$$

De même, il existe $\beta \in \mathcal{O}$ tel que $x \mathcal{O}_{\mathcal{F}'} \beta \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}'}$.

I.16. LEMME. — Si a est un c -idéal, alors $\overline{a}_{\mathcal{F}} = a_{\mathcal{F}}$.

Démonstration. — Soit a un élément de $\overline{a}_{\mathcal{F}}$. Il existe des éléments en nombre fini a_1, \dots, a_r tels que $a \in (a_1, \dots, a_r)'$, $a_i \in a_{\mathcal{F}}$, $i = 1, \dots, r$.

Il existe des $u_i \in \mathcal{F}'$, $i = 1, \dots, r$ tels que $u_i a_i \in a$. Si l'on pose $u = \prod_1^r u_i$, on a $u \in \mathcal{F}'$ et $u a_i \subseteq u_i a_i \subseteq a$, donc $a_i \in \overline{u^{-1} \cdot a} \subseteq a_{\mathcal{F}}$. On a donc

$$a \in \overline{\sum_1^r (a_i)} \subseteq \overline{u^{-1} \cdot a} \subseteq a_{\mathcal{F}},$$

et $\overline{a}_{\mathcal{F}} = a_{\mathcal{F}}$.

I.17. LEMME. — Si a est un c -idéal, alors

$$a_{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}} a} = \overline{a \mathcal{O}_{\mathcal{F}}} = \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}} a \mathcal{O}_{\mathcal{F}}}.$$

Démonstration. — On peut écrire

$$a_{\mathcal{F}} = \sum_{u \in \mathcal{F}'} (\overline{u^{-1} \cdot a}) \subseteq \overline{\sum_{u \in \mathcal{F}'} (u^{-1} \cdot a)} = \overline{\sum_{u \in \mathcal{F}'} u^{-1} \cdot a}.$$

Or on a $\overline{u^{-1} \cdot a} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, $\forall u \in \mathcal{F}'$, donc $\overline{u^{-1} \cdot a} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}} a$ et

$$\sum_{u \in \mathcal{F}'} \overline{u^{-1} \cdot a} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}} a \quad \text{et} \quad a_{\mathcal{F}} \subseteq \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}} a} \subseteq \overline{a_{\mathcal{F}}} = a_{\mathcal{F}}.$$

Ainsi on a

$$a_{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}} a} = \overline{a \mathcal{O}_{\mathcal{F}}} = \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}} a \mathcal{O}_{\mathcal{F}}} \left(a_{\mathcal{F}} = a_{\mathcal{F}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}} = \overline{\overline{a_{\mathcal{F}}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}}} = \overline{(\mathcal{O}_{\mathcal{F}} a) \mathcal{O}_{\mathcal{F}}} = \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}} a \mathcal{O}_{\mathcal{F}}} \right).$$

I.18. THÉORÈME. — La clôture $\overline{\alpha}$ d'un $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ -idéal α est aussi un $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ -idéal.

Démonstration. — Soit a un élément de $\overline{\alpha}$, et soit c un élément de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. Il existe un c -idéal $(a_1, \dots, a_r)'$ contenant a , $a_i \in \alpha$, $i = 1, \dots, r$ et

\bar{u}^{-1} contenant c , $u \in \mathcal{F}'$. On peut écrire alors

$$ca \in \bar{u}^{-1} \cdot (a_1, \dots, a_r)' = \overline{\bar{u}^{-1} \left[\sum_1^r (a_i) \right]} \subseteq \overline{\sum_1^r u^{-1}(a_i)}$$

$$= (b_1, \dots, b_s)' \quad (\text{lemme I.7}),$$

$b_j \in \sum_1^r \bar{u}^{-1}(a_i)$, $j = 1, \dots, s$. On a donc $b_j \in \alpha$, $j = 1, \dots, s$. On a donc $ca \in \bar{\alpha}$, et de même $ac \in \bar{\alpha}$. Puisqu'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\alpha \lambda \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, on en déduit, lemme I.10, $\bar{\alpha} \lambda \subseteq \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} = \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}$.

I.19. THÉORÈME. — Si α est un $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ -idéal contenu dans $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, alors $a = \alpha \cap \mathcal{O}$ est un \mathcal{O} -idéal, et $\bar{\alpha} = (\bar{a})_{\mathcal{F}}$.

Démonstration. — De $\alpha \supseteq a$, on déduit $\alpha \supseteq \bar{u}^{-1}a$ et $\bar{\alpha} \supseteq \bar{u}^{-1} \cdot \bar{a}$, $\bar{\alpha} \supseteq \bar{a}_{\mathcal{F}}$. Soit a un élément de $\bar{\alpha}$. On a $a \in (a_1, \dots, a_r)'$, $a_i \in \alpha$, $i = 1, \dots, r$. Il existe $u \in \mathcal{F}'$ tel que $ua_i \subseteq \mathcal{O}$, et de plus $ua_i \subseteq \alpha$, donc $ua_i \subseteq a$, $i = 1, \dots, r$, donc $a_i \in \bar{u}^{-1} \cdot \bar{a}$, donc

$$a \in \overline{\sum_1^r (a_i)} \subseteq \bar{u}^{-1} \cdot \bar{a} \subseteq \bar{a}_{\mathcal{F}},$$

et $\bar{\alpha} \subseteq \bar{a}_{\mathcal{F}}$.

I.20. COROLLAIRE. — Si α est un $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ -idéal clos dans $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ ($\bar{\alpha} = \alpha$), alors il existe un c -idéal a tel que $\alpha = a_{\mathcal{F}}$.

I.21. THÉORÈME. — Les $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ -idéaux clos $\alpha, \beta, \mathcal{C}, \dots$ forment un groupe $G_{\mathcal{F}}$ par rapport au produit $\alpha \cdot \beta = \overline{\alpha \beta}$; le groupe $G_{\mathcal{F}}$ est homomorphe au groupe G de tous les c -idéaux.

Démonstration. — Nous allons montrer que

$$a_{\mathcal{F}} \cdot b_{\mathcal{F}} = \overline{a_{\mathcal{F}} b_{\mathcal{F}}} = (a \cdot b)_{\mathcal{F}}.$$

On a

$$\overline{a_{\mathcal{F}} b_{\mathcal{F}}} = \overline{\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} a \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} b \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}} = \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}} a b \mathcal{O}_{\mathcal{F}}} = \overline{\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}} a b \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}}} = \overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}} (a \cdot b) \mathcal{O}_{\mathcal{F}}} = (a \cdot b)_{\mathcal{F}}.$$

L'application $a \rightarrow a_{\mathcal{F}}$ est un homomorphisme de G dans $G_{\mathcal{F}}$. Si α est contenu dans $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, il existe un c -idéal a tel que $\alpha = a_{\mathcal{F}}$. Si β n'est pas contenu dans $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, il existe $a_{\mathcal{F}}$ tel que $a_{\mathcal{F}} \cdot \beta \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ [on a $\lambda \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, $\lambda \neq 0$ avec $\lambda \beta \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, donc

$$(\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \lambda \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \beta \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}, \quad \overline{(\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \lambda \mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \beta} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}} \quad \text{et} \quad \overline{(\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \lambda \mathcal{O}_{\mathcal{F}})} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}},$$

donc $(\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \lambda \mathcal{O}_{\mathcal{F}}}) = \alpha_{\mathcal{F}} \mathbb{1}$. On a donc $\alpha_{\mathcal{F}} \cdot \beta = \mathfrak{b}_{\mathcal{F}}$, \mathfrak{b} désignant un c -idéal, et

$$(\alpha^{-1})_{\mathcal{F}} \cdot \alpha_{\mathcal{F}} \cdot \beta = \beta = (\alpha^{-1})_{\mathcal{F}} \cdot \mathfrak{b}_{\mathcal{F}} = (\alpha^{-1} \cdot \mathfrak{b})_{\mathcal{F}} :$$

tout élément de $G_{\mathcal{F}}$ est image d'un élément de G .

I.22. THÉORÈME. — $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est un ordre maximal régulier de K .

Démonstration. — Soit L le demi-groupe ordonné en treillis des $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ -idéaux. L'élément unité de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est un idempotent maximal de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ car $\mathcal{C}^2 \leq \mathcal{C} \Leftrightarrow \overline{\mathcal{C}^2} \leq \overline{\mathcal{C}}$ et $\overline{\mathcal{C}^{-1} \cdot \mathcal{C}^2} \leq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ et $\overline{\mathcal{C}} \leq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, d'où $\mathcal{C} \leq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. On applique alors successivement les théorèmes (2.8), (2.7) et (2.2) de [2] : l'ordre à droite (et l'ordre à gauche) d'un $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ -idéal est $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ ce qui prouve que $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est un ordre maximal de K d'ailleurs régulier.

I.23. PROPOSITION. — Soit \mathfrak{a} un c -idéal contenu dans \mathcal{O} . Alors on a $\alpha_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ si et seulement si \mathfrak{a} contient un \mathcal{O} -idéal, u , appartenant à \mathcal{F}' .

Démonstration. — De $\mathfrak{a} \supseteq u$, $u \in \mathcal{F}'$, on déduit $\alpha^{-1} \subseteq \overline{u^{-1}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, $\alpha_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ $\alpha \supseteq \overline{\alpha^{-1} \mathfrak{a}} = \mathcal{O}$ et $\alpha_{\mathcal{F}} \supseteq \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, donc $\alpha_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. Réciproquement, soit $\alpha_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, alors $\mathbb{1}$ appartient à $\alpha_{\mathcal{F}}$, $u = u_1$ est contenu dans \mathfrak{a} pour un certain $u \in \mathcal{F}'$.

I.24. Définition. — Un sous-anneau S de K sera dit un \mathcal{O} -anneau s'il contient \mathcal{O} , et s'il est clos en tant que \mathcal{O} - \mathcal{O} -sous-bimodule de K .

I.24 bis. Remarque. — Un sous-anneau S de K est un \mathcal{O} -anneau si et seulement si, pour toute famille finie d'éléments de S , c_1, \dots, c_n , le c -idéal engendré par $\mathbb{1}, c_1, c_2, \dots, c_n$, est contenu dans S . Par exemple, $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est un \mathcal{O} -anneau pour une famille bilatère \mathcal{F} de \mathcal{O} .

I.24 ter. LEMME. — Soit S un \mathcal{O} -anneau. Si S n'est pas contenu dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, \mathcal{X} premier minimal non nul de \mathcal{O} , S contient \mathcal{X}^{-1} .

Démonstration. — Soit c un élément de S n'appartenant pas à $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$: $\forall s \in S_1 = \mathcal{O} - \mathcal{X}$, $s \mathcal{O} c \not\subseteq \mathcal{O}$; on a $(\mathbb{1}, c)' \supseteq \mathcal{O}$ et $[(\mathbb{1}, c)']^{-1} \subseteq \mathcal{O}$. Supposons qu'il existe $s \in S_1$ tel que $s \in [(\mathbb{1}, c)']^{-1} = u$. On en déduirait

$$[[(\mathbb{1}, c)']^{-1}]^{-1} = (\mathbb{1}, c)',$$

$u^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ et $c \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, contrairement à l'hypothèse. On a donc $u \subseteq \mathcal{X}$ et $S \supseteq (\mathbb{1}, c)' \supseteq \mathcal{X}^{-1}$.

I.25. THÉORÈME. — Soit \mathcal{X} un idéal premier minimal de \mathcal{O} ; $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est un \mathcal{O} -anneau maximal de K , et tout \mathcal{O} -anneau non égal à K est contenu dans un tel $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$.

Démonstration. — Soit $S \supseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{x}}$ et $S \neq K$, S désignant un \mathcal{O} -anneau de K . D'après le lemme I.24, S contient \mathfrak{x}^{-1} , donc S contient $\mathcal{O}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{x}^{-1}$, et $\overline{\mathcal{O}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{x}^{-1}} = (\mathfrak{x}^{-1})_{\mathfrak{x}} = (\mathfrak{x}_{\mathfrak{x}})^{-1}$, car S est clos. De ce fait, S contient toutes les puissances de $\mathfrak{x}_{\mathfrak{x}}$. Or \mathfrak{x} étant premier minimal, les seuls $\mathcal{O}_{\mathfrak{x}}$ -idéaux clos sont les puissances de $\mathfrak{x}_{\mathfrak{x}}$ [se servir de (I.21) et de (I.23)]. Par ailleurs, tout élément de K est contenu dans un $\mathcal{O}_{\mathfrak{x}}$ -idéal, donc appartient à S . Tout \mathcal{O} -anneau S de K , $S \neq K$, est contenu dans un certain $\mathcal{O}_{\mathfrak{x}}$, \mathfrak{x} idéal non nul premier minimal de \mathcal{O} , car, sinon, d'après le lemme I.24, S contient tous les \mathfrak{x}^{-1} , donc tous les \mathcal{O} -idéaux, et on a $S = K$, contrairement à $S \neq K$.

I.26. THÉORÈME. — Un \mathcal{O} -anneau S distinct de K coïncide avec un \mathcal{O}_P , P désignant une famille d'idéaux premiers minimaux non nuls de \mathcal{O} .

Démonstration. — Soit P l'ensemble de tous les \mathfrak{x} premiers minimaux non nuls de \mathcal{O} tels que $\mathcal{O}_{\mathfrak{x}} \supseteq S$. Démontrons que $\mathcal{O}_P = S$. Si S est distinct de \mathcal{O}_P il existe un élément a , contenu dans \mathcal{O}_P et non dans S . On a $\mathcal{O}_P \supseteq (1, a) \supseteq \mathcal{O}$ et $[(1, a)']^{-1} \subseteq \mathcal{O}$. Soit donc $[(1, a)']^{-1} = a_1 \dots a_r$ une décomposition en facteurs premiers de $[(1, a)']^{-1}$. Puisque

$$(1, a)' = a_1^{-1} \dots a_r^{-1}$$

n'est pas contenu dans S , il existe un a_i^{-1} , par exemple a_1^{-1} , non contenu dans S . Puisque a_1^{-1} est contenu dans $(1, a)'$, donc dans \mathcal{O}_P , donc dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{x} \in P$, on déduit de $a_1^{-1} \notin \mathcal{O}_{a_1}$ que a_1 n'appartient pas à P . On a donc $S \not\subseteq \mathcal{O}_{a_1}$ et, d'après le lemme (I.24 ter), $S \not\supseteq a_1^{-1}$, et il y a contradiction. On a donc $\mathcal{O}_P \subseteq S$.

Par ailleurs, \mathcal{O}_P contient S : soit $x \in S$, il existe pour chaque \mathfrak{x} , $\mathfrak{x} \in P$, un élément $s_{\mathfrak{x}} \notin \mathfrak{x}$ tel que $s_{\mathfrak{x}}\mathcal{O}x \subseteq \mathcal{O}$ et $s_{\mathfrak{x}} \in \mathcal{O}$, donc, en posant

$$u = \sum_{\mathfrak{x} \in P} \mathcal{O}s_{\mathfrak{x}}\mathcal{O}, \quad ux \subseteq \mathcal{O} \quad \text{et} \quad x \in \mathcal{O}_{\mathfrak{x}}.$$

On a donc $\mathcal{O}_P = S$. Remarquons que l'on a $\mathcal{O}_P = \bigcap_{\mathfrak{x} \in P} \mathcal{O}_{\mathfrak{x}}$.

I.27. COROLLAIRE. — Les localisations bilatères de \mathcal{O} distinctes de K sont les anneaux $\bigcap_{\mathfrak{x} \in P} \mathcal{O}_{\mathfrak{x}}$, où P est une famille quelconque non vide d'idéaux premiers de \mathcal{O} , non nuls, minimaux. Ce sont des ordres maximaux réguliers de K .

I.28. Remarque. — Rien dans ce qui précède d'affirmer ne permet qu'une localisation bilatère $\mathcal{O}_{\mathfrak{f}}$ de \mathcal{O} est noethérienne comme \mathcal{O} . Ce problème est lié à la platitude de $\mathcal{O}_{\mathfrak{f}}$ en tant que \mathcal{O} -module à droite et \mathcal{O} -module à gauche.

I.29. THÉORÈME. — *Si tous les idéaux premiers de \mathcal{O} sont maximaux, \mathcal{O} désignant, rappelons)-le, un anneau noethérien, sans diviseurs de zéro, ordre maximal régulier de son corps des fractions K , tout sous-anneau S de K contenant \mathcal{O} est une localisation bilatère plate des deux côtés de \mathcal{O} .*

Démonstration. — On sait en effet ([1], th. 3.12 et 3.13) que tout sous-anneau S de K contenant \mathcal{O} coïncide avec un \mathcal{O}_ρ . Par application du théorème I.5, on obtient le résultat.

I.30. Remarque. — Sous les hypothèses du théorème précédent, en utilisant SILVER [25], on s'aperçoit que, si \mathcal{X} désigne un idéal à gauche de \mathcal{O}_ρ , on a, en posant $\mathfrak{a} = \mathcal{X} \cap \mathcal{O}$, $\mathcal{X} = \mathcal{O}_\rho \mathfrak{a}$. Mais ce résultat était déjà connu par ASANO ([1], lemme 3, p. 116).

II

Dans cette partie, \mathcal{O} est un anneau, noethérien, sans diviseurs de zéro, ordre maximal (non nécessairement régulier) de son corps des fractions K . Soit B un sous-anneau de K , tel que $\mathcal{O} \subseteq B \subseteq K$, tel que B soit plat en tant que \mathcal{O} -module à droite et en tant que \mathcal{O} -module à gauche. L'anneau B est-il un ordre maximal de K ?

II.1. LEMME. — *Sous les hypothèses énoncées ci-dessus, l'injection canonique $x : \mathcal{O} \rightarrow B$ est un épimorphisme d'anneau.*

La démonstration est laissée aux soins du lecteur.

II.2. LEMME. — *On garde les hypothèses énoncées ci-dessus. Soit \mathfrak{b} un idéal bilatère de B . On a*

$$\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} = \{x \in K \mid \mathfrak{b}x \subseteq \mathfrak{b}\} = B$$

et

$$\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} = \{x \in K \mid x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}\} = B.$$

Démonstration. — D'après un résultat de SILVER ([25], prop. 1.6, p. 48), on a

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}} B = B \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{a}, \quad \text{avec } \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathcal{O}.$$

D'après un lemme de HARADA, ([10], lemme 1, p. 62), on a $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} = \text{Hom}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$, en identifiant $x \in K$ au morphisme qui à $b \in B$ fait correspondre bx , et de même $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} = \text{Hom}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$.

Or, d'après BOURBAKI ([5], prop. 1, p. 106), il existe un Z -isomorphisme entre $\text{Hom}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}} B, B \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{a})$ et $\text{Hom}_{\mathcal{O}}^{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}, \text{Hom}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}}(B \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{a}))$: cet isomorphisme associe à $h \in \text{Hom}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}}(B \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{a}, B \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{a})$ l'application linéaire h' de \mathfrak{a} dans $\text{Hom}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}}(B, B \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{a}) = B \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{a}$, qui, à $x \in \mathfrak{a}$, associe, $\forall y \in B$, $h'(x)y = hxy$ (on identifie $\mathfrak{a} \otimes_{\mathcal{O}} B$ à $\mathfrak{a}B$, et $B \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{a}$ à $B\mathfrak{a}$), donc $h'(x) = hx$.

Par ailleurs, d'après BOURBAKI ([4], prop. 10, p. 38), il existe un \mathfrak{S} -isomorphisme entre $\text{Hom}_{\mathfrak{O}}^r(\mathfrak{a}, B \otimes_{\mathfrak{O}} \mathfrak{a})$ et $B \otimes_{\mathfrak{O}} \text{Hom}_{\mathfrak{O}}^r(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ qui à h' , application de \mathfrak{a} dans $B \otimes_{\mathfrak{O}} \mathfrak{a}$, associe $y \otimes u$, $y \in B$, $u \in \text{Hom}_{\mathfrak{O}}^r(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ tel que $\forall x \in \mathfrak{a}$,

$$h'(x) = y \otimes u(x) = y \otimes ux,$$

donc $hx = yux$ et $h = yu$. Ainsi $B \otimes_{\mathfrak{O}} \text{Hom}_{\mathfrak{O}}^r(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})$ s'identifie à $\text{Hom}_B^r(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$, et \mathfrak{O} étant un ordre maximal de K , on a

$$\text{Hom}_{\mathfrak{O}}^r(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{O} \quad \text{et} \quad B = \text{Hom}_B^r(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b}.$$

On obtient de même $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} = B$.

II.3. PROPOSITION. — Soit \mathfrak{O} un anneau sans diviseurs de zéro, ordre maximal de son corps des fractions K . Soit B un sous-anneau de K contenant \mathfrak{O} , plat en tant que \mathfrak{O} -module à droite et en tant que \mathfrak{O} -module à gauche, dont tous les idéaux (à droite, à gauche) sont bilatères, alors B est un anneau noethérien, sans diviseurs de zéro, ordre maximal de K .

Démonstration. — Le fait que B est noethérien résulte de l'article [25] (prop. 1.6, p. 46). Soit \mathfrak{b} un B -idéal, il existe $\lambda \in B$ tel que $\mathfrak{b} \lambda \subseteq B$, donc il existe un idéal \mathfrak{b}' de B tel que $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}' \lambda^{-1}$. On a alors

$$\mathfrak{b}' \cdot \mathfrak{b}' = \{x \in K \mid x \mathfrak{b}' \subseteq \mathfrak{b}'\} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b}.$$

En appliquant le lemme II.2, on prouve $\mathfrak{b}' \cdot \mathfrak{b}' = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} = B$. On démontrerait de même $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b} = B$. Ainsi B est un ordre maximal de K .

Remarque. — Le résultat précédent appliqué au cas où \mathfrak{O} est commutatif (donc aussi B) redonne un résultat de J. MAROT [14].

III

Nous nous proposons dans cette partie de caractériser parmi les anneaux R' , noethériens, sans diviseurs de zéro, à élément unité, ordres maximaux réguliers de leur corps des fractions K , ceux dont tous les idéaux (à gauche, à droite) sont bilatères.

Dans toute cette partie, sauf au théorème III.14, R désigne un anneau, unitaire, noethérien, sans diviseurs de zéro, ordre maximal régulier de son corps des fractions K , vérifiant la condition (C) suivante :

(C) : Pour tout idéal premier minimal \mathfrak{X} de R (non nul), tout idéal à gauche \mathfrak{X} -primaire (et tout idéal à droite \mathfrak{X} -primaire) est contenu dans \mathfrak{X} .

La condition (C) est en particulier vérifiée lorsque tout idéal à gauche (et tout idéal à droite), \mathfrak{X} -primaire, est bilatère. Nous utiliserons le théorème suivant ([15], p. 96, th. 2.8) :

III.1. THÉORÈME 0. — Soit R' un ordre maximal régulier, noethérien, sans diviseurs de zéro. Soit a , $a \neq 0$, $a \in R'$, a non inversible dans R' , $R'a$ (respectivement aR') est intersection d'idéaux à gauche (respectivement d'idéaux à droite) primaires (au sens de LESIEUR et CROISOT [12] dont les radicaux sont des idéaux premiers bilatères minimaux non nuls de R').

Dans toute la suite de cette troisième partie, nous dirons idéal pour idéal bilatère. Soit \mathfrak{A} un idéal premier de R , et soit $S = R - \mathfrak{A}$.

Rappelons que si I désigne un idéal à gauche \mathfrak{Q} -primaire, \mathfrak{Q} désignant un idéal premier, il existe un entier naturel p tel que $\mathfrak{Q}^p \subseteq I$ (cf. [12], propriété 5.5, propriété 5.6, th. 5.1) et si \mathfrak{Q} est premier minimal, la condition (C) entraîne $I \subseteq \mathfrak{Q}$.

III.2. THÉORÈME. — R vérifiant les hypothèses précisées ci-dessus, avec les notations précédentes, S est un sous-demi-groupe multiplicatif de R , et R vérifie la condition de Ore des deux côtés par rapport à S . De plus, pour tout $s \in S$, il existe $s' \in S$, $s'' \in S$, tels que $Rs \supseteq s'R$ et $sR \supseteq Rs''$.

Démonstration. — Soient s et s' deux éléments de S ; nous allons établir que ss' appartient à S . Supposons le contraire. Appliquons le théorème 0 :

$$Rs = \bigcap_{i=1}^n X_i, \quad X_i \text{ idéal à gauche } \mathfrak{A}'_i\text{-primaires,} \quad i = 1, \dots, n,$$

$$s'R = \bigcap_{i=1}^{n'} X'_i, \quad X'_i \text{ idéal à droite } \mathfrak{A}_i\text{-primaires,} \quad i = 1, \dots, n'.$$

Il existe des entiers p_i et p'_j , $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n'$, tels que

$$\left(\prod_{i=1}^{i=n} \mathfrak{A}_i^{p_i} \right) \times \left(\prod_{j=1}^{j=n'} \mathfrak{A}'_j^{p'_j} \right) \subseteq \text{idéal engendré par } Rss'R \subseteq \mathfrak{A}.$$

On en déduit que l'un des \mathfrak{A}'_j ou que l'un des \mathfrak{A}_i est compris dans \mathfrak{A} . Mais ceci entraîne que s ou s' appartient à \mathfrak{A} , contrairement à l'hypothèse [on se sert de la condition (C)]. Ceci étant, montrons que, pour tout s appartenant à S , il existe un s' appartenant à S , tel que $Rs \supseteq s'R$: on a établi

plus haut $\prod_{i=1}^{i=n} \mathfrak{A}_i^{p_i} \subseteq Rs$. Supposons que $\prod_{i=1}^{i=n} \mathfrak{A}_i^{p_i}$ appartienne à \mathfrak{A} , on

en déduirait que l'un des \mathfrak{A}_i au moins serait contenu dans \mathfrak{A} , donc aussi Rs contenu dans X_i , donc dans \mathfrak{A}_i [condition (C)]. Il existe donc s' , $s' \in S$, tel que

$$s'R \in \prod_{i=1}^{i=n} \mathfrak{A}_i^{p_i} \subseteq Rs.$$

On démontrerait de même que, pour tout s appartenant à S , il existe s'' appartenant à S tel que $sR \supseteq Rs''$.

Il est facile de démontrer pour terminer que R vérifie la condition de Ore des deux côtés par rapport à S .

III.3. COROLLAIRE. — Si M est un idéal à gauche de R , on a

$$M_{\mathcal{X}} = \{ x \in K \mid \exists s \in S, sRx \subseteq M \} = \{ x \in K \mid \exists s' \in S, s'x \in M \} = (R_{\mathcal{X}})M,$$

et $M_{\mathcal{X}}$ est un idéal à gauche de l'anneau $R_{\mathcal{X}}$.

Si M' est un idéal à droite de R , on a

$${}_{\mathcal{X}}M' = \{ x \in K \mid \exists s \in S, xRs \subseteq M' \} = \{ x \in K \mid \exists s' \in S, xs' \in M' \} = M'({}_{\mathcal{X}}R),$$

et ${}_{\mathcal{X}}M'$ est un idéal à droite de l'anneau $R_{\mathcal{X}} = {}_{\mathcal{X}}R$, noté aussi R_S .

Démonstration. — Facile, la démonstration est laissée aux soins du lecteur : on remarquera que les notations sont en accord avec celles introduites à la première partie. Les anneaux $R_{\mathcal{X}}$ et ${}_{\mathcal{X}}R$ coïncident ici avec l'anneau de fractions R_S de R selon S , la condition de Ore des deux côtés par rapport à S étant vérifiée.

III.4. PROPOSITION. — R_S est un ordre maximal régulier.

Démonstration. — La proposition se déduit immédiatement du théorème I.22.

Dans toute la suite, nous supposons que \mathcal{X} est un idéal premier minimal non nul de R .

III.5. LEMME. — Soit $M = \bigcap_{i=1}^{i=n} X_i$, $i = 1, \dots, n$, X_i et M désignant des idéaux à gauche. On a $M_{\mathcal{X}} = \bigcap_{i=1}^{i=n} (X_i)_{\mathcal{X}}$. Si, de plus, X_i est \mathcal{X}_i -primaire avec $\mathcal{X}_i \not\subseteq \mathcal{X}$, on a $(X_i)_{\mathcal{X}} = R_{\mathcal{X}}$.

Démonstration. — De $M \subseteq X_i$ résulte $M_{\mathcal{X}} \subseteq (X_i)_{\mathcal{X}}$ pour $i = 1, \dots, n$, donc $M_{\mathcal{X}} \subseteq \bigcap_{i=1}^n (X_i)_{\mathcal{X}}$. Soit maintenant $x \in \bigcap_{i=1}^n (X_i)_{\mathcal{X}}$ pour chaque $i = 1, \dots, n$, il existe $s_i \in S$ tel que $s_i x \in X_i$. Il est facile d'établir par récurrence sur n grâce à la condition de Ore à gauche selon S , l'existence d'éléments α_i appartenant à S et tels que

$$\gamma = \alpha_1 s_1 = \dots = \alpha_n s_n, \quad \text{avec } \gamma \in S.$$

On en déduit $\gamma x \in X_i$, $i = 1, \dots, n$, donc $\gamma x \in \bigcap_{i=1}^{i=n} X_i$ et $x \in M_{\mathcal{X}}$. La

deuxième partie du lemme est établie au lemme II.2, page 98 de ma thèse [15].

III.6. LEMME. — Si \mathfrak{a} est un idéal de R , maximal dans sa classe, modulo l'équivalence d'Artin \mathcal{R} , on a

$$\mathfrak{a}_{\mathcal{X}} = {}_{\mathcal{X}}\mathfrak{a} = R_S = \mathfrak{a}R_S;$$

en particulier, on a $\mathcal{X}_{\mathcal{X}} = {}_{\mathcal{X}}\mathcal{X}$.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le corollaire III.3 et le lemme I.14, puis de remarquer que \mathcal{X} étant premier minimal (non nul) de R est maximal dans sa classe modulo \mathcal{R} ([15], chap. III, th. II.5 et lemme II.1).

III.7. LEMME. — $\forall a \in R$, $R_S a = (Ra)_{\mathcal{X}}$.

Démonstration. — On utilise le corollaire III.3 en faisant $M = Ra$; $M_{\mathcal{X}} = R_S a$ fournit le résultat.

III.8. LEMME. — Pour $n = 1, 2, \dots$, $(\mathcal{X}^n)_{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}_{\mathcal{X}})^n = ({}_{\mathcal{X}}\mathcal{X})^n = {}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}^n)$.

Démonstration. — On a $(\mathcal{X}^n)_{\mathcal{X}} = R_S \mathcal{X}^n$ et $(\mathcal{X}_{\mathcal{X}})^n = (R_S \mathcal{X})^n$. Soit $x_i \in R_S \mathcal{X} = \mathcal{X} R_S$ pour $i = 1, \dots, n$, et considérons $\prod_{i=1}^{i=n} x_i$. On a $x_i = s_i^{-1} p_i = p'_i s'_i$ avec p_i et p'_i appartenant à \mathcal{X} , et s_i, s'_i appartenant à S . On peut écrire

$$x_1 x_2 = p'_1 s_1^{-1} s_2^{-1} p_2 = p_1 \tau^{-1} p_2, \quad \text{avec } \tau = s_2 s'_1 \in S.$$

Or $\tau^{-1} p_2$ s'écrit à son tour $p'' \tau'^{-1}$, $\tau' \in S$, $p'' \in \mathcal{X}$ et $x_1 x_2 = p_1 p'' \tau'^{-1}$. On peut appliquer ce raisonnement à $x_1 x_2 x_3, \dots, x_1 x_2 \dots x_n$. On obtient finalement $x_1 x_2 \dots x_n = p_1 p_2'' \dots p_n'' \gamma^{-1}$ avec $\gamma \in S$, p_1, p_2'', \dots, p_n'' appartenant à \mathcal{X} . On a donc $x_1 \dots x_n \gamma \in \mathcal{X}^n$, donc $x_1 \dots x_n \in \mathcal{X}^n R_S$. L'inclusion $\mathcal{X}^n R_S \subseteq (\mathcal{X} R_S)^n$ est immédiate. On a donc

$${}_{\mathcal{X}}\mathcal{X}^n R_S = (\mathcal{X} R_S)^n = (R_S \mathcal{X})^n = R_S \mathcal{X}^n.$$

III.9. PROPOSITION. — R_S est un anneau noethérien; $\mathcal{X}_{\mathcal{X}}$ est son plus grand idéal à gauche et aussi son plus grand idéal à droite. Les seuls idéaux premiers de R_S sont (0) et $\mathcal{X}_{\mathcal{X}}$. Il y a une correspondance entre les idéaux à gauche propres (à droite propres) de R_S et les idéaux à gauche (à droite) ne rencontrant pas S :

$$I, \text{ idéal à gauche de } R_S \rightarrow I' = I \cap R,$$

$$I', \text{ idéal à gauche de } R \rightarrow I = R_S I'.$$

De plus, I désignant un idéal à gauche de R_S , on a $I = R_S(I \cap R)$.

Démonstration. — Nous nous contenterons de démontrer que $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{X}}$ est le plus grand idéal à gauche et le plus grand idéal à droite de R_S et que c'est avec (o) le seul idéal premier de R_S , le reste de l'énoncé étant facile à établir. Soit I un idéal à gauche de R_S , $I \neq R_S$, $I' = I \cap R$ ne rencontre pas S , donc est inclus dans \mathfrak{X} , et on a

$$I = R_S I' \subseteq R_S \mathfrak{X} = \mathfrak{Q}_{\mathfrak{X}}.$$

Comme $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} \mathfrak{Q}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{X}}$ est aussi le plus grand idéal à droite de R_S . Soit \mathfrak{Q} un idéal premier non nul de R_S , donc contenu dans $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{X}}$. On veut démontrer $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{\mathfrak{X}}$. Soit $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q} \cap R$, $o \subseteq \mathfrak{Q}' \subseteq \mathfrak{X}$. Démontrons que \mathfrak{Q}' est complètement premier dans R ($ab \in \mathfrak{Q}'$, $a \in R$, $b \in R$ entraîne « a ou b appartient à \mathfrak{Q}' »). On peut supposer d'entrée que a et b n'appartiennent pas à S , car si l'un d'eux, par exemple a , appartient à S , de $ab \in \mathfrak{Q}'$, on déduit $b \in \mathfrak{Q}$, donc $b \in \mathfrak{Q}'$. Supposons donc que a et b appartiennent à \mathfrak{X} , et qu'ils n'appartiennent pas à \mathfrak{Q}' ; de $ab \in \mathfrak{Q}'$, on déduit $R_S ab \in \mathfrak{Q}$, donc $(R_S a) b \in \mathfrak{Q}$, et $(Ra)_{\mathfrak{X}} b \in \mathfrak{Q}$ (lemme III.7). D'après le théorème 0, on

peut écrire $Ra = \bigcap_{i=1}^{i=n} X_i$, $X_i \mathfrak{X}_i$ -primaire, $i = 1, \dots, n$, et d'après le

lemme III.5, $(Ra)_{\mathfrak{X}} = \bigcap_{i=1}^{i=n} (X_i)_{\mathfrak{X}}$; puisque l'on suppose $a \in \mathfrak{X}$, l'un des \mathfrak{X}_i , par exemple \mathfrak{X}_1 , est égal à \mathfrak{X} .

D'après le lemme III.5, on a $(X_1)_{\mathfrak{X}} = (Ra)_{\mathfrak{X}}$. Comme pour un certain entier naturel p_1 , on a $\mathfrak{X}^{p_1} \subseteq X_1$, on a $(\mathfrak{X}^{p_1})_{\mathfrak{X}} \subseteq (X_1)_{\mathfrak{X}}$, et d'après le lemme III.8, $(\mathfrak{X}^{p_1})_{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{X}_{\mathfrak{X}})^{p_1} \subseteq (X_1)_{\mathfrak{X}}$. Si l'on avait $(\mathfrak{X}_{\mathfrak{X}})^{p_1} \subseteq \mathfrak{Q}$, on déduirait $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{\mathfrak{X}}$, c'est-à-dire ce que nous voulons établir. Supposons donc $(\mathfrak{X}_{\mathfrak{X}})^{p_1} \not\subseteq \mathfrak{Q}$: il existe alors a' , $a' \notin \mathfrak{Q}$, $a' \in (\mathfrak{X}_{\mathfrak{X}})^{p_1}$, donc $a' R_S \in (\mathfrak{X}_{\mathfrak{X}})^{p_1} \subseteq (X_1)_{\mathfrak{X}}$. On a donc

$$a' R_S b \in (Ra)_{\mathfrak{X}} b \in \mathfrak{Q},$$

avec a' et b n'appartenant pas à \mathfrak{Q} : il y a une contradiction. Finalement \mathfrak{Q}' est complètement premier dans R . Il est donc égal à \mathfrak{X} , et $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{\mathfrak{X}}$.

III.9 bis. LEMME. — Soit X un idéal à gauche \mathfrak{X} -primaire de R , \mathfrak{X} désignant, rappelons-le, un idéal premier minimal non nul de R , on a

$$X = (R_S X) \cap R.$$

Démonstration. — Elle a été faite sous des hypothèses plus générales au lemme II.2, page 98, de ma thèse [15].

III.10. PROPOSITION. — Soit T un idéal non nul de R_S , R_S/T est un anneau à idéaux à gauche et à idéaux à droite, tous principaux.

Démonstration. — JACOBSON a démontré (cf. [11], th. 24, p. 128 et 129) que si L est un ordre maximal régulier, noethérien à gauche, vérifiant la condition de chaîne descendante affaiblie (c'est-à-dire que toute chaîne descendante d'idéaux à gauche de L contenant un idéal à gauche donné non nul s'arrête au bout d'un nombre fini d'idéaux à gauche), pour tout idéal non nul T de L , L/T a tous ses idéaux à gauche principaux et tous ses idéaux à droite principaux. Or R_S est un ordre maximal régulier noethérien, sans diviseurs de zéro, ne possédant qu'un seul idéal premier non nul $\mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}}$, qui est d'ailleurs le plus grand idéal à gauche et le plus grand idéal à droite de R_S . On sait qu'il vérifie alors la condition de chaîne descendante affaiblie pour les idéaux à gauche (cf. [1], th. 2.16) et on peut appliquer le théorème de Jacobson à R_S .

III.11. LEMME. — Soit \mathfrak{X} un idéal premier minimal non nul d'un ordre R maximal régulier de son corps des fractions K (on suppose toujours R unitaire, noethérien, sans diviseurs de zéro). On a $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{X}^n = 0$ (ASANO).

Démonstration. — Soit $K = \bigcap_{n=1}^{n=\infty} \mathfrak{X}^n$. Si K est non nul, désignons par $\bar{\alpha}$ la classe de l'idéal α de R , modulo l'équivalence d'Artin \mathcal{R} . On a $\bar{K} \neq \bar{R}$, car $\bar{K} = \bar{R}$ entraînerait $\bar{\mathfrak{X}} = \bar{R}$, ce qui est impossible (cf. [15], lemme II.1, p. 97). On pourrait alors écrire $\bar{K} = \bar{\mathfrak{Q}}_1^{p_1} \dots \bar{\mathfrak{Q}}_r^{p_r} \subseteq \bar{\mathfrak{X}}$, et $\bar{\mathfrak{Q}}_1 = \bar{\mathfrak{X}}$ par exemple, $\bar{\mathfrak{Q}}_i$ et $\bar{\mathfrak{X}}$ étant des éléments premiers dans l'ensemble des classes ([15], th. II.5, p. 93). Comme on a $\bar{K} \subseteq \bar{\mathfrak{X}}^n$ pour tout entier naturel n , on peut écrire

$$\bar{\mathfrak{X}}^{p_1+1} \supseteq \bar{\mathfrak{X}}^{p_1} \cdot \bar{\mathfrak{Q}}_2^{p_2} \dots \bar{\mathfrak{Q}}_r^{p_r} \quad \text{et} \quad \bar{\mathfrak{X}} \supseteq \bar{\mathfrak{Q}}_2^{p_2} \dots \bar{\mathfrak{Q}}_r^{p_r},$$

donc $\bar{\mathfrak{X}} = \bar{\mathfrak{Q}}_j$ pour un j , $2 \leq j \leq r$. Or ceci est impossible car on peut supposer $\bar{\mathfrak{Q}}_i \neq \bar{\mathfrak{Q}}_j$ pour $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, r$. Il y a contradiction, et $K = 0$.

III.12. THÉORÈME. — Les seuls idéaux à gauche (respectivement à droite) non nuls de R_S sont les $\mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}}^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$: ainsi tous les idéaux (à gauche, à droite) de R_S sont bilatères. Enfin, il existe un élément $a, a \in R_S$, tel que $R_S a^n = a^n R_S = \mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}}^n$, $n = 1, 2, \dots$

Démonstration. — D'après la proposition III.10, $\bar{R}_S = R_S / \mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}}^2$ est un anneau à idéaux (à gauche, à droite) tous principaux, et $\mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}} / \mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}}^2 = \bar{R}_S \bar{a}$, $\bar{a} \in \bar{R}_S$. On a donc $R_S a + \mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}}^2 = \mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}}$ et, d'après le lemme de Nakayama $\mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}} = R_S a$. Soit I un idéal à gauche propre non nul de R_S , I contient $\mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}}^n$ pour un certain n , puisque, pour $i \in I$, $i \neq 0$, $R_S i$ est $\mathfrak{X}_{\mathfrak{Q}}$ -primaire (théo-

rème 0 et proposition III.9). On a donc $I/\mathfrak{A}^{n+1} = \tilde{R}_S \tilde{a}'$ en posant $\tilde{R}_S = R_S/\mathfrak{A}^{n+1}$, a' désignant un élément convenable de I . On peut écrire successivement

$$I = R_S a' + \mathfrak{A}^{n+1} = R_S a' + \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^n \subseteq R_S a' + \mathfrak{A} I \subseteq I,$$

donc $I = R_S a' + \mathfrak{A} I$, et, d'après le lemme de Nakayama, $I = R_S a'$. Mais a' , appartenant à \mathfrak{A} , s'écrit $a_1 a = a'$, et il est facile alors de prouver que $I = R_S a'$ pour un entier naturel r . En particulier, on a $\mathfrak{A}^r = R_S a'' \subseteq \mathfrak{A}^r$; si l'on avait $p > r$, on en déduirait $\mathfrak{A}^r = \mathfrak{A}^p$, mais cela entraînerait $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathfrak{A}^i \neq 0$ contrairement au lemme III.11. On a donc $p \leq r$, et ceci entraîne $p = r$ (raisonnement par récurrence sur p , pour $p = 1$, on a évidemment $r = 1$). Le théorème s'en déduit alors facilement.

III.13. THÉORÈME. — *Tout idéal (à gauche, à droite) de R est bilatère.*

Démonstration. — Considérons un idéal à gauche X , \mathfrak{A} -primaire, \mathfrak{A} premier minimal non nul. D'après le lemme III.9 bis, $X = R_S X \cap R$. D'après le théorème III.12, $R_S X$ est un idéal bilatère de R_S , donc X est

un idéal de R . Soit alors $Ra = \bigcap_{i=1}^n X_i$, $a \in R$, $a \neq 0$, une représentation de Ra comme intersection d'idéaux à gauche \mathfrak{A}_i -primaires, \mathfrak{A}_i premier minimal, $i = 1, \dots, n$ (théorème 0). Chaque X_i est bilatère et, par suite, Ra est bilatère. On démontrerait de même que aR est bilatère, et par suite, tout idéal d'un côté de R est bilatère.

III.14. THÉORÈME. — *Soit R un ordre maximal régulier, noethérien, sans diviseurs de zéro (ordre maximal de son corps des fractions K). Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Tout idéal d'un côté (à gauche, à droite) est bilatère.*
- (2) *Tout idéal d'un côté \mathfrak{A} -primaire, \mathfrak{A} premier minimal non nul, est contenu dans \mathfrak{A} .*
- (3) *Pour tout idéal premier minimal \mathfrak{A} de R , soit $S = R - \mathfrak{A}$. Pour tout s appartenant à S , il existe s' et s'' appartenant à S , tels que $Rs \supseteq s'R$ et $sR \supseteq Rs''$.*
- (4) *Tout idéal à gauche principal (resp. à droite principal) est contenu dans chacun des idéaux premiers qui lui sont associés.*

Démonstration.

(1) \Rightarrow (2) : si X est un idéal à gauche par exemple, \mathfrak{A} -primaire, \mathfrak{A} premier minimal non nul, on a $X \cdot R \subseteq \mathfrak{A}$. En particulier, si X est bilatère, on a $X \cdot R = X$, et X est compris dans \mathfrak{A} .

(2) \Rightarrow (3) : voir le théorème III.2.

(3) \Rightarrow (1) : les résultats obtenus après le théorème III.2 sont valables sous la condition (3), remplaçant (2).

(2) \Rightarrow (4) : immédiat par application du théorème 0.

(4) \Rightarrow (1) : le théorème III.2 et toute la suite sont valables sous l'hypothèse (4), remplaçant (2).

III.15. *Exemple d'ordres maximaux réguliers, noethériens, sans diviseurs de zéro, à idéaux (à gauche, à droite) tous bilatères, non commutatifs :*

Soit \mathcal{O} un domaine d'intégrité, local régulier complet de dimension 1, et soit L son corps des fractions. Soit Δ un corps gauche, algèbre centrale simple de rang fini sur L . Si Λ est un ordre maximal de Δ (au sens de [3]), alors Λ est sans diviseurs de zéro, noethérien, à idéaux (à gauche, à droite) tous bilatères ([3], corollaire, p. 14, et th. 3.11, p. 13, et DEURING [6], th. 12, p. 100).

IV

Le but de cette partie est d'examiner si la caractérisation de MORI-YOSIDA ([21], [26]), des domaines d'intégrité, noethérien, intégralement clos (appelée caractérisation (C) en [15]) s'étend au cas non commutatif.

Rappelons cette caractérisation :

Soit R' un domaine d'intégrité, noethérien. Pour que R' soit intégralement clos dans son corps des fractions, il faut et il suffit que, pour tout idéal principal non nul $R'a$, et pour tout idéal premier \mathfrak{P} , associé à $R'a$, il n'y ait pas d'idéaux \mathfrak{P} -primaires entre \mathfrak{P} et $\mathfrak{P}^{(2)}$.

Dans la suite, R désigne un anneau non nécessairement commutatif, noethérien, sans diviseurs de zéro, dont le corps des fractions est noté K . Soit \mathfrak{P} un idéal premier de R , on note $\mathfrak{P}^{(n)}$ la n -ième puissance symbolique de \mathfrak{P} , introduite par GOLDIE [8].

IV.1. LEMME. — *Si R est de plus un ordre maximal régulier de K , et si \mathfrak{P} désigne un idéal premier non nul minimal de R , on a $\bigcap_1^\infty \mathfrak{P}^{(n)} = \mathfrak{o}$, et $\mathfrak{P}^{(n)}$ est le plus grand idéal de la classe de \mathfrak{P}^n modulo l'équivalence d'Artin \mathcal{R} .*

Démonstration. — Soit $\mathcal{C} = \{c \in R \mid cx \in \mathfrak{P}, x \in R \Rightarrow x \in \mathfrak{P}\}$. Soient \mathcal{F} la famille des idéaux à droite F de R tels que, $\forall a \in R, F \cdot a \not\subset \mathcal{C}$, et \mathcal{G} la famille des idéaux à gauche G de R tels que, $\forall a \in R, G \cdot a \not\subset \mathcal{C}$. On sait, d'après GOLDIE ([8], prop. 3.3) qu'il existe $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{G}$ tels que

$G\mathfrak{Q}^{(n)}F \subseteq \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}^{(n-1)}$. Si l'on désigne par G' et F' les idéaux (bilatères) engendrés par G et F respectivement, on a, $\mathfrak{Q}^{(n)}$ étant bilatère,

$$G'\mathfrak{Q}^{(n)}F' = G\mathfrak{Q}^{(n)}F \subseteq \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}^{(n-1)};$$

supposons $\mathfrak{Q}^{(n-1)} = \mathfrak{Q}^{(n)}$. Passons aux classes modulo \mathcal{R} . Désignons par $\overline{G'}$, ... le plus grand idéal de la classe de G' , ... Notons $\overline{G'G''} = \overline{G'} \cdot \overline{G''}$, G'' désignant un idéal de R . Il vient

$$\overline{G' \cdot \mathfrak{Q}^{(n)}} \cdot \overline{F'} \subseteq \overline{\mathfrak{Q}} \cdot \overline{\mathfrak{Q}^{(n-1)}} = \overline{\mathfrak{Q}} \cdot \overline{\mathfrak{Q}^{(n)}}.$$

On peut simplifier par $\overline{\mathfrak{Q}^{(n)}}$ puisque l'on est dans un groupe commutatif, et l'on peut écrire :

$$G'F' \subseteq \overline{G'F'} = \overline{G'} \cdot \overline{F'} \subseteq \overline{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{Q},$$

car \mathfrak{Q} est maximum dans sa classe. Or G' et F' contiennent des éléments c et c' appartenant à \mathcal{C} , donc $cRc' \subseteq \mathfrak{Q}$ avec c et c' n'appartenant pas à \mathfrak{Q} . On tombe sur une contradiction. On ne peut donc avoir $\mathfrak{Q}^{(n)} = \mathfrak{Q}^{(n')}$ avec $n \neq n'$. On sait, d'après GOLDIE ([8], th. 4.3) que $\mathfrak{Q}^{(n)}$ est \mathfrak{Q} -primaire des deux côtés, $n = 1, 2, \dots$. Les idéaux $\mathfrak{Q}^{(k)}$ sont donc les plus grands idéaux de leur classe $\overline{\mathfrak{Q}^{(k)}}$ modulo \mathcal{R} , $k = 1, 2, \dots$. Les classes $\overline{\mathfrak{Q}^{(k)}}$, $k = 1, 2, \dots$ sont des éléments $\overline{\mathfrak{Q}}$ -primaires contenant $\overline{\mathfrak{Q}^n}$ (cf. [15], th. II.6, p. 94, et lemme II.1) : ce sont des classes parmi les $\overline{\mathfrak{Q}^k}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Comme les classes $\overline{\mathfrak{Q}^{(k)}}$, $k = 1, \dots, n$, sont distinctes, on a l'égalité $\overline{\mathfrak{Q}^{(k)}} = \overline{\mathfrak{Q}^k}$, et $\mathfrak{Q}^{(k)}$ est élément maximum de la classe $\overline{\mathfrak{Q}^k} = \overline{\mathfrak{Q}^k}$, $k = 1, \dots, n$.

On montre alors en remplaçant \mathfrak{Q}^n par $\mathfrak{Q}^{(n)}$, comme au lemme III.11, que l'on a $\bigcap_1^\infty \mathfrak{Q}^{(n)} = 0$.

IV.2. THÉORÈME. — *Pour tout idéal premier \mathfrak{Q} , associé à Ra ou à aR , $a \neq 0$, $a \in R$, il n'y a pas d'idéal \mathfrak{Q} -primaire strictement compris entre $\mathfrak{Q}^{(2)}$ et \mathfrak{Q} . De façon générale, les seuls idéaux \mathfrak{Q} -primaires entre \mathfrak{Q}^n et \mathfrak{Q} sont $\mathfrak{Q}^{(n)}$, $\mathfrak{Q}^{(n-1)}$, ..., \mathfrak{Q} . On a $\bigcap_1^\infty \mathfrak{Q}^{(n)} = 0$.*

Démonstration. — Rappelons que les idéaux \mathfrak{Q} -primaires sont maximaux dans leur classe modulo \mathcal{R} , et celles-ci sont distinctes de la classe de R , car \mathfrak{Q} est premier minimal (théorème 0). La classe d'un idéal \mathfrak{Q} -primaire contenant \mathfrak{Q}^n est donc de la forme $\overline{\mathfrak{Q}^k}$ pour un k , $1 \leq k \leq n$. Un idéal \mathfrak{Q} -primaire contenant \mathfrak{Q}^n est donc élément maximal de la classe $\overline{\mathfrak{Q}^k}$ pour un certain k , $1 \leq k \leq n$; c'est donc $\mathfrak{Q}^{(k)}$ (lemme IV.1).

IV.3. — Nous ne savons pas actuellement si la réciproque du théorème précédent est vraie en général. Le but de ce qui suit est d'établir cette réciproque en supposant de plus que R est un anneau à idéaux (à droite, à gauche) tous bilatères; de façon précise, nous établirons ce qui suit : Si R est un anneau unitaire noethérien, sans diviseurs de zéro, dont tous les idéaux (à gauche, à droite) sont bilatères, si, pour tout idéal principal Ra , $a \neq 0$, $a \in R$, et si, pour tout idéal premier associé à Ra , \mathfrak{A} , il n'y a pas d'idéaux \mathfrak{A} -primaires entre \mathfrak{A} et $\mathfrak{A}^{(2)}$, et si l'on a $\bigcap_1^\infty \mathfrak{A}^{(n)} = 0$, R est un ordre maximal régulier de son corps des fractions K .

Dans toute la suite, R , outre les hypothèses précisées au début de la partie IV, est un anneau à idéaux (à droite, à gauche) tous bilatères.

Dans tout ce qui suit, \mathfrak{A} désigne un idéal premier de R tel que $\bigcap_1^\infty \mathfrak{A}^{(n)} = 0$.

IV.4. LEMME. — Avec les hypothèses pour R et \mathfrak{A} précisées en IV.3, on peut écrire, en posant $S = R - \mathfrak{A}$:

$$\forall a \in R, \quad \forall s \in S, \quad \exists s_2 \in S, \quad \exists s_1 \in S, \quad \text{avec } as = s_2a \text{ et } sa = as_1.$$

Démonstration. — A cause de l'égalité $Ra = aR$, on a toujours $sa = as_1$, $s_1 \in R$. Il faut démontrer que s_1 appartient à S . Si a appartient à S , as_1 appartient à S , donc aussi s_1 . Soit a appartenant à \mathfrak{A} , si a est nul, on peut prendre $s_1 = 1$, si a est non nul, il existe n tel que a appartient à $\mathfrak{A}^{(n)}$ et tel que a n'appartient pas à $\mathfrak{A}^{(n+1)}$ (sans quoi a appartiendrait à $\bigcap_1^\infty \mathfrak{A}^{(n)}$ et serait nul). Supposons $s_1 \in \mathfrak{A}$, alors sa appartiendrait à $\mathfrak{A}^{(n)}\mathfrak{A}$, donc a appartiendrait à $\mathfrak{A}^{(n+1)}$, contrairement à l'hypothèse [on remarquera que dans le cas particulier envisagé ici, la définition de $\mathfrak{A}^{(n)}$ s'obtient ainsi par récurrence : $\mathfrak{A}^{(1)} = \mathfrak{A}$; si $\mathfrak{A}^{(n-1)}$ est défini, on a

$$\mathfrak{A}^{(n)} = \{ x \in R, \exists s \in S, \exists s' \in S,$$

tels que $sxs' \in \mathfrak{A}^{(n-1)}\mathfrak{A}$ (ou $sxs' \in \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}^{(n-1)}$)].

IV.5. LEMME. — R_S a tous ses idéaux à gauche et tous ses idéaux à droite bilatères (R_S désigne l'anneau de fractions de R selon S).

Démonstration. — R ayant tous ses idéaux (à gauche, à droite) bilatères, il est immédiat que l'anneau de fractions de R selon S existe. Notons-le R_S . Soit $x \in R_S$, il faut démontrer $R_S x = x R_S$. Posons $x = as^{-1}$, $s \in S$, $a \in R$, donc

$$\begin{aligned} xR_S &= as^{-1}R_S = aR_S = \{ aR\tau^{-1}, \tau \in S \} \\ &= \{ Ra\tau^{-1}, \tau \in S \} = \{ R\tau'^{-1}a, \tau' \in S \}, \end{aligned}$$

en posant $a\tau = \tau'a$ (lemme IV.4), et $xR_S = aR_S = R_Sa = R_Sx$.

IV.6. LEMME. — Soit R' un sous-anneau de K , corps des fractions de R , contenant R ; on a $R'_S = {}_S R'$.

Démonstration. — Posons

$$R'_S = \{x \in K \mid \exists s \in S, sRx \subseteq R'\} \quad \text{et} \quad {}_S R' = \{x \in K \mid \exists s \in S, xRs \subseteq R'\}.$$

Comme $R_S = {}_S R$, on a

$$R'_S = \{x \in K \mid \exists s \in S, sx \in R'\} \quad \text{et} \quad {}_S R' = \{x \in K \mid \exists s \in S, xs \in R'\}.$$

Soit $a, b, \in R$, $b \neq 0$ et $ab^{-1} \in K$; d'après le lemme IV.4, s étant donné dans S , on peut trouver s' et s'' dans S tels que $sa = as'$ et $bs' = s''b$. On a donc $sab^{-1} = as'b^{-1} = ab^{-1}s''$, et $sab^{-1} \in R'$ équivaut à $ab^{-1}s'' \in R'$, d'où $R'_S = {}_S R'$.

IV.7. LEMME. — Un idéal \mathfrak{Q} de R est \mathfrak{X} -primaire à gauche si et seulement si :

- (H1) il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{X}^n \subseteq \mathfrak{Q}$;
- (H2) $x\alpha \subseteq \mathfrak{Q}$ et $x \notin \mathfrak{Q}$ entraîne $a \in \mathfrak{X}$.

Démonstration. — On sait que \mathfrak{Q} est \mathfrak{X} -primaire à gauche [12] si :

- 1° il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{X}^n \subseteq \mathfrak{Q}$;
- 2° $X\alpha \subseteq \mathfrak{Q}$, $X \not\subseteq \mathfrak{Q}$ entraîne $\alpha \subseteq \mathfrak{X}$, X et α désignant des idéaux de R .

Si la condition (H2) est vérifiée, $X\alpha \subseteq \mathfrak{Q}$, $X \not\subseteq \mathfrak{Q}$, entraîne l'existence de $x \in X$, $x \notin \mathfrak{Q}$ tel que l'on ait, $\forall a \in \alpha$, $xa \in \mathfrak{Q}$, donc $a \in \mathfrak{X}$ et $\alpha \subseteq \mathfrak{X}$: \mathfrak{Q} est donc \mathfrak{X} -primaire à gauche. Réciproquement, si \mathfrak{Q} est \mathfrak{X} -primaire à gauche, soit $x \notin \mathfrak{Q}$ et $xa \in \mathfrak{Q}$ alors on a $RxaR \subseteq \mathfrak{Q}$, $(Rx)(aR) \subseteq \mathfrak{Q}$ avec $Rx \not\subseteq \mathfrak{Q}$, donc $aR \subseteq \mathfrak{X}$ et $a \in \mathfrak{X}$.

IV.8. LEMME. — L'intersection d'un idéal premier (respectivement primaire à gauche) de R_S avec R est un idéal premier (respectivement primaire à gauche) de R .

Démonstration. — Soit \mathfrak{Q}' un idéal \mathfrak{X}' -primaire de R_S , \mathfrak{X}' idéal premier de R_S . Soit $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}' \cap R$; \mathfrak{X}_1 est premier, car $ab \in \mathfrak{X}_1$, $a \in R$, $b \in R$, entraîne $ab \in \mathfrak{X}'$, donc a ou $b \in \mathfrak{X}'$, donc a ou $b \in \mathfrak{X}_1$. Soit $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}' \cap R$. Considérons $a, b \in R$, et $ab \in \mathfrak{Q}_1$, $a \notin \mathfrak{Q}_1$; on déduit $ab \in \mathfrak{Q}'$, $a \notin \mathfrak{Q}'$, donc $b \in \mathfrak{X}'$, donc $b \in \mathfrak{X}_1$. Par ailleurs, $\mathfrak{X}'^n \subseteq \mathfrak{Q}'$ entraîne

$$\mathfrak{X}'^n \cap R \subseteq \mathfrak{Q}_1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{X}_1^n = (\mathfrak{X}' \cap R)^n \subseteq \mathfrak{X}'^n \cap R \subseteq \mathfrak{Q}_1.$$

D'après le lemme IV.7, \mathfrak{Q}_1 est \mathfrak{X}_1 -primaire à gauche.

IV.9. LEMME. — Soit $\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}} = R_S \mathfrak{r} = \mathfrak{r} R_S$. L'idéal $\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}}$ est le plus grand idéal de R_S , et tout idéal contenant $(\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^2$ est $\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}}$ -primaire à gauche.

Démonstration. — L'ensemble des éléments de la forme $s^{-1}p$, $p \in \mathfrak{r}$, $s \in S$, forme un idéal de R_S . Tout élément de R_S non contenu dans cet idéal est de la forme $s^{-1}s'$, $s \in S$, $s' \in S$, donc est inversible dans R_S . Ainsi, tout idéal propre de R_S est contenu dans cet idéal, égal d'ailleurs à $R_S \mathfrak{r} = \mathfrak{r} R_S$. Remarquons que R_S est noethérien (car tout idéal I de R_S s'écrit $R_S I'$ avec $I' = I \cap R$). Soit I un idéal contenant $(\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^2$, et soit \mathfrak{a} un idéal premier associé à I . On a $(\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^2 \subseteq I \subseteq \mathfrak{a}$ (I est bilatère), donc $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{r}}$. Le seul idéal premier associé à I est $\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}}$. Par ailleurs, $\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}}$ est le seul résiduel à gauche propre premier de I [12], car $I \cdot Y = \mathfrak{a}$ avec $Y \notin I$ entraîne $\mathfrak{a} Y \subseteq I$, et I étant bilatère $\mathfrak{a} \supseteq I \supseteq (\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^2$, donc $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{r}}$, et $\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}}$ est idéal premier minimum contenant I de sorte que I est $\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}}$ -primaire ([12], th. 5.1).

IV.10. PROPOSITION. — Soit R un anneau vérifiant les conditions du début de ce paragraphe [noethérien, unitaire, sans diviseurs de zéro, dont tous les idéaux (à gauche, à droite) sont bilatères]. Soit \mathfrak{r} un idéal premier de R tel que $\bigcap_1^{\infty} \mathfrak{r}^{(n)} = \mathfrak{o}$ et tel qu'il n'y ait pas d'idéaux \mathfrak{r} -primaires entre \mathfrak{r} et $\mathfrak{r}^{(2)}$. Soit $S = R - \mathfrak{r}$. Pour $n = 1, 2, \dots$, on peut trouver un élément a de R indépendant de n , tel que $(\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^n = R_S a^n = a^n R_S$, et \mathfrak{r} est un idéal premier non nul minimal de R . Les idéaux propres de R_S sont $(\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^n$, $n = 1, 2, \dots$

Démonstration. — On a $(\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^2 \neq \mathfrak{r}_{\mathfrak{r}}$, sinon on aurait

$$\bigcap_1^{\infty} (\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^n \neq \mathfrak{o}, \quad \text{d'où} \quad \bigcap_1^{\infty} (\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^n \cap R \neq \mathfrak{o}.$$

Or on a, d'après GOLDIE [8], $(\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^n \cap R = \mathfrak{r}^{(n)}$, l'anneau local associé par GOLDIE à \mathfrak{r} étant ici R_S . On aurait donc $\bigcap_1^{\infty} \mathfrak{r}^{(n)} \neq \mathfrak{o}$, contrairement à l'hypothèse. Soit alors $a \in \mathfrak{r}_{\mathfrak{r}}$ et $a \notin (\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^2$ et $I = (\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^2 + R_S a$; I est $\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}}$ -primaire à gauche (lemme IV.9). D'après le lemme IV.8, $I \cap R$ est \mathfrak{r} -primaire à gauche, contenant $(\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^2 \cap R = \mathfrak{r}^{(2)}$; on a donc, soit $I \cap R = \mathfrak{r}$, soit $I \cap R = \mathfrak{r}^{(2)}$, et $I = R_S \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{r}}$ ou $I = R_S \mathfrak{r}^{(2)} = (\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^2$ [8]. Mais ceci entraîne $I = \mathfrak{r}_{\mathfrak{r}}$, car $a \notin (\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^2$. Ainsi on a $\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}} = (\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^2 + R_S a$, d'où l'on déduit, d'après le lemme de Nakayama (cas non commutatif), $\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}} = R_S a$, et de même $\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}} = a R_S$, et, pour

$$n = 1, 2, \dots, (\mathfrak{r}_{\mathfrak{r}})^n = a^n R_S = R_S a^n.$$

Tout idéal de R_S est un $(\mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}})^n$, $n = 1, 2, \dots$. En effet, soit I un idéal de R_S engendré par a_i , $i = 1, \dots, r$; on a $a_i = \alpha_i a^{r_i}$, $\alpha_i \notin \mathfrak{A}_{\mathfrak{Q}}$. Soit $r_1 = \inf(r_1, \dots, r_n)$, on a

$$I = (R_S \alpha_1 + R_S \alpha_2 a^{r_2-r_1} + \dots + R_S \alpha_n a^{r_n-r_1}) a^{r_1},$$

et α_1 est inversible dans R_S , donc $I = R_S a^{r_1}$; R_S ne contient qu'un seul idéal premier non nul; soit $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{A}$ un idéal premier non nul de R , $\mathfrak{Q} R_S = R_S \mathfrak{Q}$ serait premier dans R_S [tout élément de $\mathfrak{Q} R_S$ s'écrit $q s^{-1}$, $q \in \mathfrak{Q}$, $s \in S$. Alors $a s^{-1} b s'^{-1} \in \mathfrak{Q} R_S$ et $a \notin \mathfrak{Q}$, $b \notin \mathfrak{Q}$ entraînent $a s^{-1} b \in \mathfrak{Q} R_S$, et, si l'on a $s^{-1} b = b \tau^{-1}$, $\tau \in S$, on peut écrire $ab \in \mathfrak{Q} R_S \cap R$,

$$ab = q_1 s_1^{-1} = r \in R, \quad q_1 = r s_1 \in \mathfrak{Q}, \quad s_1 \in S,$$

donc $r \in \mathfrak{Q}$ et $ab \in \mathfrak{Q}$, $a \notin \mathfrak{Q}$, $b \notin \mathfrak{Q}$ contrairement à l'hypothèse \mathfrak{Q} premier]. Dès lors, $\mathfrak{Q} R_S = \mathfrak{A} R_S$, et ceci entraîne $\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}$.

IV.11. PROPOSITION. — Avec les hypothèses de la proposition précédente, R_S est un ordre maximal du corps des fractions K de R .

Démonstration. — Cela résulte d'un résultat d'ASANO ([1], th. 2.9), compte tenu que tout R_S -idéal est inversible. Démontrons ce dernier point. Soit T un R_S -idéal, il existe $\lambda \in R_S$ tel que $\lambda T \subseteq R_S$, λT est visiblement un idéal à droite de R_S , donc bilatère (lemme IV.5), donc

$$\lambda T = R_S x = x R_S, \quad x \in R, \quad x \neq 0 \quad (\text{prop. IV.10}).$$

On a donc $T = \lambda^{-1} x R_S$; posons $T^* = R_S x^{-1} \lambda$; il est facile de vérifier que T^* est un R_S -idéal, et on a

$$T^* T = (R_S x^{-1} \lambda) (\lambda^{-1} x R_S) = R_S$$

et

$$T T^* = (\lambda^{-1} x R_S) (R_S x^{-1} \lambda) = \lambda^{-1} x R_S x^{-1} \lambda = \lambda^{-1} R_S \lambda = R_S.$$

L'ordre R_S de K est par ailleurs régulier puisqu'il a tous ses idéaux (à gauche, à droite) bilatères.

IV.12. THÉORÈME. — Soit R un anneau, noethérien, unitaire, sans diviseurs de zéro, dont le corps des fractions est noté K , et dont tous les idéaux (à gauche, à droite) sont bilatères. Une condition nécessaire et suffisante pour que R soit un ordre maximal de K est que, pour tout idéal principal Ra , $a \neq 0$, $a \in R$ et pour tout idéal premier \mathfrak{A} associé à Ra , il n'y ait pas d'idéaux \mathfrak{A} -primaires strictement compris entre \mathfrak{A} et $\mathfrak{A}^{(2)}$, et que l'on

ait $\bigcap_1^{\infty} \mathfrak{A}^{(n)} = 0$.

Démonstration. — La condition énoncée est bien *nécessaire* d'après le théorème IV.2. Démontrons qu'elle est *suffisante*. Soit \mathfrak{A} un idéal premier associé à Ra , $a \in R$, $a \neq 0$. D'après les propositions IV.10 et IV.11, pour $S = R - \mathfrak{A}$, R_S est un ordre maximal de K , et \mathfrak{A} est un idéal premier

minimal. Soit $Ra = \bigcap_{i=1}^n X_i$ une décomposition en idéaux tertiaires [12],

X_i étant \mathfrak{A}_i -tertiaire, $i = 1, \dots, n$. Démontrons que X_i est \mathfrak{A}_i -primaire, $i = 1, \dots, n$. D'abord \mathfrak{A}_i est premier non nul minimal, et $R_{\mathfrak{A}_i}$ est un ordre maximal dont tous les idéaux sont primaires, en particulier, $(X_i)_{\mathfrak{A}_i}$ est primaire, donc aussi $(X_i)_{\mathfrak{A}_i} \cap R$ (lemme IV.8). Il suffit de prouver alors que $(X_i)_{\mathfrak{A}_i} \cap R = X_i$. Soit $x \in (X_i)_{\mathfrak{A}_i} \cap R$, il existe $s \notin \mathfrak{A}_i$ tel que $sRx \subseteq X_i$ et, X_i étant \mathfrak{A}_i -tertiaire, on a $x \in X_i$ ([13], définition 2.1). Ainsi tout idéal principal non nul est intersection d'idéaux \mathfrak{A}_i -primaires, $i = 1, \dots, n$, dont les radicaux \mathfrak{A}_i sont des idéaux premiers non nuls minimaux (condition (C_2) du théorème (II.9), p. 98 de ma thèse [15]). Par ailleurs, tout idéal premier minimal \mathfrak{A} de R est idéal premier associé à Ra , pour $a \in \mathfrak{A}$,

$a \neq 0$. En effet, de $Ra = \bigcap_{i=1}^n X_i$, X_i étant \mathfrak{A}_i -primaire, $i = 1, \dots, n$,

on déduit $\prod_{i=1}^n \mathfrak{A}_i^{r_i} \subseteq Ra \subseteq \mathfrak{A}$, donc $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ pour un i , $1 \leq i \leq n$: Donc,

pour tout \mathfrak{A} premier minimal, $S = R - \mathfrak{A}$, R_S est un ordre maximal de K (condition (C_3) du théorème (II.9) de ma thèse [15]). Enfin, pour tout ordre R' dans K contenant R , et pour $S = R - \mathfrak{A}$, \mathfrak{A} premier minimal, on a $R'_S = {}_S R' = R'_S = {}_S R'$ avec les notations du lemme IV.6 et en utilisant ce lemme (condition (C_1) du théorème (II.9) de ma thèse [15]). D'après le théorème (II.9) de ma thèse [15], on peut affirmer que R est un ordre maximal de K .

Les principaux résultats des parties II, III et IV ont été résumés dans une Note aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris [18].

V

Dans toute cette partie, \mathfrak{O} désignera un anneau noethérien sans diviseurs de zéro, ordre maximal régulier de son corps des fractions K . Soit \mathfrak{A} un idéal premier minimal non nul de \mathfrak{O} . On posera $S = \mathfrak{O} - \mathfrak{A}$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(\mathfrak{A}) &= \{ c \in S, \text{ tel que } cx \in \mathfrak{A} \text{ et } x \in \mathfrak{O} \Rightarrow x \in \mathfrak{A} \} \\ &= \{ c \in S, \text{ tel que } zc \in \mathfrak{A} \text{ et } z \in \mathfrak{O} \Rightarrow z \in \mathfrak{A} \} \text{ (cf. [8] au bas de la page 91),} \\ \mathfrak{C}'(\mathfrak{A}) &= \{ c \in S, \text{ tel que } c^{-1} \in \mathfrak{O}_{\mathfrak{A}} = {}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{O} \}. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que « $c \in \mathfrak{C}'(\mathfrak{A})$ » équivaut à chacune des deux assertions suivantes : « il existe $s \in S$ tel que $s\mathfrak{O} \subseteq c\mathfrak{O}$ » ou « il existe $s' \in S$ tel que $\mathfrak{O}s' \subseteq c\mathfrak{O}$ ».

Il est facile de vérifier que l'on a toujours $\mathcal{C}'(\mathfrak{X}) \subseteq \mathcal{C}(\mathfrak{X})$.

Lorsque \mathcal{O} a tous ses idéaux premiers non nuls maximaux (en tant qu'idéaux bilatères), nous dirons, comme G. O. MICHLER [20], que \mathcal{O} est un ordre d'Asano.

V.1. PROPOSITION. — $\mathcal{C}'(\mathfrak{X})$ est l'ensemble des éléments $c, c \in S$, tels que $\mathcal{O}c$ n'admet pas \mathfrak{X} comme idéal premier associé. C'est aussi l'ensemble des éléments $c, c \in S$ tels que $c\mathcal{O}$ n'admet pas \mathfrak{X} comme idéal premier associé. Si, pour tout \mathfrak{X} idéal premier minimal non nul de \mathcal{O} on a $S = \mathcal{C}'(\mathfrak{X})$, alors \mathcal{O} a tous ses idéaux à gauche et tous ses idéaux à droite bilatères.

Démonstration. — Soit $X = \mathcal{O}c$ pour un élément c non nul et non inversible de \mathcal{O} . Posons $\mathfrak{A} = X \cdot \mathcal{O} = \{x \in X \mid x\mathcal{O} \subseteq X\}$; \mathfrak{A} est le plus grand idéal bilatère contenu dans X (il n'est pas nul, car X est régulier). Comme X est maximum dans sa classe modulo l'équivalence d'Artin, il en est de même de \mathfrak{A} . Soient donc $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_r$ les idéaux premiers associés à $\mathcal{O}c = X$; on a, p_i désignant des entiers naturels convenables, $i = 1, \dots, n$:

$$\prod_{i=1}^{i=n} \mathfrak{X}_i^{p_i} \subseteq X \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{i=n} \mathfrak{X}_i^{p_i} \subseteq \mathfrak{A}.$$

Ainsi, si \mathfrak{X} est un idéal premier associé à \mathfrak{A} , il contient \mathfrak{A} , car \mathfrak{A} est bilatère, et l'on a, pour un certain i , $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i$ puisque \mathfrak{X} est minimal non nul. Réciproquement, si \mathfrak{X}_i est un idéal premier associé à X , donc minimal non nul (III.1), on a

$$X = \mathcal{O}c = \bigcap_{i=1}^{i=n} X_i, \quad X_i \mathfrak{X}_i\text{-primaire}, \quad i = 1, \dots, n,$$

et

$$\mathfrak{X}_i \supseteq X_i \cdot \mathcal{O} \supseteq X \cdot \mathcal{O} = \mathfrak{A} \quad ([12], \text{th. 5.1}).$$

Si $\mathfrak{X}'_1, \dots, \mathfrak{X}'_r$ sont les idéaux premiers associés à \mathfrak{A} , on a

$$\mathfrak{X}_i \supseteq \mathfrak{A} \supseteq \prod_{j=1}^{j=r} \mathfrak{X}'_j^{p'_j}$$

pour des entiers p'_j convenables, $j = 1, \dots, r$. On en déduit $\mathfrak{X}_i = \mathfrak{X}'_j$ pour un certain $j, j = 1, \dots, r$. Il résulte de là que \mathfrak{A} et X ont les mêmes idéaux premiers associés.

Supposons que, pour $c \in S$, il existe $s \in S$ tel que $s\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}c$. Alors on a $\mathfrak{A} \supseteq \mathcal{O}s\mathcal{O}$ et $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{X}$. Ceci prouve que \mathfrak{X} n'est pas idéal premier associé à \mathfrak{A} , donc à $\mathcal{O}c$. Réciproquement, si l'on a $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{X}$, il existe $s, s \in S$, tel que $s\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{O}c$, et, comme « $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{X}$ » est équivalent à « \mathfrak{X} n'est pas idéal premier associé à \mathfrak{A} , donc à $\mathcal{O}c$ », on a le résultat annoncé.

Supposons pour terminer que l'on ait $S = \mathcal{C}'(\mathfrak{X})$ pour tout idéal premier non nul minimal \mathfrak{X} de \mathcal{O} avec $S = \mathcal{O} - \mathfrak{X}$. Pour tout $s, s' \in S$, il existe s', s'' appartenant à S tels que $s'\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}s$ et $\mathcal{O}s'' \subseteq s\mathcal{O}$. On en déduit la dernière assertion de l'énoncé par application du théorème III.14.

Dans la suite de ce paragraphe, nous supposons que \mathcal{O} vérifie la condition (H) suivante :

Condition (H) : *Pour tout idéal premier non nul \mathfrak{X} de \mathcal{O} , $\mathfrak{X}' \cap \mathcal{C}'(\mathfrak{X})$ est non vide pour tout idéal premier minimal \mathfrak{X}' distinct de \mathfrak{X} .*

La condition (H) est vérifiée par deux classes importantes d'ordres maximaux introduites dans la littérature :

(a) Si \mathcal{O} est un ordre d'Asano, pour tout idéal \mathfrak{X} premier non nul minimal de \mathcal{O} , on a $\mathcal{C}'(\mathfrak{X}) = \mathcal{C}(\mathfrak{X})$. Cela résulte du théorème (2.14) de MICHLER [20] suivant lequel $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ est un anneau de fractions classique des deux côtés de \mathcal{O} selon $\mathcal{C}(\mathfrak{X})$. Soit alors \mathfrak{X}' un idéal premier non nul minimal, non nul distinct de \mathfrak{X} ; de $\mathfrak{X}' + \mathfrak{X} = \mathcal{O}$ résulte que

$$\mathfrak{X}' \cap \mathcal{C}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}' \cap \mathcal{C}'(\mathfrak{X})$$

est non vide.

(b) Soit R un domaine d'intégrité noethérien intégralement clos, et soit K son corps des fractions. Soit Σ une K -algèbre centrale simple de dimension finie sur K ; supposons que Σ est un corps gauche. Un R -ordre Λ de Σ est un sous-anneau de Σ contenant R qui est de type fini en tant que R -module et telle que $K\Lambda = \Sigma$. Un R -ordre de Σ , qui n'est contenu dans aucun R -ordre différent de Σ , est dit *maximal*; c'est alors un ordre maximal de Σ au sens d'ASANO, c'est-à-dire au sens où nous l'entendons dans cet article. Alors un R -ordre maximal Λ vérifie toutes nos hypothèses : c'est un ordre maximal noethérien, sans diviseurs de zéro, de son corps des fractions Σ , et on peut démontrer qu'il est régulier. Or RILEY [19] a démontré que si \mathfrak{X} est un idéal premier minimal non nul de Λ , $\mathfrak{X} \cap R = \bar{\mathfrak{X}}$ est un idéal premier minimal de R non nul, et que si \mathfrak{X}' idéal premier non nul minimal de Λ est distinct de \mathfrak{X} , on a $\bar{\mathfrak{X}} \neq \bar{\mathfrak{X}}'$; par suite, il existe $c, c \notin \bar{\mathfrak{X}}, c \in \bar{\mathfrak{X}}'$ tel que $\Lambda c = c\Lambda$, et l'on a $c \in \mathcal{C}'(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{X}'$.

V.2. PROPOSITION. — *$\mathcal{C}'(\mathfrak{X})$ est un sous-demi-groupe de \mathcal{O} , et, lorsque \mathcal{O} vérifie la condition (H), pour tout idéal premier minimal non nul de \mathcal{O} , $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ est un anneau de fractions des deux côtés selon $\mathcal{C}'(\mathfrak{X})$. $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ est plat en tant que \mathcal{O} -module à gauche et en tant que \mathcal{O} -module à droite.*

Démonstration. — Soient c, c' appartenant à $\mathcal{C}'(\mathfrak{X})$; il existe s et s' appartenant à S tels que $s\mathcal{O}c^{-1} \subseteq \mathcal{O}$ et $s'\mathcal{O}c'^{-1} \subseteq \mathcal{O}$, donc $s\mathcal{O}(s'\mathcal{O}c'^{-1})c^{-1}$ est compris dans \mathcal{O} et, si τ appartient à $s\mathcal{O}s' \cap S$, on a $\tau\mathcal{O}(cc')^{-1} \subseteq \mathcal{O}$, ce qui prouve que cc' appartient à $\mathcal{C}'(\mathfrak{X})$. Soit maintenant $x, x \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$; il existe

$s, s \in S$ tel que $\vartheta s \vartheta x \subseteq \vartheta$, donc $\overline{\vartheta s \vartheta x} \subseteq \vartheta$. Montrons que $\overline{\vartheta s \vartheta}$ coupe $\mathcal{C}'(\mathcal{X})$. C'est évident si $\overline{\vartheta s \vartheta} = \vartheta$. Supposons $\overline{\vartheta s \vartheta} \neq \vartheta$. Il existe des idéaux premiers minimaux $\mathcal{X}_i, i = 1, \dots, r$, non nuls de ϑ , et des entiers naturels $p_i, i = 1, \dots, r$, tels que $\prod_{i=1}^r \mathcal{X}_i^{p_i} \subseteq \overline{\vartheta s \vartheta}$. Aucun des \mathcal{X}_i n'est égal à \mathcal{X} . Si l'on

prend $c_i, c_i \in \mathcal{C}'(\mathcal{X}) \cap \mathcal{X}_i, i = 1, \dots, r$, on a $c = \prod_{i=1}^{i=r} c_i^{p_i} \in \mathcal{C}'(\mathcal{P}) \cap \overline{\vartheta s \vartheta}$ et

$cx \in \vartheta$, donc $x = c^{-1} a, a \in \vartheta, c \in \mathcal{C}'(\mathcal{X})$. Ainsi $\vartheta_{\mathcal{X}}$ est un suranneau de ϑ ayant la même unité que ϑ , tous les éléments de $\mathcal{C}'(\mathcal{X})$ sont inversibles dans ϑ , et tout élément x de $\vartheta_{\mathcal{X}}$ s'écrit $c^{-1} a, c \in \mathcal{C}'(\mathcal{X}), a \in \vartheta$. Ceci prouve que $\vartheta_{\mathcal{X}}$ est un anneau de fractions à gauche de ϑ selon $\mathcal{C}'(\mathcal{X})$. Il est d'ailleurs, puisque l'on a $\vartheta_{\mathcal{X}} = \vartheta_{\mathcal{X}}$, anneau de fractions des deux côtés de ϑ selon $\mathcal{C}'(\mathcal{X})$; ϑ vérifie alors la condition de Ore des deux côtés par rapport à $\mathcal{C}'(\mathcal{X})$. La famille \mathcal{F} des idéaux à gauche de ϑ qui coupent $\mathcal{C}'(\mathcal{X})$ est topologisante et idempotente. Comme un système cofinal est constitué par les idéaux à gauche libres $\vartheta c, c \in \mathcal{C}'(\mathcal{X})$, le localisé de Gabriel $\vartheta_{\mathcal{F}}$ est un ϑ -module à gauche plat ([9], corollaire 3.7). D'après BOURBAKI ([9], p. 163, exercice 22), $\vartheta_{\mathcal{F}}$ et $\vartheta_{\mathcal{X}}$ sont des anneaux isomorphes. Ainsi $\vartheta_{\mathcal{X}}$ est plat en tant que ϑ -module à gauche (et en tant que ϑ -module à droite).

Nous désignons dans la suite par $L(\mathcal{X})$ l'anneau local associé à \mathcal{X} par GOLDIE [8], c'est-à-dire le sous-anneau de $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}^{(n)} = \mathfrak{o}$ (IV.1).

V.3. PROPOSITION. — *Sous l'hypothèse (H), une condition nécessaire pour que l'on ait $L(\mathcal{X}) = \vartheta_{\mathcal{X}}$ est que $\mathcal{X}_{\mathcal{X}}$ soit le plus grand idéal bilatère de $\vartheta_{\mathcal{X}}$.*

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire, car si l'on a $L(\mathcal{X}) = \vartheta_{\mathcal{X}}, \vartheta_{\mathcal{X}} \mathcal{X} \vartheta_{\mathcal{X}}$ est le plus grand idéal de $\vartheta_{\mathcal{X}}$ [8]. Or on a vu (I.17) que $\mathcal{X}_{\mathcal{X}} = \overline{\vartheta_{\mathcal{X}} \mathcal{X} \vartheta_{\mathcal{X}}}$ et $\overline{\vartheta_{\mathcal{X}} \mathcal{X} \vartheta_{\mathcal{X}}} \supseteq \vartheta_{\mathcal{X}} \mathcal{X} \vartheta_{\mathcal{X}}$. On a donc $\mathcal{X}_{\mathcal{X}} = \overline{\vartheta_{\mathcal{X}} \mathcal{X} \vartheta_{\mathcal{X}}}$, et $\mathcal{X}_{\mathcal{X}}$ est le plus grand idéal de $\vartheta_{\mathcal{X}}$. Réciproquement, si $\mathcal{X}_{\mathcal{X}}$ est le plus grand idéal de $\vartheta_{\mathcal{X}}$, $\vartheta_{\mathcal{X}}$ est un ordre d'Asano régulier, noethérien, dont $\mathcal{X}_{\mathcal{X}}$ est le radical de Jacobson de $\vartheta_{\mathcal{X}}$ ([20], lemme 2.9), donc un anneau quasi-local au sens de MICHLER ([10], p. 422). En appliquant le lemme (2.10) de MICHLER [20], on obtient $L(\mathcal{X}_{\mathcal{X}}) = \vartheta_{\mathcal{X}}$, en notant $L(\mathcal{X}_{\mathcal{X}})$ le localisé de Goldie de $\vartheta_{\mathcal{X}}$ selon $\mathcal{X}_{\mathcal{X}}$ [8]. On va en déduire le résultat : Soit

$$\mathcal{C}(\mathcal{X}_{\mathcal{X}}) = \{ v \in \vartheta_{\mathcal{X}} \mid \text{tel que } x \in \vartheta_{\mathcal{X}} \text{ et } vx \in \mathcal{X}_{\mathcal{X}} \Rightarrow x \in \mathcal{X}_{\mathcal{X}} \}.$$

Soit $x \in \vartheta_{\mathcal{X}}$, et $c \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ avec $cx \in \mathcal{X}_{\mathcal{X}}$. Il existe $\overline{B} \nsubseteq \mathcal{X}, \overline{B}$ idéal de ϑ maximal dans sa classe modulo l'équivalence d'Artin, tel que $c\overline{B} \subseteq \mathcal{X}_{\mathcal{X}} \cap \vartheta = \mathcal{X}_{\mathcal{X}}$.

On a $x\bar{B} \subseteq \mathfrak{A}$ et $x \in \overline{\mathfrak{A}B^{-1}} \subseteq \mathfrak{A}\mathfrak{O}_x = \mathfrak{A}_x$. On a donc

$$\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{A}_x) \quad \text{et} \quad \mathfrak{C}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{A}_x).$$

Comme \mathfrak{O} est compris dans \mathfrak{O}_x , on a

$$\mathfrak{O}_x \subseteq L(\mathfrak{A}) \subseteq L(\mathfrak{A}_x) = \mathfrak{O}_x \quad \text{et} \quad \mathfrak{O}_x = L(\mathfrak{A}).$$

Remarquons que l'on a alors $\mathfrak{C}'(\mathfrak{A}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{A})$.

Remarque. — Si \mathfrak{O} est un ordre d'Asano dont tous les idéaux premiers non nuls sont complètement premiers, \mathfrak{O} est un anneau dont tous les idéaux à gauche et tous les idéaux à droite sont bilatères : en effet pour tout idéal premier \mathfrak{A} non nul de \mathfrak{O} , on a $L(\mathfrak{A}) = \mathfrak{O}_\mathfrak{A}$, donc, $\mathfrak{C}'(\mathfrak{A}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{A}) = S$, et l'on utilise la dernière assertion de la proposition V.1.

Je voudrais pour terminer, signaler un travail ([16], [22]), qui peut entrer dans le cadre de cet article, que nous avons fait E. OUDIN et moi-même, sur les *Gerbiers commutatifs résidués, à élément unité, intégralement clos* : on connaît trois conditions nécessaires et suffisantes distinctes pour que le gerbier des idéaux fractionnaires d'un domaine d'intégrité noethérien soit intégralement clos. Ces caractérisations sont appelées caractérisations A, B, C en [15]. Ces conditions se formulent pour un gerbier D commutatif à élément unité résidué, noethérien, ordonné en treillis, mais elles ne sont plus équivalentes. La Note [16] étudie leur implication et introduit, étant donné un sous-demi-groupe S , contenant l'unité de D , un gerbier D_S , dit quotient de D selon S . Les résultats des parties I et V du présent article ont été résumés dans une Note aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris [19].

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] ASANO (Keizō). — Zur Arithmetik in Schieftringen, I., *Osaka math. J.*, t. 1, 1949, p. 98-134.
- [2] ASANO (Keizō) and MURATA (Kentaro). — Arithmetical ideal theory in semigroups, *J. Inst. Polytech. Osaka Univ*, Series A, t. 4, 1953, p. 9-33.
- [3] AUSLANDER (Maurice) and GOLDMAN (Oscar). — Maximal orders, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 97, 1960, p. 1-24.
- [4] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre commutative*. Chap. 1-2. — Paris, Hermann, 1961 (*Act. scient. et ind.*, 1290; *Bourbaki*, 27).
- [5] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre*. Chap. 2, 3^e édition. — Paris, Hermann, 1962 (*Act. scient. et ind.*, 1236; *Bourbaki*, 6).
- [6] DEURING (Max). — *Algebren*. 2te Auflage. — Berlin, Springer-Verlag, 1968 (*Ergebnisse der Mathematik*, 41).
- [7] GOLDIE (A. W.). — The structure of prime rings with ascending chain conditions, *Proc. London math. Soc.*, Series 3, t. 8, 1958, p. 589-608.

- [8] GOLDIE (A. W.). — Localization in non-commutative noetherian rings, *J. of Algebra*, t. 5, 1967, p. 89-105.
- [9] HACQUE (Michel). — Localisations exactes et localisations plates, *Publ. Dép. Math., Lyon*, t. 6, 1969, fasc. 2, p. 97-117.
- [10] HARADA (Manabu). — On generalization of Asano's maximal orders in a ring, *Osaka J. Math.*, t. 1, 1964, p. 61-68.
- [11] JACOBSON (Nathan). — *Theory of rings*. — New York, American mathematical Society, 1943 (*Mathematical Surveys*, 2).
- [12] LESIEUR (Léonce, et CROISOT (Robert)). — Théorie noethérienne des anneaux des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, I, *Colloque d'Algèbre supérieure* [1956. Bruxelles], p. 79-121. — Paris, Gauthier-Villars; Louvain, Ceuterick, 1957 (*Centre belge de Recherches mathématiques*).
- [13] LESIEUR (Léonce) et CROISOT (Robert). — Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, II, *Math. Annalen*, t. 134, 1958, p. 458-476.
- [14] MAROT (Jean). — Une propriété des sur-anneaux plats d'un anneau, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 265, 1967, Série A, p. 8-10.
- [15] MAURY (Guy). — La condition « intégralement clos » dans quelques structures algébriques, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 3^e série, t. 78, 1965, p. 31-100 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1960).
- [16] MAURY (Guy) et OUDIN (Emmanuel). — Gerbier résidué intégralement clos, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 264, 1967, Série A, p. 170-172.
- [17] MAURY (Guy). — Remarques sur les ordres maximaux, noethériens, sans diviseurs de zéro, *Séminaire Dubreil-Pisot : Théorie des nombres*, 22^e année, 1968-1969, n° 8, 12 p.
- [18] MAURY (Guy). — Caractérisation des ordres maximaux, noethériens, sans diviseurs de zéro, dont tous les idéaux (à gauche, à droite) sont bilatères, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 269, 1969, Série A, p. 993-996.
- [19] MAURY (Guy). — Localisations bilatères dans les ordres maximaux, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 270, 1970, Série A, p. 1144-1146.
- [20] MICHLER (G. O.). — Asano orders, *Proc. London math. Soc.*, Series 3, t. 19, 1969, p. 421-443.
- [21] MORI (S.) und DODO (T.). — Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit in Integritätsbereichen, *J. Sc. Hiroshima Univ.*, Series A, t. 7, 1937, p. 15-27.
- [22] OUDIN (Emmanuel). — Demi-groupes commutatifs réticulés résidués intégralement clos, *Publ. Dép. Math., Lyon*, t. 5, 1968, fasc. 1, p. 83-112.
- [23] ROBSON (J. C.). — Non-commutative Dedekind rings, *J. of Algebra*, t. 9 1968, p. 249-265.
- [24] SANDERSON (D. E.). — A generalization of divisibility and injectivity in modules, *Canad. math. Bull.*, t. 8, 1965, p. 505-513.
- [25] SILVER (L.). — Non-commutative localizations and applications, *J. of Algebra*, t. 7, 1967, p. 44-76.
- [26] YOSHIDA (Michio) and SAKUMA (Motoyoshi). — On integrally closed noetherian rings, *J. Sc. Hiroshima Univ.*, Series A, t. 17, 1954, p. 311-315.

(Manuscrit reçu le 15 janvier 1970,
complété le 10 avril 1970 pour la partie V.)

Guy MAURY,
Prof. Fac. Sc. Lyon,
49, rue Duguesclin,
69-Lyon 06.