BULLETIN DE LA S. M. F.

M. FLAMANT
L. HADDAD

Espaces hyperboliques

Bulletin de la S. M. F., tome 97 (1969), p. 299-308
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1969__97__299_0>

Bull. Soc. math. France,
97, 1969, p. 299 à 308.

ESPACES HYPERBOLIQUES

PAR

MAURICE FLAMANT ET LABIB HADDAD.

CONVENTIONS ET NOTATIONS. — Tous les anneaux considérés sont supposés commutatifs et possédant un élément unité, en particulier, tous les modules sont supposés définis sur de tels anneaux, et unitaires.

Soit M un module. On désignera son dual par $M^\star$. Pour $x \in M$ et $x^\star \in M^\star$, on écrira indifféremment $x^\star(x)$ ou $\langle x, x^\star \rangle$ pour désigner la valeur de $x^\star$ au point x.

Pour tout sous-module N de M, on appellera « *polaire de N* » le sous-module de $M^\star$ désigné et défini par

$$N^0 = \{ y \mid y \in M^\star \text{ et } \langle x, y \rangle = 0 \text{ pour tout } x \in N \},$$

autrement dit, N^0 est l'ensemble des formes linéaires sur M qui s'annulent sur N.

Étant donnée une forme bilinéaire symétrique Φ sur M, on désignera par d (au lieu de d_Φ, car aucune confusion ne pourra en résulter), l'application de M dans $M^\star$ qui à tout $y \in M$ fait correspondre la forme linéaire $d(y)$, définie par $d(y)(x) = \Phi(x, y)$ pour tout $x \in M$; ainsi

$$d(y)(x) = d(x)(y) = \Phi(x, y).$$

On dira que la forme bilinéaire symétrique Φ est non dégénérée si d est un isomorphisme.

LEMME 1. — *Soit $M = N \oplus P$ un module. L'application $\varphi : N^0 \to P^\star$ qui à tout $y \in N^0$ fait correspondre la restriction de y à P est un isomorphisme.*

On vérifie facilement que l'application φ est linéaire. De plus, si $\varphi(y) = 0$, alors y est nulle sur N et sur P, donc $y = 0$. Ainsi φ est injective. D'autre part, si $z \in P^\star$, soit y la forme linéaire définie sur M par

$$y(N) = 0 \qquad \text{et} \qquad y \mid P = z,$$

alors $\varphi(y) = z$. Ainsi φ est bijective.

DÉFINITION. — *Une espace hyperbolique est un module, muni d'une formes bilinéaire symétrique non dégénérée, qui se décompose en somme directe de deux sous-modules totalement isotropes.*

PROPOSITION 1. — *Soit N un module réflexif. Alors le module $M = N \oplus N^*$, muni de la forme Φ définie par*

$$\Phi((x, x'), (y, y')) = \langle x, y' \rangle + \langle y, x' \rangle$$

est un espace hyperbolique.

On vérifie facilement que Φ est une forme bilinéaire symétrique. D'autre part,

$$\Phi((x, o), (y, o)) = \langle x, o \rangle + \langle y, o \rangle = o, \quad \forall x, y \in N;$$
$$\Phi((o, x'), (o, y')) = \langle o, y' \rangle + \langle o, x' \rangle = o, \quad \forall x', y' \in N^*.$$

Les sous-modules N et N^* sont totalement isotropes.

Pour montrer que Φ est non dégénérée, il faut s'assurer que d est bijective. Or, soit $f : N \to N^{**}$ l'injection canonique de N dans son bidual, comme N est réflexif, f est un isomorphisme. L'application f est définie par

$$\langle y, x' \rangle = \langle x', f(y) \rangle, \quad \forall y \in N, \quad \forall x' \in N^*.$$

Il suffit alors de constater que $d : M \to M^* \simeq N^* \oplus N^{**}$ est définie par $d(x, x') = (x', f(x))$ pour voir que d est bien bijective. En effet,

$$\Phi((x, x'), (y, y')) = [d(y, y')](x, x') = \langle x, y' \rangle + \langle y, x' \rangle$$
$$= \langle x, y' \rangle + \langle x', f(y) \rangle = \langle (x, x'), (y', f(y)) \rangle.$$

THÉORÈME FONDAMENTAL — *Soit M un espace hyperbolique. Alors il existe un module réflexif N tel que M soit isomorphe à l'espace hyperbolique $N \oplus N^*$ muni de la forme bilinéaire symétrique :*

$$((x, x'), (y, y')) \mapsto \langle x, y' \rangle + \langle y, x' \rangle.$$

Soit Φ la forme bilinéaire symétrique non dégénérée définie sur M, et soit $M = N \oplus P$ la décomposition de M en somme directe de deux sous-modules totalement isotropes N et P. Alors $M^* = N^0 \oplus P^0$. Mais, par hypothèse, $d(N) \subset N^0$, $d(P) \subset P^0$, et $d : M \to M^*$ est un isomorphisme, donc d induit des isomorphismes $h : N \to N^0$ et $g : P \to P^0$. Or, d'après le lemme 1, on a des isomorphismes canoniques $\varphi : N^0 \to P^*$ et $\psi : P^0 \to N^*$ de sorte que $u = \varphi \circ h : N \to P^*$ et $v = \psi \circ g : P \to N^*$ sont des isomorphismes. La transposée ${}^t v : N^{**} \to P^*$ est aussi un isomorphisme dont on désignera par w l'isomorphisme réciproque. On sait que $w = ({}^t v)^{-1} = {}^t(v^{-1})$. Finalement, $w \circ u : N \to N^{**}$ est un isomorphisme.

Pour $x \in N$ et $x' \in N^*$, on a

$$(1) \quad \langle x', (w \circ u)(x) \rangle = \langle v^{-1}(x'), u(x) \rangle = \langle (0, v^{-1}(x')), h(x) \rangle$$
$$= [d(x, 0)](0, v^{-1}(x')) = \Phi((x, 0), (0, v^{-1}(x')))$$
$$= [d(0, v^{-1}(x'))](x, 0) = \langle (x, 0), (g \circ v^{-1})(x') \rangle$$
$$= \langle (x, 0), \psi^{-1}(x') \rangle = \langle x, x' \rangle.$$

Donc $w \circ u$ n'est autre que l'injection canonique $N \to N^{**}$, ainsi N est un module réflexif.

On considère alors l'isomorphisme $k : M = N \oplus P \to N \oplus N^*$, défini par

$$k(x, z) = (x, v(z)) \qquad \text{où} \quad x \in N \quad \text{et} \quad z \in P.$$

D'après (1), on a

$$\Phi((x, 0), (0, v^{-1}(y'))) = \langle x, y' \rangle \qquad \text{pour} \quad x \in N, \quad y' \in N^*,$$

et par symétrie :

$$\Phi(0, v^{-1}(x')), (y, 0)) = \langle y, x' \rangle \qquad \text{pour} \quad y \in N, \quad x' \in N^*.$$

Par linéarité, et en utilisant le fait que N et P sont totalement isotropes, il vient

$$\Phi(k^{-1}(X), k^{-1}(Y)) = \langle x, y' \rangle + \langle y, x' \rangle,$$

où $X = (x, x')$, $Y = (y, y')$, $x \in N, y \in N$, $x' \in N^*$ et $y' \in N^*$.

Remarque. — Nous avons démontré en passant que si $M = N \oplus P$ est un espace hyperbolique, où N et P sont totalement isotropes, alors N est isomorphe à P^* (et de même P est isomorphe à N^*) et N est réflexif (ainsi que P). De plus, $F(x, z) = \Phi((x, 0), (0, z))$, où $x \in N$, $z \in P$, et Φ est la forme dont M est muni, établit une dualité entre N et P.

On conviendra par la suite d'appeler *plan hyperbolique*, tout espace hyperbolique qui est un module *projectif* de type fini et de rang 2. Cela généralise les définitions données dans [2]. Il est facile de voir que si $M = N \oplus P$ est un plan hyperbolique, où N et P sont totalement isotropes, alors N et P sont des modules projectifs de rang 1.

Avant de passer à diverses applications du théorème fondamental, on reviendra sur quelques points d'algèbre commutative (*cf.* [1]).

Lemme 2. — *Soit A un anneau noethérien intégralement clos; alors, pour tout A-module M de type fini sans torsion, on a $c(M^*) = -c(M)$.*

En effet, pour tout couple de A-modules de type fini M_1 et M_2 on a ([1], chap. 7, § 4, ex. 8, p. 106) :

$$c(\mathrm{Hom}_A(M_1, M_2)) - c(\mathrm{Ext}^1_A(M_1, M_2)) = r(M_1)\, c(M_2) - r(M_2)\, c(M_1),$$

où $c(M)$ et $r(M)$ désignent respectivement la classe de diviseurs attachée à M et le rang de M ([1], chap. 7, § 4). On a alors

$$c(A) = 0, \qquad r(A) = 1.$$

$$c(\mathrm{Ext}^1_A(M_1, A)) = 0, \qquad \text{car} \quad \mathrm{Ext}^1_A(M_1, A) \text{ est pseudo-nul.}$$

Il vient enfin

$$c(M^*) = -c(M).$$

Lemme 3. — *Soit A un anneau de Dedekind. Pour tout A-module M de type fini sans torsion, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *M est un A-module libre;*

(*b*) $c(M) = 0$.

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*), d'après [1] (chap. 7, § 4, nº 7, prop. 16).

(*b*) $\Rightarrow$ (*a*); on sait que, pour tout A-module M sans torsion de type fini et de rang $n \geq 1$, il existe un idéal $\mathfrak{d} \neq 0$ de A tel que M soit isomorphe à la somme directe des modules A^{n-1} et $\mathfrak{d}$. De plus, $c(M) = c(\mathfrak{d})$. On a donc ici $c(\mathfrak{d}) = 0$; or $c(\mathfrak{d}) = c(A) = 0$ implique $\mathfrak{d} \simeq A$ ([1], chap. 2, § 5, nº 7).

Lemme 4. — *Tout espace hyperbolique de type fini sur un anneau noethérien intégralement clos est de classe nulle.*

Ceci résulte du théorème fondamental et du lemme 2, compte tenu de l'additivité de $M \mapsto c(M)$.

Des résultats précédents et du théorème fondamental découlent un certain nombre de conséquences.

Proposition 2. — *Tout espace hyperbolique de type fini sur un anneau de Dedekind est un module libre.*

La proposition est une conséquence immédiate des lemmes 2 et 3.

Chaque fois que l'on pourra étendre les lemmes 2, 3, 4 à un anneau donné, on aura des résultats intéressants pour les espaces hyperboliques sur cet anneau.

Proposition 3. — *Soit A un anneau intègre.*

(*a*) *Pour tout idéal fractionnaire inversible $\mathfrak{a}$, le A-module $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{-1}$ muni de la forme bilinéaire*

$$((a, a'), (b, b')) \mapsto ab' + ba',$$

est un plan hyperbolique.

(*b*) *Réciproquement, tout plan hyperbolique sur* A *est isomorphe à un plan hyperbolique* $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{-1}$ *muni de la forme bilinéaire*

$$((a, a'), (b, b')) \mapsto ab' + ba',$$

où $\mathfrak{a}$ *est un idéal inversible de* A.

(*a*) résulte de [1] (chap. 2, § 5, nº 5, prop. 9) et de la proposition 1.

(*b*) Soit $M = N \oplus P$ un plan hyperbolique, N et P étant totalement isotropes. On sait que N est un A-module projectif de rang 1, N est alors isomorphe à un idéal fractionnaire inversible $\mathfrak{a}$ de A ([1], chap. 2, § 5, nº 7, corollaire 2 de la proposition 12). La proposition est de ce fait une conséquence du théorème fondamental.

Proposition 4. — *Soit* A *un anneau intègre. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *Tout plan hyperbolique sur* A *est libre;*

(*b*) *Tout idéal inversible de* A *peut être engendré par un ensemble ayant deux éléments au plus.*

$(a) \Rightarrow (b)$: Soit $\mathfrak{a}$ un idéal fractionnaire inversible quelconque de A. Alors $M = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{-1}$ est libre de rang 2, donc M possède une base $\{e, f\}$. Or $\mathfrak{a}$ est isomorphe au module quotient $M/\mathfrak{a}^{-1}$, par suite $\mathfrak{a}$ est engendré par les images de e et f.

$(b) \Rightarrow (a)$: Soit $\mathfrak{a}$ un idéal fractionnaire inversible de A engendré par l'ensemble $\{a, b\}$. Il existe donc $a', b' \in \mathfrak{a}^{-1}$ tels que $ab' + ba' = 1$. Les éléments $e = (a, a')$ et $f = (b, -b')$ du A-module $M = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{-1}$ constituent une base de M. En effet, si $(x, x') \in M$, les équations $\lambda a + \mu b = x$, $\lambda a' - \mu b' = x'$ ont une solution unique : $\lambda = xb' + x'b$, $\mu = xa' - x'a$ dans A.

Les anneaux du type suivant satisfont aux hypothèses de la proposition 4 :

1º les anneaux de Dedekind;

2º les anneaux qui sont réunion d'une famille filtrante croissante de sous-anneaux satisfaisant aux hypothèses de la proposition 4.

En résumé, le théorème fondamental et la proposition 1 permettent une classification complète des espaces hyperboliques sur un anneau quelconque et élucident leur structure (modulo la connaissance des modules réflexifs).

La classification des formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur un module projectif de rang 1 sur un anneau intègre est indispensable pour résoudre certaines catégories de problèmes concernant les modules quadratiques.

Soit A un anneau commutatif intègre ayant un élément unité. On désignera par A^* le groupe multiplicatif des éléments inversibles de A, et par $G(A)$ le groupe quotient $A^*/(A^*)^2$ de A^* par le sous-groupe des carrés. On désignera par $J(A)$ l'ensemble des idéaux fractionnaires inversibles de A, par $C(A)$ le groupe des classes des idéaux fractionnaires inversibles de A, et par $C_2(A)$ le sous-groupe de $C(\mathrm{A})$ formé des éléments d'ordre 2.

Si $\mathcal{B}(A)$ désigne l'ensemble des classes d'isomorphisme des formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur les A-modules projectifs de rang 1, on a alors le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Il existe une bijection entre $\mathcal{B}(A)$ et $C_2(A) \times G(A)$.*

On rappellera d'abord des faits classiques utilisés dans la démonstration.

(*a*) Le groupe $C(A)$ s'identifie canoniquement au groupe $\mathbf{P}(A)$ des classes de A-modules projectif de rang 1 ([1], chap. 2, § 5, n° 7, corollaire 2 de la proposition 12). Tout A-module projectif de rang 1 est isomorphe à un élément de $J(A)$ et, réciproquement, tous les éléments de $J(A)$ sont des A-modules projectifs de rang 1 ([1], chap. 2, § 5, n° 6, théorème 4).

(*b*) Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \in J(A)$. L'application $\lambda \mapsto h_\lambda$ de $\mathfrak{b} . \mathfrak{a}^{-1}$ dans $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ définie par $h_\lambda(x) = \lambda x$ pour tout $x \in \mathfrak{a}$, est bijective. En particulier, le dual $\mathfrak{a}^* = \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathrm{A})$ s'identifie canoniquement à $\mathfrak{a}^{-1}$ ([1] chap. 2, § 5, n° 5, prop. 9). L'homomorphisme $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} \to \mathfrak{a} . \mathfrak{b}$ qui est défini par $x \otimes y \mapsto xy$ est bijectif ([1] chap. 2, § 5, n° 6, prop. 11).

Soit alors $\mathfrak{a} \in J(A)$; à toute forme bilinéaire Φ sur $\mathfrak{a}$ correspond canoniquement un homomorphisme $d_\Phi : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^* \simeq \mathfrak{a}^{-1}$ comme on le sait, d'où une application bijective $\Phi \mapsto \lambda_\Phi$ de l'ensemble des formes bilinéaires sur $\mathfrak{a}$, sur l'idéal fractionnaire $\mathfrak{a}^{-2}$ identifié à $\mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{-1})$, telle que $\Phi(x, y) = \lambda_\Phi xy$. Ce qui montre, en passant, que toute forme bilinéaire sur un A-module projectif de rang 1 est symétrique.

Soient maintenant Φ, Ψ des formes bilinéaires sur $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \in J(\mathrm{A})$ respectivement.

1° Soit $\sigma : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ un homomorphisme, il lui correspond canoniquement un élément $k_\sigma \in \mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-1}$ tel que $\sigma(x) = k_\sigma x$ pour tout $x \in \mathfrak{a}$. Pour que l'on ait

$$\Psi(\sigma(x), \sigma(y)) = \Phi(x, y), \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{a}, \tag{1}$$

il faut et il suffit que l'on ait

$$k_\sigma^2 \lambda_\Psi = \lambda_\Phi. \tag{2}$$

D'autre part, pour que σ soit un isomorphisme de A-modules, il faut et il suffit que $k_\sigma^{-1} \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$. Il en résulte que $\mathfrak{b}\mathfrak{a}^{-1} = Au$ est principal, par suite $k_\sigma = \mu u$, et $\mu^{-1} u^{-1} \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} = A u^{-1}$, donc $\mu \in A^*$. Ainsi, pour que deux formes bilinéaires Φ et Ψ sur un même $\mathfrak{a} \in J(A)$ soient isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe $\mu \in A^*$ tel que

$$\mu^2 \lambda_\Psi = \lambda_\Phi. \tag{3}$$

Ainsi les classes d'équivalence des formes bilinéaires sur $\mathfrak{a}$ sont en correspondance bijective avec les classes d'équivalence de $\mathfrak{a}^{-2}$ modulo la relation d'équivalence (3). D'où une classification complète des formes bilinéaires sur les A-modules projectifs de rang 1 par deux invariants : la classe du module et la classe de la constante définissant la forme.

2° Soient Φ et Ψ des formes bilinéaires définies respectivement sur les idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ de $J(A)$.

$$\Phi(x, y) = \lambda_\Phi\, xy, \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{a},$$
$$\Psi(x, y) = \lambda_\Psi\, xy, \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{b}.$$

Le produit tensoriel $\Phi \otimes \Psi$ est défini sur $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} \simeq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ par

$$(\Phi \otimes \Psi)(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) = \Phi(x_1, y_1).\Psi(x_2, y_2) = \lambda_\Phi \lambda_\Psi (x_1 y_1)(x_2 y_2),$$
$$\forall\, x_1, y_1 \in \mathfrak{a}, \quad \forall\, x_2, y_2 \in \mathfrak{b}.$$

On a encore

$$\begin{aligned}(\Phi \otimes \Psi)(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) &= \lambda_{\Phi \otimes \Psi}(x_1 \otimes x_2)(y_1 \otimes y_2) \\ &= \lambda_{\Phi \otimes \Psi}(x_1 y_1) \otimes (x_2 y_2), \quad \forall\, x_1, y_1 \in \mathfrak{a}, \ \forall\, x_2, y_2 \in \mathfrak{b}.\end{aligned}$$

Finalement le produit tensoriel $\Xi = \Phi \otimes \Psi$ peut être défini canoniquement sur $\mathfrak{a}.\mathfrak{b}$ par

$$\lambda_\Xi = \lambda_\Phi \lambda_\Psi \in (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{-2}.$$

Ceci permet de munir l'ensemble des classes des formes bilinéaires sur les A-modules projectifs de rang 1 d'une opéation associative et commutative canonique.

3° Caractérisation des formes bilinéaires non dégénérées. Pour qu'une forme bilinéaire Φ définie sur $\mathfrak{a} \in J(A)$ soit non dégénérée, il faut que $\mathfrak{a}$ soit isomorphe à $\mathfrak{a}^{-1}$, donc que $\mathrm{cl}(\mathfrak{a}^{-2}) = 0$ [donc $\mathrm{cl}(\mathfrak{a}) \in C_2(A)$]; ainsi $\mathfrak{a}^{-2} = Av$ est principal et $\lambda_\Phi = \nu v$, $\nu \in A$. Il faut aussi que l'inverse de λ_Φ appartienne à $\mathfrak{a}^2 = A v^{-1}$, donc il faut que $\nu \in A^*$. Réciproquement, supposons que $\mathfrak{a}^{-2} = Av$ et que $\lambda_\Phi = \nu v$ avec $\nu \in A^*$. Dans ces conditions, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^{-1}$ sont isomorphes, et d_Φ est un isomorphisme de $\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{a}^{-1}$. Finalement, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(*a*) Φ est une forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathfrak{a}$;

(*b*) $\mathrm{cl}(\mathfrak{a}) \in C_2(A)$ et $\lambda_\Phi = \nu v$, $\nu \in A^*$, $\mathfrak{a}^{-2} = Av$.

Les remarques précédentes peuvent s'exprimer sous la forme du théorème annoncé avec le complément suivant : le produit défini dans le 2° induit sur $\mathcal{B}(A)$ une loi de composition qui en fait un groupe.

L'application aux formes quadratiques est alors aisée, puisque les formes quadratiques correspondent bijectivement aux formes bilinéaires, dans le cas où $2 \in A^*$. Si A est de caractéristique différente de 2 et si cependant $2 \notin A^*$, le résultat reste valable à condition de ne considérer que les formes bilinéaires Φ pour lesquelles $\Phi(x, x) \in A.2$. Le cas de caractéristique 2 est inintéressant car alors toutes les formes quadratiques sur des A-modules projectifs de rang 1 sont dégénérées.

Proposition 5. — *Soient A un anneau intègre commutatif dans lequel 2 est inversible, M et M' deux A-modules projectifs de rang 1 munis respectivement de deux formes quadratiques T et T' non dégénérées telles que, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de l'anneau A, les formes quadratiques localisées $T_{\mathfrak{m}}$ et $T'_{\mathfrak{m}}$ sont équivalentes. Dans ces conditions les formes quadratiques T et T' sont équivalentes.*

Soient Φ et Ψ deux formes bilinéaires non dégénérées définies respectivement sur les idéaux fractionnaires inversibles $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$.

$$\Phi(x, y) = \lambda_\Phi xy, \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{a}; \qquad \mathfrak{a}^{-2} = Av \quad \text{et} \quad \lambda_\Phi = \nu v, \quad \nu \in A^*;$$
$$\Psi(x, y) = \lambda_\Psi xy, \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{b}, \qquad \mathfrak{b}^{-2} = Aw \quad \text{et} \quad \lambda_\Psi = \mu w, \quad \mu \in A^*.$$
$$\lambda_\Phi = (\nu\mu^{-1})(vw^{-1})\lambda_\Psi, \qquad (\nu\mu^{-1})(vw^{-1}) \in \mathfrak{a}^{-2}\mathfrak{b}^2;$$
$$\lambda_\Psi = (\nu^{-1}\mu)(v^{-1}w)\lambda_\Phi, \qquad (\nu^{-1}\mu)(v^{-1}w) \in \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^{-2}.$$

Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, on sait que les formes localisées $\Phi_{\mathfrak{m}}$ et $\Psi_{\mathfrak{m}}$ sont équivalentes. Il en résulte que $k = (\nu\mu^{-1})(vw^{-1})$ admet des racines carrées « inversibles » dans $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}^{-1}\mathfrak{b}_{\mathfrak{m}}$ et par suite dans $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$. On désignera ces racines par k_1 et k_2. Les applications $x \mapsto k_1 x$ et $x \mapsto k_2 x$ sont des isomorphismes métriques de $\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{b}$.

On donnera pour terminer un exemple de A-module projectif de rang 1 non libre sur un anneau de Dedekind muni d'une forme quadratique non dégénérée et un exemple de plan hyperbolique sur un anneau de Dedekind dont les facteurs directs totalement isotropes ne sont pas isomorphes.

On considère l'extension quadratique $K = \mathbf{Q}(e)$ du corps des rationnels $\mathbf{Q}$ par $e = \sqrt{-41}$, et on désigne par A le sous-anneau formé des éléments de la forme $a + be$ où a et b sont des éléments de l'anneau $B = \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$, anneau de fractions de $\mathbf{Z}$ défini par la partie multiplicative

$S = \{ 2^n \mid n \in \mathbf{N} \}$. L'anneau A est la fermeture intégrale de l'anneau principal B dans K, donc c'est un anneau de Dedekind ([1], chap. 7, p. 31, corollaire 3).

On considère l'idéal $\mathfrak{a}$ de A engendré par $1 + e$ et 3, alors $\mathfrak{a}^2$ est engendré par $(1+e)^2$, $3(1+e)$ et 9; mais $3(1+e) = \frac{3}{2}(1+e)^2 + 7.9$, donc $\mathfrak{a}^2$ est engendré par $(1+e)^2$ et 9, et par un calcul immédiat, on voit que $\mathfrak{a}^2$ est engendré par $\alpha = -2 + e$ et $\beta = 9$. Par une méthode déjà utilisée dans une Note précédente, on montre que $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^2$ n'est pas principal. Pour cela, on utilise la norme $N(a + be) = a^2 + 41 b^2$; on vérifie que si $a + be \in \mathfrak{a}^2$ alors $N(a+be) \equiv 0 \pmod 9$ dans B. Si $\mathfrak{a}^2$ était engendré par un seul élément $t \in A$, on aurait donc $N(t) \equiv 0 \pmod 9$ et il existerait α', $\beta' \in A$ tels que $\alpha = \alpha' t$ et $\beta = \beta' t$; donc

$$N(\alpha) = 45 = N(\alpha').N(t) \qquad \text{et} \qquad N(\beta) = 81 = N(\beta').N(t).$$

Il en résulterait $9 \equiv 0 \pmod{N(t)}$, donc $N(t) = \frac{9}{2^n}$, $n \in \mathbf{Z}$. Mais alors $N(\alpha') = 2^n \times 5$ ce qui n'est pas possible puisqu'on sait que l'équation $a^2 + 41 b^2 = 2^n \times 5$ n'a pas de solution dans B ([2], chap. I, § 6).

Par contre, l'idéal $\mathfrak{b}^2$ est principal et engendré par l'élément $11 - e$ comme le montre un calcul simple.

(*a*) *Existence d'un plan hyperbolique sur un anneau de Dedekind dont les deux facteurs directs totalement isotropes ne sont pas isomorphes.* — Pour mettre en évidence un tel plan, il est nécessaire et suffisant de déterminer un anneau de Dedekind A qui possède un idéal inversible $\mathfrak{a}$ non isomorphe à $\mathfrak{a}^{-1}$. Mais l'on sait que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° $\mathfrak{a}$ est isomorphe à $\mathfrak{a}^{-1}$;

2° $\mathrm{cl}(\mathfrak{a}^2) = 0$.

En définitive, il suffit d'avoir un anneau de Dedekind ayant un idéal $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a}^2$ ne soit pas principal. L'anneau A et l'idéal $\mathfrak{a}$ engendré par $1 + e$ et 3 répondent à la question.

(*b*) *Existence d'un A-module projectif de rang* 1 *non libre sur un anneau de Dedekind, muni d'une forme quadratique non dégénérée.* — Il suffit de déterminer un anneau de Dedekind ayant un idéal $\mathfrak{a}$ non principal tel que $\mathfrak{a}^2$ soit principal, car alors $\mathrm{cl}(\mathfrak{a}) \in C_2(A)$. L'anneau A et l'idéal $\mathfrak{b}$ remplissent ces conditions. La forme quadratique $x \mapsto \frac{11 + e}{81} x^2$ sur $\mathfrak{b}$ est non dégénérée.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre commutative*. Chap. 1-2, 3-4, 5-6, 7. — Paris, Hermann, 1961-1965 (*Act. scient. et ind.*, 1290, 1293, 1308 et 1314; *Bourbaki*, 27, 28, 30 et 31).

[2] Flamant (Maurice). — Sur l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique définie sur un A-module projectif, *Ann. Fac. Sc. Toulouse* [à paraître] (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1968).

(Texte reçu le 19 février 1969.)

Maurice Flamant,
Centre d'Études mathématiques,
Boîte postale 3855,
Beyrouth (Liban).

Labib Haddad,
127, avenue Philippe-Auguste,
75-Paris 11.