BULLETIN DE LA S. M. F.

CONSTANTIN NĂSTĂSESCU
NICOLAE POPESCU

Anneaux semi-artiniens

Bulletin de la S. M. F., tome 96 (1968), p. 357-368
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1968__96__357_0>

Bull. Soc. math. France,
96, 1968, p. 357 à 368.

ANNEAUX SEMI-ARTINIENS

PAR

Constantin NĂSTĂSESCU et Nicolae POPESCU.

1. Définitions et notations.

Soit A un anneau unitaire quelconque, et soient M un A-module à gauche et N un sous-module non nul de M. On dit que M est une *extension essentielle* de N si, pour tout sous-module non nul P de M, on a $P \cap N \neq 0$. Le A-module M est dit *co-irréductible* s'il est extension essentielle de ses sous-modules non nuls. Un sous-module N de M est dit *irréductible* si M/N est co-irréductible.

Dans ce qui suit, on notera par $\mathfrak{R}(A)$ (ou par $\mathfrak{R}$) le radical de Jacobson d'un anneau A. Dans [1], on dit que le radical de Jacobson est *T-nilpotent à gauche* (resp. à droite) si, pour toute suite d'éléments $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ de $\mathfrak{R}(A)$, il existe un entier n tel que $x_1 x_2 \ldots x_n = 0$ (resp. $x_n x_{n-1} \ldots x_1 = 0$).

Nous dirons qu'un anneau A *remplit la condition* (H) à gauche (resp. à droite) si tout A-module à gauche (resp. à droite) non nul contient un sous-module propre maximal. Une caractérisation des anneaux remplissant une telle condition est donnée par Guy Renault dans [9].

Si A est un anneau commutatif et M un A-module un idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ est dit associé à M (au sens de [4], Chap. 4) s'il existe $x \in M$ tel que $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann} x$. On note par $\operatorname{Ass}(M)$ l'ensemble des idéaux premiers associés à M.

2. Quelques considérations sur les l. c.-anneaux.

Soit A un anneau unitaire quelconque. Dans [8], on dit que la catégorie $\operatorname{Mod} A$ des A-modules à gauche est une *l. c.-catégorie* (i. e. une catégorie localement co-irréductible) si tout A-module non nul M contient un sous-module co-irréductible non nul. On dit que A est un l. c.-anneau à gauche si $\operatorname{Mod} A$ est une l. c.-catégorie. Dans [8], on donne une caractérisation partielle de ces anneaux.

Jacques Fort dit qu'un A-module M est *riche en co-irréductibles* si tout sous-module N non nul contient un sous-module co-irréductible non nul (*voir* [5] et [6]). En tenant compte de ses résultats (*loc. cit.*) et de [8], on a le théorème suivant :

Théorème 2.1. — *Soit A un anneau unitaire quelconque. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est un* l. c.*-anneau à gauche;*

(2) *Tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de A est une intersection réduite d'idéaux à gauche irréductibles;*

(3) *Pour tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$, il existe $x \in A$ tel que $(\mathfrak{a} : x)$ soit irréductible;*

(4) *Pour tout A-module à gauche M, tout sous-module est une intersection réduite de sous-modules irréductibles;*

(5) *Pour tout A-module à gauche M et tout sous-module $N \subset M$, il existe $x \in M$ tel que l'idéal $\{N : x\} = \{\lambda \in A \mid \lambda x \in N\}$ soit irréductible.*

Démonstration. — Le théorème 3 de [6] affirme que M est riche en co-irréductibles si, et seulement si, o possède une décomposition irréductible réduite dans tout sous-module non nul de M; il est alors évident que $(1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2)$.

Prouvons que $(2) \Rightarrow (1)$. Soit $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal, et soit $\mathfrak{a} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathfrak{a}_\alpha$ une intersection réduite d'irréductibles, donc, dans le A-module $A/\mathfrak{a}$, $0 = \bigcap_{\alpha \in I} \bar{\mathfrak{a}}_\alpha$ (intersection réduite de sous-modules irréductibles). Soit $\alpha_0 \in I$ et $\bar{\mathfrak{a}}'_{\alpha_0} = \bigcap_{\alpha \in I - \{\alpha_0\}} \bar{\mathfrak{a}}_\alpha$ alors $\bar{\mathfrak{a}}'_{\alpha_0} \neq 0$ et $\bar{\mathfrak{a}}'_{\alpha_0} \cap \bar{\mathfrak{a}}_{\alpha_0} = 0$, donc $\bar{\mathfrak{a}}'_{\alpha_0} \subset A/\mathfrak{a}_{\alpha_0}$, donc est co-irréductible, et par suite, le A-module $A/\mathfrak{a}$ contient un sous-module co-irréductible non nul.

$(1) \Rightarrow (5)$. Soit $N \subset M$, M/N contient un co-irréductible non nul, donc il existe $\hat{x} \in M/N$ tel que $A\hat{x}$ soit co-irréductible non nul. Il est clair que $\{N : x\}$ est le noyau de l'application $\varphi : A \to A\hat{x}$ $\varphi(\lambda) = \lambda x$, et est un idéal irréductible.

$(5) \Rightarrow (3)$ étant évident, il reste à prouver que $(3) \Rightarrow (1)$. Soit $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal, et soit $\varphi : A/(\mathfrak{a} : x) \to A/\mathfrak{a}$ l'application $\varphi(\hat{\lambda}) = \widehat{\lambda x}$ qui est un monomorphisme, alors $A/\mathfrak{a}$ contient un co-irréductible non nul.

3. Anneaux semi-artiniens.

Tous les anneaux considérés dans ce paragraphe sont supposés commutatifs et unitaires, sauf mention explicite du contraire.

Définition. — Soit A un anneau quelconque (commutatif ou non). On dit que A est *semi-artinien à gauche* si tout A-module à gauche non nul contient un sous-module simple non nul.

Proposition 3.1. — *Les affirmations suivantes sont vraies :*

(1) *Si A est intègre et semi-artinien à gauche, c'est un corps;*

(2) *Si A est semi-artinien et $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal bilatère, alors $A/\mathfrak{a}$ est semi-artinien;*

(3) *Tout produit fini d'anneaux semi-artiniens (à gauche) est semi-artinien;*

(4) *Si A est semi-artinien à gauche, tout anneau de fractions $A[S^{-1}]$ (voir* [7], chap. V, p. 415) *est semi-artinien.*

Démonstration. — (1) Si A est intègre et semi-artinien, soit $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal à gauche minimal. On a $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$, il existe donc un idempotent $e \in A$ tel que $\mathfrak{a} = Ae$. Vu que e est diviseur de zéro, on a donc $e = 1$, donc A est un corps.

Les affirmations (2), (3) et (4) sont immédiates.

Remarque. — Un produit infini d'anneau semi-artiniens n'est pas forcément semi-artinien; exemple : un produit infini de corps.

Proposition 3.2. — *Soit A un anneau unitaire quelconque. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est semi-artinien à gauche;*

(2) *Tout A-module M non nul à gauche est une extension essentielle de son socle $s_0 M$ (le socle étant la somme des sous-modules simples de M);*

(3) (*a*) *$\mathfrak{R}(A)$ est T-nilpotent à droite;*
(*b*) *$A/\mathfrak{R}(A)$ est semi-artinien à gauche.*

Démonstration. — Il est clair que $(1) \Leftrightarrow (2)$. Prouvons que $(1) \Rightarrow (3)$. Pour démontrer (*a*), nous allons procéder par récurrence transfinie d'après un procédé de H. Bass [1]. Soient $\mathfrak{R}_0 = 0$ et $\mathfrak{R}_{\alpha+1}$ tel que $\mathfrak{R}_{\alpha+1}/\mathfrak{R}_\alpha$ soit le socle de $\mathfrak{R}/\mathfrak{R}_\alpha$ et tel que, si α est un ordinal limite, $\mathfrak{R}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{R}_\beta$. A étant semi-artinien, il existe α_0 tel que $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\alpha_0}$. Si $a \in \mathfrak{R}$, définissons $h(a)$ comme étant le plus petit ordinal α tel que $a \in \mathfrak{R}_\alpha$. On observe que $h(a)$ n'est pas un ordinal limite, car si $a \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{R}_\beta$, alors $a \in \mathfrak{R}_\beta$ pour $\beta < \alpha$.

Donc, pour tout $a \neq 0$, on peut écrire $h(a) = \beta + 1$. Il en résulte que $\mathfrak{R}.\mathfrak{R}_{\beta+1} \subset \mathfrak{R}_\beta$ et donc, pour tout $b \in \mathfrak{R}$, on a $h(ba) < h(a)$. Soit alors la suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ d'éléments de $\mathfrak{R}$ telle que $a_n a_{n-1} \ldots a_1 \neq 0$

pour tout n, alors la suite d'ordinaux $\{h(a_n a_{n-1} \dots a_1)\}$ est infinie et strictement décroissante, ce qui est impossible. De plus, il est clair que (b) est une conséquence de la proposition 3.1.

Prouvons que (3) $\Rightarrow$ (1). Soit M un A-module non nul tel que $\mathfrak{R} N \neq 0$ pour tout $N \subset M$, $N \neq 0$. Vu que $\mathfrak{R} M \neq 0$, il existe $a_1 \in \mathfrak{R}$ tel que $a_1 M \neq 0$. Soit $M_1 = A a_1 M$ sous-module non nul de M, étant donné que $\mathfrak{R} M_1 \neq 0$, il existe $a'_2 \in \mathfrak{R}$ tel que $a'_2 A a_1 M \neq 0$, d'où un $a_2 \in \mathfrak{R}$ tel que $a_2 a_1 M \neq 0$. En continuant le procédé, on trouve donc une suite $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tel que $a_n a_{n-1} \dots a_1 M \neq 0$ pour tout n, ce qui est absurde, car $\mathfrak{R}$ est T-nilpotent à droite. Donc, pour tout A-module M, il existe $N \subset M$, $N \neq 0$ tel que $\mathfrak{R} N = 0$, donc N est un $A / \mathfrak{R}$-module à gauche, et, par suite, contient un sous-module simple, il en est donc de même pour M.

THÉORÈME 3.1. — *Soit* A *un anneau. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) A *est semi-artinien;*

(2) (*a*) $\mathfrak{R}(A)$ *est* T-*nilpotent,*
(*b*) $A / \mathfrak{R}(A)$ *est semi-artinien et régulier au sens de von Neumann;*

(3) *A est un* l. c.-*anneau et remplit la condition (H);*

(4) *Tout idéal premier est maximal et, pour tout A-module M non nul,* $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$.

Démonstration. — En vue de la démonstration, on va rappeler les lemmes suivants :

LEMME 1. — *Si A est semi-artinien commutatif, tout idéal premier est maximal.*

Soit $\mathfrak{p} \subset A$ un idéal premier; comme $A/\mathfrak{p}$ est semi-artinien intègre, c'est un corps, et par suite $\mathfrak{p}$ est maximal.

LEMME 2 (BOURBAKI [3], chap. 2, p. 173, exercice 16). — *Si A est commutatif et réduit et tel que tout idéal premier soit maximal, alors A est régulier au sens de von Neumann.*

En tenant compte de ces lemmes et de la proposition 3.2, il est clair que (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(1) = (3). Il est clair que A est un l. c.-anneau et la condition (H) résulte du théorème 1.2 de [9].

(3) $\Rightarrow$ (2). En vue du théorème précédemment cité, $\mathfrak{R}$ est T-nilpotent, $A/\mathfrak{R}$ est régulier au sens de von Neumann et est un l. c.-anneau. Au paragraphe 4, théorème 4.1, nous prouverons que un l. c.-anneau régulier est semi-artinien.

$(1) \Leftarrow (4)$. Soit $M \neq 0$, il existe $S \subset M$, $S \neq 0$, et simple, soit alors $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}\, x$, où $x \in S$, alors $\mathrm{Ass}(M) \neq \emptyset$.

La réciproque est évidente.

Remarque 1. — Si A est semi-artinien et commutatif, alors il vérifie la condition (H). Le problème qui se pose est de savoir si un anneau semi-artinien à gauche vérifie la condition (H). Nous résoudrons partiellement ce problème au paragraphe 5.

Remarque 2. — L'affirmation (2) du théorème précédent nous a été communiquée par Guy Renault.

Corollaire 3.1. — *Soit A un anneau. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est semi-artinien et noethérien;*

(2) *A est noethérien et vérifie la condition (H);*

(3) *A est artinien.*

L'équivalence $(1) \Leftrightarrow (2)$ résulte du théorème précédent du fait qu'un anneau noethérien est un l. c.-anneau.

L'équivalence $(1) \Leftrightarrow (3)$ est évidente.

Corollaire 3.2. — *Soit A un anneau semi-artinien. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *M est un A-module noethérien;*

(2) *M est un A-module artinien;*

(3) *M est de longueur finie.*

Démonstration.

$(1) \Rightarrow (3)$. Soit $M_0 = s_0 M$ le socle de M,

$$M_1/M_0 = s_0(M/M_0), \ldots, M_n/M_{n-1} = s_0(M/M_{n-1}), \ldots$$

M étant noethérien, il existe n tel que $M_n = M$ et chaque $M_1, \ldots, M_n$ est de longueur finie.

$(2) \Rightarrow (3)$. Soient $M_0 \subset M$ un sous-module propre maximal (qui existe en vertu du théorème 3.1), $M_1 \subset M_0$ un sous-module propre maximal de $M_0, \ldots, M_n \subset M_{n-1}$ un sous-module propre maximal de M_{n-1}. Vu que M est artinien, il existe n tel que $M_n = 0$.

Corollaire 3.3. — *Soit A semi-artinien. Soient M un A-module et $a \in A$. L'homothétie de rapport a dans M est un monomorphisme si, et seulement si, a n'appartient à aucun idéal de* $\mathrm{Ass}(M)$.

Démonstration. — Si a appartient à un idéal premier $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, on a $p = \mathrm{Ann}\, x$ avec $x \in M$, $x \neq 0$; d'où $ax = 0$, et l'homothétie de rapport a n'est pas injective. Réciproquement, si $ax = 0$ pour un $x \in M$ tel que $x \neq 0$, on a $Ax \neq \{0\}$, d'où $\mathrm{Ass}(Ax) \neq \emptyset$ (en vertu du théorème 3.1).

Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(Ax)$; on a évidemment $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ si $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(bx)$, $b \in A$, d'où $a \in \mathfrak{p}$ puisque $abx = 0$. De ce corollaire, résulte le corollaire suivant :

Corollaire 3.4. — *L'ensemble des diviseurs de zéro dans un anneau semi-artinien est réunion des* $p \in \mathrm{Ass}(A)$.

Dans [10], H. Storrer dit qu'un anneau commutatif A est *saturé* si toute extension épimorphe de A est égale à A. Il dit que A est *fortement saturé* si toute image homomorphe de A est saturée, c'est-à-dire si tout épimorphisme de source A est surjectif.

En tenant compte des résultats de [10], on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.5. — *Si A est un anneau, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est semi-artinien;*

(2) (*a*) *$\mathfrak{R}(A)$ est T-nilpotent,*

(*b*) *A est un* l. c.-*anneau fortement saturé.*

Démonstration.

(1) $\Rightarrow$ (2) est une conséquence immédiate de la proposition 2.3 de [10] et du théorème 3.1.

(2) $\Rightarrow$ (1). Soit N l'idéal des éléments nilpotents de A, alors A/N est un l. c.-anneau fortement saturé et, en vertu de la proposition 2.6 de [10], A/N est régulier au sens de von Neumann. Donc $N = \mathfrak{R}$, et il résulte du théorème 3.1 que A est semi-artinien.

En particulier, si A est semi-artinien, A est saturé, donc, en vertu du corollaire 2.5 de [10], tout $a \in A$ non diviseur de zéro est inversible et tenant compte du corollaire 3.4, on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.6. — *Soit A un anneau semi-artinien, alors, pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$, on a*

$$\mathfrak{p} \subset \bigcup_{\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(A)} \mathfrak{q}.$$

En particulier, si A est semi-artinien et tel que Spec(A) *soit fini, alors tout idéal premier est associé.*

Corollaire 3.7. — *Soit A semi-artinien tel que* Spec(A) *soit fini. Alors, tout A-module simple est isomorphe à un idéal minimal de A.*

Démonstration. — Soit S un A-module simple, donc $S = A/\mathfrak{m}$ où $\mathfrak{m}$ est maximal dans A. Spec(A) étant fini, alors $\mathfrak{m}$ est associé, si $\mathfrak{m} = \mathrm{Ann}\, x$ où $x \in A$, alors Ax est minimal et isomorphe à S.

Exemple. — Dans [1], H. Bass dit qu'un anneau A est parfait à gauche si tout A-module à gauche admet un recouvrement projectif. En tenant compte du théorème P de [1], il résulte que A est parfait à gauche si, et seulement si, A est semi-artinien à droite et s'il n'existe qu'un nombre fini d'idempotents orthogonaux de A. Si A est parfait et commutatif, nous sommes dans les conditions du corollaire 3.7.

Corollaire 3.8. — *Soit A un anneau (commutatif). Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est parfait;*

(2) *A est semi-artinien et* Spec$A$ *est fini.*

Démonstration.

(1) $\Rightarrow$ (2) est évident, car $A/\mathfrak{R}$ est semi-simple ([1], théorème P).

(2) $\Rightarrow$ (1). Si Spec(A) est fini, Spec$(A/\mathfrak{R})$ l'est aussi. D'après le corollaire 3.7, tout module simple est isomorphe à un idéal minimal; $A/\mathfrak{R}$ est régulier au sens de von Neumann (théorème 3.1), donc tout idéal minimal de $A/\mathfrak{R}$ est projectif, c'est-à-dire tout $A/\mathfrak{R}$-module simple est projectif, donc $A/\mathfrak{R}$ est semi-simple.

4. Anneaux semi-artiniens et réguliers au sens de von Neumann.

Dans ce paragraphe, tous les anneaux sont unitaires et commutatifs. Rappelons que l'anneau A est dit *régulier au sens de von Neumann* si, quelque soit $x \in A$, il existe $a \in A$ tel que $x = xax = x^2 a$.

Théorème 4.1. — *Soit A un anneau. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est un* l. c.*-anneau régulier;*

(2) *A est semi-artinien et régulier;*

(3) *A est semi-artinien et réduit;*

(4) *Tout idéal de A est une intersection réduite d'idéaux maximaux;*

(5) *Tout sous-module d'un A-module est une intersection réduite de sous-modules maximaux.*

On se sert du lemme suivant :

Lemme 4.1. — *Si A est régulier (commutatif), alors :*

(1) *Tout idéal irréductible de A est maximal;*

(2) *Tout sous-module irréductible d'un A-module est maximal.*

Démonstration.

1° Soit $B = A/\mathfrak{a}$ où $\mathfrak{a}$ est un idéal irréductible, B est régulier, donc, pour tout $x \in B$, Bx est sommande directe de B, mais B étant un B-module co-irréductible, on a $B = Bx$ quel que soit $x \in B$, donc B est un corps et par suite $\mathfrak{a}$ est maximal.

2° Supposons d'abord que M soit co-irréductible et soit $x \in M$, alors $Ax = A/\mathfrak{a}$ où $\mathfrak{a}$ est irréductible, donc Ax est simple pour tout $x \in M$. M étant co-irréductible, alors $M = Ax$ et par suite M est simple.

Soient maintenant M quelconque et $N \subset M$ un sous-module irréductible de M; il est clair que M/N est simple, donc N est maximal.

Les implications $(1) \Rightarrow (5) \Rightarrow (4)$ du théorème sont donc maintenant claires.

Prouvons que $(4) \Rightarrow (3)$. Il est clair que A est réduite; soit $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal; d'après (4), on a $\mathfrak{a} = \bigcap_{\alpha \in I} \mathfrak{m}_\alpha$ intersection réduite d'idéaux maximaux et, dans le A-module $A/\mathfrak{a}$, on a $0 = \bigcap_{\alpha \in} \overline{\mathfrak{m}}_\alpha$ (intersection réduite) et $\overline{\mathfrak{m}}_\alpha$ maximal dans $A/\mathfrak{a}$. Soit $\alpha_0 \in I$ et $\overline{\mathfrak{m}}'_{\alpha_0} = \bigcap_{\alpha \in I - \{\alpha_0\}} \overline{\mathfrak{m}}_\alpha$ où $\overline{\mathfrak{m}}'_{\alpha_0} \neq 0$ et $\overline{\mathfrak{m}}_{\alpha_0} \cap \overline{\mathfrak{m}}'_{\alpha_0} = 0$. Donc $\overline{\mathfrak{m}}'_{\alpha_0} \subset A/\mathfrak{m}_{\alpha_0}$, donc $A/\mathfrak{a}$ contient un A-module simple.

COROLLAIRE 4.1. — *Soient A un anneau semi-artinien et $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal tel que $\mathfrak{a}$ soit égal à sa racine; alors $\mathfrak{a}$ est une intersection réduite d'idéaux maximaux.*

Il suffit en effet d'observer que $A/\mathfrak{a}$ est semi-artinien et réduit.

COROLLAIRE 4.2. — *Soit A semi-artinien régulier; alors tout A-module M est un extension essentielle d'une somme directe $P \oplus Q$ où P est A-module simple et projectif et Q une somme directe des modules simples et injectifs.*

Démonstration. — D'après la proposition 3.2, M est extension essentielle de son socle $s_0 M$. D'après un résultat classique de Kaplansky, tout module simple sur un anneau régulier commutatif est injectif. Soient alors P la somme des modules projectifs et simples de $s_0 M$, et Q la somme des modules simples injectifs et non projectif. On observe qu'un module simple est projectif si, et seulement si, il est isomorphe à un idéal minimal de A.

COROLLAIRE 4.3. — *Soit A semi-artinien et régulier alors tout A-module P projectif est extension essentielle d'une somme directe d'idéaux minimaux.*

En effet, si S est un module simple de $s_0 P$, étant injectif, c'est une sommande directe, donc S est projectif et, par suite, est isomorphe à un idéal minimal.

COROLLAIRE 4.4. — *Si A est semi-artinien et régulier, alors tout A-module noethérien est semi-simple et injectif.*

Exemples d'anneaux semi-artiniens réguliers au sens de von Neumann qui ne sont pas noethériens. — Soit B un anneau réduit (commutatif ou pas) ayant des idéaux minimaux à gauche et soit $\mathfrak{b}$ l'un d'entre-eux. On a $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{b}$ (B étant réduit). Il existe un idempotent $e \in \mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{b} = Be$. Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de B, somme directe d'idéaux à gauche minimaux ($\mathfrak{a}$ est bilatère), et soit A le plus petit sous-anneau de B contenant $\mathfrak{a}$ et l'élément unité de B.

Si $\mathfrak{b}$ est minimal dans B, il est minimal dans A. En effet (*cf.* BOURBAKI [2], § 5, exercices), $\mathfrak{b} = Be$ est minimal si, et seulement si, eBe est un corps et, de même, $\mathfrak{b} = Ae$ est minimal dans A, car $eAe = eBe$ est un corps.

Tout élément de A est de la forme $n.1 + x$, où $x \in \mathfrak{a}$ et n un entier. Si B est de caractéristique p non nulle, alors $A/\mathfrak{a} \simeq \mathbf{F}_p$, et A est semi-artinien.

Cas particulier. — Soient $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ le corps des entiers modulo p (p nombre premier) et $B = \prod_{i \in I} \mathbf{F}_p$ (card I = infini). Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal $\sum_{i \in I} \mathbf{F}_p$, et considérons dans B l'anneau A contenant $\mathfrak{a}$ et l'élément unité de B, alors A est semi-artinien régulier au sens de von Neumann, mais n'est pas noethérien.

5. **Élévation d'un module.**

Soient A un anneau unitaire quelconque et M un A-module à gauche. Soit $M_0 = s_0 M$ le socle de M. Si α est un ordinal, $M_{\alpha+1}$ est défini tel que $M_{\alpha+1}/M_\alpha$ soit le socle de M/M_α. Si α est un ordinal limite, alors

$$M_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta.$$

DÉFINITION. — Soit M un A-module à gauche, on dira que *l'élévation* de M est *définie* s'il existe un ordinal α tel que $M = M_\alpha$. Le plus petit ordinal possédant cette propriété sera appelé *l'élévation* de M et sera noté $e(M)$.

Remarque. — Si M est un A-module de type fini, son élévation n'est pas un ordinal limite. De la définition précédente, il résulte clairement la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1. — *Soit une suite exacte de A-modules*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

(1) *L'élévation de M est définie si, et seulement si, les élévations de M' et M'' sont définies.*

(2) (a) $e(M') \leqq e(M)$,
(b) $e(M'') \leqq e(M)$,
(c) $e(M) \leqq e(M') + e(M'')$.

DÉFINITION. — Si A est un anneau semi-artinien à gauche, on définit l'élévation de l'anneau A comme étant l'élévation du A-module A_s, par suite l'élévation de A n'est pas un ordinal limite.

PROPOSITION 5.2. — *Soit A un anneau semi-artinien à gauche. Les affirmations suivantes sont équivalentes*

(1) $e(A) \leqq \alpha$;

(2) *Pour tout A-module à gauche M,* $e(M) \leqq \alpha$.

Il est trivial que $(2) \Rightarrow (1)$ et $(1) \Rightarrow (2)$ car $e(A) = e(A^{(J)})$ où J est un ensemble d'indices.

PROPOSITION 5.3. — *Soit A semi-artinien à gauche tel que*

$$e(A) = n \qquad (n, \textit{ nombre naturel}).$$

Alors tout A-module à gauche M contient un sous-module propre maximal [i. e. *vérifie la condition* (H)].

Démonstration. — On a la suite $0 \subset M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n = M$. Cependant $M/M_{n-1} = S_1 \oplus \ldots \oplus S_p \oplus \ldots$, où S_i sont des modules simples, il existe donc M' tel que, par exemple, l'on ait $M/M' \cong S_1$, donc M' est maximal dans M.

Remarque. — Si A est semi-artinien à gauche, la condition (H) n'est pas forcément remplies. Par exemple, soit A parfait à droite et non parfait à gauche (*voir* [1], p. 476, exemple), il est semi-artinien à gauche. Si A vérifiait la condition (H), alors, d'après le théorème 1.5 [9], $\mathfrak{R}(A)$ serait T-nilpotent à gauche, mais $A/\mathfrak{R}$ est semi-simple (étant parfait à droite), donc A serait parfait à gauche.

PROPOSITION 5.4. — *Soient A un anneau quelconque, Q un A-module injectif tel que* $e(Q) \leqq \aleph_0$. *Soient* $B = \mathrm{Hom}_A(Q, Q)$ *et* $\mathfrak{R}$ *le radical de Jacobson de B. Alors :*

(1) $\mathfrak{R}$ *est l'ensemble de morphismes* $f: Q \to Q$ *tels que* $\mathrm{Ker} f \supset s_0 Q$;

(2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}^n = 0$;

(3) *$B/\mathfrak{R}$ est un produit d'anneaux d'endomorphismes d'espaces vectoriels sur certains corps.*

Démonstration. — 1° Elle résulte d'un cas classique plus général qui affirme que si Q est un A-module injectif, le radical de Jacobson de B est l'ensemble des morphismes tels que $\operatorname{Ker} f$ soit essentiel.

2° Soit $Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_n \subset \ldots$ tel que $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ et Q_{n+1}/Q_n semi-simple.

Soit $\mathfrak{R}^{(n)}$ l'ensemble des morphismes $f: Q \to Q$ tels que $\operatorname{Ker} f \supset Q_{n-1}$. Si $f \in \mathfrak{R}^{(n)}$, il est clair que $f(Q_{m+n})$ soit contenu dans Q_m, cela entraîne que $R^{(m)}.R^{(n)}$ est contenu dans $R^{(m+n)}$.

En particulier, $\mathfrak{R}^n$ est contenu dans $R^{(n)}$. D'autre part, les morphismes canoniques $Q^n \subset Q$ et $Q \to Q/Q_n$ engendrent les suites exactes :

$$0 \to \operatorname{Hom}(Q/Q_n, Q) \xrightarrow{i_n} \operatorname{Hom}(Q, Q) \xrightarrow{p_n} \operatorname{Hom}(Q_n, Q) \to 0.$$

On observe que $\mathfrak{R}^{(n+1)}$ n'est autre que $\operatorname{Im}(i_n)$. Les applications p_n définissent donc un isomorphisme $B/\mathfrak{R}^{(n+1)} \cong \operatorname{Hom}(Q_n, Q)$. Mais la formule

$$B = \operatorname{Hom}(Q, Q) = \operatorname{Hom}\left(\varinjlim Q_n, Q\right) = \varprojlim \operatorname{Hom}(Q_n, Q) = \varprojlim A/\mathfrak{R}^{(n+1)}$$

montre que B est un anneau séparé et complet pour la filtration définie par les idéaux $\mathfrak{R}^{(n)}$ et par la suite

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}^{(n)} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}^{n} = 0.$$

3° On voit facilement que $B/\mathfrak{R} = \operatorname{Hom}_A(Q_0, Q_0)$, où Q_0 est le socle de Q, semi-simple et, par suite,

$$\operatorname{Hom}_A(Q_0, Q_0) = \prod_{i \in I} \operatorname{Hom}_{F_i}(V_i, V_i),$$

V_i, espaces vectoriels,

COROLLAIRE 5.1. — *Soient A un anneau quelconque et Q un injectif tel que $e(Q) = n$ et soit $B = \operatorname{Hom}_A(Q, Q)$. Si $\mathfrak{R}$ est le radical de Jacobson de B, alors $\mathfrak{R}^n = 0$.*

COROLLAIRE 5.2. — *Soit A un anneau semi-artinien d'élévation finie. Si Q est un injectif, somme finie d'injectifs indécomposables* (i. e. *de longueur au sens de Goldie*), *alors l'anneau $B = \operatorname{Hom}_A(Q, Q)$ est semi-primaire.*

(Un anneau est dit semi-primaire si son radical de Jacobson $\mathfrak{R}$ est tel que $\mathfrak{R}^n = 0$ pour un certain n et si $A/\mathfrak{R}$ est semi-simple.)

Démonstration. — Si $e(A)=n$, alors $e(Q)\leq n$ et donc $\mathfrak{R}^n=0$. D'autre part, $B/\mathfrak{R}$ est semi-simple, car le socle Q_0 de Q contient un nombre fini de modules simples.

Ce corollaire généralise un résultat donné dans [9], théorème 3.1.

Exemples d'anneaux semi-artiniens d'élévation finie :

1° Tout anneau artinien est d'élévation finie.

2° Soit l'anneau $B=\prod_{i\in I}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ où Card I est infini. Notons $\mathfrak{a}$ l'idéal de B égal à $\sum_{i\in I}\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ et soit A le plus petit sous-anneau de B contenant $\mathfrak{a}$ et l'élément unité de B. Il est clair que A est semi-artinien d'élévation n.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bass (Hyman). — Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 95, 1960, p. 466-494.

[2] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre*. Chap. 8 : Modules et anneaux semi-simples. — Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1261; *Bourbaki*, 23).

[3] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre commutative*. Chap. 1 et 2. — Paris, Hermann, 1961 (*Act. scient. et ind.*, 1290; *Bourbaki*, 27).

[4] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre commutative*. Chap. 3 et 4. — Paris, Hermann, 1961 (*Act. scient. et ind.*, 1293; *Bourbaki*, 28).

[5] Fort (Jacques). — Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 262, 1966, série A, p. 1239-1242.

[6] Fort (Jacques). — Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module, *Math. Z.*, t. 103, 1968, p. 363-388.

[7] Gabriel (Pierre). — Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 323-448 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1961).

[8] Năstăsescu (C.) et Popescu (N.). — Sur la structure des objets de certaines catégories abéliennes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 262, 1966, Série A, p. 1295-1297.

[9] Renault (Guy). — Sur les anneaux A, tels que tout A-module à gauche non nul contient un sous-module maximal, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 264, 1967, Série A, p. 622-624.

[10] Störrer (Hans H.). — Sur les épimorphismes dans la catégorie des anneaux commutatifs, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 266, 1968, Série A, p. 263-265.

(Manuscrit reçu le 10 juin 1968.)

Constantin Năstăsescu,
Institut de Mathématiques
de l'Académie de la R. S. R.,
rue M. Eminescu, 47,
Bucuresti 9 (Roumanie).

Nicolae Popescu,
Institut de Mathématiques
de l'Académie de la R. S. R.,
rue M. Eminescu, 47,
Bucuresti 9 (Roumanie).