JEAN LERAY

Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe. (Problème de Cauchy. III.)

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 81-180

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__81_0>

Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 81 à 180.

LE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL SUR UNE VARIÉTÉ ANALYTIQUE COMPLEXE (PROBLÈME DE CAUCHY, III)

PAR

JEAN LERAY

(Paris)

A Marston MORSE,
en témoignage de mon admiration
et de mon affection, J. L.

INTRODUCTION.

L'objet de cet article est d'étendre aux variétés analytiques complexes les formules fondamentales de la théorie d'une variable complexe : *résidus*, *intégrale de Cauchy*, *dérivation d'une intégrale fonction d'un paramètre*.

Cela ne peut être fait dans l'anneau des formes différentielles méromorphes : la classe-résidu d'une forme différentielle fermée méromorphe peut ne contenir aucune forme holomorphe; nous envisageons *sur une variété analytique* des fonctions et *des formes non nécessairement analytiques*.

Les formules qu'établit cet article nous permettront ultérieurement de poursuivre l'étude du problème de Cauchy. Cet article-ci n'utilise pas cette étude.

Nous supposons connus les éléments du calcul différentiel extérieur et de la topologie algébrique : *voir* [7], [12], [16].

1. **Notations.** — *X désigne une variété analytique complexe* : elle est sans singularité; l désigne sa dimension complexe; x un de ses points, $(x_1, \ldots, x_l)$ des coordonnées analytiques locales de x.

$\mathrm{Re}(x_1)$, $\mathrm{Im}(x_1)$ sont les parties réelle et imaginaire de x_1; $\bar{x}_1$ en est l'imaginaire conjuguée.

S_i, S'_j, S'' *désignent des sous-variétés analytiques complexes de* X, *sans singularité, de codimension complexe* 1 : S_i est défini, près de chacun de ses points y, par une équation locale irréductible

$$S_i: \quad s_i(x, y) = 0,$$

où $s_i(x, y)$ est une fonction numérique, holomorphe, de x, définie près de y et telle que $ds_i \not\equiv 0$ pour $x = y$. (Nous prenons toujours $dy = 0$). Rappelons que la donnée de S_i et de y définit s_i au produit près par une fonction de x, holomorphe près de y, ne s'annulant pas. Les variétés $S_1, \ldots, S_m$ sont dites être en position générale quand, en chaque point y de $S_i \cap \ldots \cap S_j$ $(1 \leqq i < \ldots < j \leqq m)$, $ds_i(x, y), \ldots, ds_j(x, y)$ sont des fonctions linéairement indépendantes de dx. Nous supposons les variétés. $S_i (i = 1, \ldots, m)$, $S'_j (j = 1, \ldots, M)$, S'' *en position générale*; nous notons

$$S = S_1 \cap \ldots \cap S_m; \qquad S' = S'_1 \cup \ldots \cup S'_M \qquad (S' \text{ est vide si } M = 0).$$

$X - S$ désigne le complémentaire de S dans X; $S - S \cap S'$ sera parfois noté $S - S'$.

Nous nommons fonction régulière sur X toute fonction numérique complexe f de $x \in X$, telle que $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ soient fonctions *indéfiniment dérivables* des variables $\mathrm{Re}(x_k)$ et $\mathrm{Im}(x_k)$. Nous nommons *forme régulière sur* X toute forme différentielle extérieure, $\varphi(x)$, à coefficients numériques complexes, fonctions indéfiniment dérivables, de $\mathrm{Re}(x_k)$ et $\mathrm{Im}(x_k)$. Sa restriction à S est une forme sur S, que nous notons $\varphi \mid S$. La forme $\varphi(x)$, régulière sur X, est dite *fermée* quand

$$d\varphi = 0.$$

Si elle est homogène en $(dx, d\bar{x})$, son degré est noté $\mathrm{d}^{\mathrm{o}}(\varphi)$. On dit que la forme $\varphi(x)$, régulière sur $X - S_1$, a sur S_1 *une singularité polaire d'ordre* p quand

$$s_1(x, y)^p \varphi(x)$$

est une forme de x, régulière au point y, quel que soit $y \in S_1$. On dit $\varphi(x)$ *holomorphe*, si φ est une forme extérieure en $dx_1, \ldots, dx_l$, à coefficients fonctions holomorphes de x. Le gradient d'une fonction holomorphe $s(x)$ est noté

$$s_x = (s_{x_1}, \ldots, s_{x_l})$$

ainsi :

$$ds = s_x . dx.$$

Le hessien de $s(x)$ est noté

$$\mathrm{Hess}_x[s] = \text{détermin.} \frac{\partial^2 s}{\partial x_i \, \partial x_j}.$$

Nous notons F une application holomorphe dans X *d'une autre variété* analytique complexe $X^\star$:

$$F:\quad X^\star \to X$$

$F^\star\varphi$ désigne la forme $\varphi(F(x^\star))$; elle est régulière (ou fermée ou holomorphe) quand φ l'est.

$F^\star S$ désigne l'ensemble des points de $X^\star$ que F applique sur S; nous *supposerons* F, S et S' tels que les $F^\star S_i$ et $F^\star S'_j$ soient des sous-variétés analytiques, régulières de $X^\star$, en position générale et que les équations

$$s_i[F(x^\star),\, F(y^\star)] = 0 \qquad \text{et} \qquad s'_j[F(x^\star),\, F(y^\star)] = 0$$

en soient des équations locales irréductibles.

2. Forme-résidu. — $(m = 1,\ S = S_1,\ s = s_1)$.

Définition (H. Poincaré, G. de Rham). — Soit $\varphi(x)$ une forme *fermée* sur $X - S$, ayant sur S *une singularité polaire d'ordre* 1. Alors au voisinage de chaque point y de S, existent des formes de x régulières, $\psi(x, y)$ et $\theta(x, y)$, telles que

$$(2.1)\qquad \varphi(x) = \frac{ds(x, y)}{s(x, y)} \wedge \psi(x, y) + \theta(x, y).$$

$\psi(x, y)\,|\,S$ est une forme *fermée*, ne dépendant que de φ; on la nomme *forme-résidu* de φ; nous la notons

$$\text{rés}[\varphi] = \frac{s\varphi}{ds}\bigg|_S.$$

Si $\omega(x, y)$ est une forme régulière près de y, telle que $\omega(x, y)/s(x, y)$ soit *indépendante* de y et *fermée* sur $X - S$ nous écrivons donc

$$\text{rés}\left[\frac{\omega(x, y)}{s(x, y)}\right] = \frac{\omega}{ds}\bigg|_S.$$

En justifiant la définition précédente le chapitre 1 prouvera aisément le

Théorème. — Si φ est holomorphe sur $X - S$, alors rés$[\varphi]$ est holomorphe.

Exemple. — Supposons *fermée* la forme

$$(2.2)\qquad \varphi(x) = \frac{f(x, y)}{s(x, y)}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l;$$

cela revient à supposer *holomorphe* en x la fonction $f(x, y)$; alors

$$(2.3)\quad \frac{f\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l}{ds}\bigg|_S = f\frac{dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_l}{s_{x_1}} = -f\frac{dx_1 \wedge dx_3 \wedge \ldots \wedge dx_l}{s_{x_2}} = \ldots$$

Exemple. — Si $l = 1$ et si $f(x)$ est une fonction méromorphe sur X, à pôles tous simples, alors $\text{rés}[f(x)\,dx]$ est l'ensemble des nombres que Cauchy nomme résidus de $f(x)$.

Le chapitre 1 complètera comme suit le théorème précédent :

THÉORÈME (G. de RHAM). — Supposons la forme φ *holomorphe* sur $X - S$, fermée, à singularité polaire d'ordre 1 sur S. Permettons à S d'avoir des points singuliers en lesquels

$$s_x = 0, \qquad \text{Hess}_x[s] \neq 0;$$

(ce sont des points doubles quadratiques). Soit y l'un d'eux; pour que $\text{rés}[\varphi]$ soit holomorphe en y (c'est-à-dire soit la restriction à S de formes holomorphes sur X au voisinage de y), il faut et il suffit que :

ou bien : $d^{0}(\varphi) < l$

ou bien : $d^{0}(\varphi) = l$ et $f(y, y) = 0$, f étant défini par (2.2).

Les propriétés suivantes de la forme résidu sont évidentes : Si $\chi(x)$ est une forme *fermée* sur X,

$$\frac{\omega \wedge \chi}{ds}\bigg|_S = \frac{\omega}{ds}\bigg|_S \wedge (\chi \mid S). \tag{2.4}$$

Si l'application F de $X^{\star}$ dans X vérifie les hypothèses qu'énonce le n° 1

$$F^{\star}\left(\frac{\omega}{ds}\bigg|_S\right) = \frac{F^{\star}\omega}{dF^{\star}s}\bigg|_{F^{\star}S}. \tag{2.5}$$

En particulier, quand F est l'application identique de S' dans X :

$$\text{La restriction de } \frac{\omega}{ds}\bigg|_S \text{ à } S' \text{ est } \frac{\omega \mid S'}{ds}\bigg|_{S\cap S'}. \tag{2.6}$$

$$\text{La restriction de } \frac{\omega}{ds}\bigg|_S \text{ à } S' \text{ est nulle quand } \omega \mid S' = 0. \tag{2.7}$$

MAJORATION. — En chaque point de S on a

$$\left|\frac{\omega}{ds}\right|_S = \frac{|\,\omega\,|_X}{|\,ds\,|_X} \tag{2.8}$$

où $|\,ds\,|_X = |\,s_x\,|$; $|\,\omega\,|_X$ et $\left|\dfrac{\omega}{ds}\right|_S$ ont un sens analogue, qu'explique le n° 16.

RÈGLE D'ORIENTATION. — Si γ est une chaîne de X dont le bord $\partial\gamma$ est dans S, alors

$$\frac{\omega(x, y)}{s(x, y)} > 0 \text{ sur } \gamma \text{ entraîne } \frac{\omega(x, y)}{ds(x, y)}\bigg|_S < 0 \text{ sur } \partial\gamma. \tag{2.9}$$

3. L'homologie compacte et la formule du résidu. — Notons $H_c(X, S')$ le groupe d'homologie de X relativement à S', à supports compacts, à coefficients entiers, avec division : c'est le quotient du groupe d'homologie compacte proprement dit de (X, S') par son groupe de torsion (ensemble de ses éléments d'ordre fini); $h(X, S')$ désigne une classe d'homologie $\in H_c(X, S')$: c'est une classe de cycles de (X, S') (c'est-à-dire de chaînes de X à bord dans S'), deux à deux homologues dans (X, S').

Supposons :

γ cycle de (X, S'), φ forme fermée, $\varphi \mid S' = 0$, $d^0(\varphi) = \dim \gamma$;

alors $\int_\gamma \varphi(x)$ ne dépend que de la classe $h(X, S')$ de γ et est noté $\int_{h(X,S')} \varphi(x)$.

$(S, S \cap S')$ va être noté (S, S').

On connaît *le triplet exact* (1) d'homomorphismes :

i, induit par l'immersion de S dans X;

p, induit par l'application identique de X sur X;

∂, nommé *bord*, induit par l'opération bord des chaînes :

$$\begin{tikzcd} & H_c(X, S') \arrow[dl, "p"'] & \\ H_c(X, S \cup S') \arrow[rr, "\partial"] & & H_c(S, S') \arrow[ul, "i"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c} \dim p = \dim i = 0 \\ \dim \partial = -1 \end{array}$$

Supposons $m = 1$, $S = S_1$: il existe *un second triplet exact* d'homomorphisme :

ι, induit par l'immersion de $X - S$ dans X;

ϖ, induit par l'intersection par S;

δ, nommé *cobord*, induit par le bord des chaînes d'intersection par S donnée :

$$\begin{tikzcd} & H_c(X, S') \arrow[dl, "\varpi"'] & \\ H_c(S, S') \arrow[rr, "\delta"] & & H_c(X - S, S') \arrow[ul, "\iota"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c} \dim \varpi = -2, \ \dim \iota = 0 \\ \dim \delta = 1 \end{array}$$

Explicitons la

Définition du cobord δ. — *La classe d'homologie $\delta h(S, S')$ a pour éléments les bords des chaînes de X dont l'intersection par S est un cycle de la classe $h(S, S')$ — ces chaînes étant en position générale par rapport à S; leurs bords étant somme d'une chaîne de $X - S$ et d'une chaîne de S'*

Note. — Voici la justification de cette terminologie : si S' est vide, un

(1) *exact* signifie ceci : l'ensemble des valeurs prises par un de ces homomorphismes est exactement l'ensemble des valeurs où s'annule le suivant.

isomorphisme classique [S. LEFSCHETZ [7], chap. V, § 4, (32.1), p. 203; X et S sont orientées, vu chap. VIII, § 8 (47.10)] identifie $H_c(S, S') = H_c(S)$ et $H_c(X - S, S') = H_c(X - S)$ aux cohomologies à supports compacts de S et $X - S$; il identifie δ à l'homomorphisme cobord de la cohomologie à supports compacts (*voir*, par exemple, [8]). Cela permet une généralisation du présent article : voir F. NORGUET [18].

NOTE. — H. Poincaré et G. de Rham emploient seulement δ^{-1}, sans signaler que δ est un homomorphisme.

FORMULE DU RÉSIDU. — *Si* $\dfrac{\omega(x, y)}{s(x, y)}$ *est une forme indépendante de* y, *fermée sur* $X - S$, *nulle sur* S', *ayant sur* S *une singularité polaire d'ordre* 1, *alors*

$$\int_{\delta h(S,S')} \frac{\omega(x, y)}{s(x, y)} = 2\pi i \int_{h(S,S')} \frac{\omega(x, y)}{ds(x, y)} \qquad (\pi = 3{,}14\ldots).$$

Exemple. — $l = 1$, X est le plan des nombres complexes, S et S' sont deux points distincts de X. Alors $H_c(X, S') = 0$; $H_c(S, S')$ a pour base la classe d'homologie du point S; $H_c(X, S \cup S')$ a pour base la classe d'homologie d'un arc d'origine S' et d'extrémité S; $H_c(X - S, S')$ a pour base la classe d'homologie d'une circonférence orientée, faisant un tour autour de S, dans le sens positif; ∂ transforme la classe d'homologie de *cet arc* $\widehat{S'S}$ *en* celle de *son extrémité* S; δ transforme la classe d'homologie de S *en* celle de cette *circonférence entourant* S.

Le chapitre 2 précise la définition de δ et prouve ce qu'affirme le n° 3.

4. La cohomologie (définition de G. de Rham); sa dualité avec l'homologie. — Nous nommons formes sur (X, S') les formes régulières sur X qui s'annulent sur S'; elles constituent une algèbre $\Omega(X, S')$ sur le corps des nombres complexes. Soit $d\Omega$ l'image de Ω par la différentiation extérieure d : deux formes ω_1 et ω_2 sur (X, S') sont dites cohomologues, ce qu'on note

$$\omega_1 \sim \omega_2,$$

quand

$$\omega_1 - \omega_2 \in d\Omega(X, S').$$

Les formes fermées sur (X, S') constituent une sous-algèbre $\Phi(X, S')$ de $\Omega(X, S')$; $d\Omega(X, S')$ est un idéal de $\Phi(X, S')$.

Les classes de formes fermées cohomologues entre elles sont nommées classes de cohomologie de (X, S'); une telle classe est notée $h^*(X, S')$; ces classes sont les éléments de l'*anneau de cohomologie* à coefficient numériques complexes :

$$H^*(X, S') = \Phi(X, S')/d\Omega(X, S').$$

Si $\varphi(x)$ est une forme fermée sur (X, S'), l'intégrale $\int_{h(X,S')} \varphi(x)$ ne dépend que de la classe $h^\star(X, S')$ de φ, vu la formule de Stokes $\int_\gamma d\omega = \int_{\partial\gamma} \omega$; cette intégrale sera notée

$$\int_{h(X,S')} h^\star(X, S').$$

On sait que l'homomorphisme (n° 1)

$$F^\star: \quad \Omega(X, S') \to \Omega(X^\star, F^\star S')$$

induit un homomorphisme

$$F^\star: \quad H^\star(X, S') \to H^\star(X^\star, F^\star S');$$

il est nommé : homomorphisme réciproque de l'application $F: X^\star \to F$.

On connaît *le triplet exact* d'homomorphismes :

$i^\star$, réciproque de l'immersion de S dans X;

$p^\star$, réciproque de l'application identique de X sur lui-même;

$\partial^\star$, nommé *cobord*, induit par la différentiation des formes de restriction à S donnée :

$$\begin{tikzcd} & H^\star(X, S') \arrow[dl, "i^\star"'] & \\ H^\star(S, S') \arrow[rr, "\partial^\star"] & & H^\star(X, S \cup S') \arrow[ul, "p^\star"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c} d^0(i^\star) = d^0(p^\star) = 0 \\ d^0(\partial^\star) = 1 \end{array}$$

$p^\star$ et $i^\star$ sont des homomorphismes d'*algèbres*, $\partial^\star$ *d'espaces vectoriels* sur le corps des membres complexes; $H^\star(X, S')$, $H^\star(S, S')$ et $H^\star(X, S \cup S')$ sont des algèbres sur $H^\star(X)$; la multiplication à droite de leurs éléments par $h^\star(X)$ commute avec $p^\star$, $i^\star$ et $\partial^\star$. Ce triplet $p^\star$, $i^\star$, $\partial^\star$ est le *transposé* du triplet p, i, ∂ (n° 3) :

$$\int_{ih(S,S')} h^\star(X, S') = \int_{h(S,S')} i^\star h^\star(X, S');$$

$$\int_{ph(X,S')} h^\star(X, S \cup S') = \int_{h(X,S')} p^\star h^\star(X, S \cup S');$$

$$\int_{\partial h(X, S\cup S')} h^\star(S, S') = \int_{h(X, S \cup S')} \partial^\star h^\star(S, S').$$

Voici enfin les théorèmes de dualité, dont le second implique le premier :

THÉORÈME DE FAIBLE DUALITÉ. — Si $h(X, S')$ vérifie

$$\int_{h(X,S')} h^\star(X, S') = 0 \qquad \text{pour tout} \quad h^\star(X, S') \in H^\star(X, S'),$$

alors $h(X, S') = 0$.

Si $h^\star(X, S')$ vérifie

$$\int_{h(X,S')} h^\star(X, S') = 0 \qquad \text{pour tout} \quad h(X, S') \in H_c(X, S'),$$

alors $h^\star(X, S') = 0$.

THÉORÈME DE FORTE DUALITÉ. — *A toute fonction linéaire, homogène, numérique complexe $l[h]$, définie sur $H_c(X, S')$, correspond un et un seul $h^\star(X, S')$ tel que*

$$l[h(X, S')] = \int_{h(X,S')} h^\star(X, S').$$

Le chapitre 3 précisera la définition du triplet $p^\star$, $i^\star$, $\partial^\star$, prouvera qu'il est le transposé de p, i, ∂, en déduira les théorèmes de dualité, que S. Lefschetz et G. de Rham ont prouvés dans le seul cas où S' est vide (c'est-à-dire dans le cas de l'homologie et de la cohomologie absolues).

Nos théorèmes de dualité n'exigent pas X et S' analytiques complexes; il suffirait de les supposer indéfiniment différentiables.

5. **La classe-résidu.** — Voici *le théorème d'existence de la classe-résidu* :

THÉORÈME 1. — *Soit $\varphi(x)$ une forme* **fermée** *sur $X - S$*, **nulle** *sur S'; elle est cohomologue dans $(X - S, S')$ à des formes ayant sur S des singularités polaires d'ordre 1; l'ensemble de leurs formes-résidus est une classe de cohomologie de (S, S').*

Cette classe est nommée *classe-résidu* de φ et est notée

$$\text{Rés}[\varphi] = \text{Rés}[h^\star(X - S, S')],$$

$h^\star(X - S, S')$ étant la classe de φ.

Évidemment :

$$\text{rés}[\varphi] \in \text{Rés}[\varphi] \qquad \text{si} \quad \text{rés}[\varphi] \text{ existe};$$

on a la *formule du résidu* :

$$\int_{\delta h(S,S')} \varphi = 2\pi i \int_{h(S,S')} \text{Rés}[\varphi].$$

EXEMPLE. — Si $l = 1$ et si $f(x)$ est une fonction méromorphe sur X, alors $\text{Rés}[f(x)\, dx]$ est l'ensemble des nombres nommés par Cauchy résidus de $f(x)$. (En effet $x^m\, dx \sim 0$ si $m \neq -1$).

NOTE. — Le théorème précédent serait *faux* si l'on remplaçait l'anneau Ω des formes *régulières* par celui des formes *holomorphes* (*voir* n° 59).

Le chapitre 4 prouvera le théorème précédent et les propriétés de la classe-résidu; c'est le n° 7 qui formulera ces propriétés.

6. Composition des cobords δ et des résidus. — En composant les homomorphismes

$$H_c(S, S') \dots \xrightarrow{\delta} H_c(S_1 \cap \dots \cap S_i - S_{i+1} \cup \dots \cup S_m, S')$$
$$\xrightarrow{\delta} \dots H_c(X - S_1 \cup \dots \cup S_m, S')$$
$$H^*(X - S_1 \cup \dots \cup S_m, S') \dots \xrightarrow{\text{Rés}} H^*(S_1 \cap \dots \cap S_i - S_{i+1} \cup \dots \cup S_m, S')$$
$$\xrightarrow{\text{Rés}} H^*(S, S')$$

on définit le *cobord composé* δ^m et le *résidu composé* Rés^m :

$$\delta^m : \quad H_c(S, S') \to H_c(X - S_1 \cup \dots \cup S_m, S')$$
$$\text{Rés}^m : \quad H^*(X - S_1 \cup \dots \cup S_m, S') \to H^*(S, S').$$

On a *la formule du résidu composé* : si $\varphi(x)$ est une forme fermée sur $X - S_1 \cup \dots \cup S_m$, nulle sur S', alors

$$\int_{\delta^m h(S, S')} \varphi = (2\pi i)^m \int_{h(S, S')} \text{Rés}^m[\varphi]. \tag{6.1}$$

On définit de même $\text{rés}^m[\varphi]$ quand $\varphi(x)$ est une forme *fermée* sur $X - S_1 \cup \dots \cup S_m$ et que

$$s_1(x, y) \dots s_m(x, y)\varphi(x)$$

est régulière près de chaque point y de S; c'est une forme fermée sur S.

$$\text{rés}^m[\varphi] \in \text{Rés}^m[\varphi].$$

Nous notons

$$\text{rés}^m[\varphi] = \left.\frac{s_1 \dots s_m \varphi}{ds_1 \wedge \dots \wedge ds_m}\right|_S.$$

Si $\omega(x, y)$ est une forme régulière près de y telle que

$$\omega(x, y)/s_1(x, y) \dots s_m(x, y)$$

soit *indépendante* de y et *fermée* sur $X - S_1 \cup \dots \cup S_m$, nous écrivons donc

$$\text{rés}^m\left[\frac{\omega(x, y)}{s_1(x, y) \dots s_m(x, y)}\right] = \left.\frac{\omega}{ds_1 \wedge \dots \wedge ds_m}\right|_S. \tag{6.2}$$

Les propriétés de rés s'étendent immédiatement à rés^m : si $\omega(x, y)$ est *holomorphe* près de y sur $X - S_1 \cup \dots \cup S_m$, alors $\left.\frac{\omega}{ds_1 \wedge \dots \wedge ds_m}\right|_S$ est holomorphe près de y sur S.

Si $\chi(x)$ est une forme *fermée* sur X,

$$(6.3)\qquad \left.\frac{\omega \wedge \chi}{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m}\right|_S = \left.\frac{\omega}{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m}\right|_S \wedge \chi.$$

Si l'application F de $X^\star$ dans X vérifie les hypothèses qu'énonce le n° 1,

$$(6.4)\qquad F^\star\left(\left.\frac{\omega}{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m}\right|_S\right) = \left.\frac{F^\star\omega}{dF^\star s_1 \wedge \ldots \wedge dF^\star s_m}\right|_{F^\star S}.$$

En particulier :

(6.5) La restriction de $\left.\dfrac{\omega}{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m}\right|_S$ à S' est $\left.\dfrac{\omega \mid S'}{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m}\right|_{S\cap S'}$.

(6.6) La restriction de $\left.\dfrac{\omega}{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m}\right|_S$ à S' est nulle si $\omega \mid S' = 0$.

Le chapitre 5 justifiera la définition de rés^m; il prouvera que ces compositions de rés, Rés et δ sont *associatives* et *anticommutatives* : en particulier

$$\left.\left.\frac{\omega}{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_{m-1}}\right|_{S_1\cap\ldots\cap S_{m-1}}\middle/ ds_m\right|_S = \left.\frac{\omega}{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m}\right|_S;$$

une permutation paire (impaire) de $S_1, \ldots, S_m$ multiplie

$$\left.\frac{\omega}{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m}\right|_{S_1\cap\ldots\cap S_m}$$

par $+1$ (par -1).

Voici comment nous formulerons les propriétés de Rés que prouve le chapitre 4 et les propriétés de Rés^m que prouve le chapitre 5 :

7. Notation différentielle et propriétés de la classe-résidu. — Il est commode (*voir* par exemple le n° 8) d'étendre à la classe-résidu d'*une forme à singularité polaire quelconque* la notation différentielle (6.2) de la forme-résidu.

Notation. — Soit $\omega(x, y)$ une forme de x, *régulière* près de $y \in S$, *nulle* sur S' et telle que

$$(7.1)\qquad \frac{\omega(x, y)}{s_1^{1+q}(x, y)\ldots s_m^{1+r}(x, y)}$$

soit *indépendant* de y et *fermé* sur un voisinage de S; nous remplaçons X par ce voisinage de S et nous posons

$$(7.2)\qquad \left.\frac{d^{q+\ldots+r}\omega}{[ds_1(x, y)]^{1+q}\wedge\ldots\wedge[ds_m(x, y)]^{1+r}}\right|_{(S, S')} = q!\ldots r!\,\text{Rés}^m\frac{\omega}{s_1^{1+q}\ldots s_m^{1+r}}.$$

Dans ce symbole (7.2), nous omettons souvent : $\Big|_{(S, S')}$

Ce symbole (7.2) désigne donc *une classe de cohomologie de* (S, S'). Le *degré* de cette classe est $d^0(\omega) - m$; *elle ne dépend que de la classe de cohomologie* $h^\star(X - S_1 \cup \ldots \cup S_m, S')$ *de la forme fermée* (7.1) : elle est *indépendante* des choix de $\omega(x, y)$, $s_i(x, y)$.

Propriétés. — Si $q \leqq Q, \ldots, r \leqq R$, on a vu (7.2) :

$$(7.3) \qquad \frac{d^{q+\ldots+r}\omega}{ds_1^{1+q} \wedge \ldots \wedge ds_m^{1+r}} = \frac{q!}{Q!} \cdots \frac{r!}{R!} \frac{d^{Q+\ldots+R}[s_1^{Q-q} \ldots s_m^{R-r}\omega]}{ds_1^{1+Q} \wedge \ldots \wedge ds_m^{1+R}}.$$

Le n° 44 établira les formules que voici :

$$(7.4) \qquad \begin{aligned} &\text{Rés} \frac{d^{p+\ldots+q}}{ds_1^{1+p} \wedge \ldots \wedge ds_{m-1}^{1+q}} \left[\frac{\omega}{s_m^{1+r}} \right] \Bigg|_{(S_1 \cap \ldots \cap S_{m-1} - S_m, S'} \\ &= \frac{1}{r!} \frac{d^{p+\ldots+q+r}\omega}{ds_1^{1+p} \wedge \ldots \wedge ds_{m+1}^{1+q} \wedge ds_m^{1+r}} \Bigg|_{(S, S')}. \end{aligned}$$

Une permutation paire (ou impaire) de $s_1, \ldots, s_m$ multiplie (7.2) par $+1$ (ou par -1) : c'est ce que rappellent les symboles $\wedge$ au dénominateur de (7.2). Soit F une application de $X^\star$ dans X vérifiant les hypothèses qu'énonce le n° 1 :

$$(7.5) \qquad F^\star \frac{d^{q+\ldots+r}\omega}{ds_1^{1+q} \wedge \ldots \wedge ds_m^{1+r}} \Bigg|_{(S, S')} = \frac{d^{q+\ldots+r} F^\star\omega}{[dF^\star s_1]^{1+q} \wedge \ldots \wedge [dF^\star s_m]^{1+r}} \Bigg|_{(F^\star S, F^\star S')}.$$

Si $\chi(x)$ est une forme *fermée* sur X et si $h^\star(X)$ est sa classe de cohomologie, alors

$$(7.6) \qquad \frac{d^{q+\ldots+r}[\omega(x, y) \wedge \chi(x)]}{ds_1^{1+q} \wedge \ldots \wedge ds_m^{1+r}} \Bigg|_{(S, S')} = \frac{d^{q+\ldots+r}\omega}{ds_1^{1+q} \wedge \ldots \wedge ds_m^{1+r}} \cdot h^\star(X).$$

Considérons le triplet exact ci-contre (*cf.* n° 4 et, pour S'', n° 1) :

$$\begin{tikzcd} & H^\star(S, S') \arrow[dl, "i^\star"'] & \\ H^\star(S \cap S'', S') \arrow[rr, "\partial^\star"] & & H^\star(S, S'' \cup S') \arrow[ul, "p^\star"'] \end{tikzcd}$$

on a, ω vérifiant toujours les mêmes hypothèses :

$$(7.7) \qquad p^\star \frac{d^{q+\ldots+r}\omega}{ds_1^{1+q} \wedge \ldots \wedge ds_m^{1+r}} \Bigg|_{(S, S'' \cup S')} = \frac{d^{q+\ldots+r}\omega}{ds_1^{1+q} \wedge \ldots \wedge ds_m^{1+r}} \Bigg|_{(S, S'}$$

si $\omega \mid S'' = 0$;

$$(7.8) \qquad i^\star \frac{d^{q+\ldots+r}\omega}{ds_1^{1+q} \wedge \ldots \wedge ds_m^{1+r}} \Bigg|_{(S, S')} = \frac{d^{q+\ldots+r}\omega}{ds_1^{1+q} \wedge \ldots \wedge ds_m^{1+r}} \Bigg|_{(S \cap S'', S')};$$

$$(7.9)\quad \partial^\star \frac{d^{q+\ldots+r-m}\psi}{ds_1^q\wedge\ldots\wedge ds_m^r}\Bigg|_{(S\cap S'', S')}$$
$$= (-1)^m \frac{d^{q+\ldots+r}}{ds_1^{1+q}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+r}}$$
$$\left[\frac{s_1}{q}\cdots\frac{s_m}{r}\left(d\psi - q\frac{ds_1}{s_1}\wedge\psi - \ldots - r\frac{ds_m}{s_m}\wedge\psi\right)\right]\Bigg|_{(S, S''\cup S')}$$

si $\psi(x, y)$ est une forme de x, *régulière* près de $y\in S$, *nulle* sur S' et telle que

$$\frac{\psi(x, y)}{s_1^q(x, y)\ldots s_m^r(x, y)}$$

soit *indépendant* de y et soit *fermé sur* S''.

NOTE. — Quand $q\dfrac{ds_1}{s_1}\wedge\psi+\ldots+r\dfrac{ds_m}{s_m}\wedge\psi$ est régulier sur S, la formules (7.3) permet de simplifier (7.9) qui se réduit à

$$(7.10)\quad \partial^\star \frac{d^{q+\ldots+r-m}\psi}{ds_1^q\wedge\ldots\wedge ds_m^r}\Bigg|_{(S\cap S'', S')}$$
$$= (-1)^m \frac{d^{q+\ldots+r-m}}{ds_1^q\wedge\ldots\wedge ds_m^r}$$
$$\left(d\psi - q\frac{ds_1}{s_1}\wedge\psi - \ldots - r\frac{ds_m}{s_m}\wedge\psi\right)\Bigg|_{(S, S''\cup S')}.$$

8. Cas où les S_i ont des équations globales. — Nous supposons que les S_i ont des équations globales, près de S : il existe des fonctions $s_i(x)$, holomorphes près de S, telles que S_i ait pour équation près de S :

$$S_i\colon s_i(x) = 0.$$

Alors *le symbolisme du calcul des dérivées partielles* entre en jeu :

NOTATIONS. — *Cas* $m = 1$. — Soit $\omega(x)$ une forme régulière près de S, telle que

$$(8.1)\qquad ds(x)\wedge d\omega(x) = 0,\qquad \omega\mid S' = 0;$$

nous notons

$$(8.2)\qquad \frac{d^q\omega}{ds^q}\Bigg|_{(S, S')} = \frac{d^q(ds\wedge\omega)}{ds^{1+q}}\Bigg|_{(S, S')} = \frac{d^{q-1}(d\omega)}{ds^q}\Bigg|_{(S, S')}$$

après avoir constaté l'égalité des deux derniers termes.

Cas $m > 1$. — Soit $\omega(x)$ une forme régulière près de S, telle que

$$(8.3)\qquad ds_1(x)\wedge\ldots\wedge ds_m(x)\wedge d\omega(x) = 0,\qquad \omega\mid S' = 0;$$

nous notons de même

$$(8.4)\qquad \left.\frac{\partial^{q+\ldots+r}\omega}{\partial s_1^q\ldots\partial s_m^r}\right|_{(S,\,S')} = \left.\frac{d^{q+\ldots+r}[ds_1\wedge\ldots\wedge ds_m\wedge\omega]}{ds_1^{1+q}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+r}}\right|_{(S,\,S')}$$

PROPRIÉTÉS. — *Une permutation de* $s_1, \ldots, s_m$ *n'altère pas* (8.4).

Cas où $\omega(x)$ *est de degré nul.* — $\omega(x)$ est donc une fonction; (8.3) exprime que c'est une fonction holomorphe de $s_1, \ldots, s_m$, nulle sur S' :

$$\omega(x) = f[s_1(x), \ldots s_m(x)],$$

f étant une fonction de $[s_1, \ldots, s_m]$, *holomorphe* au point $[0, \ldots, 0]$; si S et S' se coupent, alors f est identiquement nulle et (8.4) l'est aussi. Sinon, $(S, S') = (S)$ et

$$\left.\frac{\partial^{q+\ldots+r}\omega}{\partial s_1^q\ldots\partial s_m^r}\right|_{(S)}$$

est le produit du nombre complexe

$$\left.\frac{\partial^{q+\ldots+r}f[s_1, \ldots s_m]}{\partial s_1^q\ldots\partial s_m^r}\right|_{s_1=\ldots=s_m=0}$$

par la classe de cohomologie unité de S.

C'est ce qui justifie nos notations, dont les énoncés suivants montrent la commodité :

Formule de Leibnitz. — Si $\omega(x)$ vérifie (8.3) et si $ds_1\wedge\ldots\wedge ds_m\wedge d\pi = 0$ alors

$$(8.5)\qquad \left.\frac{\partial^{Q+\ldots+R}[\omega\wedge\pi]}{\partial s_1^Q\ldots\partial s_m^R}\right|_{(S,\,S')} = \sum_{\substack{0\leqq q\leqq Q\\ \ldots\ldots\ldots\\ 0\leqq r\leqq R}} \frac{Q!}{q!\,(Q-q)!}\cdots\frac{R!}{r!\,(R-r)!} \cdot \left.\frac{\partial^{q+\ldots+r}\omega}{\partial s_1^q\ldots\partial s_m^r}\right|_{(S,\,S')} \cdot \left.\frac{\partial^{Q-q+\ldots+R-r}\pi}{\partial s_1^{Q-q}\ldots\partial s_m^{R-r}}\right|_{(S)}.$$

Formule du changement de variables. — Soient

$$t_1(s_1, \ldots, s_m), \ldots t_m(s_1, \ldots, s_m)$$

m fonctions holomorphes au point $(0, \ldots, 0)$, nulles en ce point, où

$$\frac{D(t)}{D(s)} \neq 0;$$

alors

$$(8.6)\qquad \left.\frac{\partial^{Q+\ldots+R}\omega}{\partial s_1^Q\ldots\partial s_m^R}\right|_{(S,\,S')} = \sum_{\substack{0<q+\ldots+r\leqq\\ Q+\ldots+R}} C_{Q,\ldots,R}^{q,\ldots,r} \left.\frac{\partial^{q+\ldots+r}\omega}{\partial t_1^q\ldots\partial t_m^r}\right|_{(S,\,S')}$$

les nombres complexes $C^{q,\dots,r}_{Q,\dots,R}$ étant indépendants de (S', S'), de ω et de son degré : ils ne dépendent que de l'allure des fonctions $t_i(s_1, \dots, s_m)$ au point $(0, \dots, 0)$; ce sont les coefficients de la formule analogue à (8.5) du calcul différentiel classique.

Les formules (7.5), ..., (7.8) restent valables quand on y remplace

$$\frac{d^{q+\dots+r}}{ds_1^{1+q}\wedge\dots\wedge ds_m^{1+r}} \quad \text{par} \quad \frac{\partial^{q+\dots+r}}{\partial s_1^q\dots\partial s_m^r}.$$

(7.9) devient ·

$$(8.7)\quad \begin{cases} \partial^* \left.\dfrac{\partial^{q+\dots+r}\psi}{\partial s_1^q\dots\partial s_m^r}\right|_{(S\cap S'', S')} = \left.\dfrac{\partial^{q+\dots r}[d\psi]}{\partial s_1^q\dots\partial s_m^r}\right|_{(S, S''\cup S')} \\ \text{si} \quad ds_1\wedge\dots\wedge ds_m\wedge d\psi \mid S'' = 0 \qquad \text{et} \qquad \psi \mid S' = 0. \end{cases}$$

Le chapitre 6 établira ces propriétés en même temps que leurs extensions (théorèmes des nos 47, 50, 51) à

$$\frac{\partial^{q+\dots+r+u+\dots+v}}{\partial s_1^q\dots\partial s_n^r\, ds_{n+1}^{1+u}\wedge\dots\wedge ds_m^{1+v}}$$

dont il donnera la définition et dont l'emploi est nécessaire pour étendre au cas $m > 1$ la seconde des égalités (8.2).

9. La formule de Cauchy-Fantapiè, dont le n° 56 donne l'énoncé et une démonstration due à Hans Lewy, permet de calculer quelques résidus.

Notations. — X est un domaine convexe d'un espace *affin*, complexe, de dimension complexe l; Ξ est l'espace vectoriel des fonctions linéaires, numériques complexes, définies sur cet espace affin ; Ξ^* est l'ensemble des sous-variétés complexes, planes, de codimension 1, de cet espace affin : Ξ^* est un espace *projectif* complexe, de dimension l, image de Ξ. La valeur de $\xi\in\Xi$ en $x\in X$ est notée

$$\xi.x = \xi_0 + \xi_1 x_1 + \dots + \xi_l x_l,$$

$(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_l)$ étant les coordonnées de ξ et $(x_1, \dots, x_l)$ celles de x. Hors de la variété plane de Ξ^*, image de la variété de Ξ d'équation $\xi_l = 0$, nous utilisons

$$(\xi_0/\xi_l, \dots, \xi_l/\xi_l)$$

comme coordonnées *locales* du point ξ^* de Ξ^*, image du point $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_l)$ de Ξ^*. Une forme différentielle $\pi(\xi)$ est donc une forme *sur* Ξ^* si, et seulement si elle ne dépend de ξ que par l'intermédiaire des quotients $\xi_0/\xi_l, \dots, \xi_{l-1}/\xi_l$. Nous notons :

$$\omega(x) = dx_1\wedge\dots\wedge dx_l;$$

$$\omega^*(\xi) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \xi_k\, d\xi_0\wedge\dots\wedge d\xi_{k-1}\wedge d\xi_{k+1}\wedge\dots\wedge d\xi_l;$$

puisque

$$\xi_0^{l+1}\, d(\xi_1/\xi_0) \wedge \ldots \wedge d(\xi_l/\xi_0) = \omega^*(\xi),$$

$g(\xi, x)\omega^*(\xi) \wedge \omega(x)$ est une forme sur l'image dans $\Xi^* \times X$ du domaine d'holomorphie de g, quand *g est homogène en ξ de degré $-l-1$*; cette forme de $\Xi^* \times X$, étant *holomorphe* et *de degré égal à la dimension complexe de l'espace*, est *fermée* et *s'annule sur toute sous-variété* analytique complexe.

Donnons-nous un point y de X. Notons y^* la sous-variété plane de Ξ^* d'équation

$$y^* : \quad \xi.y = 0 \qquad (y^* \subset \Xi^*).$$

Dans le produit topologique $\Xi^* \times X$ considérons la *sous-variété plane P* et la *quadrique Q* que décrit le point (ξ^*, x) quand :

$$P : \quad \xi.y = 0; \qquad Q : \quad \xi.x = 0; \qquad P \text{ et } Q \subset \Xi^* \times X).$$

Quand ξ^* décrit la sous-variété analytique complexe y^*, munie de son orientation naturelle, alors le point (ξ^*, y) de $\Xi^* \times X$ décrit un cycle compact de $P \cap Q$; notons sa classe d'homologie

$$(-1)^{\frac{l(l-1)}{2}} h(P \cap Q);$$

nous prouverons que c'est *une base du sous-groupe de $H_c(P \cap Q)$* de dimension $2l-2$.

La formule du résidu transforme la formule de Cauchy-Fantappiè en la suivante, que nous nommerons *seconde formule de Cauchy-Fantappiè* :

THÉORÈME 2. — *Soit $f(x)$ une fonction holomorphe sur X on a*

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{h(P \cap Q)} \frac{d^{l-1}[f(x)\omega^*(\xi) \wedge \omega(x)]}{d(\xi.x) \wedge [d(\xi.y)]^l}.$$

NOTE. — On peut énoncer cette formule comme suit :

$$\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \left. \frac{d^{l-1}[f(x)\omega^*(\xi) \wedge \omega(x)]}{d(\xi.x) \wedge [d(\xi.y)]^l} \right|_{(P \cap Q)}$$

est la base du sous-groupe de $H^*(P \cap Q)$ de degré $2l-2$.

Ce théorème a le corollaire suivant, que nous nommerons *troisième formule de Cauchy-Fantappiè*; S désigne une sous-variété analytique complexe de $\Xi^* \times X$ en position générale par rapport à P et à Q :

COROLLAIRE 2. — *Soient p et ∂ les deux homomorphismes (appartenant à deux triplets différents) :*

$$p : \quad H_c(P \cap Q) \to H_c(P \cap Q, S); \qquad \partial : \quad H_c(P, Q \cup S) \to H_c(P \cap Q, S);$$

s'il existe $h(P, Q\cup S)$ *tel que*

$$ph(P\cap Q)=\partial h(P, Q\cup S),$$

alors

$$f(y)=\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}}\int_{h(P,Q\cup S)}\frac{d^l[f(x)\omega^*(\xi)\wedge\omega(x)]}{[d\xi.y]^{l+1}}.$$

Le chapitre 7 établira les propositions qui précèdent.

10. Dérivation d'une intégrale, fonction d'un parmètre. — Reprenons les notations du n° 1, en supposant que $m=1$ et que $S=S_1$ dépend d'un paramètre $t\in T$; S' n'en dépend pas. Limitons-nous au cas où S appartient à une série *linéaire* de sous-variétés : son équation locale $s(x, y, t)=0$ est linéaire en t; T est un domaine d'un espace *affin*.

Soit $\omega(x, y)$ une forme de x, régulière près de y, nulle sur S'; soit un entier q; supposons que

$$\frac{\omega(x, y)}{s(x, y, t)^q}$$

est une forme de x, *indépendante de* y et *fermée* sur $X-S$. Le n° 63 en déduira que, si $q\neq 0$:

(10.1) $\qquad s_t(x, y, t)/s(x, y, t)$ est *indépendant* de y;

(10.2) $\qquad \dfrac{ds}{s}\wedge\omega$ est (pour $dt=0$) *indépendant* de t

Nous supposons cela encore vrai si $q=0$.

Si $0<q$, donnons-nous une classe d'homologie $h(S, S')$, à supports compacts, de (S, S'), dépendant *continûment de* t [c'est-à-dire : près de chaque point de T, il existe un cycle de cette classe dépendant continûment de t]. Si $q\leqq 0$ donnons-nous une classe $h(X, S\cup S')$ dépendant continûment de t et notons $h(S, S')=\partial h(X, S\cup S')$ son bord :

$$\partial:\quad H_c(X, S\cup S')\to H_c(S, S').$$

Nous choisissons :

$$\dim h(X, S\cup S')=d^0(\omega);\qquad \dim h(S, S')=d^0(\omega)-1.$$

Définissons la fonction :

(10.3) $$J(t)=\int_{h(X,S\cup S')}\frac{[-s(x, y, t)]^{-q}}{(-q)!}\,\omega(x, y)\qquad\text{si}\quad q\leqq 0,$$

(10.4) $$J(t)=\int_{h(S,S')}\frac{d^{q-1}\omega}{ds^q}\qquad\text{si}\quad 0<q.$$

Ses dérivées sont données par *la formule de dérivation de l'intégrale*, *fonction d'un paramètre complexe* :

THÉORÈME 3. — *$J(t)$ est une fonction holomorphe de t. Si le polynome P est homogène de degré p, on a*

$$(10.5) \quad P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)J(t) = \int_{h(X, S\cup S')} P(-s_t)\frac{[-s]^{-p-q}}{(-p-q)!}\omega \qquad \text{si} \quad p+q \leqq 0,$$

$$(10.6) \quad P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)J(t) = \int_{h(S, S')} \frac{d^{p+q-1}[P(-s_t)\omega]}{ds^{p+q}} \qquad \text{si} \quad 0 < p+q.$$

Le chapitre 8 établira ces formules; il les déduira de formules de dérivation plus générales.

11. Ramification d'une intégrale, fonction d'un paramètre. — Dans les hypothèses du n° 10, remplaçons l'hypothèse que $S(t)$ n'a pas singularité par celles-ci : $S(t)$ a *au plus un point singulier* $z(t)$; c'est un point double quadratique où $s_t \neq 0$:

$$(11.1) \qquad s(x, y, t) = 0, \qquad s_x = 0, \qquad s_t \neq 0 \qquad \mathrm{Hess}_x[s] = 0$$
$$\text{pour} \quad x = z(t);$$

enfin $z(t)$ est dans une partie compacte de X étrangère à S'.

Notons K l'ensemble des points t de T tels que ce point singulier $z(t)$ existe; le n° 64 (chap. 9) prouvera ceci : K est une *sous-variété* analytique complexe de T; sa codimension complexe est 1. Évidemment *K est l'enveloppe des sous-variétés* analytiques complexes *planes de T*, d'équation $s(x, y, t) = 0$ [ces sous-variétés dépendent du paramètre x; mais non de y, vu (10.1)]. Soit

$$K: \quad k(t, y) = 0$$

l'équation locale de K, quand $z(t)$ est voisin de y; ce même n° 64 montrera qu'on peut choisir k tel que

$$(11.2) \qquad k_t(t, y) = -s_t(x, y, t)\,|_{x=z(t)} \qquad \text{sur} \quad K.$$

Nous supposons que $h(X, S(t)\cup S')$ et $h(S(t), S')$ dépendent *continûment de t le long de K* (c'est-à-dire : elle dépendent continûment de t quand t décrit K; de plus, quand t est voisin d'un point o de K, les classes $h(X, S(t)\cup S')$ et $h(S(t), S')$ sont voisines des classes $h(X, S(o)\cup S')$ et $h(S(o), S')$: elles contiennent des cycles voisins, *sauf* près de $z(o)$, de cycles de $h(X, S(o)\cup S')$ et $h(S(o), S')$].

Ainsi $h(X, S(t)\cup S')$ et $h(S(t), S')$ *ont plusieurs déterminations, continues hors de K*; *le théorème d'E. Picard et S. Lefschetz*, que rappelle le n° 65, décrit *leur ramification sur K*; il emploie *les classes évanouissantes*

$$e(X, S(t)\cup S'), \qquad e(S(t), S') = \partial e(X, S\cup S') \qquad (t \notin K)$$
$$\dim e(X, S\cup S') = l.$$

I. Fáry a donné une définition très simple de ces classes évanouissantes : $e(X, S \cup S')$ est la classe d'une boule $\beta(t)$ à bord dans $S(t)$; $\beta(t)$ est voisine de $z(o)$. Soit W un voisinage de $z(o)$; soit $e(W, S)$ la classe de $\beta(t)$ dans (W, S); soit

$$e(S \cap W) = \partial e(W, S) :$$

l'immersion de W dans X applique $e(W, S)$ sur $e(X, S \cup S')$ et $e(S \cap W)$ sur $e(S, S')$.

Une formule de S. Lefschetz précise le théorème d'E. Picard et S. Lefschetz, en employant l'indice de Kronecker

$$(11.3) \qquad n = (-1)^{\frac{l(l+1)}{2}} KI[e(S \cap W), h(S, S')].$$

Soit P un polynome, *homogène de degré* p, tel que

$$(11.4) \qquad P(s_t(x, y, t)) \neq 0 \quad \text{pour} \quad t = 0,\ x = y = z(o);$$

supposons W assez petit et t assez près de o pour que

$$P(s_t(x, y, t)) \neq 0 \quad \text{quand} \quad x \in W,\ y = z(o);$$

définissons, quand $d^0(\omega) = l$ et que t est voisin de $o \in K$:

$$(11.5) \qquad \begin{aligned} j_P(t) &= \int_{e(W,S)} \frac{[-s(x, y)]^{p-q}}{(p-q)!} \frac{\omega(x, y)}{P(-s_t)} \quad \text{si} \quad q \leq p, \\ &= \int_{e(S \cap W)} \frac{d^{q-p-1}}{ds^{q-p}} \left[\frac{\omega(x, y)}{P(-s_t)}\right] \quad \text{si} \quad p < q; \end{aligned}$$

(le n° **67** justifie cette définition); d'après le théorème 3 (n° **10**), si P et Q sont deux tels polynomes,

$$(11.6) \qquad P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) j_{PQ}(t) = j_Q(t).$$

Nous pouvons maintenant énoncer *le théorème de ramification d'une intégrale, fonction d'un paramètre* :

Théorème 4. — *Si $d^0(\omega) \neq l$ et $\leq 2l - 2$, alors $J(t)$ est holomorphe en chaque point o de K* (c'est-à-dire sur un voisinage de o dans T).

Supposons $d^0(\omega) = l$ et l impair; alors

$$j_P(t) k(t, y)^{q-p-\frac{l}{2}} \quad et \quad J(t) + \frac{n}{2} j_1(t)$$

sont holomorphes en chaque point o de K.

Supposons $d^0(\omega) = l$ et l pair; alors $j_P(t)$ est holomorphe en chaque *point o de K et s'annule* $p+\frac{l}{2}-q$ *fois sur* K;

$$J(t)-\frac{n}{2\pi i}P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_P(t)\log k(t,y)]$$

est holomorphe en chaque point o de K, pourvu que $q-\frac{l}{2}\leqq p$.

On peut déterminer explicitement la partie singulière de $J(t)$ sur K; voici *l'expression de la partie principale de la partie singulière de* $J(t)$ quand ω est holomorphe :

Corollaire 4. — *Supposons* $\omega(x,y)$ **holomorphe**, *de degré* l :

$$\omega(x,y)=\rho(x,y)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_l.$$

On a sur K, si k vérifie (11.2) :

$$(11.7)\qquad j_1(t)k(t,y)^{q-\frac{l}{2}}=\pm\frac{(2\pi)^{\frac{l}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{l}{2}-q\right)}\frac{\rho(x,y)}{\sqrt{\mathrm{Hess}_x[s(x,y)]}},$$

$$=\pm(2\pi)^{\frac{l}{2}-1}\Gamma\left(q-\frac{l}{2}\right)\frac{\rho}{\sqrt{\mathrm{Hess}_x s}}\qquad \textit{si}\ \ l\ \textit{est}\ \textbf{impair},$$

$$=0\qquad \textit{si}:\ \ l\ \textit{est}\ \textbf{pair}\ \textit{et} < 2q.$$

$$(11.8)\qquad J(t)k(t,y)^{q-\frac{l}{2}}=\pm ni(2\pi)^{\frac{l}{2}-1}\Gamma\left(q-\frac{l}{2}\right)\frac{\rho}{\sqrt{\mathrm{Hess}_x s}}$$

si : *l est* **pair** *et* $< 2q$.

Le chapitre 9 prouvera ce théorème et ce corollaire.

12. La distribution que définit une intégrale, fonction d'un paramètre réel. — Modifions comme suit les hypothèses du n° 11 : T est désormais un domaine d'un espace *affin réel*; K est une sous-variété *réelle* de T; $d^0(\omega)=l$; $h(X, S\cup S')$ et $h(S, S')$ sont définis univoquement et dépendent *continûment* de t sur $T-K$ [au sens qu'explique le n° 10] et le long de K [n° 11].

Si l est *impair*, l'indice de Kronecker $n(t)$ que définit (11.3) est constant de chaque côté de K; (sa discontinuité à travers K est un entier pair).

Définition de la distribution $J(t)$, *quand l est impair.* — $J(t)$ désignera désormais *la distribution* qui vérifie les conditions suivantes : *hors de* K, $J(t)$ est la fonction, (10.3) ou (10.4), étudiée ci-dessus; *en chaque point o de* K, la distribution

$$J(t)+\frac{1}{2}P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[n(t)j_P(t)]\qquad\left(q-\frac{l+1}{2}\leqq p\right)$$

est une fonction *holomorphe* sur T.

Si l est *pair*, l'indice de Kronecker n que définit (11.3) est indépendant de t. On peut alors définir un entier $N(t)$, constant de chaque côté de K, tel que $2h + N(t)e$ soit régulièrement continu, au sens que définit le n° 75; (la discontinuité de $N(t)$ à travers K a la parité de n).

Définition de la distribution $J(t)$ quand l est pair. — $J(t)$ désignera désormais la distribution qui vérifie les conditions suivantes : *hors de K*, $J(t)$ est la fonction, (10.3) ou (10.4), étudiée ci-dessus : *en chaque point* o de K, la distribution

$$J(t) - \frac{n}{2\pi i} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_P(t) \log |k(t, y)|] + \frac{1}{2} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[N(t) j_P(t)]$$
$$\left(q - \frac{l}{2} \leqq p\right)$$

est une fonction *holomorphe* sur T.

NOTE. — Les conditions précédentes sont indépendantes du choix P; elles définissent une et une seule distribution $J(t)$.

NOTE. — La distribution $J(t)$ est la fonction $J(t)$ elle-même quand

$$2q \leqq l + 1$$

(puisqu'on peut alors choisir $P = 1$).

Voici *la formule de dérivation de l'intégrale*, *fonction d'un paramètre réel :*

THÉORÈME 5. — *Convenons que l'intégrale* (10.4) *représente la distribution $J(t)$. Alors la distribution $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) J(t)$ est donnée par les formules de dérivation* (10.5) *et* (10.6) *du théorème* 3.

Le chapitre 10 justifiera ce n° 12.

CHAPITRE 1. — La forme-résidu.

Ce chapitre 1 justifie le n° 2.

13. La division des formes.

LEMME 13.1. — Soit $\varphi(x)$ une forme régulière sur X. Il faut et suffit que

$$ds(x, y) \wedge \varphi(x) = 0$$

pour qu'existe une forme $\psi(x, y)$ régulière près de y, telle que

$$\varphi(x) = ds(x, y) \wedge \psi(x, y).$$

$\psi \mid S$ est défini sans ambiguité. Si φ est holomorphe, on peut choisir ψ holomorphe en x.

PREUVE. — On choisit en y des coordonnées telles que $s = x_1$; les propriétés énoncées sont évidentes.

Cessons un instant d'exclure les singularités de S.

LEMME 13.2. — (de RHAM). Soit y un point double quadratique de S :

$$s_x(x, y) = 0, \ \mathrm{Hess}_x[s] \neq 0 \qquad \text{pour} \quad x = y.$$

Soit $\varphi(x)$ une forme *holomorphe* sur X.
Pour qu'existe près de y une forme *holomorphe* $\psi(x, y)$ telle que

$$\varphi(x) = ds(x, y) \wedge \psi(x, y),$$

il faut et il suffit que :

$$ds(x, y) \wedge \varphi(x) = 0, \qquad \text{si} \quad d^0(\varphi) < l;$$
$$a(y) = 0, \qquad \text{si} \quad d^0(\varphi) = l \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) = a(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l.$$

PREUVE pour $d^0(\varphi) < l$. — Reportons-nous au n° 1 (p. 346-348) du Mémoire [15] de G. de RHAM. Il s'agit de diviser près de y la forme φ (que de Rham note α) par la forme ds (que de Rham note ω); le A-module M (de Rham) est A lui-même; l'anneau A est celui des fonctions $a(x)$ holomorphes sur une boule de centre y, assez petite pour que

$$z_1(x) = \frac{\partial s}{\partial x_1}, \ldots, \ z_l(x) = \frac{\partial s}{\partial x_l}$$

y constistuent des coordonnées locales (que de Rham note $y_1, \ldots, y_l$). Les conclusions de G. de Rham valent, car cet anneau possède la propriété (P) : si $z_{k+1}(x)a(x)$ appartient à l'idéal des fonctions holomorphes nulles pour $z_1 = \ldots = z_k = 0$, alors $a(x)$ appartient à cet idéal.

PREUVE pour $d^0(\varphi) = l$. — Reportons-nous à la fin du n° 1 (p. 348) du Mémoire de G. de Rham : on voit que ψ existe si et seulement si $a(x)$ appartient à l'idéal $(z_1, \ldots, z_l)$; cela veut dire : $a(y) = 0$.

14. Définition de la forme-résidu. — Justifions cette définition, qu'énonce le n° 2 et prouvons le premier des théorèmes qu'il énonce; il s'agit de prouver la

PROPOSITION. — Soit $\varphi(x)$ une forme *fermée* sur $X - S$, ayant sur S une singularité polaire *d'ordre* 1.

Alors, près de chaque point y de S, existent des formes régulières de x, ψ et θ, telles que :

$$\varphi(x) = \frac{ds(x,y)}{s(x,y)} \wedge \psi(x,y) + \theta(x,y); \tag{14.1}$$

la restriction de $\psi(x, y)$ à S ne dépend que de φ; c'est une forme fermée sur S; elle est holomorphe si $\varphi(x)$ est holomorphe.

PREUVE. — 1°) *Existence de ψ et θ.* — Puisque $d\varphi = 0$ et que $s\varphi$ est régulier prés de y,

$$d(s\varphi) = ds \wedge \varphi$$

est régulier près de y; ds l'annule; d'après le lemme **13**.1, il existe donc une forme $\theta(x, y)$, régulière près de y, telle que :

$$ds \wedge \varphi = ds \wedge \theta.$$

D'où :

$$ds \wedge (s\varphi - s\theta) = 0,$$

puisque $s\varphi - s\theta$ est régulière près de y, il existe, vu ce même lemme, une forme $\psi(x, y)$, régulière près de y, telle que :

$$s\varphi - s\theta = ds \wedge \psi$$

Nous avons ainsi défini, près de y, des formes ψ et θ, vérifiant (**14**.1).

2°) *Si φ est holomorphe*, on peut choisir θ et ψ holomorphes en x.

3°) *$\psi \mid S$ ne dépend que des données φ et s.* — Pour le prouver, il suffit de prouver que

$$\frac{ds}{s} \wedge \psi + \theta = 0 \quad \text{entraîne} \quad \psi \mid S = 0, \tag{14.2}$$

si ψ et θ sont réguliers près de y. Supposons donc

$$ds \wedge \psi + s\theta = 0; \tag{14.3}$$

d'où

$$ds \wedge \theta = 0;$$

vu le lemme **13**.1, il existe donc une forme ω, régulière près de y, telle que

$$\theta = ds \wedge \omega;$$

en portant cela dans (**14**.3), on obtient

$$ds \wedge (\psi + s\omega) = 0;$$

vu ce même lemme, il existe donc une forme ϖ, régulière près de y, telle que

$$\psi + s\omega = ds \wedge \varpi$$

d'où

$$\psi \mid S = 0.$$

4°) $\psi \mid S$ *ne dépend que de* φ. — Soit $s^\star$ un autre choix de s : $s/s^\star$ est une fonction de x holomorphe près de y, où elle ne s'annule pas;

$$\varphi = \frac{ds^\star}{s^\star} \wedge \psi + \theta^\star, \qquad \text{où} \quad \theta^\star = \theta + d\left(\log \frac{s}{s^\star}\right) \wedge \psi$$

est régulière près de y; $\psi \mid S$ est donc le même pour les deux choix s et $s^\star$.

5°) $\psi \mid S$ *est fermé*. — En différentiant (14.1), il vient, puisque $d\varphi = 0$:

$$-\frac{ds}{s} \wedge d\psi + d\theta = 0;$$

d'où, vu (14.2) :

$$d\psi \mid S = 0.$$

15. Holomorphie de la forme-résidu en les points doubles quadratiques de S **(de Rham).** — Supposons $s\varphi$ holomorphe en y et y point double quadratique de S :

$$s_x = 0, \qquad \mathrm{Hess}_x[s] \neq 0 \qquad \text{pour} \quad x = y.$$

Le lemme de G. de Rham va permettre de choisir $\theta(x, y)$ puis $\psi(x, y)$ holomorphes au point y : le théorème de G. Rham sera prouvé.

Exposons ce choix, si facile que de Rham a négligé d'énoncer et de prouver son théorème.

Employons en y des coordonnées locales telles que

$$y = (0, \ldots, 0), \qquad s = x_1^2 + \ldots + x_l^2.$$

Choix de θ *pour* $d^0(\varphi) < l - 1$. — D'après ce lemme, on peut choisir θ holomorphe en x au point y et tel que

$$(15.1) \qquad ds \wedge \varphi = ds \wedge \theta.$$

Choix de θ *pour* $d^0(\varphi) = l - 1$. — D'après ce même lemme, il est encore possible de choisir θ holomorphe et vérifiant (15.1), si

$$(15.2) \qquad ds \wedge \varphi = a(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l \qquad \text{et} \qquad a(y) = 0.$$

Il suffit donc d'établir (15.2). Or

$$\varphi(x) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{l} (-1)^{k-1} b_k(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge dx_l,$$

les $b_k(x)$ étant holomorphes en $x = 0$; donc

$$ds \wedge \varphi = d(s\varphi) = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial b_k}{\partial x_k} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l;$$

la condition (15.2) s'écrit donc

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{\partial b_k(0)}{\partial x_k} = 0. \tag{15.3}$$

Or $d\varphi = 0$ signifie

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{\partial s}{\partial x_k} b_k = s \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial b_k}{\partial x_k}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{l} x_k b_k = (x_1^2 + \ldots + x_l^2) \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial b_k}{\partial x_k};$$

en appliquant à cette relation $\sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ et en faisant $x = 0$, on obtient (15.3).

C. Q. F. D.

Choix de θ *pour* $d^0(\varphi) = l$. — On a $d\varphi = ds \wedge \varphi = 0$; on choisit $\theta = 0$.

Choix de ψ *pour* $d^0(\varphi) < l$. — D'après le lemme 13.2 (de RHAM), on peut choisir ψ holomorphe en x au point y et tel que

$$s\varphi - s\theta = ds \wedge \psi.$$

Choix de ψ *pour* $d^0(\varphi) = l$. — Alors

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y)}{s(x, y)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l;$$

d'après ce même lemme, on peut choisir ψ, vérifiant les conditions précédentes, si $f(y, y) = 0$. Sinon, l'expression (2.3) de rés $[\varphi]$ montre que

$$\frac{1}{\text{mes}\,\gamma} \int_\gamma \text{rés}\,[\varphi]$$

n'est pas borné au voisinage de y, si γ est une chaîne de S de dim $l-1$; donc rés $[\varphi]$ n'est pas la restriction à S d'une forme holomorphe au point y.

16. Majoration de la forme-résidu. — Nous allons prouver la formule :

$$\left|\frac{\omega}{ds}\right|_S \leq \frac{|\omega|_X}{|ds|_X} \text{ en chaque point } S. \tag{2.8}$$

Les notations employées sont les suivantes. On construit sur X une métrique hermitienne (voir par exemple : A. LICHNEROWICZ, [12], p. 232). Au point o de S considéré, on choisit des coordonnées locales analytiques $(x_1, \ldots, x_l)$ telles qu'en ce point la longueur $|dx|$ du vecteur dx ait l'expression

$$(16.1) \qquad |dx|^2 = |dx_1|^2 + \ldots + |dx_l|^2;$$

en ce point la longueur $|s_x|$ du gradient s_x de la fonction holomorphe s a donc l'expression

$$|s_x|^2 = |s_{x_1}|^2 + \ldots + |s_{x_l}|^2;$$

nous définissons

$$|ds|_X = |s_x|.$$

Plus généralement, étant donnée une forme sur X :

$$\omega(x) = \sum_{\substack{i<\ldots<j \\ \alpha<\ldots<\beta}} c_{i\ldots j\alpha\ldots\beta}(x)\, dx_i \wedge \ldots \wedge dx_j \wedge d\bar{x}_\alpha \wedge \ldots \wedge d\bar{x}_\beta,$$

nous définissons $|\omega|_X$ au point o par la formule :

$$|\omega|_X^2 = \sum_{\substack{i<\ldots<j \\ \alpha<\ldots<\beta}} |c_{i\ldots j\alpha\ldots\beta}(o)|^2$$

Si ϖ est une forme sur S, nous définissons de même $|\varpi|_S$ en employant la restriction à S de la métrique choisie sur X;

$$\left|\frac{\omega}{ds}\right|_S \text{ désigne } \left|\left.\frac{\omega}{ds}\right|_S\right|_S.$$

NOTE. — On sait que ces « longueurs » $|\omega|_X$, $|\varpi|_S$ sont indépendantes du choix des coordonnées locales vérifiant (16.1).

PREUVE de (2.8). — Choisissons ces coordonnées telles que

$$s(x) = x_1 f(x);\ f(o) \neq o.$$

Alors, sur S,

$$ds(x) = f(x)\, dx_1;$$

or, vu la définition de $\left.\dfrac{\omega}{ds}\right|_S$ au moyen de (2.1),

$$\omega = ds \wedge \psi + s\theta,\ \left.\frac{\omega}{ds}\right|_S = \psi \mid S;$$

les coefficients de $\left.\dfrac{\omega}{ds}\right|_S$ sont donc les quotients par $f(x)$ de certains des coefficients de ω; donc

$$\left|\frac{\omega}{ds}\right|_S \leq \frac{|\omega|_X}{|f(x)|}, \text{ alors que } |ds|_X = |s_x| = |f(x)|;$$

d'où (2.8).

Chapitre 2. — L'homologie compacte et la formule du résidu.

Ce chapitre 2 justifie le n° 3.

17. La définition de l'homologie compacte d'une variété est classique. Utilisons, par exemple, le traité de S. Lefschetz [7].

On recouvre X par un complexe analytique « topologique » K [chap. VIII, § 8, (45.4) et (46.5)], tel que S et S' soient les supports de certains de ses sous-complexes; notons K' le sous-complexe de K couvrant S'. Par définition [chap. VIII, § 7, (39.1) et (40.2)], ce complexe « topologique » K est « simple » et « localement fini », donc [chap. III, § 1, n° 3] « star-finite » et « closure-finite ».

$H_c(X, S')$ est le groupe d'homologie de K relativement à K', à supports compacts, à coefficients entiers, avec division [Group of K mod K' : chap. III, § 5, (23.4); § 8, (40.2)] : ce groupe est indépendant du choix de K [chap. VIII, § 2, (11.2), qui s'étend sans peine aux complexes infinis].

18. La définition du triplet i, p, ∂ est donnée partiellement par S. Lefschetz [7], qnand S' est vide [chap. III, § 8, (40.2) et § 5, n° 23, où (23.2) nomme i injection et p projection; ∂ est omis]. Rappelons cette définition.

Les cycles de (S, S') constituant la classe $h(S, S')$ appartiennent à une même classe $h(X, S')$, qui est nommée $ih(S, S')$.

Les cycles de (X, S') constituant la classe $h(X, S')$ appartiennent à une même classe $h(X, S \cup S')$, qui est nommée $ph(X, S')$.

Les bords des cycles de $(X, S \cup S')$ qui constituent la classe $h(X, S \cup S')$ appartiennent à une même classe $h(S, S')$, qui est nommée $\partial h(X, S \cup S')$.

L'exactitude de ce triplet i, p, ∂ est aujourd'hui classique; sa preuve est d'ailleurs immédiate.

19. Exactitude du triplet ι, ϖ, $\delta (m = 1, S = S_1)$. — Ce n° 19 donne une première définition de ce triplet, qui rend évidente cette exactitude. Le n° 20 transformera cette première définition en celle qu'énonce le n° 3.

Définition d'arcs λ. — Près de S, on peut tracer une famille d'arcs réguliers, orientés, λ, ayant les propriétés que voici :

1° leurs origines appartiennent à S;

2° la réunion des arcs λ issus d'un point y de S est une variété régulière, de dimensions réelle 2, en position générale par rapport à S; [on peut prendre $s(x, y)$ comme coordonnée d'un point x de cette variété, qui est donc orientée];

3° par chaque point $x \notin S$, proche de S, passe un et un seul arc λ;

4° un arc λ ne rencontre pas S'_j ou lui appartient entièrement.

Preuve *quand S' est vide*. — On définit sur X une métrique riemannienne régulière (Whitney) et l'on prend pour arcs λ les géodésiques orthogonales à S.

Preuve *quand S' n'est pas vide*. — On choisit cette métrique telle que S et S'_j ($j = 1, 2, \ldots, M$) se coupent orthogonalement; on considère les vecteurs unitaires tangents à ces géodésiques; on modifie ce champ de vecteurs hors de S, de façon que le vecteur attaché à un point de S'_j soit tangent à S'_j; on prend pour arcs λ les trajectoires du champ de vecteurs ainsi construit.

Définition *d'un voisinage V de S*. — On choisit V tel que :

1° chaque point de V et de son adhérence $\overline{V}$ appartiennent à un arc λ;

2° chaque arc λ coupe la frontière $\dot{V}$ de V en un point unique.

Les rétractions μ et ν. — Notons $\lambda(x)$ l'arc λ unique qui passe par un point $x \in \overline{V} - S$. Notons $\mu(x)$ son origine : c'est un point de S. Notons $\nu(x)$ et nommons extrémité de $\lambda(x)$ le point ou $\lambda(x)$ coupe $\dot{V}$; si $x \in X - V$, définissons $\nu(x) = x$.

μ est une rétraction de $\overline{V}$ sur S, appliquant chaque S'_j en elle-même;

ν est une rétraction de $X - S$ sur $X - V$, appliquant chaque S'_j en elle-même.

Note. — Notons $\mu^{-1}(y)$ l'ensemble des points de $\overline{V}$ que μ applique sur un point y de S; $\overline{V}$ est un espace fibré, de fibre $\mu^{-1}(y)$, de base S. La figure ci-contre représente cette fibre, à laquelle $\overline{V}$ se réduit si $l = 1$.

L'isomorphisme ν de $H_c(X - S, S')$ sur $H_c(X - V, S')$. — La rétraction ν est homotope à l'identité dans $X - S$ (*cf.* S. Lefschetz [6], chap. 1, (47.6) : déformation-rétraction]; elle transforme les cycles (homologues) de $(X - S, S')$ en cycles (homologues) de $(X - V, S')$ et définit un *isomorphisme sur*, conservant la dimension :

$$\nu : H_c(X - S, S') \to H_c(X - V, S').$$

L'isomorphisme μ^* de $H_c(S, S')$ sur $H_c(X, (X - V) \cup S')$. — Soit σ un simplexe de S; soit $\mu^{-1}(\sigma)$ l'ensemble des points de $\overline{V}$ que μ applique sur σ; $\mu^{-1}(\sigma)$ est une cellule, produit topologique de $\mu^{-1}(y)$ et de σ, qui sont orientés; d'où une orientation de cette cellule, qui, ainsi orientée, est notée $\mu^\star\sigma$; d'où un homomorphisme $\mu^\star$ ayant les propriétés suivantes :

$\mu^\star$ transforme une chaîne compacte de S (de $S \cap S'$) en une chaîne compacte de X (de S');
$\mu^\star$ augmente la dimension de 2 (nous écrivons : $\dim \mu^\star = 2$);
$\mu^\star$ commute avec ∂, à des chaînes près de $X - V$.

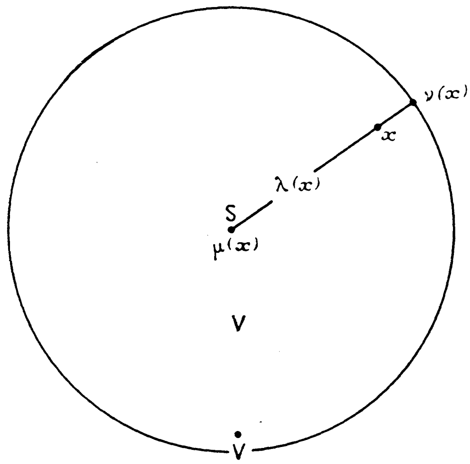

Fig. 1. — La fibre $\mu^{-1}(y)$ de $\overline{V}$.

Cet homomorphisme $\mu^\star$ des chaînes induit donc un homomorphisme :

$$\mu^\star : H_c(S, S') \to H_c(X, (X - V) \cup S'); \ \dim \mu^\star = 2,$$

c'est un *isomorphisme sur*, car il a un inverse : l'*intersection* par la sous-variété S, munie de son orientation naturelle.

Une première définition du triplet ι, ϖ, δ. — Considérons le triplet *exact*, analogue à celui que définit le n° 18 :

$$\begin{array}{ccc} & H_c(X, S') & \\ {}^{p_V}\swarrow & & \nwarrow^{i_V} \\ H_c(X, (X-V)\cup S') & \xrightarrow{\partial_V} & H_c(X-V, S') \end{array} \qquad \begin{array}{l} \dim p_V = \dim i_V = 0 \\ \\ \dim \partial_V = -1. \end{array}$$

Remplaçons dans ce triplet les groupes $H_c(X, (X-V) \cup S')$ et $H_c(X - V, S')$ par les groupes isomorphes $H_c(S, S')$ et $H_c(X - S, S')$; nous obtenons le *triplet exact* :

$$\begin{tikzcd} & H_c(X, S') \arrow[dl, "\varpi"'] & \\ H_c(S, S') \arrow[rr, "\delta"] & & H_c(X-S, S') \arrow[ul, "\iota"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \dim \varpi = -2, \quad \dim \iota = 0 \\ \dim \delta = 1 \end{array}$$

où : $\iota = i_V \nu$; $\varpi = (\mu^\star)^{-1} p_V$; $\delta = \nu^{-1} \partial_V \mu^\star$;

δ est nommé *cobord de l'homologie compacte.*

Le n° 20 va montrer que ce triplet ι, ϖ, δ peut-être défini comme le fait le n° 3.

20. Définition directe de ι, ϖ, δ. — Les définitions précédentes de ι et ϖ s'explicitent aisément :

Définition *de ι.* — Les cycles de $(X - S, S')$ constituant la classe $h(X - S, S')$ appartiennent à une même classe $h(X, S')$, qui est nommée $\iota h(X, S')$.

Définition *de ϖ.* — Les intersections par S des cycles de (X, S'), en position générale par rapport à S et appartenant à la classe $h(X, S')$, appartiennent à une même classe $h(S, S')$, qui est nommée $\varpi h(X, S')$.

La définition précédente de δ s'explicite aisément comme suit :

Une définition particulière du cobord δ. — Notons $\delta_\mu \sigma$ la partie de $\partial \mu^\star(\sigma)$ appartenant à $\dot{V}$; d'où un homomorphisme δ_μ, qui transforme une chaîne γ de S (de $S \cap S'$) en une chaîne $\delta_\mu \gamma$ de $X - S$ (de $S' - S \cap S'$);

$$\partial \delta_\mu = -\delta_\mu \partial; \qquad \dim \delta_\mu = 1.$$

Donc δ_μ induit un homomorphisme

$$\delta : H_c(S, S') \to H_c(X - S, S'); \qquad \dim \delta = 1.$$

La définition générale de δ. — Cette définition qu'énonce le n° 3 et qui montre que δ est indépendant du choix de μ, résulte du

Lemme. — Soit γ une chaîne de X; supposons γ en position générale par rapport à S; $\partial\gamma$ somme d'une chaîne de $X - S$ et d'une chaîne de S'. Soit $h(X - S, S')$ la classe d'homologie de $\partial\gamma$; soit $h(S, S')$ la classe d'homologie de l'intersection $\gamma . S$; ainsi :

$$(20.1)_1 \qquad \gamma . S \in h(S, S') \qquad (20.1)_2 \quad \partial\gamma \in h(X - S, S')$$

Alors

$$(20.2) \qquad \delta h(S, S') = h(X - S, S')$$

PREUVE. — Vu les définitions de ι et de $h(X-S, S')$,

$$\iota h(X-S, S') = 0.$$

Vu l'exactitude du triplet ι, ϖ, δ il existe donc une classe $h_0(S, S')$ telle que

$$(20.3) \qquad h(X-S, S') = \delta h_0(S, S').$$

Soit γ_0 un cycle de $h_0(S, S')$; soit $\gamma_1 = \mu^* \gamma_0$; vu les définitions de μ^* et de δ

$$(20.4)_1 \qquad \gamma_1 . S \in h_0(S, S'), \qquad (20.4)_2 \quad \partial\gamma_1 \in h(X-S, S').$$

De $(20.1)_2$ et $(20.4)_2$ il résulte que

$$\partial(\gamma - \gamma_1) \sim 0 \qquad \text{dans} \quad (X-S, S') :$$

il existe une chaîne γ_2 de $X-S$ et une chaîne γ' de S' telles que

$$\partial(\gamma - \gamma_1) = \partial\gamma_2 + \gamma'.$$

Donc, vu $(20.1)_1$ et $(20.4)_1$, $\gamma - \gamma_1 - \gamma_2$ est un cycle de (X, S') tel que

$$(\gamma - \gamma_1 - \gamma_2) . S \in h(S, S') - h_0(S, S') ;$$

d'où, vu la définition de ϖ :

$$h(S, S') - h_0(S, S') \in \varpi H^*(X, S') ;$$

d'où vu l'exactitude du triplet ι, ϖ, δ :

$$(20.5) \qquad \delta h(S, S') = \delta h_0(S, S').$$

De (20.3) et (20.5) résulte la formule à prouver : (20.2).

21. La formule du résidu $(m = 1)$ résultera du lemme suivant :

NOTATIONS. — On construit aisément une famille de voisinages V_ε de S possédant les propriétés suivantes :

$$V_\varepsilon \subset V ;$$

chaque arc λ coupe la frontière $\dot{V}_\varepsilon$ de V_ε en un point unique ;
V_ε dépend régulièrement d'un paramètre ε $\quad (0 < \varepsilon \leqq 1)$;
$\dot{V}_\varepsilon$ tend vers S quand $\varepsilon \to 0$ (c'est-à-dire : tend vers 0).

Nous notons μ_ε la restriction de μ à $\dot{V}_\varepsilon$ et $\delta_\varepsilon = \delta_{\mu_\varepsilon}$.

LEMME 21. — Soit $\varphi(x)$ une forme régulière sur $X-S$, telle que, près de chaque point y de S, existent des formes régulières de x, $\psi(x, y)$

et $\theta(x, y)$ vérifiant

$$(21.1) \qquad \varphi(x) = \frac{ds(x, y)}{s(x, y)} \wedge \psi(x, y) + \theta(x, y).$$

Alors : la restriction $\psi(x, y) \mid S = \psi(x)$ est indépendante de y;

$$(21.2) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial_\varepsilon \gamma} \varphi(x) = 2\pi i \int_\gamma \psi(x),$$

quelle que soit la chaîne compacte γ.

Preuve *que* $\psi(x, y) \mid S$ *est indépendant de* y. — Si $d\varphi = 0$ alors $\psi(x, y) \mid S = \text{rés}[\varphi]$; en particulier, si $\varphi = 0$, alors $\psi(x, y) \mid S = 0$.

Preuve *de* (21.2). — Il suffit de prouver cette formule dans le cas suivant :

$$\sigma \text{ est un simplexe de } S; \qquad s(x, y) = x_1.$$

Puisque $\text{mes}(\partial_\varepsilon \sigma) / \operatorname*{Inf}_{x \in \partial_\varepsilon \sigma} |x_1|$ est borné, supérieurement pour σ fixe et $\varepsilon \to 0$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial_\varepsilon \sigma} \varphi(x) = \int_{\partial_\varepsilon \sigma} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \psi(\mu(x)) = \oint \frac{dx_1}{x_1} \int_\sigma \psi(x) = 2\pi i \int_\sigma \psi(x).$$

La formule du résidu. — Supposons que $\gamma \in h(S, S')$ et que $\varphi(x)$ soit une forme fermée sur $X - S$, nulle sur S' ayant sur S une singularité polaire d'ordre 1 ; alors (21.1) a lieu, vu (2.1); $\psi(x) = \text{rés}[\varphi]$;

$$\int_{\partial_\varepsilon \gamma} \varphi(x) = \int_{\partial h(S, S')} \varphi(x)$$

est indépendant de ε; la formule (21.2) se réduit donc à :

$$\int_{\partial h(S, S')} \varphi(x) = 2\pi i \int_\gamma \text{rés}[\varphi].$$

Vu (2.7), l'hypothèse que φ s'annule sur S' implique que $\text{rés}[\varphi]$ s'annulle sur $S \cap S'$; la formule précédente peut donc s'écrire

$$\int_{\partial h(S, S')} \varphi(x) = 2\pi i \int_{h(S, S')} \text{rés}[\varphi];$$

c'est *la formule du résidu* qu'énonce le n° 3.

CHAPITRE 3. — La cohomologie et sa dualité avec l'homologie.

Ce chapitre 3 justifie le n° 4.

22. Préliminaires. — Nous aurons à utiliser le lemme suivant, qui serait faux si Ω était l'anneau des formes holomorphes :

LEMME 22. — La restriction $\omega \to \omega \mid S$ applique $\Omega(X, S')$ *sur* $\Omega(S, S')$.

PREUVE. — Soit $\chi(x) \in \Omega(S, S')$; il s'agit de construire $\omega(x) \in \Omega(X, S')$ tel que $\omega \mid S = \chi$. Puisque S et S' sont en position générale, il existe évidemment en chaque point y de X une forme $\omega(x, y)$ de x telle que :

$$\omega(x, y) \mid S = \chi(x) \qquad \text{sur un voisinage} \quad V(y) \text{ de } y;$$
$$\omega(x, y) \mid S' = 0.$$

Soit une partition de l'unité [*voir* par exemple G. de RHAM, [**16**], chap. I, § **2**, coroll. 2, p. 6]

$$\sum_{y \in X} \pi(x, y) = 1$$

telle que le support de $\pi(x, y)$ soit intérieur à $V(y)$. Définissons

$$\omega(x) = \sum_{y \in X} \pi(x, y)\, \omega(x, y).$$

On a

$$\omega \mid S = \chi; \qquad \omega \mid S' = 0$$

23. Définition du triplet $p^\star$, $i^\star$, $\partial^\star$. — Les formes $\varphi(x)$ constituant $h^\star(X, S \cup S')$ appartiennent à une même classe $h^\star(X, S')$, qui est $p^\star h^\star(X, S \cup S')$.

Les restrictions à S des formes $\varphi(x)$ constituant $h^\star(X, S')$ appartiennent à une même classe $h^\star(S, S')$, qui est $i^\star h^\star(X, S')$.

Les différentielles des formes $\omega(x) \in \Omega(X, S')$ telles que $\omega \mid S \in h^\star(S, S')$ appartiennent à une même classe $h^\star(X, S \cup S')$ qui est $\partial^\star h^\star(S, S')$.

Seule cette dernière définition exige une justification. L'existence des formes ω résulte du lemme 22. Il reste à prouver ceci :

LEMME. — Si $\omega \mid S \sim 0$ dans (S, S'), alors $d\omega \sim 0$ dans $(X, S \cup S')$.

PREUVE. — D'après le lemme 22, il existe $\chi \in \Omega(X, S')$ tel que

$$\omega \mid S = d\chi \mid S$$

donc

$$\omega - d\chi \in \Omega(X, S \cup S')$$

d'où, puisque $d^2 = 0$,

$$d\omega \in d\Omega(X, S \cup S'), \qquad d\omega \sim 0 \qquad \text{dans} \quad (X, S \cup S').$$

24. Exactitude du triplet p^*, i^*, ∂^*. — Évidemment.

$$i^* p^* = 0, \qquad \partial^* i^* = 0, \qquad p^* \partial^* = 0.$$

Les trois lemmes suivants suffisent donc à prouver l'exactitude du triplet p^*, i^*, ∂^*.

LEMME. — Si $i^* h^*(X, S') = 0$, alors $h^*(X, S') \in p^* H^*(X, S \cup S')$.

PREUVE. — Soit $\varphi(x) \in h^*(X, S')$:

$$\varphi \in \Phi(X, S'); \qquad \varphi \mid S \in d\Omega(S, S').$$

Vu le lemme 22, il existe donc $\omega \in \Omega(X, S')$ tel que

$$\varphi \mid S = d\omega \mid S.$$

Donc

$$\varphi - d\omega \in \Phi(X, S \cup S');$$

or

$$\varphi - d\omega \in h^*(X, S');$$

donc

$$h^*(X, S') \in p^* H^*(X, S \cup S').$$

LEMME. — Si $\partial^* h^*(S, S') = 0$, alors $h^*(S, S') \in i^* H^*(X, S')$.

PREUVE. — Soit $\omega(x) \in \Omega(X, S')$ tel que

$$\omega \mid S \in h^*(S, S');$$

puisque $\partial^* h^*(S, S') = 0$, on a

$$d\omega \in d\Omega(X, S \cup S');$$

c'est-à-dire

$$d\omega = d\chi, \qquad \text{où} \quad \chi \in \Omega(X, S \cup S');$$

donc

$$(\omega - \chi) \mid S \in h^*(S, S'), \qquad \omega - \chi \in \Phi(X, S');$$

d'où

$$h^*(S, S') \in i^* H^*(X, S').$$

LEMME. — Si $p^* h^*(X, S \cup S^*) = 0$, alors $h^*(X, S \cup S') \in \partial^* H^*(S, S')$.

PREUVE. — Soit $\varphi(x) \in h^\star(X, S \cup S')$:

$$\varphi \in \Phi(X, S \cup S'); \qquad \varphi \in d\Omega(X, S');$$

donc

$$\varphi = d\omega \quad \text{où} \quad \omega \in \Omega(X, S')$$

d'où

$$\omega \mid S \in \Phi(S, S');$$

donc, si $h^\star(S, S')$ est la classe de $\omega \mid S$,

$$h^\star(X, S \cup S') = \partial^\star h^\star(S, S').$$

25. Les transposés $p^\star$, $i^\star$, $\partial^\star$ de p, i, ∂. — Soient une chaîne $\gamma \in h(S, S')$; et une forme $\varphi \in h^\star(X, S')$;

$$\int_\gamma \varphi = \int_{ih(S,S')} h^\star(X, S') = \int_{h(S,S')} i^\star h^\star(X, S');$$

donc

$$\int_{ih(S,S')} h^\star(X, S') = \int_{h(S,S')} i^\star h^\star(X, S'). \tag{25.1}$$

Soient une chaîne $\gamma \in h(X, S')$ et une forme $\varphi \in h^\star(X, S \cup S')$.

$$\int_\gamma \varphi = \int_{ph(X,S')} h^\star(X, S \cup S') = \int_{h(X,S')} p^\star h^\star(X, S \cup S');$$

donc

$$\int_{ph(X,S')} h^\star(X, S \cup S') = \int_{h(X,S')} p^\star h^\star(X, S \cup S'). \tag{25.2}$$

Soient une chaîne $\gamma \in h(X, S \cup S')$ et une forme $\omega \in \Omega(X, S')$ telle que $\omega \mid S \in h^\star(S, S')$; d'après la formule de Stokes,

$$\int_{\partial\gamma} \omega = \int_\gamma d\omega;$$

donc, puisque $\omega \mid S' = 0$,

$$\int_{\partial h(X, S \cup S')} h^\star(S, S') = \int_{h(X, S \cup S')} \partial^\star h^\star(S, S'). \tag{25.3}$$

Quand la dualité de $H^\star(X, S')$ et $H_c(X, S')$ aura été établie, nous pourrons énoncer ces formules (25.1), (25.2), (25.3) comme suit : *le triplet $p^\star$, $i^\star$, $\partial^\star$ est le transposé du triplet p, i, ∂.*

26. Preuve que $H^\star(X)$ est dual de $H_c(X)$. — Il s'agit de prouver les théorèmes de dualité qu'énonce le n° 4, en supposant tout d'abord S' vide.

Notons $H_R(X)$ [et $H_*(X)$] les groupes d'homologie de X, à supports compacts, à coefficients numériques réels [et complexes]. Il est évident que $H_c(X)$ est canoniquement isomorphe à un sous-groupe de $H_R(X)$:

$$H_c(X) \subset H_R(X);$$

tout élément de $H_R(X)$ est le quotient par un entier d'un élément de $H_c(X)$.

On sait [S. Lefschetz [7], *Universal theorem for fields*, Chap. III, § 5, (17.8), *Complementary results*; § 8, (40.4)] que de même

$$H_R(X) \subset H_*(X),$$

toute base de $H_R(X)$ constituant une base de $H_*(X)$.

Par suite

$$H_c(X) \subset H_*(X),$$

tout élément de $H_*(X)$ étant le produit d'un élément de $H_c(X)$ par un nombre complexe. Pour que H_c et H^* vérifient les théorèmes de dualité qu'énonce le n° 4, il suffit donc que H_* et H^* les vérifient; or ceci résulte, comme nous allons le montrer, de S. Lefschetz [7] et de G. de Rham [16] — où nous supposerons les fonctions numériques réelles remplacées par les fonctions numériques complexes, les coordonnées locales demeurant réelles —.

La faible dualité de H_* et H^* est prouvée explicitement par G. de Rham. En effet tout cycle à support compact de X constitue un « courant impair » à support compact [§ 8, Exemple 1, p. 40]; son théorème 17′ [§ 22, p. 114] implique donc ceci : *Si $h \in H_*(X)$ est tel que $\int_h h^* = 0$ pour tout $h^* \in H^*(X)$, alors $h = 0$.*

De même, toute forme constitue un « courant pair » [§ 8, Ex. 2, p. 40]; l'affirmation qui suit et complète son théorème 17′ implique donc ceci : *Si $h^* \in H^*(X)$ est tel que $\int_h h^* = 0$ pour tout $h \in H_*(X)$, alors $h^* = 0$.*

Le théorème de forte dualité équivaut à la faible dualité quand les nombres de Betti de X sont finis; sinon, on peut l'établir comme suit. Notons $L(X)$ le groupe de cohomologie de X, sur le corps des nombres complexes, au sens de S. Lefschetz; notons $l(h)$ l'indice de Kronecker de $l \in L(X)$ et $h \in H_*(X)$; S. Lefschetz note cet indice $KI(h, l)$; S. Lefschetz [7] prouve le théorème suivant [chap. III, § 8, (41.2); voir pour la terminologie : chap. III, § 6, n° 30 et n° 31 et § 8, n° 40 où une chaîne compacte est dite finie; S. Lefschetz utilise sur H_* la topologie discrète : nous pouvons ne pas en tenir compte] :

Théorème de forte dualité de S. Lefschetz. — *Toute fonction linéaire, homogène, numérique complexe, définie sur $H_*(X)$ est du type $l(h)$, où $l \in L(X)$; la donnée de cette fonction détermine l sans ambiguïté.*

S. Lefschetz construit $L(X)$ à l'aide de « cochaînes » [éléments d'un groupe qui est muni d'une topologie; mais cette topologie n'intervient pas dans le cas où nous sommes : chap. III, § 8, (40.4)]; ces « cochaînes » de S. Lefschetz sont nommées « cochaînes paires » par G. de Rham, qui construit un homomorphisme du groupe additif de ces « cochaînes paires » dans celui des « chaînes paires » [§ 22, Proposition 3, p. 113]; cet homomorphisme induit un homomorphisme, respectant l'indice de Kronecker, de $L(X)$ dans « le groupe d'homologie des chaînes paires »; ce groupe est identique au « groupe d'homologie des courants pairs » [§ 21, p. 105 et § 22, p. 114], qui est lui-même identique au « groupe d'homologie des formes paires » [§ 18, théor. 14, p. 94], que nous avons noté $H^\star(X)$. G. de Rham construit donc un homomorphisme

$$\mu : \quad L(X) \to H^\star(X)$$

respectant l'indice de Kronecker :

$$l(h) = \int_h \mu . l \qquad \text{si} \quad l \in L(X) \qquad \text{et} \qquad h \in H_\star(X).$$

Le théorème de forte dualité de S. Lefschetz a donc la conséquence suivante : *Toute fonction linéaire, homogène, numérique complexe, définie sur $H_\star(X)$ est du type $\int_h h^\star$ où $h^\star \in H^\star(X)$.*

La donnée de cette fonction détermine $h^\star$ *sans ambiguité*, vu la faible dualité de $H_\star(X)$ et $H^\star(X)$. [Donc μ est un isomorphisme de $L(X)$ sur $H^\star(X)$].

Nous avons ainsi établi, *quand S' est vide*, le *théorème de forte dualité* qu'énonce le n° 4. Le n° 31 l'étendra au cas où S' n'est pas vide, grâce aux théorèmes de dualité que nous allons établir.

Rappelons que A. W. Tucker a tenté cette extension à une époque où les triplets exacts, qui nous permettent de la faire, n'étaient pas conus; G. D. F. Duff [3] l'a faite, pour la faible dualité, sous des hypothèses trop restrictives pour que nous puissions les utiliser.

27. Trois définitions classiques. — Soient A, B, C trois groupes abéliens.

Le dual $A^\star$ de A est l'espace vectoriel, sur le corps des nombres complexes, que constituent les fonctions linéaires, homogènes, numériques complexes, définies sur A.

La valeur en $a \in A$ de $a^\star \in A^\star$ est noté $\langle a, a^\star \rangle$.

Le transposé $\lambda^\star$ d'un homomorphisme

$$\lambda : \quad B \to C$$

est l'homomorphisme de leurs duals

$$\lambda^* : \quad C^* \to B^*$$

tel que

$$\langle \lambda b, c^* \rangle = \langle b, \lambda^* c^* \rangle.$$

Le sous-espace de A^* ortogonal à $A' \subset A$ est l'ensemble des $a^* \in A^*$ tels que

$$\langle a', a^* \rangle = 0 \qquad \text{pour tout} \quad a' \in A'$$

NOTE. — Les nombres complexes peuvent être remplacés dans les nos 28, 29 et 30 par les éléments d'un corps de caractéristique non nulle, arbitrairement choisi.

28. Exactitude du transposé d'un triplet exact. — Soit $\lambda^* : C^* \to B^*$, transposé de $\lambda : B \to C$.

LEMME. — Le noyau de λ^* est le sous-groupe de C^* orthogonal à λB.

PREUVE. — C'est évident [comme le confirme N. BOURBAKI, Livre II, *Algèbre*, chap. II, § 4, n° 9, Proposition 13].

LEMME. — $\lambda^* C^*$ est le sous-espace de B^* orthogonal au noyau de λ.

PREUVE. — 1° Supposons $b^* \in \lambda^* C^*$; montrons que

$$\langle b, b^* \rangle = 0 \qquad \text{pour tout } b \text{ tel que} \quad \lambda b = 0.$$

Soit en effet $c^* \in C^*$ tel que $b^* = \lambda^* c^*$; on a

$$\langle b, b^* \rangle = \langle b, \lambda^* c^* \rangle = \langle \lambda b, c^* \rangle = 0.$$

2° Réciproquement, supposons $b^* \in B^*$ tel que

$$\langle b, b^* \rangle = 0 \qquad \text{pour tout } b \text{ tel que} \quad \lambda b = 0;$$

montrons que $b^* \in \lambda^* C^*$.

Par hypothèse,

$$\langle b, b^* \rangle = f(\lambda b) \qquad \text{quel que soit} \quad b \in B,$$

f étant une fonction linéaire, homogène, à valeurs complexes, définie sur le sous-groupe λB de C; cette fonction peut être prolongée à C [on peut aisément la prolonger à un sous-groupe de C strictement plus grand que λB, donc à C, par application du lemme de Zorn].

Il existe donc $c^* \in C^*$ tel que

$$\langle b, b^* \rangle = \langle \lambda b, c^* \rangle \qquad \text{quel que soit } b;$$

d'où

$$\langle b, b^\star \rangle = \langle b, \lambda^\star c^\star \rangle \qquad \text{quel que soit } b\,;$$

donc

$$b^\star = \lambda^\star c^\star.$$

Les deux lemmes précédents ont pour conséquence immédiate le

Lemme 28. — Un triplet exact d'homomorphismes λ, μ, ν a pour transposé un triplet exact $\lambda^\star$, $\mu^\star$, $\nu^\star$.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\nu"'] & \\ B \arrow[rr, "\lambda"] & & C \arrow[ul, "\mu"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A^\star \arrow[dl, "\mu^\star"'] & \\ C^\star \arrow[rr, "\lambda^\star"] & & B^\star \arrow[ul, "\nu^\star"'] \end{tikzcd}$$

29. Isomorphisme de deux triplets exacts.

Lemme 29. — Soient deux triplets *exacts* d'homomorphismes, λ, μ, ν, λ', μ', ν' et trois homomorphismes notés τ :

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[rrr, "\tau"] \arrow[dd, "\nu'"'] & & & A \arrow[dd, "\nu"] \\ & C' \arrow[ul, "\mu'"'] \arrow[r, "\tau"'] & C \arrow[ur, "\mu"] & \\ B' \arrow[ur, "\lambda'"'] \arrow[rrr, "\tau"] & & & B \arrow[ul, "\lambda"] \end{tikzcd}$$

tels que

$$\lambda\tau = \tau\lambda', \qquad \mu\tau = \tau\mu', \qquad \nu\tau = \tau\nu'.$$

Si τ est un *isomorphisme* de B' *sur* B et de C' *sur* C, alors τ est un isomorphisme de A' sur A.

Preuve *que* $\tau A' = A$. — Soit $a \in A$. Nous avons

$$\nu a \in B = \tau B'$$

il existe donc $b' \in B'$ tel que

$$\nu a = \tau b'.$$

D'où

$\tau\lambda' b' = \lambda\tau b' = \lambda\nu\, a = 0$; donc $\lambda' b' = 0$; $b' \in \nu' A'$.

Il existe donc $a' \in A'$ tel que

$$\nu a = \tau\nu' a' = \nu\tau a'; \qquad \nu(a - \tau a') = 0\,;$$
$$a - \tau a' \in \mu C = \mu\tau C' = \tau\mu' C'\,;$$
$$a \in \tau A'.$$

Preuve *que τ est un isomorphisme.* — Supposons $a' \in A'$ et $\tau a' = 0$.

$$\tau\nu' a' = \nu\tau a' = 0\,; \qquad \text{donc} \quad \nu' a' = 0\,; \qquad a' \in \mu' C'.$$

Il existe donc $c' \in C'$ tel que

$$a' = \mu' c'.$$

D'où

$$\mu\tau c' = \tau\mu' c' = \tau a' = 0\,; \qquad \tau c' \in \lambda B = \lambda\tau B' = \tau\lambda' B'\,;$$
$$c' \in \lambda' B'\,; \qquad a' \in \mu'\lambda' B'\,; \qquad a' = 0.$$

30. Dualité de deux triplets exacts.

Lemme 30. — Soient deux triplets exacts

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[dl, "\nu'"'] & \\ B' \arrow[rr, "\lambda'"] & & C' \arrow[ul, "\mu'"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\mu"'] & \\ C \arrow[rr, "\lambda"] & & B \arrow[ul, "\nu"'] \end{tikzcd}$$

et trois fonctions bilinéaires, à valeurs numériques complexes,

$$\langle a, a' \rangle, \qquad \langle b, b' \rangle, \qquad \langle c, c' \rangle$$

telles que

$$\langle \lambda c, b' \rangle = \langle c, \lambda' b' \rangle, \qquad \langle \mu a, c' \rangle = \langle a, \mu' c' \rangle,$$
$$\langle \nu b, a' \rangle = \langle b, \nu' a' \rangle.$$

Si B' est dual de B et C' de C, alors A' est dual de A.

Note. — Nous disons que A' est dual de A si, à toute fonction linéaire, homogène, numérique complexe $f(a)$ définie sur A correspond un élément a' de A' et un seul tel que $f(a) = \langle a, a' \rangle$.

Preuve. — Soient $A^\star$, $B^\star$, $C^\star$ les duals de A, B, C; soient $\lambda^\star$, $\mu^\star$, $\nu^\star$ les transposés de λ, μ, ν; ils constituent un triplet exact (lemme 28) :

$$\begin{tikzcd} & A^\star \arrow[dl, "\nu^\star"'] & \\ B^\star \arrow[rr, "\lambda^\star"] & & C^\star \arrow[ul, "\mu^\star"'] \end{tikzcd}$$

A tout $a' \in A'$ correspond un élément unique $\tau a'$ de $A^\star$, tel que

$$\langle a, a' \rangle = \langle a, \tau a' \rangle$$

définissons de même $\tau b'$ et $\tau c'$; nous avons

$$\lambda^\star\tau = \tau\lambda', \qquad \mu^\star\tau = \tau\mu', \qquad \nu^\star\tau = \tau\nu'.$$

Puisque B' est dual de B et C' de C, τ est un isomorphisme de B' sur $B^\star$ et de C' sur $C^\star$; donc, vu le lemme 29, τ est un isomorphisme de A' sur $A^\star$.

31. Preuve que $H^\star(X, S')$ est dual de $H_c(X, S')$. — Il s'agit de prouver le théorème de forte dualité qu'énonce le n° 4. Nous avons noté

$$S' = S'_1 \cup \ldots \cup S'_M;$$

nous allons procéder par récurrence relativement à M. Le n° 26 a expliqué que S. Lefschetz et G. de Rham ont établi cette dualité pour $M = 0$, c'est-à-dire S' vide. Il suffit donc de prouver ceci (où S désigne S'_{M+1}) :

si $H^\star(X, S')$ est dual de $H_c(X, S')$ et $H^\star(S, S')$ de $H_c(S, S')$
alors $H^\star(X, S\cup S')$ est dual de $H_c(X, S\cup S')$.

On le prouve en appliquant le lemme 30 aux deux triplets exacts

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & H^\star(X, S\cup S') \arrow[dl, "p^\star"'] & \\ H^\star(X, S') \arrow[rr, "i^\star"] & & H^\star(S, S') \arrow[ul, "\partial^\star"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & H_c(X, S\cup S') \arrow[dl, "\partial"'] & \\ H_c(S, S') \arrow[rr, "i"] & & H_c(X, S') \arrow[ul, "p"'] \end{tikzcd}$$

et aux fonctions bilinéaires $\int_h h^\star$, qui vérifient (25.1), (25.2) et (25.3).

CHAPITRE 4. — La classe-résidu.

Ce chapitre 4 justifie le n° 5; il établit en outre les propriétés de la classe-résidu, que le n° 7 énonce en utilisant la notation différentielle du résidu.

32. Notations. — On suppose $m=1$, $S=S_1$, $s=s_1$. Le théorème de forte dualité (n° 4) permet de définir le triplet $\iota^\star$, $\varpi^\star$, $\delta^\star$ *transposé* (n° 27) de ι, ϖ, δ; ces deux triplets sont *exacts* (n° 3 et lemme 28) :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & H_c(X, S') \arrow[dl, "\varpi"'] & \\ H_c(S, S') \arrow[rr, "\delta"] & & H_c(X-S, S') \arrow[ul, "\iota"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & H^\star(X, S') \arrow[dl, "\iota^\star"'] & \\ H^\star(X-S, S') \arrow[rr, "\delta^\star"] & & H^\star(S, S') \arrow[ul, "\varpi^\star"'] \end{tikzcd}$$

$$d^0(\iota^\star) = 0, \quad d^0(\delta^\star) = -1, \quad d^0(\varpi^\star) = 2.$$

Cherchons à définir *directement*, c'est-à-dire par des opérations de calcul différentiel extérieur, $\iota^\star$, $\varpi^\star$, $\delta^\star$ et cherchons à construire une forme fermée ayant une forme-résidu donnée : nous trouverons ainsi la notion de classe-résidu.

33. Définition directe de $\iota^\star$. — Il est presque évident que $\iota^\star$ est l'homomorphisme *restriction* à $X - S$, c'est-à-dire :

Lemme 33. — Les formes $\varphi(x)$ constituant $h^*(X, S')$ appartiennent à une même classe $h^*(X - S, S')$, qui est $\iota^* h^*(X, S')$.

Preuve. — Supposons $\varphi \in h^*(X, S')$ et $\varphi \in h^*(X - S, S')$; soit γ une chaîne compacte de $X - S$, à bord dans S' :

$$\gamma \in h(X - S, S'), \qquad \gamma \in \iota\, h(X - S, S');$$

$$\int_\gamma \varphi = \int_{h(X-S,S')} h^*(X - S, S') = \int_{\iota h(X-S,S')} h^*(X, S') = \int_{h(X-S,S')} \iota^* h^*(X, S').$$

Ainsi

$$\int_h h^*(X - S, S') = \int_h \iota^* h^*(X, S') \qquad \text{quel que soit} \quad h \in H_c(X - S, S');$$

donc, vu le théorème de faible dualité (n° 4),

$$h^*(X - S, S') = \iota^* h^*(X, S').$$

34. Construction d'une forme de forme-résidu donnée. — Soit V un voisinage de S.

Lemme 34.1. — Soit $\varphi(x) \in \Phi(S, S')$. Il existe $\omega(x) \in \Omega(X - S, S')$ et, près de chaque point y de S, des formes régulières $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$ telles que :

$$\omega(x) = 0 \quad \text{hors de } V;$$

$$\omega(x) = \frac{ds(x, y)}{s(x, y)} \wedge \psi(x, y) + \theta(x, y) \quad \text{près de } y;$$

$$\psi(x, y) \mid S = \varphi(x); \qquad \psi(x, y) \mid S' = 0; \qquad \theta(x, y) \mid S' = 0;$$

$$d\psi(x, y) = 0 \quad \text{près de } S.$$

Notation. —

$h^*(S, S')$ désignera la classe de φ;
$h^*(X, S')$ » $d\omega$.

Preuve. — Reprenons les notations du n° 19 : il existe une rétraction μ de $\overline{V}$ sur S, appliquant $\overline{V} \cap S'_j$ sur $S \cap S'_j$; $\varphi(\mu(x))$ est fermée sur $(\overline{V}, S')$; soit $f(x)$ une fonction régulière valant 1 près de S, 0 hors de V; soit

$$\psi(x) = f(x)\,\varphi(\mu(x)) \quad \text{sur } \overline{V}; \qquad = 0 \quad \text{hors de } V.$$

$$\psi \mid S = \varphi; \qquad \psi \mid S' = 0; \qquad d\psi = 0 \quad \text{près de } S.$$

Soit $\pi(x, z)$ une partition de l'unité [voir par exemple G. de Rham [16], chap. I, § 2, coroll. 2, p. 6] :

$$\sum_z \pi(x, z) = 1, \quad \text{telle que } s(x, z) \text{ soit défini sur le support de } \pi(x, z).$$

Posons :

$$\omega(x) = \sum_z \pi(x, z) \frac{ds(x, z)}{s(x, z)} \wedge \psi(x),$$
$$\psi(x, y) = \psi(x),$$
$$\theta(x, y) = \sum_z \pi(x, z)\, d\left[\log \frac{s(x, z)}{s(x, y)}\right] \wedge \psi(x);$$

le lemme se trouve vérifié.

Lemme 34.2. — Si $h^*(X, S') = 0$, alors $\varphi(x)$ est forme-résidu d'une forme de $(X - S, S')$, ayant sur S une singularité polaire d'ordre 1.

Preuve. — Si $h^*(X, S') = 0$, c'est qu'il existe $\chi(x) \in \Omega(X, S')$, tel que

$$d\omega = d\chi;$$

donc

$$\omega - \chi = \frac{ds(x, y)}{s(x, y)} \wedge \psi(x, y) + \theta(x, y) - \chi(x)$$

est une forme *fermée* de $(X - S, S')$, ayant une singularité polaire d'ordre 1 sur S; sa forme-résidu est $\psi \mid S = \varphi$.

35. Définition directe de ϖ^*.

Lemme 35. — On a, avec les notations du n° 34 :

$$(35.1) \qquad \varpi^* h^*(S, S') = -\frac{1}{2\pi i} h^*(X, S').$$

Preuve. — Soit $h(X, S')$ arbitraire; calculons l'intégrale

$$(35.2) \qquad J = \int_{h(X, S')} h^*(X, S').$$

On a

$$J = \int_{h(X, S')} d\omega;$$

puisque $\omega = 0$ hors de V, cette intégrale ne dépend que de (n° 19)

$$p_V h(X, S') \in H_c(X, (X - V) \cup S'),$$
$$J = \int_{p_V h(X, S')} d\omega.$$

L'isomorphisme $\mu^\star$ de $H_c(S, S')$ sur $H_c(X, (X-V)\cup S')$ prouve qu'il existe une chaîne γ de (S, S') telle que

$$\mu^\star\gamma \in p_V h(X, S')$$

d'où

$$J = \int_{\mu^\star\gamma} d\omega. \tag{35.3}$$

Par définition (n° 19)

$$\varpi = (\mu^\star)^{-1} p_V$$

donc

$$\gamma \in \varpi\, h(X, S'). \tag{35.4}$$

Pour poursuivre le calcul de J, employons (*cf.* n° 21) V_ε, qui tend vers S, μ_ε et δ_ε; puisque $d\omega$ est régulier sur X, (35.3) donne :

$$J = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mu^\star\gamma - \mu_\varepsilon^\star\gamma} d\omega\,;$$

d'où, en employant la formule de Stokes, ce qui est légitime car le support de la chaîne $\mu^\star\gamma - \mu_\varepsilon^\star\gamma$ est hors de la singularité S de ω :

$$J = \int_{\partial\mu^\star\gamma} \omega - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial\mu_\varepsilon^\star\gamma} \omega = \int_{\delta\gamma} \omega - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\delta_\varepsilon\gamma} \omega.$$

Mais $\omega = 0$ sur $\delta\gamma$, qui est hors de V; donc

$$J = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\delta_\varepsilon\gamma} \omega.$$

Or le lemme 21 a prouvé que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\delta_\varepsilon\gamma} \omega = 2\pi i \int_\gamma \varphi.$$

Ainsi

$$J = -2\pi i \int_\gamma \varphi,$$

c'est-à-dire, vu (35.4), puisque $\varphi \in h^\star(S, S')$:

$$J = -2\pi i \int_{\varpi h(X, S')} h^\star(S, S') = -2\pi i \int_{h(X, S')} \varpi^\star h^\star(S, S').$$

D'où, vu la définition (35.2) de J :

$$\int_h h^\star(X, S') = -2\pi i \int_h \varpi^\star h(S, S'), \qquad \text{quel que soit} \quad h \in H_c(X, S');$$

c'est-à-dire (35.1), en vertu du théorème de faible dualité.

36. Définition directe de δ^* : preuve du théorème 1. — De l'exactitude du triplet ι^*, ϖ^*, δ^* et des définitions directes de ι^* et ϖ^* résultent les deux propriétés de δ^* que voici :

LEMME 36.1. — Si $\delta^* h^*(X - S,\ S') = 0$, alors $h^*(X - S,\ S')$ contient des formes dont la forme-résidu est nulle.

PREUVE. — Vu l'exactitude du triplet ι^*, ϖ^*, δ^* il existe une classe $h^*(X, S')$ telle que

$$h^*(X - S,\ S') = \iota^* h^*(X,\ S').$$

D'après le lemme 33, $h^*(X - S,\ S')$ contient donc des formes de $\Phi(X,\ S')$; leurs formes-résidus sont nulles.

LEMME 36.2. — Si $h^*(S, S') \in \delta^* H^*(X-S, S')$, alors toute forme $\varphi \in h^*(S, S')$ est forme-résidu d'une forme de $\Phi(X - S,\ S')$.

PREUVE. — Soit $h^*(S,\ S') \in \delta^* H^*(X - S,\ S')$; alors $\varpi^* h^*(S,\ S') = 0$; donc, vu les lemmes 35 et 34.2, toute forme φ de la classe $h^*(S,\ S')$ est forme-résidu.

De ces deux lemmes et de la formule du résidu résulte aisément la définition directe de δ^* que voici :

LEMME 36.3. — Soit $\varphi \in \Phi(S,\ S')$; pour que φ soit forme-résidu d'une forme appartenant à la classe $h^*(X - S,\ S')$, il faut et il suffit que

$$\varphi \in \frac{1}{2\pi i} \delta^* h^*(X - S,\ S'). \tag{36.1}$$

NOTE. — Ce lemme a pour conséquence évidente le théorème 1 (n° 5).

PREUVE. — 1° *Supposons* $\varphi = \text{rés}[\psi]$, $\psi \in h^*(X - S,\ S')$; alors, d'après la formule du résidu

$$2\pi i \int_{h(S,S')} \varphi = \int_{\delta h(S,S')} \psi = \int_{h(S,S')} \delta^* h^*(X - S,\ S'),$$

quel que soit $h(S,\ S')$; donc (36.1) a lieu, vu le théorème de faible dualité.

2° *Réciproquement*, supposons (36.1) vérifié. D'après le lemme 36.2, il existe

$$\psi \in \Phi(X - S,\ S') \qquad \text{tel que} \quad \text{rés}[\psi] = \varphi.$$

Soit $h_1^*(X - S,\ S')$ la classe de ψ. D'après la formule du résidu

$$2\pi i \int_{h(S,S')} \varphi = \int_{\delta h(S,S')} h_1^*(X - S,\ S') = \int_{h(S,S')} \delta^* h_1^*(X - S,\ S') ;$$

donc, vu (**36**.1)

$$\delta^*[h^*(X - S, S') - h_1^*(X - S, S')] = 0.$$

Vu le lemme **36**.1, il existe donc une forme θ telle que

$$\theta \in h^*(X - S, S') - h_1^*(X - S, S'); \qquad \text{rés}\,\theta = 0.$$

D'où

$$\psi + \theta \in h^*(X - S, S'); \qquad \text{rés}(\psi + \theta) = \varphi.$$

Définition. — Soit $\varphi \in \Phi(X - S, S')$; soit $h^* \in H^*(X - S, S')$ la classe de cohomologie de φ; $\frac{1}{2\pi i}\delta^* h^*$ est nommé *classe-résidu* de φ (et de h^*) et est noté :

$$\text{Rés}[\varphi] = \text{Rés}[h^*] = \frac{1}{2\pi i}\delta^* h^* \in H^*(S, S').$$

Cette définition permet d'énoncer *la formule du résidu* comme le fait l'Introduction (n° **5**) :

$$\int_{\delta h(S, S')} \varphi = 2\pi i \int_{h(S, S')} \text{Rés}[\varphi]. \tag{36.2}$$

Établissons maintenant les propriétés de Rés.

37. Commutabilité de Rés **et de** F*. — De (**2**.5) et du théorème **1** (n° **5**) résulte aussitôt la

Proposition 37. — *Soit F une application de X^* dans X vérifiant les hypothèses qu'énonce le* n° **1**; *on a*

$$F^*\,\text{Rés} = \text{Rés}\,F^*.$$

38. Commutabilité de Rés **et du produit à droite par** $h^*(X)$. — Soit

$$\chi \in \Phi(X).$$

Si

$$\varphi \in \Phi(X, S') \quad \text{ou} \quad \in d\Omega(X, S'),$$

alors

$$\varphi \wedge \chi \in \Phi(X, S') \quad \text{ou} \quad \in d\Omega(X, S');$$

Si

$$\varphi \in \Phi(X - S, S') \quad \text{ou} \quad \in d\Omega(X - S, S'),$$

alors

$$\varphi \wedge \chi \in \Phi(X - S, S') \quad \text{ou} \quad \in d\Omega(X - S, S');$$

Si

$$\varphi \in \Phi(S, S') \quad \text{ou} \quad \in d\Omega(S, S'),$$

alors

$$\varphi \wedge \chi \in \Phi(S, S) \qquad \text{ou} \quad \in d\Omega(S, S').$$

Le produit $\varphi \wedge \chi$ induit donc des produits :

$$h^\star(X, S').h^\star(X) \in H^\star(X, S'),$$
$$h^\star(X - S, S').h^\star(X) \in H^\star(X - S, S'),$$
$$h^\star(S, S').h^\star(X) \in H^\star(S, S').$$

Autrement dit $H^\star(X, S')$, $H^\star(X - S, S')$ et $H^\star(S, S')$ *sont des algèbres sur* $H^\star(X)$.

Les définitions directes de $\iota^\star$ (n° 33), de $\varpi^\star$ (n° 35), le théorème 1 (n° 5) et la formule (2.4) montrent que $\iota^\star$, $\varpi^\star$ *et* Rés *sont des homomorphismes d'algèbre*, à condition de multiplier *à droite* par $h^\star(X)$.

De ces propriétés ne retenons que celles du Rés :

Proposition 38. — $H^\star(X - S, S')$ et $H^\star(S, S')$ *sont des algèbres sur* $H^\star(X)$; Rés *est un homomorphisme d'algèbres* :

$$\text{Rés}[h^\star(X - S, S').h^\star(X)] = [\text{Rés}\, h^\star(X - S, S')].h^\star(X).$$

39. Commutation de Rés avec $p^\star$, $i^\star$, $\partial^\star$.

Proposition 39. — *Considérons le diagramme, constitué par trois* Rés *et deux triplets exacts* $p^\star$, $i^\star$, $\partial^\star$:

$$\begin{tikzcd}
H^\star(X - S, S') \arrow[rrr, "\text{Rés}"] \arrow[dd, "i^\star"'] & & & H^\star(S, S') \arrow[dd, "i^\star"] \\
& H^\star(X - S, S'' \cup S') \arrow[ul, "p^\star"'] \arrow[r, "\text{Rés}"] & H^\star(S, S'' \cup S') \arrow[ur, "p^\star"] \arrow[dr, "\partial^\star"'] & \\
H^\star(S'' - S \cap S'', S') \arrow[ur, "\partial^\star"] \arrow[rrr, "\text{Rés}"] & & & H^\star(S \cap S'', S')
\end{tikzcd}$$

On a les règles de commutation

$$\text{Rés}\, p^\star = p^\star\, \text{Rés}, \qquad \text{Rés}\, i^\star = i^\star\, \text{Rés}, \qquad \text{Rés}\, \partial^\star = -\partial^\star\, \text{Rés}.$$

Preuve *de la commutativité de* $p^\star$ *et* Rés. — Soit $\varphi \in \Phi(X - S, S'' \cup S')$, ayant sur S une singularité polaire d'ordre 1 ; $\text{rés}[\varphi] \in \Phi(S, S'' \cup S')$;

$$\begin{array}{lll}
\varphi \text{ appartient aux classes} & \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{r} h^\star \in H^\star(X - S, S'' \cup S') \\ p^\star h^\star \in H^\star(X - S, S') \end{array} \\
\text{rés}[\varphi] \qquad\quad \text{»} & \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{r} \text{Rés}\, h^\star \in H^\star(S, S'' \cup S') \\ p^\star\, \text{Rés}\, h^\star \text{ et } \text{Rés}\, p^\star h^\star \in H^\star(S, S'). \end{array}
\end{array}$$

Donc

$$p^{\star}\, \text{Rés}\, h^{\star} = \text{Rés}\, p^{\star} h^{\star};$$

d'après le théorème 1, $h^{\star}$ est un élément arbitraire de $H^{\star}(X - S, S'' \cup S')$.

Preuve *de la commutativité de* $i^{\star}$ *et* Rés. — Soit $\varphi \in \Phi(X - S, S')$, ayant sur S une singularité polaire d'ordre 1 ; $\text{rés}[\varphi] \in \Phi(S, S')$;

φ	appartient à une classe		$h^{\star} \in H^{\star}(X - S, S')$;
$\varphi \mid S''$	»	la classe	$i^{\star} h^{\star} \in H^{\star}(S'' - S \cap S'', S')$;
$\text{rés}[\varphi]$	»	»	$\text{Rés}\, h^{\star} \in H^{\star}(S, S')$;
$\text{rés}[\varphi] \mid S'' = \text{rés}[\varphi \mid S'']$	»	»	$i^{\star}\text{Rés}\, h^{\star} = \text{Rés}\, i^{\star} h^{\star} \in H^{\star}(S \cap S'', S')$.

Donc

$$i^{\star}\, \text{Rés}\, h^{\star} = \text{Rés}\, i^{\star} h^{\star};$$

d'après le théorème 1, $h^{\star}$ est un élément arbitraire de $H^{\star}(X - S, S')$.

Preuve *de l'anticommutativité de* $\partial^{\star}$ *et* Rés. — Soit $\varphi \in \Phi(S'' - S \cap S'', S')$, ayant sur $S \cap S''$ une singularité polaire d'ordre 1 :

$$\text{rés}[\varphi] \in \Phi(S \cap S'', S');$$

près de chaque point z de $S \cap S''$ existent des formes de x régulières, $\psi(x, z)$ et $\theta(x, z)$ telles que

$$\varphi(x) = \frac{ds(x, z)}{s(x, z)} \wedge \psi(x, z) + \theta(x, z) \quad \text{sur } S''(dz = 0),$$

$$\psi \mid S' = 0, \qquad \theta \mid S' = 0; \qquad \psi \mid S \cap S'' = \text{rés}[\varphi].$$

Prolongeons $\psi(x, z)$ et $\theta(x, z)$ à un voisinage $V(z)$ de z, si $z \in S \cap S''$. Si $z \in S'' - S \cap S''$, choisissons un voisinage $V(z)$ de z étranger à S, $\psi(x, z) = 0$ et $\theta(x, z)$ tel que $\theta \mid S'' = \varphi$. Si $z \in X - S''$, choisissons un voisinage $V(z)$ de z étranger à S'', $\psi = \theta = 0$. Soit $\sum_z \pi(x, z) = 1$ une partition de l'unité telle que le support de $\pi(x, z)$ soit dans $V(z)$. Posons

$$\omega(x) = \sum_z \pi(x, z) \left[\frac{ds(x, z)}{s(x, z)} \wedge \psi(x, z) + \theta(x, z) \right]$$

on convient que $\pi\chi = 0$ hors du support de π, même là où χ n'est pas défini. Les propriétés de ω sont évidentes :

$$\omega \in \Omega(X - S, S')$$

$$\omega \mid S'' = \varphi; \tag{39.1}$$

ω a une singularité polaire d'ordre 1 sur S; plus précisément, il existe près de chaque point y de S des formes de x régulières, $\psi'(x, y)$ et $\theta'(x, y)$ telles que

$$\omega(x) = \frac{ds(x, y)}{s(x, y)} \wedge \psi'(x, y) + \theta'(x, y);$$

d'où

$$(39.2) \qquad \psi' \mid S \cap S'' = \text{rés}[\varphi]$$

$$(39.3) \qquad d\omega = -\frac{ds(x, y)}{s(x, y)} \wedge d\psi'(x, y) + d\theta'(x, y).$$

φ appartient à une classe $h^* \in H^*(S'' - S \cap S'', S')$;
donc, vu (**39**.1), $d\omega$ appartient à la classe $\partial^* h^* \in H^*(X - S, S'' \cup S')$;
donc, vu (**39**.3), $-d\psi' \mid S$ » » $\text{Rés}\,\partial^* h^* \in H^*(S, S'' \cup S')$;
Vu (**39**.2), $\psi' \mid S \cap S''$ » » $\text{Rés}\, h^* \in H^*(S \cap S'', S')$;
donc $d\psi' \mid S$ » » $\partial^* \text{Rés}\, h^* \in H^*(S, S'' \cup S')$.

Ainsi

$$\text{Rés}\,\partial^* h^* = -\partial^* \text{Rés}\, h^*.$$

Or, d'après le théorème **1**, h^* est un élément arbitraire de $H^*(S'' - S \cap S'', S')$.

CHAPITRE 5. — Résidus composés.

Ce chapitre 5 justifie la définition de rés^m qu'énonce le n° **6**; puis il établit les propriétés de rés^m, ∂^m, Rés^m que formule le n° **6**.

40. Notations. — $S_1, \ldots, S_m, S'_1, \ldots, S'_M$ sont des sous-variétés analytiques complexes de X, de codimension complexe 1, sans singularité, en position générale : voir n° **1**;

$$S = S_1 \cap \ldots \cap S_m, \qquad S' = S'_1 \cup \ldots \cup S'_M.$$

Nous emploierons les sous-variétés de X que voici :

$$Y^0 = X - S_2 \cup \ldots \cup S_m;$$
$$Y^{i-1} = S_1 \cap \ldots \cap S_{i-1} - S_1 \cap \ldots \cap S_{i-1} \cap (S_{i+1} \cup \ldots \cup S_m);$$
$$Y^{m-1} = S_1 \cap \ldots \cap S_{m-1};$$
$$T^0 = X - S_1 \cup \ldots \cup S_m;$$
$$T^i = S_1 \cap \ldots \cap S_i - S_1 \cap \ldots \cap S_i \cap (S_{i+1} \cup \ldots \cup S_m) = Y^{i-1} \cap S_i;$$
$$T^m = S_1 \cap \ldots \cap S_m = Y^{m-1} \cap S_m$$

Y^i et T^i sont des sous-variétés de X ayant la codimention complexe i.

Voici leurs *propriétés* essentielles :

T^i est une sous-variété de Y^{i-1}, ayant la codimention complexe de 1 ;

$$Y^{i-1} - T^i = T^{i-1} \qquad (1 \leq i \leq m);$$
$$T^0 = X - S_1 \cup \ldots \cup S_m; \qquad T^m = S.$$

En composant les homomorphismes

$$H_c(T^m, S') \xrightarrow{\partial} H_c(T^{m-1}, S') \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} H_c(T^0, S')$$
$$H^\star(T^0, S') \xrightarrow{\text{Rés}} H^\star(T^1, S') \xrightarrow{\text{Rés}} \ldots \xrightarrow{\text{Rés}} H^\star(T^m, S'),$$

le n° **6** a défini *le cobord composé* ∂^m et le *résidu composé* Rés^m :

$$\partial^m : \quad H_c(S, S') \to H_c(X - S_1 \cup \ldots \cup S_m, S')$$
$$\text{Rés}^m : \quad H^\star(X - S_1 \cup \ldots \cup S_m, S') \to H^\star(S, S').$$

Avant d'étudier leurs propriétés, définissons de même rés^m et étudions ses propriétés.

41. Définition de rés^m. — Dans Y^{i-1}, soit ψ une forme, *fermée* sur T^{i-1}, ayant une singularité polaire d'*ordre* 1 ; sa forme-résidu est une forme fermée sur T^i; nous la noterons $\text{rés}_i[\psi]$. Nous allons prouver le

THÉORÈME. — *Soit* $\varphi(x)$ *une forme* **fermée** *de* $X - S_1 \cup \ldots \cup S_m$ *telle que* $s_1(x, y) \ldots s_m(x, y)\, \varphi(x)$ *soit* **régulier** *près de chaque point* y *de* S; *alors* (*si l'on remplace* X *par un voisinage suffisamment petit de* S),

$$\text{rés}_m \ldots \text{rés}_1[\varphi]$$

existe; c'est une forme fermée de S.

Nous la nommerons *forme résidu composé*; nous la noterons

$$\text{rés}^m[\varphi].$$

Ce théorème résulte d'une récurrence sur m et du

LEMME. — Si φ vérifie les hypothèses qu'énonce le théorème, alors

$$s_2(x, y) \ldots s_m(x, y)\, \text{rés}_1[\varphi]$$

est régulier sur S_1 près de chaque point y de S.

PREUVE. — Utilisons en y des coordonnées locales telles que $s_i(x, y) = x_i$; soit z un point de T^1 voisin de y; d'après le n° **2**, il existe des formes ψ et θ, régulières près de z, telles que

$$\varphi = \frac{dx_1}{x_1} \wedge \psi + \theta$$

choisissons ψ et θ indépendants de dx_1; alors tout coefficient $c_1(x)$ de ψ est du type : $c_1(x) = x_1 c(x)$, $c(x)$ étant un coefficient φ. Tout coefficient $c_1(x)$ de $\text{rés}_1[\varphi]$ est alors de ce type :

$$c_1(x) = x_1 c(x)$$

$c_1(x)$ étant un coefficient de φ, indépendant de z. Par hypothèse, $x_1 \ldots x_m c(x)$ est régulier en y; donc $x_2 \ldots x_m c_1(x)$ est régulier en y; donc $x_2 \ldots x_m \text{rés}_1[\varphi]$ est régulier en y.

42. Associativité et anticommutativité de rés.

THÉORÈME D'ASSOCIATIVITÉ. — *Supposons $m = p + q$, rés^p défini au moyen de $S_1, \ldots, S_p$ et rés^q au moyen de $S_{p+1}, \ldots, S_m$; alors*

$$\text{rés}^m = \text{rés}^q . \text{rés}^p.$$

THÉORÈME D'ANTICOMMUTATIVITÉ. — *Une permutation paire (impaire) de $S_1, \ldots, S_m$ multiplie $\text{rés}_m[\varphi]$ par $+1$ (par -1).*

Le théorème d'associativité est évident; il réduit au cas $m = 2$ la preuve du théorème d'anticommutativité. Sa preuve, dans ce cas, est la suivante :

LEMME. — La fonction $f(x)$ est régulière au point y de $S_1 \cap S_2$ si les deux fonctions $s_1(x, y) f(x)$ et $s_2(x, y) f(x)$ sont régulières en ce point.

PREUVE. — Remplaçons X par un voisinage de y suffisamment petit; prenons des coordonnées telles que

$$s_1(x, y) = x_1, \qquad s_2(x, y) = x_2.$$

Par hypothèse $x_1 f(x)$ et $x_2 f(x)$ sont réguliers; donc :

$$f(x) \text{ est régulier sauf peut-être sur } S_1 \cap S_2 : \quad x_1 = x_2 = 0;$$

$$x_1 \frac{\partial^{j+\ldots+k} f}{\partial x_2^j \ldots \partial x_l^k} \text{ est régulier, et nul pour } x_1 = 0;$$

donc, près de y

$$\left| x_1 \frac{\partial^{j+\ldots+k} f}{\partial x_2^j \ldots \partial x_l^k} \right| < \text{Cte} \, | x_1 |;$$

donc $\dfrac{\partial^{j+\ldots+k} f}{\partial x_2^j \ldots \partial x_l^k}$ est borné près de y. Mais on n'altère pas l'hypothèse en effectuant sur x_1 et x_2 une substitution linéaire arbitraire; donc, plus généralement $\dfrac{\partial^{i+\ldots+k} f}{\partial x_1^i \ldots \partial x_l^k}$ est borné en y, quels que soient $i, \ldots, k$; donc f est régulier en y.

LEMME. — Soit $\varphi(x)$ une forme régulière sur X; la condition

$$d[s_1(x, y)\, s_2(x, y)] \wedge \varphi(x) = 0 \tag{42.1}$$

est nécessaire et suffisante pour qu'existent, près de $y \in S_1 \cap S_2$, des formes régulières $\psi(x, y)$ et $\theta(x, y)$ telles que

$$\varphi(x) = ds_1(x, y) \wedge ds_2(x, y) \wedge \psi(x, y) + d(s_1 s_2) \wedge \theta. \tag{42.2}$$

PREUVE. — Il est évident que (42.2) entraîne (42.1). Réciproquement, supposons (42.1) vérifié, remplaçons X par un voisinage de y et choisissons des coordonnées telles que

$$s_1(x, y) = x_1, \qquad s_2(x, y) = x_2.$$

L'hypothèse (42.1) se formule

$$d(x_1 x_2) \wedge \varphi(x) = 0. \tag{42.3}$$

Il existe des formes régulières ψ, θ_1, θ_2, ω indépendantes de dx_1 et de dx_2 telles que

$$\varphi = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \psi + dx_1 \wedge \theta_1 + dx_2 \wedge \theta_2 + \omega;$$

elles sont uniques; (42.3) donne

$$x_1 \theta_1 = x_2 \theta_2; \qquad \omega = 0.$$

D'après le lemme précédent, la forme

$$\theta = \frac{\theta_1}{x_2} = \frac{\theta_2}{x_1}$$

est régulière en y. On a

$$\varphi = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \psi + d(x_1 x_2) \wedge \theta$$

C. Q. F. D.

LEMME. — Soit $\varphi(x)$ une forme *fermée* sur $X - S_1 \cap S_2$; supposons $s_1(x, y)\, s_2(x, y)\, \varphi(x)$ régulière au point $y \in S_1 \cap S_2$; alors il existe près de y des formes $\psi(x, y)$, $\theta_1(x, y)$, $\theta_2(x, y)$, $\omega(x, y)$ telles que

$$\varphi = \frac{ds_1}{s_1} \wedge \frac{ds_2}{s_2} \wedge \psi + \frac{ds_1}{s_1} \wedge \theta_1 + \frac{ds_2}{s_2} \wedge \theta_2 + \omega. \tag{42.4}$$

PREUVE. — Puisque $d\varphi = 0$ et que $s_1 s_2 \varphi$ est régulier au point y la forme $d(s_1 s_2) \wedge \varphi$ est régulière au point y; le lemme précédent lui est applicable : il existe des formes θ et ω, régulières au point y, telles que

$$d(s_1 s_2) \wedge \varphi = ds_1 \wedge ds_2 \wedge \theta + d(s_1 s_2) \wedge \omega.$$

D'où

$$d(s_1 s_2) \wedge [s_1 s_2 \varphi - s_1\, ds_2 \wedge \theta - s_1 s_2 \omega] = 0;$$

donc, vu ce même lemme, puisque $[\dots]$ est régulier au point y, il existe des formes ψ et θ', régulières en ce point, telles que

$$s_1 s_2 \varphi - s_1\, ds_2 \wedge \theta - s_1 s_2 \omega = ds_1 \wedge ds_2 \wedge \psi + d(s_1 s_2) \wedge \theta';$$

d'où (42.4).

PREUVE *du théorème d'anticommutativité* ($m = 2$). — Supposons vérifiées les hypothèses du lemme précédent pour tout $y \in S_1 \cap S_2$; alors, près de $S_1 \cap S_2$, avec les notations de ce lemme et du n° 41 nous avons

$$\text{rés}_1[\varphi] = \left[\frac{ds_2}{s_2} \wedge \psi + \theta_1\right] \Big| S_1;$$

$$\text{rés}_2\, \text{rés}_1[\varphi] = \psi \mid S_1 \cap S_2;$$

de même

$$\text{rés}_1\, \text{rés}_2[\varphi] = -\psi \mid S_1 \cap S_2.$$

d'où le théorème d'anticommutativité :

$$\text{rés}_2\, \text{rés}_1 = -\, \text{res}_1\, \text{rés}_2.$$

43. Associativité et anticommutativité de δ. — L'associativité de δ est évidente, comme l'était celle de rés. Elle réduit la preuve de l'anticommutativité de δ au cas $m = 2$.

Dans ce cas le théorème d'anticommutativité s'énonce comme suit :

THÉORÈME *d'anticommutativité de* $\delta (m = 2 : S = S_1 \cap S_2)$. — Notons δ^2 l'homomorphisme qui s'obtient en composant les deux homomorphismes δ :

$$H_c(S, S') \xrightarrow{\delta} H_c(S_1 - S, S') \xrightarrow{\delta} H_c(X - S_1 \cup S_2, S');$$

δ^2 est multiplié par -1 quand on permute S_1 et S_2.

PREUVE. — Une construction analogue à celle qu'expose le n° 19 donne un voisinage V de S et une rétraction μ de V sur $S = S_1 \cap S_2$ ayant les propriétés suivantes :

$$\mu \text{ applique } V \cap S'_j \quad \text{sur } S \cap S'_j;$$

si $y \in S$, $\mu^{-1}(y)$ est une variété régulière, une position générale par rapport à S_1, S_2, S'; c'est une boule de dimension 4; on peut y utiliser pour coordonnées les deux nombres complexes : $s_1(x, y)$, $s_2(x, y)$.

On peut, en outre, définir de même ([2]) une rétraction μ_1 de V sur S_1, une rétraction μ_2 de V sur S_2, puis diminuer V en sorte que les propriétés suivantes aient lieu :

$$\mu^{-1}(y) = D_1(y) \times D_2(y)$$

([2]) Si S' est vide, $\mu_1(x)$ est la projection orthogonale, *dans* $\mu^{-1}(y)$, de x sur $S_1 \cap \mu^{-1}(y)$.

est un bidisque, produit topologique de son intersection $D_1(y)$ par S_1 et de son intersection $D_2(y)$ par S_2; μ_1 (ou μ_2) est la projection de $D_1 \times D_2$ sur D_1 (ou D_2); $D_1(y)$ (ou D_2) est un disque de dimension réelle 2, où $s_1 = 0$ (ou $s_2 = 0$) et sur lequel on peut prendre pour coordonnée $s_2(x, y)$ (ou s_1) : $D_1(y)$ (et D_2) a donc une orientation naturelle; $C_1(y)$ (et C_2) désignera son bord orienté.

Soit γ une chaîne compacte de S, à bord dans S'; soit $h(S, S')$ sa classe d'homologie. Quand y décrit γ, $C_1(y)$ (ou $C_1 \times C_2$) décrit un espace fibré, de fibre $C_1(y)$ (ou $C_1 \times C_2$), de base γ. Orientons-le par l'orientation : Fibre $\times$ Base. Il devient une chaîne de $S_1 - S$ (ou $X - S_1 \cup S_2$); nous la noterons $\delta\gamma$ (ou $\delta^2\gamma$); vu la définition du cobord δ qu'utilise le n° 20, la classe d'homologie de $\delta\gamma$ (ou $\delta^2\gamma$) est $\delta h(S, S')$ (ou $\delta^2 h$).

La permutation de S_1 et S_2 permute C_1 et C_2; elle change l'orientation de la fibre $C_1 \times C_2$; elle multiplie donc par -1 la chaîne $\delta^2\gamma$ et la classe $\delta^2 h(S, S')$.

C. Q. F. D.

44. Propriétés de Rés^m.

THÉORÈME D'ASSOCIATIVITÉ. — *Supposons* $m = p + q$, Rés^p *défini au moyen de* $S_1, \ldots, S_p$ *et* Rés^q *au moyen de* $S_{q+1}, \ldots, S_m$; *alors*

$$\text{Rés}^m = \text{Rés}^q\, \text{Rés}^p.$$

COROLLAIRE. — La formule (7.4).

PREUVE. — La définition même de Rés^m (n° 6).

THÉORÈME D'ANTICOMMUTATIVITÉ. — *Une permutation paire* (*impaire*) *de* $S_1, \ldots, S_m$ *multiplie* Rés^m *par* $+1$ (*par* -1).

NOTE. — Le n° 7 énonce un corollaire de ce théorème.

PREUVE. — L'anticommutativité de δ (n° 43), la formule du résidu composé (6.1) et le théorème de faible dualité (n° 4).

COMMUTATIVITÉ *de* Rés *et de* F^*. — *Soit* F *une application de* X^* *dans* X *vérifiant les hypothèses qu'énonce le* n° 1; *on a*

$$F^*\, \text{Rés}^m = \text{Rés}^m F^*.$$

COROLLAIRE. — La formule (7.5).

PREUVE. — La proposition 37 et la définition de Rés^m.

COMMUTATION *de* Rés^m *avec le produit à droite par* $h^*(X)$. — $H^*(X - S, S')$ *et* $H^*(S, S')$ *sont des algèbres sur* $H^*(X)$; Rés^m *est un homomorphisme d'algèbre* :

$$\text{Rés}^m[h^*(X - S, S').h^*(X)] = [\text{Rés}^m h^*(X - S, S')].h^*(X).$$

COROLLAIRE. — La formule (7.6).

PREUVE. — La proposition 38 et la définition de Rés^m.

COMMUTATION *de* Rés^m *avec* $p^\star$, $i^\star$, $\partial^\star$. — *Dans le diagramme qu'étudie le* n° 39 — *et où l'on ne suppose plus* $m = 1$, $S = S_1$ — *on a les règles de commutation* :

$$\text{Rés}^m p^\star = p^\star\,\text{Rés}^m, \qquad \text{Rés}^m i^\star = i^\star\,\text{Rés}^m,$$
$$\text{Rés}^m \partial^\star = (-1)^m\,\partial^\star\,\text{Rés}^m.$$

COROLLAIRE. — Les formules (7.7), (7.8) et (7.9), où la définition de $\partial^\star$ (n° 23) a été introduite.

PREUVE. — La proposition 39 et la définition de Rés^m

CHAPITRE 6. — Cas où les S_i ont des équations globales.

Nous supposons que, près de S, les S_i aient des équations globales (*cf.* n° 8) :

$$S_i : \quad s_i(x) = 0.$$

Nous introduisons des notations (n° 46) et établissons des propriétés (n°s 47, 49, 50, 51) englobant celles qu'énonce le n° 8.

45. Résidu d'un produit de formes fermées.

LEMME ($m = 1$, $S = S_1$). — Soit $\varphi(x)$ une forme, fermée sur $X - S$, ayant sur S une singularité polaire d'ordre 1. Il existe des formes $\psi(x)$ et $\theta(x)$, régulières sur X, telles que

$$\varphi(x) = \frac{ds(x)}{s(x)} \wedge \psi(x) + \theta(x).$$

PREUVE. — D'après le lemme 14, chaque point y de X possède un voisinage $V(y)$ sur lequel existent deux formes régulières $\psi(x, y)$ et $\theta(x, y)$ telles que

$$\varphi(x) = \frac{ds(x)}{s(x)} \wedge \psi(x, y) + \theta(x, y).$$

Soit une partition de l'unité

$$\sum_y \pi(x, y) = 1$$

telle que le support de $\pi(x, y)$ soit intérieur à $V(y)$. Définissons

$$\psi(x) = \sum_{y} \pi(x, y)\, \psi(x, y), \qquad \theta(x) = \sum_{y} \pi(x, y)\, \theta(x, y);$$

ces formes ont évidemment les propriétés énoncées.

Forme-résidu d'un produit ($m = 1$, $S = S_1$). Lemme. — Soient $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ deux formes, *fermées* sur $X - S$, ayant sur S une singularité polaire d'ordre 1. Alors : $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ a une singularité de ce type;

$$(45.1) \quad \text{rés}[\varphi_1 \wedge \varphi_2] = \text{rés}\left[\varphi_1 \wedge \frac{ds}{s}\right] \wedge \text{rés}[\varphi_2] + \text{rés}[\varphi_1] \wedge \text{rés}\left[\frac{ds}{s} \wedge \varphi_2\right].$$

Note. — (2.4) permet de vérifier que le second membre est bien indépendant du choix de s.

Preuve. — D'après le lemme précédent

$$\varphi_1(x) = \frac{ds(x)}{s(x)} \wedge \psi_1(x) + \theta_1(x); \qquad \varphi_2 = \frac{ds}{s} \wedge \psi_2 + \theta_2;$$

d'où

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 = \frac{ds}{s} \wedge (\psi_1 \wedge \theta_2 \pm \theta_1 \wedge \psi_2) + \theta_1 \wedge \theta_2,$$

$\pm$ étant $+$ quand $d^0(\varphi_1)$ est pair. Donc

$$\text{rés}[\varphi_1 \wedge \varphi_2] = (\psi_1 \wedge \theta_2 \pm \theta_1 \wedge \psi_1) \mid S$$

or

$$\psi_i \mid S = \text{rés}[\varphi_i]; \qquad \theta_i \mid S = \text{rés}\left[\frac{ds}{s} \wedge \varphi_i\right]$$

d'où (45.1).

Classe-résidu d'un produit. — Lemme. — Soient φ_1 et φ_2 deux formes, *fermées* sur $X - S$, *nulles* sur S';

$$(45.2) \quad \text{Rés}^m[\varphi_1 \wedge \varphi_2] = \sum_{(\alpha, \ldots, \beta, \lambda, \ldots, \mu)} \pm \; \text{Rés}^m\left[\varphi_1 \wedge \frac{ds_\alpha}{s_\alpha} \wedge \ldots \wedge \frac{ds_\beta}{s_\beta}\right] \cdot \text{Rés}^m\left[\frac{ds_\lambda}{s_\lambda} \wedge \ldots \wedge \frac{ds_\mu}{s_\mu} \wedge \varphi_2\right]$$

la somme étant étendue à l'ensemble des permutations $(\alpha, \ldots, \beta, \lambda, \ldots, \mu)$ de $(1, \ldots, m)$ telles que

$$\alpha < \ldots < \beta, \; \lambda < \ldots < \mu$$

le signe $\pm$ étant le même que dans la relation :

$$ds_\lambda \wedge \ldots \wedge ds_\mu \wedge ds_\alpha \wedge \ldots \wedge ds_\beta = \pm ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m.$$

PREUVE. — Si $m = 1$, (45.2) résulte de (45.1). Nous pouvons donc faire une récurrence sur m et supposer (45.2) vrai quand nous y remplaçons m par $m-1$; nous pouvons aussi, vu le théorème 1, nous limiter au cas où φ_1 φ_2 ont sur $S_1 - S_1 \cap (S_2 \cup \ldots \cup S_m)$ une singularité polaire d'ordre 1, ce qui simplifie les notations; alors :

$$\begin{aligned}
\text{Rés}^m[\varphi_1 \wedge \varphi_2] &= \text{Rés}^{m-1}\,\text{rés}[\varphi_1 \wedge \varphi_2] \\
&= \text{Rés}^{m-1}\left[\text{rés}\left(\varphi_1 \wedge \frac{ds_1}{s_1}\right) \wedge \text{rés}\,\varphi_2 + \text{rés}\,\varphi_1 \wedge \text{rés}\left(\frac{ds_1}{s_1} \wedge \varphi_2\right)\right] \\
&= \sum_{(\alpha,\ldots,\beta,\lambda,\ldots,\mu)} \pm \quad \text{Rés}^{m-1}\left[\text{rés}\left(\varphi_1 \wedge \frac{ds_1}{s_1}\right) \wedge \frac{ds_\alpha}{s_\alpha} \wedge \ldots \wedge \frac{ds_\beta}{s_\beta}\right] \\
&\qquad \cdot \text{Rés}^{m-1}\left[\frac{ds_\lambda}{s_\lambda} \wedge \ldots \wedge \frac{ds_\mu}{s_\mu} \wedge \text{rés}\,\varphi_2\right] \\
&\qquad \pm \quad \text{Rés}^{m-1}\left[\text{rés}\,\varphi_1 \wedge \frac{ds_\alpha}{s_\alpha} \wedge \ldots \wedge \frac{ds_\beta}{s_\beta}\right] \\
&\qquad \cdot \text{Rés}^{m-1}\left[\frac{ds_\lambda}{s_\lambda} \wedge \ldots \wedge \frac{ds_\mu}{s_\mu} \wedge \text{rés}\left(\frac{ds_1}{s_1} \wedge \varphi_2\right)\right];
\end{aligned}$$

la somme est étendue à l'ensemble des permutations $(\alpha, \ldots, \beta, \lambda, \ldots, \mu)$ de $(2, \ldots, m)$ telles que $\alpha < \ldots < \beta$, $\lambda < \ldots < \mu$; le signe $\pm$ étant celui-ci :

$$ds_\lambda \wedge \ldots \wedge ds_\mu \wedge ds_\alpha \wedge \ldots \wedge ds_\beta = \pm ds_2 \wedge \ldots \wedge ds_m.$$

D'après (2.4) :

$$\text{rés}(\varphi_1) \wedge \frac{ds_\alpha}{s_\alpha} = \text{rés}\left(\varphi_1 \wedge \frac{ds_\alpha}{s_\alpha}\right), \qquad \frac{ds_\mu}{s_\mu} \wedge \text{rés}(\varphi_2) = -\,\text{rés}\left(\frac{ds_\mu}{s_\mu} \wedge \varphi_2\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\text{Rés}^m[\varphi_1 \wedge \varphi_2] = \sum_{(\alpha\ldots,\beta,\lambda,\ldots,\mu)} \pm \quad & \text{Rés}^m\left[\varphi_1 \wedge \frac{ds_1}{s_1} \wedge \frac{ds_\alpha}{s_\alpha} \wedge \ldots \wedge \frac{ds_\beta}{s_\beta}\right] \\
& \cdot \text{Rés}^m\left[\frac{ds_\lambda}{s_\lambda} \wedge \ldots \wedge \frac{ds_\mu}{s_\mu} \wedge \varphi_2\right] \\
\pm \quad & \text{Rés}^m\left[\varphi_1 \wedge \frac{ds_\alpha}{s_\alpha} \wedge \ldots \wedge \frac{ds_\beta}{s_\beta}\right] \\
& \cdot \text{Rés}^m\left[\frac{ds_\lambda}{s_\lambda} \wedge \ldots \wedge \frac{ds_\mu}{s_\mu} \wedge \frac{ds_1}{s_1} \wedge \varphi_2\right]
\end{aligned}$$

le signe $\pm$ étant celui-ci :

$$ds_\lambda \wedge \ldots \wedge ds_\mu \wedge ds_1 \wedge ds_\alpha \wedge \ldots \wedge ds_\beta = \pm ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m;$$

d'où (45.2).

Nous utiliserons le symbolisme suivant pour exprimer et compléter cette formule (45.2).

46. Définition de nouveaux symboles. — *Définissons*

$$(46.1)\qquad \left.\frac{\partial^{q+\ldots+r+u+\ldots+v}\omega}{\partial s_1^q\ldots\partial s_n^r\, ds_{n+1}^{1+u}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+v}}\right|_{(S,S')} = \left.\frac{d^{q+\ldots+r+u+\ldots+v}[ds_1\wedge\ldots\wedge ds_n\wedge\omega]}{ds_1^{1+q}\wedge\ldots\wedge ds_n^{1+r}\wedge ds_{n+1}^{1+u}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+v}}\right|_{(S,S')}$$

$$(q,\ \ldots,\ r,\ u,\ \ldots,\ v : \text{entiers} \geqq 0).$$

Ce symbole (46.1) est donc défini quand les S_i ont, près de S, des équations globales $s_i(x)=0$ et que $\omega(x)$ est une forme régulière près de S, telle que

$$ds_1\wedge\ldots\wedge ds_n\wedge d\left(\frac{\omega}{s_{n+1}^{1+u}\ldots s_m^{1+v}}\right)=0,\qquad \omega\,|\,S'=0.$$

Ce symbole (46.1) représente une classe de cohomologie de (S, S'). Une permutation de $\partial s_1^q, \ldots, \partial s_n^r$ ne le change pas. Une permutation paire (impaire) de $ds_{n+1}^{1+u}, \ldots, ds_m^{1+v}$ le multiplie par $+1$ (par -1).

NOTE. — Si $q=0$, nous supprimons ∂s_1^q : il est évident que

$$\left.\frac{\partial^{q+\ldots+r+u+\ldots+v}\omega}{\partial s_2^q\ldots\partial s_n^r\, ds_{n+1}^{1+u}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+v}}\right|_{(S,S')} = i^*\left.\frac{\partial^{q+\ldots+r+u+\ldots+v}\omega}{\partial s_2^q\ldots\partial s_n^r\, ds_{n+1}^{1+u}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+v}}\right|_{(S_2\cap\ldots\cap S_m,\,S')},$$

Si $q=\ldots=r=0$, (46.1) est noté

$$\left.\frac{\partial^{u+\ldots+v}\omega}{ds_{n+1}^{1+u}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+v}}\right|_{(S,S')}.$$

Si $n=m$, (46.1) est noté

$$\left.\frac{\partial^{q+\ldots+r}\omega}{\partial s_1^q\ldots\partial s_m^r}\right|_{(S,S')}.$$

Si $m=1$, $\left.\dfrac{\partial^q\omega}{\partial s^q}\right|_{(S,S')}$ est noté $\left.\dfrac{d^q\omega}{ds^q}\right|_{(S,S')}$.

Enfin, si $n=m$, $q=\ldots=r=0$, (46.1) est noté $\omega\,|_{(S,S')}$; c'est la classe de cohomologie de $\omega\,|\,S$; [par hypothèse $ds_1\wedge\ldots\wedge ds_m\wedge d\omega=0$; donc $d\omega=0$ sur S].

47. Premières propriétés de ces symboles. — *Les formules* (7.5)...(7.8) subsistent évidemment quand on y remplace le symbole (7.2) par le symbole (46.1); (7.9) devient la formule suivante :

$$(47.1)\quad \partial^* \frac{\partial^{q+\ldots+r+u+\ldots+v-m+n}\psi}{\partial s_1^q \ldots \partial s_n^r\, ds_{n+1}^u \wedge \ldots \wedge ds_m^v}\bigg|_{(S\cap S'',S')}$$
$$= (-1)^{m-n} \frac{\partial^{q+\ldots+r+u+\ldots+v}}{\partial s_1^q \ldots \partial s_n^r\, ds_{n+1}^{1+u} \wedge \ldots \wedge ds_m^{1+v}}$$
$$\times \left[\frac{s_{n+1}}{u}\cdots\frac{s_m}{v}\left(d\psi - u\frac{ds_{n+1}}{s_{n+1}}\wedge\psi - \ldots v\frac{ds_m}{s_m}\wedge\psi\right)\right]\bigg|_{(S,S''\cup S')}$$

si : $ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n \wedge d\left[\dfrac{\psi(x)}{s_{n+1}^u \ldots s_m^v}\right] = 0$ sur S'' et $\psi \mid S' = 0$.

THÉORÈME 47.1. — *Supposons défini*

$$(47.2)\quad \frac{\partial^{p+\ldots+q+r+\ldots+u+v+\ldots+w}\omega}{\partial s_1^p \ldots \partial s_n^q\, ds_{n+1}^{1+r} \wedge \ldots \wedge ds_j^{1+u} \wedge ds_{j+1}^{1+v} \wedge \ldots \wedge ds_m^{1+w}}\bigg|_{(S,S')};$$

alors : ce symbole reste défini quand on modifie $p, \ldots, q$; plus généralement

$$(47.3)\quad \frac{\partial^{P+\ldots+Q+R+\ldots+U+v+\ldots+w}\omega}{\partial s_1^P \ldots \partial s_n^Q\, \partial s_{n+1}^R \ldots \partial s_j^U\, ds_{j+1}^{1+v} \wedge \ldots \wedge ds_m^{1+w}}\bigg|_{(S,S')}$$

est défini quels que soient les entiers $\geqq 0$: $P, \ldots, Q, R, \ldots, U$; enfin (47.3) *est nul si l'on n'a pas à la fois*

$$(47.4)\quad R = 1 + r, \qquad \ldots, \qquad U = 1 + u$$

EXEMPLE : $m = 1$. — Si $\dfrac{d^r\omega}{ds^{1+r}}\bigg|_{(S,S')}$ est défini, alors $\dfrac{d^R\omega}{ds^R}\bigg|_{(S,S')}$ est défini quel que soit $R \geqq 0$, est nul si $R \neq 1 + r$.

PREUVE *que* (47.3) *est défini.* — Puisque (47.2), est défini, on a

$$ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n \wedge d\left[\frac{\omega}{s_{n+1}^{1+r}\ldots s_{j+1}^{1+v}\ldots s_m^{1+w}}\right] = 0, \qquad \omega \mid S' = 0;$$

donc

$$ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n \wedge \ldots ds_j \wedge d\left[\frac{\omega}{s_{j+1}^{1+v}\ldots s_m^{1+w}}\right] = 0, \qquad \omega \mid S' = 0;$$

donc (47.3) est défini.

PREUVE *que* (47.3) *est nul si* (47.4) *n'est pas vérifié.* — L'associativité de la composition de Rés réduit cette preuve au cas $m = 1$. Supposons donc $m = 1$ et $\dfrac{d^r\omega}{ds^{1+r}}\bigg|_{(S,S')}$ défini, c'est-à-dire

$$d\left(\frac{\omega}{s^{1+r}}\right) = 0, \qquad \omega \mid S' = 0.$$

Dans $(X - S, S')$ on a donc

$$(1 + r - R)\frac{ds \wedge \omega}{s^{1+R}} = d\left(\frac{\omega}{s^R}\right) \sim 0,$$

d'où, si $R \neq r + 1$:

$$\frac{ds \wedge \omega}{s^{1+R}} \sim 0, \qquad \text{donc} \quad \left.\frac{d^R\omega}{ds^R}\right|_{(S,S')} = 0.$$

Théorème 47.2. — *On a*

$$\left.\frac{\partial^{q+\ldots+r+u+\ldots+v+\ldots+w}[d\omega]}{\partial s_1^q\ldots\partial s_n^r\, ds_{n+1}^{1+u}\wedge\ldots\wedge ds_j^{1+v}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+w}}\right|_{(S,S')}$$

$$= \sum_{j=n+1}^{m}(-1)^{j-n-1}\left.\frac{\partial^{q+\ldots+r+u+\ldots+v+\ldots+w+1}\omega}{\partial s_1^q\ldots\partial s_n^r\,\partial s_j^{1+v}\, ds_{n+1}^{1+u}\wedge\ldots\wedge ds_{j-1}^{\cdot\cdot}\wedge ds_{j+1}^{\cdot\cdot}\ldots\wedge ds_m^{1+w}}\right|_{(S,S')}$$

si le deuxième membre est défini.

Exemple : $m = 1$. — On a [Cf : (8.2)]

$$\left.\frac{d^v[d\omega]}{ds^{1+v}}\right|_{(S,S')} = \left.\frac{d^{1+v}\omega}{ds^{1+v}}\right|_{(S,S')}.$$

Preuve. — Dans $\Omega(X, S')$ on a :

$$0 \sim (-1)^n d\left[\frac{ds_1\wedge\ldots\wedge ds_n\wedge\omega}{s_1^{1+q}\ldots s_n^{1+r}s_{n+1}^{1+u}\ldots s_j^{1+v}\ldots s_m^{1+w}}\right]$$

$$= \frac{ds_1\wedge\ldots\wedge ds_n\wedge d\omega}{s_1^{1+q}\ldots s_n^{1+r}s_{n+1}^{1+u}\ldots s_j^{1+v}\ldots s_m^{1+w}}$$

$$- \sum_{j=n+1}^{m}(1+v)\frac{ds_1\wedge\ldots\wedge ds_n\wedge ds_j\wedge\omega}{s_1^{1+q}\ldots s_n^{1+r}s_{n+}^{1+u}\ldots s_j^{2+v}\ldots s_m^{1+w}};$$

donc

$$\left.\frac{\partial^{q+\ldots+r+u+\ldots+w}[d\omega]}{\partial s_1^q\ldots\partial s_n^r\, ds_{n+1}^{1+u}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+w}}\right|_{(S,S')}$$

$$= \sum_{j=n+1}^{m} q!\ldots r!\,u!\ldots(1+v)!\ldots w!\,\text{Rés}^m\frac{ds_1\wedge\ldots\wedge ds_n\wedge ds_j\wedge\omega}{s_1^{1+q}\ldots s_n^{1+r}s_{n+1}^{1+u}\ldots s_j^{2+v}\ldots s_m^{1+w}}.$$

D'où le théorème, en remarquant que les définitions (7.2) et (46.1) et l'anticommutativité de la composition de Rés ont pour conséquence la formule suivante : si $(\alpha, \ldots, \beta, \lambda, \ldots, \mu)$ est une permutation de $(1, \ldots, m)$, alors

$$(47.6) \qquad \left.\frac{\partial^{q+\ldots+r+u+\ldots+v}\omega}{\partial s_\alpha^q\ldots\partial s_\beta^r\, ds_\lambda^{1+u}\wedge\ldots\wedge ds_\mu^{1+v}}\right|_{(S,S')}$$

$$= \pm\, q!\ldots r!\,u!\ldots v!\,\text{Rés}^m\frac{ds_\alpha\wedge\ldots\wedge ds_\beta\wedge\omega}{s_\alpha^{1+q}\ldots s_\beta^{1+r}s_\lambda^{1+u}\ldots s_\mu^{1+v}}.$$

Le signe $\pm$ étant le même que dans la relation .

$$ds_\alpha \wedge \ldots \wedge ds_\beta \wedge ds_\lambda \wedge \ldots \wedge ds_\mu = \pm ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m.$$

48. Gelfand et Šilov ([5] chap. III, § 1, n° 5, p. 261) et, indépendamment, [11] ont donné une construction de $\left.\dfrac{\partial^{q+\ldots+r}\omega}{\partial s_1^q \ldots \partial s_m^r}\right|_{(S,S')}$ analogue à la construction de la dérivée partielle d'une fonction. Elle emploie le

Lemme. — Si la forme $\varphi(x)$, régulière sur X, vérifie les conditions

$$ds_1(x) \wedge \ldots \wedge ds_m(x) \wedge \varphi(x) = 0, \qquad \varphi \mid S' = 0,$$

alors il existe des formes $\psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)$ régulières sur X et telles que

$$\varphi(x) = ds_1(x) \wedge \psi_1(x) + \ldots + ds_m(x) \wedge \psi_m(x); \qquad \psi_i \mid S' = 0.$$

Preuve. — Soit $y \in X$; prenons en y des coordonnées locales telles que $x_i = s_i(x)$; soit

$$\varphi(x) = \psi_0(x, y) + dx_1 \wedge \psi_1(x, y) + \ldots + dx_m \wedge \psi_m(x, y),$$

$\psi_i(x, y)$ ne contenant ni $dx_{i+1}, \ldots$ ni dx_m; ces $\psi_i(x, y)$ sont déterminés sans ambiguité et, sur S'_j, $x_1, \ldots, x_m$ restent indépendants; les hypothèses impliquent donc

$$\psi_0 = 0, \qquad \psi_i \mid S' = 0.$$

Ainsi, en chaque point y de X, on peut définir un voisinage $V(y)$ de y et des formes $\psi_i(x, y)$ régulières sur $V(y)$, telles que

$$\varphi(x) = ds_1(x) \wedge \psi_1(x, y) + \ldots + ds_m \wedge \psi_m, \qquad \psi_i \mid S' = 0.$$

Soit $\sum_y \pi(x, y) = 1$ une partition de l'unité, telle que le support de π soit intérieur à $V(y)$; les formes

$$\psi_i(x) = \sum_y \pi(x, y)\, \psi_i(x, y)$$

ont les propriétés énoncées.

Construction de Gelfand et Šilov. — *Soit $\omega(x)$ une forme régulière sur X, vérifiant les hypothèses*

$$ds_1(x) \wedge \ldots \wedge ds_m(x) \wedge d\omega = 0, \qquad \omega \mid S' = 0.$$

Alors il existe des formes, régulière sur X, nulles sur S'

$$\omega_1, \ldots, \omega_m, \ldots, \omega_{u\ldots v}(x), \ldots \qquad (u, v = 1, \ldots, m)$$

telles que

$$d\omega = ds_1 \wedge \omega_1 + \ldots + ds_m \wedge \omega_m$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d\omega_{u\ldots v} = ds_1 \wedge \omega_{u\ldots v1} + \ldots + ds_m \wedge \omega_{u\ldots vm}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a, pour tous les choix possibles des $\omega_{u\ldots v}$,

$$\omega_{u\ldots v} \mid S \in \left.\frac{\partial^{q+\ldots+r}\omega}{\partial s_1^q \ldots \partial s_m^r}\right|_{(S,S')}, \tag{48.1}$$

où q (où r) est le nombre des indices u, ..., v égaux à 1 (*à m*).

Preuve *de l'existence des* $\omega_{u\ldots v}$. — Le lemme prouve l'existence de formes $\omega_1(x)$, ..., $\omega_m(x)$ telles que

$$d\omega = ds_1 \wedge \omega_1 + \ldots + ds_m \wedge \omega_m, \qquad \omega_1 \mid S' = 0, \ \ldots, \ \omega_m \mid S' = 0.$$

D'où, en appliquant d,

$$ds_1 \wedge d\omega_1 + \ldots + ds_m \wedge d\omega_m = 0,$$

d'où

$$ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge d\omega_1 = 0.$$

Le lemme en déduit l'existence de ω_{11}, ..., ω_{1m} tels que

$$d\omega_1 = ds_1 \wedge \omega_{11} + \ldots + ds_m \wedge \omega_{1m}, \qquad \omega_{1i} \mid S' = 0,$$

etc.

Preuve *de* (48.1). — On a

$$\omega_{u\ldots v} \mid S = \text{rés}^m \left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega_{u\ldots v}}{s_1 \ldots s_m} \right];$$

donc

$$\omega_{u\ldots v} \mid S \in \text{Rés}^m \left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega_{u\ldots v}}{s_1 \ldots s_m} \right]. \tag{48.2}$$

Or dans $(X - S_1 \cup \ldots \cup S_m, S')$ on a

$$\frac{ds_1 \wedge ds_2 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega_{u\ldots v1}}{s_1^p s_2^q \ldots s_m^r} = (-1)^{m-1} \frac{ds_2 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge d\omega_{u\ldots v}}{s_1^p s_2^q \ldots s_m^r}$$
$$= d\left[\frac{ds_2 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega_{u\ldots v}}{s_1^p s_2^q \ldots s_m^r} \right] + p\,\frac{ds_1 \wedge ds_2 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega_{u\ldots v}}{s_1^{p+1} s_2^q \ldots s_m^r}$$

donc

$$\frac{ds_1 \wedge ds_2 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega_{u\ldots v1}}{s_1^p s_2^q \ldots s_m^r} \sim p\,\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega_{u\ldots v}}{s_1^{p+1} \ldots s_m^r}$$

donc, plus généralement :

$$\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_w \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega_{u\ldots vw}}{s_1^p \ldots s_w^q \ldots s_m^r} \sim q \frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_w \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega_{u,\ldots v}}{s_1^p \ldots s_w^{q+1} \ldots s_m^r}$$

d'où

$$\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega_{u\ldots v}}{s_1 \ldots s_m} \sim q! \ldots r! \frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega}{s_1^{q+1} \ldots s_m^{r+1}}$$

où q (où r) est le nombre des indices $u \ldots v$ égaux à 1 (à m). Par suite (48.2) s'écrit

$$\omega_{u\ldots v} \mid S \in q! \ldots r! \,\text{Rés}^m \left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega}{s_1^{q+1} \ldots s_m^{r+1}} \right]$$

ce qui équivaut à (48.1).

Cette construction de Gelfand et Šilov a pour conséquences les trois théorèmes suivants :

49. Cas où $\omega(x)$ est de degré nul. — Prouvons le théorème qu'à déjà énoncé le n° 8 :

Théorème. — *Supposons $\omega(x)$ de degré nul et*

$$\left. \frac{\partial^{q+\ldots+r}[\omega]}{\partial s_1^q \ldots \partial s_m^r} \right|_{(S,S')} \tag{49.1}$$

défini; alors

$$\omega(x) = f[s_1(x), \ldots, s_m(x)],$$

$f[s_1, \ldots, s_m]$ étant une fonction holomorphe au point $[0, \ldots, 0]$. Si S et S' se coupent, f est évidemment nulle et (49.1) est donc nul. Sinon $(S, S') = S$ et (49.1) est le produit du nombre

$$\left. \frac{\partial^{q+\ldots+r} f[s_1, \ldots, s_m]}{\partial s_1^q \ldots \partial s_m^r} \right|_{s_1=\ldots=s_m=0}$$

par la classe de cohomologie unité de S.

Preuve. — (49.1) est défini quand

$$ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge d\omega = 0;$$

d'où, vu le lemme du numéro précédent

$$d\omega = \omega_1 \, ds_1 + \ldots + \omega_m \, ds_m;$$

$\omega, \omega_1 \ldots, \omega_m$ sont des fonctions; ω est donc fonction *holomorphe* de $s_1, \ldots, s_m$:

$$\omega = f[s_1, \ldots, s_m].$$

La construction de Gelfand et Šilov donne

$$\omega_{u\ldots v} \mid S = \left.\frac{\partial^{q+\ldots+r} f[s_1, \ldots s_m]}{\partial s_1^q \ldots \partial s_m^r}\right|_{s_1=\ldots=s_m=0}.$$

D'où le théorème.

50. Formule du changement de variables. — Preuve *de* (8.6). — La construction de Gelfand et Šilov donne des formes $\pi_1, \ldots, \pi_m$ telles que

$$d\omega = dt_1 \wedge \pi_1 + \ldots + dt_m \wedge \pi_m, \qquad \pi_i \mid S' = 0;$$

or

$$dt_i = \sum_u \frac{\partial t_i}{\partial s_u} ds_u;$$

on peut donc satisfaire les conditions

$$d\omega = ds_1 \wedge \omega_1 + \ldots + ds_m \wedge \omega_m, \qquad \omega_u \mid S' = 0$$

en choisissant

$$\omega_u = \sum_i \frac{\partial t_i}{\partial s_u} \pi_i.$$

La construction de Gelfand et Šilov donne des formes π_{ij} telles que

$$d\pi_i = dt_1 \wedge \pi_{i1} + \ldots + dt_m \wedge \pi_{im};$$

donc

$$d\omega_u = \sum_{iv} \frac{\partial^2 t_i}{\partial s_u \partial s_v} ds_v \wedge \pi_i + \sum_{ijv} \frac{\partial t_i}{\partial s_u} \frac{\partial t_j}{\partial s_v} ds_v \wedge \pi_{ij};$$

on peut donc satisfaire les conditions

$$d\omega_u = ds_1 \wedge \omega_{u1} + \ldots + ds_m \wedge \omega_{um}, \ \omega_{u1} \mid S' = 0, \ \ldots, \ \omega_{um} \mid S' = 0$$

en choisissant

$$\omega_{uv} = \sum_i \frac{\partial^2 t_i}{\partial s_u \partial s_v} \pi_i + \sum_{ij} \frac{\partial t_i}{\partial s_u} \frac{\partial t_j}{\partial s_v} \pi_{ij}.$$

Plus généralement on peut choisir pour $\omega_{u\ldots v}$ une combinaison linéaire de ceux des $\pi_{i\ldots j}$ qui n'ont pas plus d'indices que $\omega_{u\ldots v}$, les coefficients de cette combinaison linéaire étant des polynomes en les dérivées partielles des fonctions $t_1(s_1, \ldots s_m), \ldots t_m(s_1, \ldots s_m)$; ces polynomes sont constants sur S. D'où, vu (48.1), une formule du type (8.6). Les constantes $C_{Q,\ldots,R}^{q,\ldots,r}$ qui y figurent sont indépendantes de (S, S') de ω et de son degré. On peut donc les déterminer en supposant S' vide, ω de degré nul et en appliquant le théorème du n° 49.

Cette formule (8.6) et l'associativité de Rés ont pour conséquence immédiate le

THÉORÈME. — Soient

$$t_1(s_1, \ldots, s_n), \ldots, t_n(s_1, \ldots, s_n)$$

n fonctions holomorphes en $(0, \ldots, 0)$, *nulles en ce point, où*

$$\frac{D(t)}{D(s)} \neq 0;$$

alors

$$\left.\frac{\partial^{Q+\ldots+R+u+\ldots+v}}{\partial s_1^Q \ldots \partial s_n^R\, ds_{n+1}^{1+u} \wedge \ldots \wedge ds_m^{1+v}}\right|_{(S,S')}$$
$$= \sum_{\substack{0<q+\ldots+r\leq \\ Q+\ldots+R}} C_{Q,\ldots,R}^{q,\ldots,r} \left.\frac{\partial^{q+\ldots+r+u+\ldots+v}}{\partial t_1^q \ldots \partial t_n^r\, ds_{n+1}^{1+u} \wedge \ldots \wedge ds_m^{1+v}}\right|_{(S,S')},$$

les nombres complexes $C_{Q,\ldots,R}^{q,\ldots,r}$ *étant indépendants de* (S, S') *de* ω, *de son degré, de* $u, \ldots, v$, $m-n$; *ils ne dépendent que de l'allure des fonctions* $t_i(s_1, \ldots, s_n)$ *au point* $(0, \ldots, 0)$ *: ce sont les coefficients au point* $(0, \ldots, 0)$ *de la formule classique*

$$\frac{\partial^{Q+\ldots+R}}{\partial s_1^Q \ldots \partial s_n^R} = \sum_{\substack{0<q+\ldots+r\leq \\ Q+\ldots+R}} C_{Q,\ldots,R}^{q,\ldots,r} \frac{\partial^{q+\ldots+r}}{\partial t_1^q \ldots \partial t_n^r}$$

51. Formule de Leibnitz. — PREUVE *de* (8.5). — La construction de Gelfand et Šilov donne des formes $\omega_{u\ldots v}$ et $\pi_{u\ldots v}$ telles que

$$\begin{array}{lll} d\omega = ds_1 \wedge \omega_1 + \ldots + ds_m \wedge \omega_m, & \omega_u \mid S' = 0, & d\pi = ds_1 \wedge \pi_1 + \ldots + ds_m \wedge \pi_m \\ d\omega_u = ds_1 \wedge \omega_{u1} + \ldots + ds_m \wedge \omega_{um}, & \omega_{uv} \mid S' = 0, & d\pi_u = ds_1 \wedge \pi_{u1} + \ldots + ds_m \wedge \pi_{um} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

On peut donc choisir

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \pi)_u &= \omega_u \wedge \pi + \omega \wedge \pi_u \\ (\omega \wedge \pi)_{uv} &= \omega_{uv} \wedge \pi + \omega_u \wedge \pi_v + \omega_v \wedge \pi_u + \omega \wedge \pi_{uv} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$(\omega \wedge \pi)_{u\ldots v}$ est une somme de $\omega_{\alpha\ldots\beta} \wedge \pi_{\lambda\ldots\mu}$. D'où, vu (48.1)

$$\left.\frac{\partial^{Q+\ldots+R}(\omega \wedge \pi)}{\partial s_1^Q \ldots \partial s_m^R}\right|_{(S,S')} = \sum_{\alpha,\ldots,\mu} c_{\alpha\ldots\mu}^{Q\ldots R} \left.\frac{\partial^{\alpha+\ldots+\beta}\omega}{\partial s_1^\alpha \ldots \partial s_m^\beta}\right|_{(S,S')} \left.\frac{\partial^{\lambda+\ldots+\mu}\pi}{\partial s_1^\lambda \ldots \partial s_m^\mu}\right|_{(S)}$$

les $c_{\alpha\ldots\mu}^{Q\ldots R}$ étant des entiers indépendants de ω, de π, de leurs degrés; on les détermine en choisissant ω et π de degré nul et en appliquant le théorème du n° 49 : on obtient (8.5) qui, du point de vue formel, est identique à la formule de Leibnitz classique.

Nous allons en déduire une formule plus générale :

THÉORÈME. — *Supposons définis*

$$\left.\frac{\partial^{a_{n+1}+\ldots+a_m}\omega}{ds_{n+1}^{1+a_{n+1}}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+a_m}}\right|_{(S,S')} \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial^{b_{n+1}+\ldots+b_m}\pi}{ds_{n+1}^{1+b_{n+1}}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+b_m}}\right|_{(S)};$$

c'est-à-dire supposons

$$ds_1\wedge\ldots\wedge ds_n\wedge d\left[\frac{\omega}{s_{n+1}^{1+a_{n+1}}\ldots s_m^{1+a_m}}\right]=0, \qquad \omega\mid S'=0,$$

$$ds_1\wedge\ldots\wedge ds_n\wedge d\left[\frac{\pi}{s_{n+1}^{1+b_{n+1}}\ldots s_m^{1+b_m}}\right]=0.$$

Alors on a, quels que soient les entiers $\geqq 0$: $Q_1,\ldots,Q_n$, pour $Q_j=1+a_j+b_j$ $(j=n+1,\ldots,m)$:

$$\left.\frac{\partial^{Q_1+\ldots+Q_m}[\omega\wedge\pi]}{\partial s_1^{Q_1}\ldots\partial s_n^{Q_n}ds_{n+1}^{1+Q_{n+1}}\wedge\ldots\wedge ds_m^{1+Q_m}}\right|_{(S,S')}$$

$$=\sum\pm\frac{Q_1!}{q_1!\,r_1!}\cdots\frac{Q_m!}{q_m!\,r_m!}$$

$$\cdot\left.\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_m}\omega}{\partial s_1^{q_1}\ldots\partial s_n^{q_n}\partial s_\alpha^{q_\alpha}\ldots\partial s_\beta^{q_\beta}ds_\lambda^{1+q_\lambda}\wedge\ldots\wedge ds_\mu^{1+q_\mu}}\right|_{(S,S')}$$

$$\cdot\left.\frac{\partial^{r_1+\ldots+r_m}\pi}{\partial s_1^{r_1}\ldots\partial s_n^{r_n}\partial s_\lambda^{r_\lambda}\ldots\partial s_\mu^{r_\mu}ds_\alpha^{1+r_\alpha}\wedge\ldots\wedge ds_\beta^{1+r_\beta}}\right|_{(S)}.$$

Cette somme est étendue à l'ensemble des valeurs de $(q_1,\ldots,q_n,r_1,\ldots,r_n)$ *telles que* $q_i+r_i=Q_i$ *et des permutations* $(\alpha,\ldots,\beta,\lambda,\ldots,\mu)$ *de* $(n+1,\ldots,m)$ *telles que*

$$\alpha<\ldots<\beta, \qquad \lambda<\ldots<\mu;$$

$q_\lambda,\ldots,q_\mu,r_\alpha,\ldots,r_\beta$ *prennent les seules valeurs pour lesquelles le second membre est défini :*

$$q_\lambda=a_\lambda,\ldots,q_\mu=a_\mu, \qquad r_\alpha=b_\alpha,\ldots,r_\beta=b_\beta;$$

$q_\alpha,\ldots,q_\beta,r_\lambda,\ldots,r_\mu$ *prennent les seules valeurs pour lesqueltes les symboles précédents ne sont pas nuls* (*cf.* *Théorème* 47.1) :

$$q_\alpha=1+a_\alpha,\ldots,q_\beta=1+a_\beta, \qquad r_\lambda=1+b_\lambda,\ldots,r_\mu=1+b_\mu.$$

On a donc

$$q_j+r_j=Q_j \qquad \text{pour } j=1,\ldots,m.$$

Le signe $\pm$ est le même que dans les relations :

$$ds_\alpha \wedge \ldots \wedge ds_\beta \wedge \omega \wedge ds_\lambda \wedge \ldots \wedge ds_\mu = \pm\, \omega\, ds_{n+1} \wedge \ldots \wedge ds_m.$$

PREUVE. — Remarquons d'abord que la formule (8.5) peut s'écrire :

$$(51.1)\quad \text{Rés}^m\left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega \wedge \pi}{s_1^{1+R} \ldots s_m^{1+R}}\right] = \sum_{\substack{0 \leqq q \leqq Q \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0 \leqq r \leqq R}} \text{Rés}^m\left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \omega}{s_1^{1+q} \ldots s_m^{1+r}}\right] \text{Rés}^m\left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_m \wedge \pi}{s_1^{1+Q-q} \ldots s_m^{1+R-r}}\right].$$

Faisons maintenant les hypothèses qu'énonce le théorème et, pour simplifier les calculs, choisissons arbitrairement des formes

$$\varphi_{q_1 \ldots q_n} \in \text{Rés}^n\left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n \wedge \omega}{s_1^{1+q_1} \ldots s_n^{1+q_n} s_{n+1}^{1+a_{n+1}} \ldots s_m^{1+a_m}}\right],$$

$$\psi_{r_1 \ldots r_n} \in \text{Rés}^n\left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n \wedge \pi}{s_1^{1+r_1} \ldots s_n^{1+r_n} s_{n+1}^{1+b_{n+1}} \ldots s_m^{1+b_m}}\right];$$

ce sont des formes définies et fermées sur

$$S_1 \cap \ldots \cap S_n - S_1 \cap \ldots \cap S_n \cap (S_{n+1} \cup \ldots \cup S_m).$$

Les formules (51.1) puis (45.2) donnent

$$(51.2)\quad \text{Rés}^m\left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n \wedge \omega \wedge \pi}{s_1^{1+Q_1} \ldots s_m^{1+Q_m}}\right] = \sum_{\substack{q_1 + r_1 = Q_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ q_n + r_n = Q_n}} \text{Rés}^{m-n}[\varphi_{q_1 \ldots q_n} \wedge \psi_{r_1 \ldots r_n}]$$
$$= \sum \pm\, \text{Rés}^{m-n}\left[\varphi_{q_1 \ldots q_n} \wedge \frac{ds_\alpha}{s_\alpha} \wedge \ldots \wedge \frac{ds_\beta}{s_\beta}\right] \cdot \text{Rés}^{m-n}\left[\frac{ds_\lambda}{s_\lambda} \wedge \ldots \wedge \frac{ds_\mu}{s_\mu} \wedge \psi_{r_1 \ldots r_n}\right].$$

Cette somme est étendue à l'ensemble des valeurs de $(q_1, \ldots, q_n, r_1, \ldots, r_n)$ telles que $q_i + r_i = Q_i$ et à l'ensemble des permutations $(\alpha, \ldots, \beta, \lambda, \ldots, \mu)$ de $(n+1, \ldots, m)$ telles que

$$\alpha < \ldots < \beta, \qquad \lambda < \ldots < \mu;$$

le signe $\pm$ est le même que dans la relation

$$ds_\lambda \wedge \ldots \wedge ds_\mu \wedge ds_\alpha \wedge \ldots \wedge ds_\beta = \pm\, ds_{n+1} \wedge \ldots \wedge ds_m.$$

Vu (7.6) et la définitions de φ et ψ :

$$\varphi_{q_1\ldots q_n} \wedge \frac{ds_\alpha}{s_\alpha} \wedge \ldots \wedge \frac{ds_\beta}{s_\beta} \in \text{Rés}^n \left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n \wedge \omega \wedge ds_\alpha \wedge \ldots \wedge ds_\beta}{s_1^{1+q_1} \ldots s_m^{1+q_m}} \right];$$

$$\frac{ds_\lambda}{s_\lambda} \wedge \ldots \wedge \frac{ds_\mu}{s_\mu} \wedge \psi_{r_1\ldots r_n} \in \text{Rés}^n \left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n \wedge ds_\lambda \wedge \ldots \wedge ds_\mu \wedge \pi}{s_1^{1+r_1} \ldots s_m^{1+r_m}} \right].$$

En portant ces expressions dans (51.2) il vient

$$\begin{aligned} &\text{Rés}^m \left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n \wedge \omega \wedge \pi}{s_1^{1+Q_1} \ldots s_m^{1+Q_m}} \right] \\ &= \sum \pm \text{Rés}^m \left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n \wedge \omega \wedge ds_\alpha \wedge \ldots \wedge ds_\beta}{s_1^{1+q_1} \ldots s_m^{1+q_m}} \right] \\ &\quad \cdot \text{Rés}^m \left[\frac{ds_1 \wedge \ldots \wedge ds_n \wedge ds_\lambda \wedge \ldots \wedge ds_\mu \wedge \pi}{s_1^{1+r_1} \ldots s_m^{1+r_m}} \right], \end{aligned}$$

Σ a le sens que précise l'énoncé. La formule (47.6) transforme la formule précédente en celle qu'énonce le théorème.

Chapitre 7. — La formule de Cauchy-Fantappiè.

Ce chapitre 7 prouve les résultats qu'énonce le n° 9.

52. Notation. — Nous employons les formes, dont le n° 9 a défini les deux premières :

$$\omega(x) = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l$$

$$\omega^\star(\xi) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \xi_k d\xi_0 \wedge \ldots \wedge d\xi_{k-1} \wedge d\xi_{k+1} \wedge \ldots \wedge d\xi_l$$

$$\omega'(\xi) = \sum_{k=1}^{l} (-1)^{k-1} \xi_k d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_{k-1} \wedge d\xi_{k+1} \wedge \ldots \wedge d\xi_l;$$

$g(\xi, x)\ \omega'(\xi) \wedge \omega(x)$ est une forme sur l'image dans $\Xi^\star \times X$ du domaine d'holomorphie de g, quand g est *homogène en* ξ *de degré* $-l$; cette forme est *fermée* sur P et sur Q, car elle est holomorphe de degré maximum; elle s'annule sur toute sous-variété analytique complexe de P ou Q.

Évidemment :

(52.1) $$d\omega'(\xi) = l d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_l;$$

(52.2) $$\omega^\star(\xi) = \frac{\xi.y}{l} d\omega'(\xi) - d(\xi.y) \wedge \omega'(\xi);$$

(52.3) $$\omega^\star(\xi) \wedge \omega(x) = \frac{\xi.x}{l} d\omega'(\xi) \wedge \omega(x) - d(\xi.x) \wedge \omega'(\xi) \wedge \omega(x).$$

Ces deux dernières formules et la définition de la forme-résidu (n° 2) prouvent ceci : si $g(\xi, x)$ est *homogène* en ξ, *de degré* $-l$ et holomorphe, alors :

$$\left.\frac{g(\xi, x)\,\omega^\star(\xi)\wedge\omega(x)}{d(\xi.y)}\right|_P = -g(\xi, x)\,\omega'(\xi)\wedge\omega(x); \tag{52.4}$$

$$\left.\frac{g(\xi, x)\,\omega^\star(\xi)\wedge\omega(x)}{d(\xi.x)}\right|_Q = -g(\xi, x)\,\omega'(\xi)\wedge\omega(x). \tag{52.5}$$

53. L'homologie de $P\cap Q$. — Ce n° 53 prouve ceci :

THÉORÈME. — *L'espace vectoriel $H_c(P\cap Q)$ a pour base l classes d'homologie de dimensions respectives* $0, 2, 4, \ldots, 2l-2$. *Le point* $(\xi^\star, y)$ *de* $\Xi^\star\times X$ *décrit un cycle de l'une de ces classes quand* $\xi^\star$ *décrit une sous-variété analytique complexe, plane de* $y^\star$.

Nous emploierons celle de ces classes dont la dimension est $2l-2$.

NOTATION. — Soit α *le cycle* que $(\xi^\star, y)$ décrit quand $\xi^\star$ décrit $y^\star$, muni de son orientation naturelle multipliée par $i^{l(l-1)}$; nous verrons que

$$\frac{1}{i^{l-1}}\,\omega'(\xi)\wedge\omega'(\overline{\xi})>0 \qquad \text{sur } \alpha. \tag{53.1}$$

Soit $h(P\cap Q)$ *la classe d'homologie compacte* contenant ce cycle α. D'aprés le théorème précédent, *$h(P\cap Q)$ est une base du sous-groupe de $H_c(P\cap Q)$ de dimension* $2l-2$; cette dimension est *la dimension complexe de $P\cap Q$.*

PREUVE *du théorème.* — $P\cap Q$ a pour équations

$$P\cap Q : \xi.x=0, \qquad \xi.y=0.$$

Cela signifie que $P\cap Q$ est le lieu des points $(\xi^\star, x)$ de $\Xi^\star\times X$ images des points (ξ, x) de $\Xi\times X$ satisfaisant ces équations. L'application

$$(\xi^\star, x)\to\xi^\star$$

applique donc $P\cap Q$ sur la sous-variété plane $y^\star$ de $\Xi^\star$ ayant pour équation

$$y^\star : \xi.y=0, \qquad (y^\star\subset\Xi^\star);$$

l'image inverse de chaque point $\xi^\star$ de $\Xi^\star$ est homéomorphe à l'intersection du domaine convexe X par la sous-variété plane $\xi^\star$; cette sous-variété contient le point y de X : cette image inverse est donc une boule, ayant une orientation naturelle. Donc *$P\cap Q$ est un espace fibré* : sa base est l'espace projectif complexe $y^\star$, de dimension complexe $l-1$; sa fibre est une boule, ayant une orientation naturelle, qui varie continûment. D'où (*voir* par exemple [9], où le degré sera remplacé par la codimension) un isomorphisme naturel de $H_c(P \cap Q)$ sur $H_c(y^\star)$. Or on sait (*voir* par exemple I. FÁRY [4] ch. 2, § 5, n° 3) que $H_c(y^\star)$ a pour base l classes d'homologie de dimensions respectives o, 2, ..., $2l - 2$; donc $H_c(P \cap Q)$ aussi a une telle base :

$$h_0,\ h_2,\ \ldots,\ h_{2l-2}.$$

Il est aisé de la construire explicitement : soit α_{2p} le cycle compact que $(\xi^\star, y)$ décrit quand $\xi^\star$ décrit une sous-variété analytique complexe plane de $y^\star$, ayant la dimension complexe $p\,(p = 0, \ldots, l - 1)$ et son orientation naturelle. Soit $\gamma_{2p+2l-2}$ le cycle non compact que $(\xi^\star, x)$ décrit quand $\xi^\star$ décrit une telle sous-variété, tandis que x est seulement assujetti à : $\xi.x = 0$. Il est évident que, si ces sous-variétés sont en position générale, l'intersection de α_{2p} et $\gamma_{4l-2p-4}$ est

$$\alpha_{2p}.\gamma_{4l-2p-4} \sim \alpha_0 \qquad \text{dans} \quad \Xi^\star \times X.$$

Donc, vu le théorème de dualité (S. LEFSCHETZ [7], chap. V, § 4, (32.1), (32.3) et (33.2) (*b*); chap. II, § 6, n° 29)

$$\alpha_{2p} \in \pm h_{2p}.$$

PREUVE *de* (53.1). — L'orientation de α_{2l-2} est telle que

$$i^{l-1}\, d\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right) \wedge d\left(\frac{\overline{\xi}_2}{\overline{\xi}_1}\right) \wedge \ldots \wedge d\left(\frac{\xi_l}{\xi_1}\right) \wedge d\left(\frac{\overline{\xi}_l}{\overline{\xi}_1}\right) > 0,$$

c'est-à-dire :

$$i^{(l-1)^2}\omega'(\xi) \wedge \omega'(\overline{\xi}) > 0.$$

D'où (53.1), puisque, par définition,

$$\alpha = i^{l(l-1)}\alpha_{2l-2}.$$

54. L'homologie de $Q - P \cap Q$. — Ce n° 54 prouve ceci :

THÉORÈME. — *L'espace vectoriel $H_c(Q - P \cap Q)$ a pour base deux classes d'homologie, de dimensions respectives* o *et* $2l - 1$. *Le point $(\xi^\star, x)$ décrit un cycle de cette dernière classe quand x décrit la frontière K d'un domaine borné, contenant y et contenu dans X (ou décrit un cycle homologue à K dans $X - y$); $\xi^\star$ varie continûment, en fonction de x, de sorte que*

$$\xi.x = 0, \qquad \xi.y \neq 0.$$

NOTE. — Si K est *convexe régulier*, on peut choisir $\xi^\star$ comme suit :

$$\xi^\star \textit{ touche } K \textit{ en } x.$$

NOTATION. — Soit β le *cycle* que $(\xi^\star, x)$ décrit quand

$$\beta : \| x - y \| = \varepsilon, \qquad \xi_k = \overline{x_k} - \overline{y_k} \ (k = 1, \ldots, l), \qquad \xi . x = 0;$$

ε est une constante positive suffisamment petite; $\| x - y \|$ est la distance : $\| x - y \|^2 = \sum_k | x_k - y_k |^2$. L'orientation de β est telle que

$$(54.1) \qquad \frac{\omega'(\xi) \wedge \omega(x)}{i^l (\xi . y)^l} > 0 \quad \text{sur } \beta.$$

Soit $h(Q - P \cap Q)$ *la classe d'homologie compacte* contenant ce cycle β. D'après le théorème précédent, $h(Q - P \cap Q)$ *est une base du sous-groupe de* $H_c(Q - P \cap Q)$ *de dimension* $2l - 1$; cette dimension est *la dimension complexe de* Q.

PREUVE *du théorème.* — $Q - P \cap Q$ a pour équations

$$Q - P \cap Q : \quad \xi . x = 0, \qquad \xi . y \neq 0.$$

L'application

$$(\xi^\star, x) \rightarrow x$$

applique donc $Q - P \cap Q$ sur $X - y$; l'image inverse de chaque point x de $X - y$ est un espace vectoriel complexe. Donc $Q - P \cap Q$ est un espace fibré : sa base est $X - y$; sa fibre est un espace vectoriel, ayant une orientation naturelle, qui varie continûment. Vu [9], il existe donc un isomorphisme naturel de $H_c(Q - P \cap Q)$ sur $H_c(X - y)$; or $X - y$ a même homologie que la sphère de dimension réelle $2l - 1$; donc $H_c(Q - P \cap Q)$ a pour base deux classes d'homologie, de dimensions respectives 0, $2l - 1$:

$$h_0, \quad h_{2l-1}.$$

Il est aisé de construire explicitement h_{2l-1} : considérons le cycle compact β, défini ci-dessus, et le cycle non compact γ que $(\xi^\star, x)$ décrit quand x décrit une demi-droite d'origine y, tandis que $\xi^\star$ est seulement assujetti aux conditions

$$\xi . x = 0, \qquad \xi . y = 0.$$

Il est évident que l'intersection de β et γ est un point. Donc, vu le théorème de dualité, que vient de citer le n° 53,

$$\beta \in h_{2l-1}.$$

Il est évident que β est homologue au cycle que $(\xi^\star, x)$ décrit quand :

x décrit K;

$\xi^\star$ est défini comme suit en fonction de x : $\xi_k = \overline{x}_k - \overline{y}_k$, $\xi . x = 0$.

Plus généralement, β est donc homologue au cycle que (ξ^*, x) décrit quand :

x décrit un cycle homologue à K dans $X - y$;
ξ^* varie continûment en fonction de x, de sorte que $\xi . x = 0$, $\xi . y \neq 0$.

Justification *de* (54.1). — On a sur β

$$\sum_{k=1}^{l} \xi_k (x_k - y_k) = \varepsilon^2, \qquad \text{donc} \quad \xi . y = -\varepsilon^2.$$

Pour $x \neq y$ et $dy = 0$, la forme

$$i^l d \| x - y \|^2 \wedge \omega'(\overline{x} - \overline{y}) \wedge \omega(x) = i^l \| x - y \|^2 \omega(\overline{x}) \wedge \omega(x)$$

est réelle, non nulle, car $i\, dx_k \wedge d\overline{x}_k$ est réel, non nul. Donc, sur la sphère $\| x - y \| = \varepsilon$,

$$i^l \omega'(\overline{x} - \overline{y}) \wedge \omega(x) \quad \text{est réel non nul.}$$

Donc, sur β

$$\frac{\omega'(\xi) \wedge \omega(x)}{i^l (\xi . y)^l}$$

est défini, réel, non nul. On peut donc orienter β par la convention (54.1).

55. La relation entre $h(P \cap Q)$ et $h(Q - P \cap Q)$

Théorème. — *Soit δ le cobord*

$$\delta : \quad H_c(P \cap Q) \to H_c(Q - P \cap Q);$$

on a

$$\delta\, h(P \cap Q) = - h(Q - P \cap Q). \tag{55.1}$$

Exemple : $l = 1$. — Le couple $(Q, P \cap Q)$ est homéomorphe à (X, y); $h(P \cap Q)$ est la classe unité de y; $h(Q - P \cap Q)$ est la classe d'homologie d'une circonférence faisant un tour autour de y, dans le sens négatif.

Preuve. — Soit γ le lieu des points (ξ^*, x) de Q tels que

$$\| x - y \| < \varepsilon, \qquad \frac{x_1 - y_1}{\overline{\xi}_1} = \ldots = \frac{x_l - y_l}{\overline{\xi}_l}, \qquad \xi . x = 0.$$

Envisageons l'application

$$\gamma \to \alpha$$

qui applique le point (ξ^*, x) de γ sur le point (η^*, y) de α, défini par les relations

$$\eta_1 = \xi_1, \qquad \ldots, \qquad \eta_l = \xi_l, \qquad \eta . y = 0.$$

Déterminons les points (ξ^*, x) de γ qu'elle applique sur un point donné (η^*, y) de α ; η^* est l'image d'un vecteur η, que nous choisissons tel que

$$(55.2) \qquad |\eta_1|^2 + \ldots + |\eta_l|^2 = 1\,;$$

ces points (ξ^*, x) sont définis par les relations, où t est un paramètre numérique complexe :

$$(55.3) \quad \begin{cases} \xi_1 = \eta_1, & \ldots, & \xi_l = \eta_l, & \xi.x = 0, \\ x_1 - y_1 = -t\bar{\eta}_1, & \ldots, & x_l - y_l = -t\bar{\eta}_l, & |t| < \varepsilon\,; \end{cases}$$

d'où

$$\xi.y = \xi.y - \xi.x = \xi_1(y_1 - x_1) + \ldots + \xi_l(y_l - x_l) = t.$$

L'ensemble de ces points de γ se projetant sur le point (η^*, y) de α est donc un *disque*, de dimension réelle 2, porté par une droite complexe de Q ; cette droite a pour paramètre $t = \xi.y$; ce disque est donc en position générale par rapport à $P \cap Q$ et coupe $P \cap Q$ au point (η^*, y), dont le paramètre est $t = \xi.y = 0$. Ainsi γ est un espace fibré, dont la fibre est ce disque, dont la base est α. Cette fibre a une orientation naturelle ; cette base est orientée ; d'où une orientation de γ. Muni de cette orientation, γ est une chaîne de Q ; évidemment

$$(55.4) \qquad \gamma . P \cap Q = \alpha, \qquad \partial\gamma = \pm\beta.$$

Précisons ce signe. Par définition

$$(55.5) \qquad \frac{\omega'(\xi) \wedge \omega(x)}{i^l(\xi.y)^l} > 0 \quad \text{sur } \beta.$$

Faisons la substitution (55.3), après avoir choisi des coordonnées locales de η^*, en liant $\mathrm{Re}(\eta_1), \ldots, \mathrm{Re}(\eta_l), \mathrm{Im}(\eta_1), \ldots, \mathrm{Im}(\eta_l)$ par (55.2) et une autre relation holomorphe réelle (par exemple : η_1 réel, près d'un point où $\eta_1 \neq 0$) ; on a

$$\omega'(\eta) \wedge \omega(\bar{\eta}) = 0$$

et par suite (55.5) devient

$$(55.6) \qquad \frac{dt}{i^l t} \wedge \omega'(\eta) \wedge \omega'(\bar{\eta}) < 0 \quad \text{sur } \beta.$$

Mais, quand (η^*, y) décrit α

$$\frac{1}{i^{l-1}}\,\omega'(\eta) \wedge \omega'(\bar{\eta}) > 0$$

donc

$$(55.7) \qquad \frac{dt}{i^l t} \wedge \omega'(\eta) \wedge \omega'(\bar{\eta}) > 0 \quad \text{sur } \partial\gamma.$$

Vu (55.6) et (55.7), (55.4) doit s'écrire :

$$\gamma . P \cap Q = \alpha, \qquad \partial \gamma = -\beta,$$

ce qui prouve le théorème, vu la définition de δ (n° 3).

56. La première formule de Cauchy-Fantappiè.

THÉORÈME. — *Soit $f(x)$ une fonction holomorphe sur X; on a*

$$f(y) = \frac{(l-1)!}{(2\pi i)^l} \int_{h(Q-P\cap Q)} \frac{f(x)}{(\xi . y)^l} \omega'(\xi) \wedge \omega(x). \tag{56.1}$$

EXEMPLE : $l = 1$. — On a $\omega'(\xi) = \xi_1$, $(\xi . y)^l = \xi_1 (y - x)$ sur Q; la formule précédente se réduit donc à la formule de Cauchy

$$f(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(x)\, dx}{x - y}.$$

NOTE. — L. Fantappiè a, plus généralement, exprimé $f(y)$ comme somme de puissances p-ièmes de fonctions linéaires de y (p : entier négatif); d'où l'un des résultats essentiels de sa théorie des « fonctionnelles linéaires analytiques » : une telle fonctionnelle $\mathcal{F}[f]$ est connue quand on connaît les valeurs qu'elle prend lorsque f est la puissance p-ième d'une fonction linéaire. Quand $p = -l$ ce théorème de L. Fantappiè s'explicite de façon particulièrement simple : c'est la formule (56.1), que j'ai énoncée dans la Note [10], prouvée dans [11] et dont Hans Lewy m'a communiqué une preuve élégante et proche de celle de la formule de Cauchy.

PREUVE *d'après Hans Lewy*. — Il suffit de prouver cette formule (56.1) dans chacun des deux cas particuliers suivants :

$$f(x) = 1 \quad \text{sur } X; \qquad f(y) = 0.$$

Rappelons que sur β;

$$\| x - y \| = \varepsilon, \qquad \xi_k = \bar{x}_k - \bar{y}_k, \qquad \xi . y = -\varepsilon^2, \qquad i^l \omega'(\xi) \wedge \omega(x) > 0.$$

Cas où $f(x) = 1$ sur X. — On a

$$\begin{aligned}
&\int_\beta \frac{\omega'(\xi) \wedge \omega(x)}{(\xi . y)^l} \\
&= \pm\ \varepsilon^{-2l} \int_{\| x-y \| = \varepsilon} \omega'(\bar{x} - \bar{y}) \wedge \omega(x) \\
&= \pm\ \varepsilon^{-2l} \int_{\| x-y \| < \varepsilon} d\,\omega'(\bar{x} - \bar{y}) \wedge \omega(x) \\
&= \pm\ l\varepsilon^{-2l} \int_{\| x-y \| < \varepsilon} \omega(\bar{x}) \wedge \omega(x) \\
&= \pm\ l\varepsilon^{-2l} \int_{\| x-y \| < \varepsilon} dx_1 \wedge d\bar{x}_1 \wedge \ldots \wedge dx_l \wedge d\bar{x}_l = \pm \frac{(2\pi i)^l}{(l-1)!}
\end{aligned}$$

car le volume de la boule unitaire de dimension $2l$ est $\pi^l/l!$. D'où, vu l'orientation de β,

$$\int_\beta \frac{\omega'(\xi) \wedge \omega(x)}{(\xi.y)^l} = \frac{(2\pi i)^l}{(l-1)!}.$$

Cas où $f(y) = 0$. — On a, près de y, $|f(x)| < C\|x - y\|$, C étant une constante. D'où

$$\left|\int_\beta \frac{f(x)}{(\xi.y)^l}\omega'(\xi) \wedge \omega(x)\right| < C\varepsilon^{1-2l}\left|\int_{\|x-y\|} \omega'(\bar{x} - \bar{y}) \wedge \omega(x)\right| = \frac{(2\pi)^l}{(l-1)!} C\varepsilon.$$

Donc, puisque ε est arbitrairement petit et que $f(x)(\xi.y)^{-l}\omega'(\xi) \wedge \omega(x)$ est une forme holomorphe sur Q, de degré maximum, donc *fermée* :

$$\int_{h(Q-P\cap Q)} \frac{f(x)}{(\xi.y)^l}\omega'(\xi) \wedge \omega(x) = 0.$$

C. Q. F. D.

57. **La seconde formule de Cauchy-Fantappiè.** — De (52.5) et du théorème du n° 55 résulte que la formule de Cauchy-Fantappiè (56.1) peut s'écrire :

$$f(y) = \frac{(l-1)!}{(2\pi i)^l}\int_{\delta h(P\cap Q)} \left.\frac{(\xi.y)^{-l}f(x)\,\omega^*(\xi) \wedge \omega(x)}{d(\xi.x)}\right|_Q.$$

La formule du résidu (n° 5), les formules (7.2) et (7.4) transforment la formule précédente en la suivante :

$$(57.1)\qquad f(y) = \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}}\int_{h(P\cap Q)} \frac{d^{l-1}[f(x)\,\omega^*(\xi) \wedge \omega(x)]}{d(\xi.x) \wedge [d(\xi.y)]^l}$$

c'est la seconde formule de Cauchy-Fantappiè qu'énonce le *théorème* 2.

58. **La troisième formule de Cauchy-Fantappiè.** — Les formules (52.5) et (57.1) ou, si l'on préfère, l'application directe de la formule du résidu à la première formule de Cauchy-Fantappiè (56.1) donnent

$$(58.1)\quad f(y) = -\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}}\int_{h(P\cap Q)} \left.\frac{d^{l-1}[f(x)\,\omega'(\xi) \wedge \omega(x) \mid Q]}{[d(\xi.y)]^l}\right|_{(P\cap Q)}.$$

Sous les hypothèses du corollaire 2,

$$\left.\frac{d^{l-1}[f(x)\,\omega'(\xi) \wedge \omega(x) \mid Q]}{[d(\xi.y)]^l}\right|_{(P\cap Q,S)}$$

est défini et, vu (7.7), (58.1) donne

$$f(y) = -\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}}\int_{ph(P\cap Q)} \left.\frac{d^{l-1}[f(x)\,\omega'(\xi) \wedge \omega(x) \mid Q]}{[d(\xi.y)]^l}\right|_{(P\cap Q,S)}.$$

Par hypothèse

$$p\,h(P \cap Q) = \partial\, h(P,\ Q \cup S);$$

la formule précédente s'écrit donc

$$(58.3)\qquad f(y) = -\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{h(P,\,Q\cup S)} \partial^* \frac{d^{l-1}[f(x)\,\omega'(\xi) \wedge \omega(x) \mid Q]}{[d(\xi.y)]^l}.$$

Or, vu (7.9), puis (52.2)

$$(58.4)\qquad \partial^* \frac{d^{l-1}[f(x)\,\omega'(\xi) \wedge \omega(x)]}{[d(\xi.y)]^l}$$
$$= -\frac{d^l}{[d\xi.y]^{l+1}} \Big[\frac{\xi.y}{l} f(x)\, d\omega'(\xi) \wedge \omega(x)$$
$$- f(x)\, d(\xi.y) \wedge \omega'(\xi) \wedge \omega(x) \Big]$$
$$= -\frac{d^l[f(x)\,\omega^*(\xi) \wedge \omega(x)]}{[d(\xi.y)]^{1+l}}\Bigg|_{(P,\,Q\cup S)}.$$

De (58.3) et (58.4) résulte que

$$(58.5)\qquad f(y) = \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{h(P,\,Q\cup S)} \frac{d^l[f(x)\,\omega^*(\xi) \wedge \omega(x)]}{[d(\xi.y)]^{1+l}};$$

c'est la troisième formule de Cauchy-Fantappiè, qu'énonce le *corollaire* 2.

59. Contre-exemple au théorème 1 (n° 5). — Une note du n° 5 affirme que *ce théorème* 1 *devient faux* quand, φ étant supposé holomorphe sur $X - S$, on remplace l'anneau Ω des formes *régulières* par celui des formes *holomorphes*.

Preuve. — Supposons exact l'énoncé, ainsi modifié, du théorème 1; alors la classe de cohomologie

$$\frac{d^{l-1}[f(x)\,\omega^*(\xi) \wedge \omega(x)}{d(\xi.x) \wedge [d\xi.y]^l}\Bigg|_{(P\cap Q)} = -\frac{d^{l-1}[f(x)\,\omega'(\xi) \wedge \omega(x) \mid Q]}{[d\xi.y]^l}$$

doit contenir des formes holomorphes sur $P \cap Q$; leur restriction au cycle α est nulle, car α est une variété analytique complexe, dont la dimension complexe $l - 1$ est inférieure à leur degré $2l - 2$; puisque $\alpha \in h(P \cap Q)$, les seconds membres de (57.1) et (58.1) sont donc nuls : $f(y) = 0$, ce qui est absurde.

Chapitre 8. — Dérivation d'une intégrale, fonction d'un paramètre.

Ce chapitre 8 prouve les résultats qu'énonce le n° 10; il les déduira des résultats plus généraux que voici :

60. Introduction. — Nous utilisons les notations du n° 1, en supposant que $m = 1$ et que $S(t) = S_1$ dépende d'un paramètre $t \in T$: T est une variété analytique complexe; l'équation locale de $S(t)$ est

$$s(x, y, t) = 0,$$

s étant holomorphe en (x, t) quand x est voisin de y. Nous supposons :

$$s_t/s \quad \textit{indépendant} \text{ de } y.$$

Soient $h(X, S \cup S')$ et $h(S, S')$ des classes d'homologie à supports compacts, variant continûment avec t; notons ∂ le bord

$$\partial : \quad H_c(X, S \cup S') \to H_c(S, S').$$

Soit $\varphi(x)$ une forme *fermée* sur X, *nulle* sur S', telle que :

$$\frac{ds}{s} \wedge \varphi(x) \quad \text{est } \textit{indépendant} \text{ de } t, \qquad \text{pour } dt = 0;$$
$$d^0(\varphi) = \dim h(X, S \cup S').$$

Le n° 62 prouvera *la formule de dérivation* où P désigne un polynome tel que $P(0) = 0$:

$$(60.1) \quad P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \int_{h(X, S \cup S')} \varphi(x) = \int_{\partial h(X, S \cup S')} \text{Rés}\left[\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \log \frac{1}{s(x, y, t)} \varphi(x)\right].$$

Soit $\psi(x, t)$ une forme *fermée* de $X - S(t)$, *nulle* sur S', telle que

$$d^0(\psi) = \dim h(S, S') + 1;$$

le n° 62 prouvera la *formule de dérivation*, où P désigne un polynome arbitraire :

$$(60.2) \quad P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \int_{h(S, S')} \text{Rés}\,\psi(x, t) = \int_{h(S, S')} \text{Rés}\left[P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \psi(x, t)\right].$$

Ces deux formules de dérivation résulteront des deux formules suivantes :

61. Formules préliminaires. — Soient $o \in T$,

$$\gamma \in \partial h(X, S(o) \cup S') \qquad \text{ou} \qquad \gamma \in h(S(o), S');$$

le n° 20 a défini $\delta_\mu \gamma$; prouvons que, sous les hypothèses précédentes et si t est voisin de o, alors

$$(61.1) \quad \int_{h(X, S(t) \cup S')} \varphi(x) - \int_{h(X, S(o) \cup S')} \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_\mu \gamma} \log \frac{s(x, y, o)}{s(x, y, t)} \varphi(x);$$

$$(61.2) \qquad \int_{h(S(t), S')} \text{Rés}\,\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta_\mu \gamma} \psi(x, t).$$

PREUVE de (61.2). — Par définition,

$$\delta_\mu \gamma = \partial \mu^* \gamma$$

l'intersection de $\mu^*\gamma$ par $S(t)$ est un cycle de $(S(t), S')$; soit $h_1(S(t), S')$ sa classe d'homologie; on a, vu la définition de δ

$$\delta_\mu \gamma \in \delta h_1(S(t), S').$$

La classe $h_1(S(t), S')$ varie continûment avec t; c'est-à-dire contient un cycle qui varie continûment avec t, quand t reste près d'un point de T; d'autre part

$$h_1(S(o), S') = h(S(o), S').$$

Or cela entraîne

$$h_1(S(t), S') = h(S(t), S');$$

donc

$$\delta_\mu \gamma \in \delta h(S(t), S'); \tag{61.3}$$

la formule (61.2) résulte donc de la formule du résidu.

PREUVE *de* (61.1). — Soit α un cycle de la classe $h(X, S(o) \cup S')$; soit γ la partie de son bord située dans $S(o)$; soient $y \in \gamma$ et $x(y, t)$ le point où $S(t)$ coupe $\mu^{-1}(y)$; par x passe un arc λ (n° 19); son origine est y; soit $\lambda(y, t)$ la partie de cet arc joignant y à $x(y, t)$; quand y décrit γ, t étant fixe, alors $\lambda(y, t)$ décrit une chaîne $\beta(t)$, que nous orientons de façon que $-\gamma$ soit la partie de son bord située dans $S(o)$; évidemment

$$\alpha + \beta(t) \in h(X, S(t) \cup S');$$

donc

$$\int_{h(X, S(t) \cup S')} \varphi(x) - \int_{h(X, S(o) \cup S')} \varphi(x) = \int_{\beta(t)} \varphi(x). \tag{61.4}$$

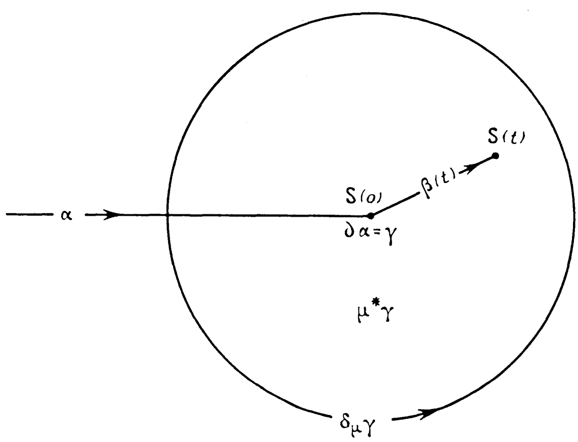

Fig. 2. — La fibre $\mu^{-1}(y)$ de $\mu^*\gamma$ $(y \in \gamma)$.

Notons $\operatorname{supp}\beta$ le support de la chaîne β; sur $\mu^\star\gamma$, muni de la coupure $\operatorname{supp}\beta$, $\log\dfrac{s(x, y, o)}{s(x, y, t)}$, qui est indépendant de y, est une fonction uniforme de x; $\log\dfrac{s(x, y, o)}{s(x, y, t)}\varphi(x)$ est fermé; or la chaîne $\mu^\star\gamma$, munie de la coupure $\operatorname{supp}\beta$, a pour bords $\delta_\mu\gamma$ et les deux côtés de cette coupure, munis d'orientations opposées; à travers cette coupure, $\log\dfrac{s(x, y, o)}{s(x, y, t)}$ a la discontinuité $2\pi i$; l'application de la formule de Stokes à $\mu^\star\gamma$ et $\log\dfrac{s(x, y, o)}{s(x, y, t)}\varphi(x)$ donne donc

$$\int_{\delta_\mu\gamma}\log\frac{s(x, y, o)}{s(x, y, t)}\varphi(x) = 2\pi i\int_{\beta(t)}\varphi(x).$$

D'où, vu (61.4), la formule (61.1).

62. Preuve des formules (60.1) **et** (60.2). — Preuve *de* (60.2). — Puisque $\delta_\mu\gamma$ est indépendant de t, (61.2) donne

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\int_{h(S(t),\, S')}\operatorname{Rés}\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_\mu\gamma}P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi(x, t);$$

d'où, vu (61.3) et la formule du résidu, la formule annoncée (60.2).

Preuve *de* (60.1). — Puisque $\delta_\mu\gamma$ est indépendant de t, (61.1) donne de même, si $P(o) = o$:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\int_{h(X,\, S(t)\cup S')}\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_\mu\gamma}P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\log\frac{1}{s(x, y, t)}\varphi(x);$$

d'où, vu (61.3) et la formule du résidu, la formule annoncée (60.1).

63. Preuve des formules de dérivation (10.5) **et** (10.6). — Employons maintenant les hypothèses qu'énonce le n° 10.

Preuve *de* (10.1). — Puisque $\dfrac{\omega}{s^q}$ est indépendant de y, $\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\omega}{s^q}$ l'est aussi, donc $\dfrac{s_t}{s}\dfrac{\omega}{s^q}$ et $\dfrac{s_t}{s}$, si $q \neq o$.

Preuve *de* (10.2). — Puisque $\dfrac{\omega}{s^q}$ est fermé.

$$\frac{ds(x, y, t)}{s(x, y, t)}\wedge\omega(x, y) = \frac{1}{q}d\omega(x, y)$$

est indépendant de t, si $q \neq o$.

Si $q = 0$, (10.1) et (10.2) ont lieu par hypothèse. Nous pouvons maintenant employer les formules de dérivation (60.1) et (60.2).

Preuve *de* (10.5). — Nous supposons $q \leqq -p < 0$; on a

$$(63.1)\qquad P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\int_{h(X,S\cup S')}\frac{[s(x,y,0]^{-q}}{(-q)!}\omega(x,y) = 0 \qquad \text{pour}\quad t = 0,$$

vu la formule (60.1), car, pour $t = 0$,

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\log\frac{1}{s(x,y,t)}[s(x,y,0]^{-q}\omega(x,y)$$

est régulier sur $S(0)$. De (63.1) résulte que (10.5) vaut, pour $t = 0$, donc quel que soit t.

Preuve *de* (10.6) *pour* $q = 0$. — Par hypothèse, $\omega(x,y) = \omega(x)$ est indépendante de y et fermée, $\frac{ds}{s}\wedge\omega$ est indépendante de t; (60.1) est donc applicable et donne

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\int_{h(X,S\cup S')}\omega(x) = \int_{\partial h(X,S\cup S')}(p-1)!\,\text{Rés}\left[\frac{P(-s_t)}{s^p}\omega(x)\right];$$

en employant la notation différentielle de Rés, on obtient (10.6).

Preuve *de* (10.6) *pour* $-p < q < 0$. — Il suffit de prouver (10.6) quand $P = P_1P_2$, P_1 et P_2 étant homogènes de degrés $-q$ et $p+q$; vu la validité de (10.5) et celle de (10.6) pour $q = 0$, on a [car d'après (10.2) $\frac{ds}{s}\wedge P_1(-s_t)\omega$ est indépendant de t] :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\int_{hX,S\cup S')}\frac{[-s]^{-q}}{(-q)!}\omega = P_2\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\int_{h(X,S\cup S')}P_1(-s_t)\,\omega$$
$$= \int_{\partial h(X,S\cup S')}\frac{d^{p+q-1}[P(-s_t)\,\omega]}{ds^{p+q}}.$$

c'est-à-dire (10.6).

Preuve *de* (10.6) *pour* $0 < q$. — Il suffit d'employer (60.2) et la notation différentielle de Rés.

Chapitre 9. — Ramification d'une intégrale, fonction d'un paramètre.

Ce chapitre justifie le n° 11. Il suppose donné un point o de K; on suppose t voisin de o; on choisit $y = z(o)$.

64. Propriétés de K. — Le point singulier $z(t)$ de $S(t)$, s'il existe, est voisin de y; il est donc défini par le système

$$s_z(z, y, t) = 0, \qquad s(z, y, t) = 0.$$

Or, vu l'hypothèse (11.1), le système

$$(64.1) \qquad s_x(x, y, t) = 0$$

a une solution unique, voisine de y :

$$x(t, y);$$

elle est holomorphe en t; définissons

$$(64.2) \qquad k(t, y) = -s(x(t, y), y, t);$$

l'ensemble K des points t de T tels que $S(t)$ ait un point singulier a donc, près de $t = 0$, l'équation locale

$$K : \quad k(t, y) = 0.$$

De (64.1) et (64.2) résulte (11.2).

Donc, vu (11.1), $k_t \neq 0$: K est une *sous-variété* analytique.

Voilà prouvées les propriétés de K qu'énonce le n° 11.

65. Les classes évanouissantes furent définies par E. Picard et S. Lefschetz ([6], chap. V, n° 3, p. 89 et n° 7, p. 93); nous employons la définition, les nouvelles propriétés, les preuves explicites dues à I. Fáry (qui nomme classes de Lefschetz les classes de cohomologie isomorphes aux classes évanouissantes : [4]; chap. 1, § 2, théor. 3, p. 31-32; chap. 1, § 3, n° 3, définition 4, p. 36-37; chap. 2, § 6, n° 3, théor. 1, p. 51).

Rappelons cette définition et ces propriétés :

Définition. — L'hypothèse (11.1) permet de choisir dans T et dans X des coordonnées locales telles que $y = 0$ et que

$$(65.1) \qquad s(x, o, t) = x_1^2 + \ldots + x_l^2 - t_1 + \ldots$$

les termes non écrits étant négligeables relativement à $\|t\|$ ou $\|x\|^2$. Près de o, $S(t)$ est donc voisin de la quadrique complexe

$$Q(t) : \quad x_1^2 + \ldots + x_l^2 = t_1.$$

Envisageons le cycle de $(X, Q(t))$ que constitue la boule

$$\alpha(t) : \quad \frac{x_1}{\sqrt{t_1}}, \ldots, \frac{x_l}{\sqrt{t_1}} \text{ réels}; \qquad \frac{x_1^2}{t_1} + \ldots + \frac{x_l^2}{t_1} \leq 1$$

arbitrairement orientée. Soit $\beta(t)$ un cycle de $(X, S(t))$ voisin de $\alpha(t)$; soit W un voisinage ouvert de o dans X; nous notons $e(W, S)$ la classe d'homologie de $\beta(t)$ dans $(W, S(t))$;

$$e(S\cap W) = \partial e(W, S).$$

$e(W, S)$ et $e(S\cap W)$ sont *les classes évanouissantes*; les données de $S(t)$ et W les définissent, au produit près par ± 1; nous les choisissons dépendant continûment de t. L'immersion de W dans X les applique sur les classes $e(X, S\cup S')$ et $e(S, S')$, également dites *évanouissantes*.

Théorème *de ramification des classes* $h(X, S\cup S')$ et $h(S, S')$ (E. Picard *et* S. Lefschetz). — Quand t fait un tour, dans le sens positif, autour de K, alors :

$$\begin{aligned} h(X, S\cup S') &\quad \text{est invariante si} \quad \dim h \neq l;\\ h(S, S') &\quad \text{est invariante si} \quad \dim h \neq l-1; \end{aligned}$$

(c'est-à-dire : la valeur finale de h est sa valeur initiale)

$$(65.2)\qquad \begin{aligned} &e \quad \text{devient} \quad (-1)^l e;\\ h(X, S\cup S') &\quad \text{augmente de} \quad ne(X, S\cup S') \quad \text{si} \quad \dim h = l;\\ h(S, S') &\quad \text{augmente de} \quad ne(S, S') \quad \text{si} \quad \dim h = l-1; \end{aligned}$$

n est un entier, que donne *la formule de S. Lefschetz*

$$(11.3)\qquad n = (-1)^{\frac{l(l+1)}{2}} KI[e(S\cap W), h(S, S')].$$

(Nous croyons devoir rectifier le signe de n : les démonstrations de S. Lefschetz ne sont pas explicites; le signe qu'il donne est en désaccord avec la valeur de $KI[e, e]$ établie par E. Cartan [2]; I. Fáry néglige de préciser ce signe).

Il est aisé de préciser les propriétés des classes invariantes :

Lemme 65. — Soit $h(X, S\cup S')$ *invariant* et de dimension $\leqq 2l-2$, ou bien $h(S, S')$ invariant et de dimension $\leqq 2l-3$. Il existe alors :

un voisinage, ouvert et indépendant de t, W de o dans X;
une classe d'homologie compacte, $h(X-W, S\cup S')$ ou $h(S-S\cap W, S')$, qui est définie même pour $t=0$, qui varie continûment avec t et que l'immersion de $X-W$ dans X applique sur $h(X, S\cup S')$ ou $h(S, S')$.

Preuve. — I. Fáry construit un voisinage ouvert W (il le note $\mathring{B}$) de y ayant les propriétés suivantes :

W est une boule ouverte;
il existe une homéomorphie qui varie continûment avec t et est l'identité

pour $t = 0$:

$\theta(t)$ de $(X - W,\ S(o) - S(o) \cap W)$ sur $(X - W,\ S(t) - S(t) \cap W)$;

$H_c(S \cap W)$ a pour base $e(S \cap W)$ et la classe d'homologie d'un point.

Notons $H(S \cap W)$ l'homologie à supports *quelconques* de $S \cap W$. D'après le théorème de dualité (*voir* : S. Lefschetz, ch. V, § 4, (32.1), (32.3), (33.2) (*b*)) $H(S \cap W)$ a donc pour base :

une classe de dimension $2l - 2$;

une classe de dimension $l - 1$, telle que l'indice de Kronecker de cette classe et de e soit 1.

Si $\dim h(S, S') = l - 1$, l'invariance de h et la formule de S. Lefschetz (11.3) impliquent

$$KI[e, h] = 0.$$

Donc l'image dans $H(S \cap W)$ d'une classe invariante $h(S, S')$ de dimension $< 2l - 2$ est nulle. Puisque W est une boule de dimension $2l$, l'image dans $H(W, S)$ d'une classe invariante $h(X, S \cup S')$ de dimension $< 2l - 1$ est donc nulle.

La classe invariante donnée contient donc un cycle $\gamma(t)$ étranger à W; $\theta^{-1}(t)$ le transforme en un cycle $\gamma(o)$ étranger à W la classe d'homologie $h(X - W, S(o) \cup S')$ ou $h(S(o) - S(o) \cap W, S')$ de $\gamma(o)$ a les propriétés énoncées.

66. Preuve du théorème 4 quand $d^0(\omega) \neq l$. — Il suffit d'appliquer le

Lemme 66. — Supposons h invariant et $d^0(\omega) \leqq 2l - 2$; alors $J(t)$ est holomorphe au point o de K.

Preuve. — Le lemme précédent permet de remplacer X par $X - W$: on est ramené au cas où $S(t)$ n'a pas de singularité; $J(t)$ est alors holomorphe (n° 10, théorème 3).

67. Allure de $j_p(t)$ sur K. — *Justification de la définition* (11.5) *de* j_p. — Puisque $\dfrac{P(s_t)}{s^p}$ et $\dfrac{\omega}{s^q}$ sont indépendants de y,

$$\frac{s^{p-q}\,\omega}{P(s_t)} \quad \text{est } \textit{indépendant} \text{ de } y. \tag{67.1}$$

D'après (10.2), $d(\log s) \wedge \omega$ est indépendant de t (pour $dt = 0$); donc, si $p > 0$:

$$d\left[P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\log s \wedge \omega\right] = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad d\left[\frac{P(s_t)}{s^p}\right] \wedge \omega = 0;$$

or, par hypothèse, $d\left(\frac{\omega}{s^q}\right) = 0$; donc

$$\frac{s^{p-q}\omega}{P(s_l)} \text{ est } \textit{fermé} \text{ sur } X - S. \tag{67.2}$$

Enfin, vu (10.2),

$$\frac{ds}{s} \wedge \frac{\omega}{P(s_l)} \text{ est } \textit{indépendant} \text{ de } t. \tag{67.3}$$

Les intégrales (11.5), qui définissent $j_p(t)$, ont donc un sens.

LEMME 67.1. — $j_p(t)k(t, y)^{l/2}$ est uniforme près de K.

PREUVE. — La formule (65.2) d'E. Picard-S. Lefschetz.

LEMME 67.2. — $j_p(t)k(t, y)^{q-p-l/2}$ est borné près de K si $q \leqq p$.

PREUVE. — Par définition

$$j_p(t) = \int_{\beta(t)} \frac{[-s]^{p-q}}{(p-q)!} \frac{\omega(x, y)}{P(-s_l)}.$$

Or : mes $\beta(t) < \text{Cte}\,|k(t, y)|^{l/2}$; sur $\beta(t)$, $|s| < \text{Cte}\,|k(t, y)|$;
car : mes $\alpha(t) = \text{Cte}\,|t_1|^{l/2}$; sur $\alpha(t)$, $|x_1^2 + \ldots + x_l^2 - t_1| < |t_1|$;

$$k(t) = t_1 + \ldots \quad \text{en } o.$$

Donc

$$j_p(t) < \text{Cte}\,|k(t, y)|^{p-q+l/2}.$$

LEMME 67.3. — Si l est *pair*, $j_p(t)$ est holomorphe en chaque point de K.

PREUVE. — e est invariant; on applique le lemme 66.

LEMME 67.4. — $j_p(t)k(t, y)^{q-p-l/2}$ est holomorphe en chaque point de K.

PREUVE. — Supposons $q \leqq p$; d'après les lemmes 67.1 et 2, la fonction $f_p(t)k(t, y)^{q-p-l/2}$ est uniforme, holomorphe hors de K et bornée sur K; d'après un théorème de Riemann, elle est donc holomorphe sur K. Le lemme est donc vrai si $q \leqq p$. Vu (11.6), il est donc vrai quel que soit p.

Les propriétés de j_p qu'énonce le théorème 4 sont prouvées; prouvons celles qu'énonce le corollaire 4.

PREUVE *de* (11.7) *pour* $q = 0$. — Supposons d'abord choisies des coordonnées locales telles que (65.1) ait lieu; on a le développement limité

$$j_1(t) = \rho(0, 0)\int_{\alpha(t)} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_l + \ldots = \pm\rho(0, 0)\frac{\pi^{l/2} t_1^{l/2}}{\Gamma(1 + l/2)} + \ldots$$

cela peut s'écrire

$$(67.4)\qquad j_1(t) = \pm(2\pi)^{l/2}\frac{k(t,y)^{l/2}}{\Gamma(1+l/2)}\frac{\rho(0,0)}{\sqrt{\mathrm{Hess}_x[s(0,0)]}}+\ldots$$

or tout changement de coordonnées et d'équation locale laisse invariant le second membre de (**67**.4), la formule (**67**.4) vaut donc en coordonnées arbitraires et quel que soit s, ce qui prouve (**11**.7).

Preuve *de* (**11**.7) *pour* $q < 0$. — La définition (**11**.5) de j_1 et la formule de dérivation (**10**.5) donnent, si P est homogène de degré $-q$:

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)j_1(t) = \int_{e(W,S)} P(-s_t)\,\omega(x,y).$$

D'où, vu (**67**.4)

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)j_1(t) = \pm(2\pi)^{l/2}\frac{P(k_t)k(t,y)^{l/2}}{\Gamma\left(1+\frac{l}{2}\right)}\frac{\rho}{\sqrt{\mathrm{Hess}_x s}}+\ldots$$

D'où, vu le lemme **67**.2

$$j_1(t) = \pm(2\pi)^{l/2}\frac{k(t,y)^{(l/2)-q}}{\Gamma\left(1+\frac{l}{2}-q\right)}\frac{\rho}{\sqrt{\mathrm{Hess}_x s}}+\ldots$$

Preuve *de* (**11**.7) *pour* $q > 0$. — D'après (**67**.4) on a, si P est homogène de degré q :

$$j_P(t) = \pm(2\pi)^{\frac{l}{2}}\frac{k(t,y)^{\frac{l}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{l}{2}\right)P(k_t)}\frac{\rho}{\sqrt{\mathrm{Hess}_x s}}+\ldots,$$

d'où, vu (**11**.6) et les lemmes **67**.3 et **67**.4,

$$j_1(t) = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)j_P(t) = \pm(2\pi)^{\frac{l}{2}}\frac{k(t,y)^{\frac{l}{2}-q}}{\Gamma\left(1+\frac{l}{2}-q\right)}\frac{\rho}{\sqrt{\mathrm{Hess}_x s}}+\ldots,$$

sauf si l est pair et $l < 2q$; dans ce cas il vient

$$j_1(t)\,k(t,y)^{q-\frac{l}{2}} = 0 \quad \text{sur } K.$$

68. Allure de $J(t)$ sur K quand l est impair. — Supposons que t fasse un tour, autour de K, dans le sens positif; alors d'après le théorème d'E. Picard-S. Lefschetz (n° **65**)

$$h \text{ augmente de } ne, \quad e \text{ augmente de } -2e;$$

donc

$$h + \frac{n}{2} e \quad \text{est invariant.}$$

Donc, vu le lemme **66**

$$J(t) + \frac{n}{2} j_1(t) \quad \text{est holomorphe en chaque point de } K.$$

69. Allure de $J(t)$ sur K, quand l est pair et $q \leqq 0$. — Si t fait un tour, autour de K, dans le sens positif, alors h augmente de ne; donc $J(t)$ devient $J(t) + nj_1(t)$; or $j_1(t)$ est holomorphe; par suite

$$J(t) - \frac{n}{2\pi i} j_1(t) \log k(t, y)$$

est une fonction uniforme. D'autre part on peut construire [comme ci-dessous, lemme **70**.1] un cycle, appartenant à $h(X, S \cup S')$, dont la mesure reste finie quand t se déplace hors de K, sans tourner indéfiniment autour de K; enfin $j_1(t)$ est holomorphe et s'annule sur K; donc la fonction

$$J(t) - \frac{n}{2\pi i} j_1(t) \log k(t, y)$$

est uniforme et holomorphe hors de K, bornée près de K; d'après un théorème de Riemann elle est donc holomorphe en chaque point de K.

Vu (**11**.6) et vu que j_p s'annule $p - q + \frac{l}{2}$ fois sur K, on a, à une fonction holomorphe près :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_p(t) \log k(t, y)] = j_1(t) \log k(t, y) + \ldots.$$

Donc, finalement, quel que soit le polynome P :

$$J(t) - \frac{n}{2\pi i} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_p(t) \log k(t, y)] \quad \text{est } \textit{holomorphe} \text{ en chaque point de } K.$$

70. Allure de $J(t)$ sur K, quand l est pair et $q > 0$. — Ce cas est moins aisé que les précédents : pour décrire l'allure de $J(t)$, il ne suffit plus d'employer $j_1(t)$, il devient nécessaire de recourir à $j_p(t)$ $(p > 0)$. Commençons par choisir explicitement un cycle

$$\gamma(t) \in h(S(t), S')$$

puis un cycle

$$\Gamma(t) \in \delta h(S(t), S').$$

CHOIX *de coordonnées locales*. — Tous les lemmes de ce n° **70** supposent

$$\dim T = 1.$$

K se compose donc de points isolés; nous supposons que $t = 0$ est l'un d'eux et que t est voisin de 0. Au point singulier y de $S(0)$, on a pour $t = 0$:

$$s_t \neq 0, \qquad s_x = 0, \qquad \mathrm{Hess}_x s \neq 0.$$

Nous pouvons donc choisir s, puis sur X des coordonnées locales valables pour

$$\| x \| < 2$$

de telle façon que

$$s(x, t) = x_1^2 + \ldots + x_l^2 - t;$$

$\| x \|$ est défini par :

$$\| x \|^2 = | x_1 |^2 + \ldots + | x_l |^2.$$

Notons W la boule

$$W: \quad \| x \| < \sqrt{2},$$

$\overline{W}$ son adhérence et $\dot{W}$ sa frontière :

$$\overline{W}: \quad \| x \| \leqq \sqrt{2}, \qquad \dot{W}: \quad \| x \| = \sqrt{2},$$

DÉFINITION *de rétractions*. — Comme le fait le n° **19**, nous construisons *une rétraction* $\mu(x)$ d'un voisinage V de $S(0) - S(0) \cap W$ sur $S(0) - S(0) \cap W$ qui ait les propriétés suivantes : μ applique les points de S' sur S' et les points de $\dot{W}$ sur $\dot{W}$; si $x \in S(0) - S(0) \cap W$ alors $\mu^{-1}(x)$ est un disque, de dimension 2; il coupe $S(t)$ en un point unique, quand t est dans un voisinage de 0 dépendant continûment de x. Nous rendons ce voisinage indépendant de x en remplaçant X par un de ses domaines, choisi assez grand pour contenir des cycles de $h(S(t), S')$. Dès lors $\mu \mid S(t)$ est un homéomorphisme de $S(t) - S(t) \cap W$ sur $S(0) - S(0) \cap W$.

Nous construisons pour $t \neq 0$ un voisinage $V(t)$ de $S(t)$ et une rétraction $\mu_t(x)$ de $V(t)$ sur $S(t)$ qui aient les propriétés suivantes (elles définissent complètement V et μ_t hors de W) :

$$\text{hors de } W: \quad V(t) = V; \qquad \mu\mu_t = \mu;$$

si $x \in S(t)$, $\mu_t^{-1}(x)$ est un disque, de dimension 2; ce disque varie continûment avec x, sauf à la traversée de $\dot{W}$.

Ce disque a une orientation naturelle; donc, si σ est un simplexe de $S(t)$, $\mu_t^{-1}(\sigma)$ a une orientation définie par celle de σ; $\mu_t^{-1}(\sigma)$ muni si cette orientation est noté $\mu_t^* \sigma$; on a ainsi défini un homomorphisme μ_t^* du groupe des chaînes de $S(t)$ dans celui de $V(t)$.

Vu la définition de δ (n° **3**, *cf.* chap. 2), si $\gamma(t) \in h(S(t), S')$, alors

$$(70.1) \qquad \partial \mu_t^* \gamma(t) \in \delta h(S(t), S').$$

Soit un paramètre ε ($0 < \varepsilon \leqq 1$; *voir* n° **21**); soit $V_\varepsilon(t)$ un voisinage de $S(t)$ ayant les propriétés suivantes :

$V_\varepsilon(t) \subset V(t)$;
hors de W : $V_\varepsilon(t) = V(t) = V$;
dans W, $V_\varepsilon(t)$ tend vers $S(t)$ quand ε tend vers 0;
$V_\varepsilon(t) \cap \mu^{-1}(x)$ est un disque, il dépend continûment de $x \in S(t)$ sauf à la traversée de $\dot{W}$.

Nous notons $\mu_{l\varepsilon}$ la restriction de μ_l à $V_\varepsilon(t)$; nous définissons $\mu^\star_{l\varepsilon}$ comme $\mu^\star_l$ l'a été ci-dessus; si $\gamma(t) \in h(S(t), S')$, alors

$$\partial \mu^\star_{l\varepsilon} \gamma(t) \in \delta h(S(t), S').$$

Le choix *de* $\gamma(t)$ résulte des lemmes suivants :

Lemme. — $H_c(S(0) \cap \dot{W})$ a pour base les quatre classes de dimensions 0, $l-2$, $l-1$, $2l-3$ contenant les quatre cycles que voici :

un point;
la sphère

$$(70.2)\quad \begin{cases} x_1 = 1, \qquad \operatorname{Re}(x_2) = 0, \qquad \ldots, \qquad \operatorname{Re}(x^l) = 0, \\ x_2^2 + \ldots + x_l^2 = -1; \end{cases}$$

la sphère

$$(70.3)\quad \begin{cases} x_1 = i x_2, \qquad \ldots, \qquad x_{l-1} = i x_l, \\ |x_1|^2 + |x_3|^2 + \ldots + |x_{l-1}|^2 = 1; \end{cases}$$

la variété $S(0) \cap \dot{W}$ tout entière.

Preuve. — L'application

$$x \to \operatorname{Re}(x)$$

fibre $S(0) \cap \dot{W}$; la base est la sphère réelle de dimension $l-1$; la fibre est la sphère réelle de dimension $l-2$. Vu la théorie des espaces fibrés [9], la base de $H_c[S(0) \cap \dot{W}]$ se compose donc : ou bien de deux classes de dimensions 0 et $2l-3$; ou bien de quatre classes de dimensions 0, $l-1$, $l-2$, $2l-3$. Or les cycles (70.2) et (70.3) ont évidemment l'indice de Kronecker ± 1; donc c'est la seconde possibilité qui se présente et il existe une base de $H_c[S(0) \cap \dot{W}]$ contenant les classes de ces deux cycles.

Lemme. — $h(S(0), S')$ contient un cycle

$$\gamma(0) = \gamma_1(0) + n_2 \gamma_2(0),$$

où $\gamma_1(0)$ et $\gamma_2(0)$ sont deux chaînes de $S(0)$ et n_2 un entier;

$$\gamma_1(0) \text{ est hors de } W; \quad \gamma_2(0) \text{ est la boule de } \overline{W}$$

$$\gamma_2(0): \quad 0 \leqq x_1 \leqq 1, \qquad \mathrm{Re}(x_2) = \ldots = \mathrm{Re}(x_l) = 0, \qquad x_1^2 + \ldots + x_l^2 = 0$$

Preuve. — Vu le lemme précédent, on peut trouver dans $h(S(0), S')$ un cycle dont la partie $\gamma_1(0)$ située hors de W ait pour bord la sphère (**70**.2), multipliée par un entier convenable n_2. Puisque $S(0) \cap \overline{W}$ est un cône, son homologie est banale; par suite

$$\gamma_1(0) + n_2\gamma_2(0) \in h(S(0), S')$$

quelle que soit la chaîne $\gamma_2(0)$ de $\overline{W}$ dont le bord est la sphère (**70**.2). L'on peut choisir, par exemple, la boule $\gamma_2(0)$ que définit le lemme.

L'on peut choisir plus généralement la boule $\gamma_{2,t}(0)$ décrite par le lemme suivant, $[\gamma_{2,t}(0) = \gamma_2(0)$ pour $\arg t = 0]$; ce lemme est donc exact :

Lemme. — $h(S(0), S')$ contient un cycle, dépendant de $t \neq 0$:

$$\gamma(0) = \gamma_1(0) + n_2\gamma_{2,t}(0)$$

où $\gamma_1(0)$ et $\gamma_{2,t}(0)$ sont deux chaînes de $S(0)$ et n_2 un entier;
$\gamma_1(0)$ est hors de W;
$\gamma_{2,t}(0)$ est la boule d'équations :

$$\begin{aligned} & 0 \leqq |x_1| \leqq 1; \\ \arg x_1 &= (1 - |x_1|)\arg t \qquad \text{si } \tfrac{1}{2} \leqq |x_1| \leqq 1; \\ &= \tfrac{1}{2}\arg t \qquad \text{si } 0 \leqq |x_1| \leqq \tfrac{1}{2}; \\ & \mathrm{Re}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \ldots = \mathrm{Re}\left(\frac{x_l}{x_1}\right) = 0; \\ & x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_l^2 = 0. \end{aligned}$$

Voici enfin le cycle $\gamma(t)$:

Lemme 70.1. — $h(S(t), S')$ contient un cycle, dépendant continûment de $\log t$:

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$$

où : $\gamma_1(t)$ est la chaîne de $S(t)$ que μ projette sur $\gamma_1(0)$; $\gamma_2(t)$ est une chaîne de $S(t) \cap \overline{W}$ telle que

$$(\mathbf{70}.4) \qquad \mathrm{mes}\,\gamma_2(t) < \mathrm{Cte} + \mathrm{Cte}\,|\arg t|^l.$$

Preuve. — Définissons d'abord deux chaînes de $S(t) \cap \overline{W}$ dépendant continûment de $\log t$: $\gamma_3(t)$ et $\gamma_4(t)$.

La chaîne $\gamma_3(t)$ est la boule

$$\gamma_3(t)\ :\quad \sqrt{|t|} \leqq |x_1| \leqq \frac{1}{2}; \qquad \arg x_1 = \frac{1}{2}\arg t;$$
$$\mathrm{Re}\left(\frac{x_2}{\sqrt{t}}\right) = \ldots = \mathrm{Re}\left(\frac{x_l}{\sqrt{t}}\right) = 0;$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_l^2 = t.$$

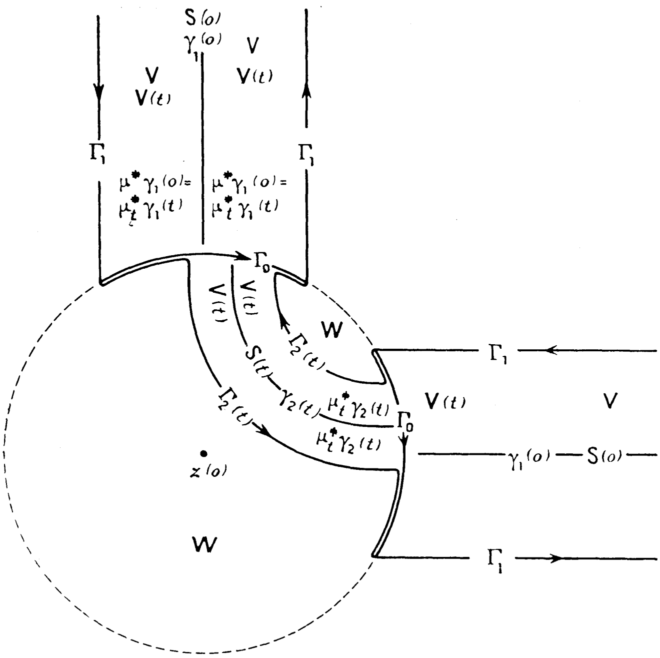

Fig. 3. — Schéma du voisinage de $z(0)$, point double quadratique de S(o).

La chaîne $\gamma_4(t)$ est voisine de la partie de $\gamma_{2,t}(0)$ où $\frac{1}{2} \leqq x_1 \leqq 1$; elle est le complément d'une boule de dimension $l-1$ dans une autre; elle est telle que

$$\gamma_1(t) + n_2\gamma_3(t) + n_2\gamma_4(t)$$

soit un cycle de $(S(t),\, S')$.

Hors de W, ce cycle de $(S(t),\, S')$ est voisin de $\gamma(0)$; donc, puisque $h(S(t),\, S')$ dépend continûment de t (n° **11**), la classe d'homologie de ce cycle est $h(S(t),\, S') - n_3\, e(S(t),\, S')$, n_3 étant un entier convenable, indépendant de t.

Soit $\gamma_5(t)$ un cycle de $e(S(t) \cap W)$; par exemple :

$$\gamma_5(t)\ :\quad \mathrm{Im}\left(\frac{x_1}{\sqrt{t}}\right) = \ldots = \mathrm{Im}\left(\frac{x_l}{\sqrt{t}}\right) = 0$$
$$x_1^2 + \ldots + x_l^2 = t.$$

Il est évident que

$$\gamma_2(t) = n_2\gamma_3(t) + n_2\gamma_4(t) + n_3\gamma_5(t)$$

vérifie le lemme.

CHOIX *de* $\Gamma(t)$. — Définissons

$$\Gamma(t) = \partial\mu_t^\star\gamma(t).$$

Notons

$$\Gamma(t) = \Gamma_1 + \Gamma_2(t)$$

Γ_1 étant hors de $\overline{W}$ et $\Gamma_2(t)$ dans $\overline{W}$. Vu (**70**.1) :

(**70**.5) $$\Gamma(t) = \Gamma_1 + \Gamma_2(t) \in \delta h(S(t), S').$$

Puisque μ projette $\gamma_1(t)$ sur $\gamma_1(0)$ et que μ_t est défini hors de W par la condition $\mu\mu_t = \mu$, on a

$$\mu_t^\star\gamma_1(t) = \mu^\star\gamma_1(0),$$

donc

$$\partial\mu_t^\star\gamma_1(t) = \partial\mu^\star\gamma_1(0) = \Gamma_1 + \Gamma_0,$$

$\Gamma_0 = \mu^\star\partial\gamma_1(0)$ étant une chaîne de $\dot{W}$; Γ_0 et Γ_1, sont donc *indépendants* de t et

(**70**.6) $$\partial\mu_t^\star\gamma_2(t) = \Gamma_2(t) - \Gamma_0.$$

LEMME. — On a $d\omega = ds \wedge \omega = 0$.

PREUVE. — On a $s_t = -1$; donc, vu (**67**.2), $d\omega = 0$; or par hypothèse,

$$d\left(\frac{\omega}{s^q}\right) = 0; \qquad \text{donc} \quad ds \wedge \omega = 0.$$

LEMME **70**.2. — $J(t) - \dfrac{1}{2\pi i}\left(\dfrac{d}{dt}\right)^{q-1}\displaystyle\int_{\Gamma_2(t)}\frac{\omega}{s}$ est holomorphe au point $t = 0$.

PREUVE. — La formule du résidu et (**70**.5) transforment la définition (**10**.4) de $J(t)$ en la suivante :

$$J(t) = \frac{(q-1)!}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\omega}{s^q} + \frac{(q-1)!}{2\pi i}\int_{\Gamma_2(t)}\frac{\omega}{s^q}.$$

Puisque Γ_1 est indépendant de t et est hors de $S(t)$, la première intégrale est une fonction de t holomorphe au point $t = 0$. Puisque $\partial\Gamma_2(t)$ est indépendant de t et que $s_t = -1$, on a, quand t est voisin de t'

$$(q-1)!\int_{\Gamma_2(t)}\frac{\omega}{s^q} = (q-1)!\int_{\Gamma_2(t')}\frac{\omega}{s^q} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{q-1}\int_{\Gamma_2(t')}\frac{\omega}{s} = \left(\frac{d}{dt}\right)^{q-1}\int_{\Gamma_2(t)}\frac{\omega}{s}.$$

LEMME 70.3. — On a

$$\int_{\Gamma_2(t)} \frac{\omega}{s} = \int_{\Gamma_0} \frac{\omega}{s} + 2\pi i \int_{\gamma_2(t)} \frac{\omega}{ds}.$$

PREUVE. — S et Γ_0 sont en position générale; $\dim \Gamma_0 = l$; $\dim(S \cap \Gamma_0) = l - 2$; donc $\int_{\Gamma_0} \frac{\omega}{s}$ converge absolument et uniformément; de (70.6) résulte donc

$$\int_{\Gamma_2(t)} \frac{\omega}{s} = \int_{\Gamma_0} \frac{\omega}{s} + \int_{\partial\mu_t^\star \gamma_2(t)} \frac{\omega}{s}.$$

Or, puisque $\mu_{t,\varepsilon}$ est une restriction de μ_t,

$$\partial\mu_t^\star \gamma_2(t) - \partial\mu_{t,\varepsilon}^\star \gamma_2(t) \sim 0 \quad \text{dans } \overline{W} - S;$$

donc

$$\int_{\partial\mu_t^\star \gamma_2(t)} \frac{\omega}{s} = \int_{\partial\mu_{t,\varepsilon}^\star \gamma_2(t)} \frac{\omega}{s};$$

or, quand ε tend vers o, cette dernière intégrale tend vers $2\pi i \int_{\gamma_2(t)} \frac{\omega}{s}$, vu le lemme 21; donc

$$\int_{\partial\mu_t^\star \gamma_2(t)} \frac{\omega}{s} = 2\pi i \int_{\gamma_2(t)} \frac{\omega}{s}.$$

LEMME 70.4. — La fonction

$$\int_{\Gamma_2(t)} \frac{\omega}{s} - n j_P(t) \log t = f(t),$$

où n désigne l'indice de Kronecker (11.3) et où $P\left(\frac{d}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{q-1}$, est holomorphe au point $t = 0$.

PREUVE. — Puisque $\partial\Gamma_2(t)$ est indépendant de t, $\int_{\Gamma_2(t)} \frac{\omega}{s}$ est holomorphe en tout point $t \neq 0$; donc $f(t)$ est *holomorphe* pour $t \neq 0$.

Quand t fait un tour, autour de o, dans le sens positif, alors $h(S(t), S')$ croît de $ne(S(t), S')$ d'après le théorème d'E. Picard-S. Lefschetz (n° 65); donc, vu le lemme 70.1, $\gamma_2(t)$ croît d'un cycle appartenant à la classe $ne(S \cap W)$; donc, vu le lemme 70.3, où Γ_0 est indépendant de t,

$$\int_{\Gamma_2(t)} \frac{\omega}{s} \text{ croît de } 2n\pi i \int_{e(S\cap W)} \frac{\omega}{ds} = 2n\pi i j_P(t);$$

donc, puisque $j_P(t)$ est uniforme, la fonction $f(t)$ est *uniforme*.

Majorons-la : vu (2.8)

$$\left|\frac{\omega}{ds}\right|_s < \mathrm{Cte}\,\frac{1}{\operatorname{Inf}|s_x|} \qquad (x \in S(t) \cap W)$$
$$< \mathrm{Cte}\,\frac{1}{\sqrt{|t|}};$$

d'où, vu (70.4) :

$$\left|\int_{\gamma_2(t)} \frac{\omega}{ds}\right| < \frac{\mathrm{Cte} + \mathrm{Cte}\,|\arg t|^l}{\sqrt{|t|}} < \mathrm{Cte}\,\frac{|\log t|^l}{\sqrt{|t|}}.$$

Rappelons que $\int_{\Gamma_0} \frac{\omega}{s}$ est borné; donc, vu le lemme 70.3

$$\left|\int_{\Gamma_2(t)} \frac{\omega}{s}\right| < \mathrm{Cte}\,\frac{|\log t|^l}{\sqrt{|t|}}.$$

Or $j_P(t)$ est holomorphe au point $t = 0$. Donc

$$|f(t)| < \frac{|\log t|^l}{\sqrt{|t|}}.$$

Cette *majoration* achève la preuve.

Il est maintenant possible d'achever la preuve du *théorème* 4, c'est-à-dire de prouver, quand l est pair et $q > 0$, la

PROPOSITION. — *La fonction*

$$J(t) - \frac{n}{2\pi i} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) [j_P(t) \log k(t, y)] = F(t)$$

est holomorphe en chaque point o *de* K, *pourvu que*

$$q - \frac{l}{2} \leq p. \tag{70.7}$$

PREUVE *quand* $\dim T = 1$ *et* $p = q - 1$. — Cette proposition est indépendante du choix des coordonnées et de l'équation locale $s = 0$; elle est donc établie par les lemmes 70.2 et 70.4.

PREUVE *quand* $p = q - 1$. — D'après ce qui précède, près de o, $F(t)$ est holomorphe sur toute droite complexe non orthogonale à s_t, c'est-à-dire à k_t, c'est-à-dire non tangente à K. Or une fonction de plusieurs variables complexes, définie sur un domaine, holomorphe par rapport à chacune de ces variables est holomorphe par rapport à leur ensemble (théorème d'Hartog; *voir* par exemple le Traité [1] de BOCHNER et MARTIN, chap. VII, § 4, p. 140). Donc $F(t)$ est holomorphe au point o.

Pour achever la preuve de la proposition, il suffit d'établir le

LEMME 70.5. — Si P et P_1 sont deux polynomes homogènes de degrés p et p_1 vérifiant (70.7), alors

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_P(t)\log k(t, y)] - P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_{P_1}\log k]$$

est holomorphe au point o de K.

PREUVE. — Ce lemme résulte du suivant :

LEMME. — Si P et P_1 sont deux polynomes homogènes vérifiant (11.4) et si le degré p de P vérifie (70.7), alors

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_{PP_1}(t)\log k(t, y)] - P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_P\log k]$$

est holomorphe au point o de K.

PREUVE. — j_{PP_1} s'annule sur K au moins $p+p_1+\frac{l}{2}-q$ fois, donc au moins p_1 fois; par suite, vu (11.6)

$$P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_{PP_1}(t)\log k(t, y)] - j_P\log k$$

est holomorphe au point o.

71. **Preuve de la formule** (11.8). — D'après (11.7) on a près de K le développement limité

$$j_P(t) = \pm(2\pi)^{\frac{l}{2}}\frac{k(t, y)^{p+\frac{l}{2}-q}}{\left(p+\frac{l}{2}-q\right)!\,P(k_t)}\,\frac{\rho(x, y)}{\sqrt{\mathrm{Hess}_x s(x, y)}}+\ldots;$$

d'où, si l est pair et $0 < q-\frac{l}{2} \leqq p$ le développement limité

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_P(t)\log k(t, y)] = \pm(2\pi)^{\frac{l}{2}}\frac{\left(q-\frac{l}{2}-1\right)!}{k^{q-\frac{l}{2}}}\,\frac{\rho}{\sqrt{\mathrm{Hess}_x s}}+\ldots,$$

d'où (11.8), vu le théorème 4.

CHAPITRE 10. — La distribution que définit une intégrale, fonction d'un paramètre réel.

Ce chapitre 10 justifie le n° 12. Il emploie la théorie des distributions (L. SCHWARTZ [17]; GELFAND, et ŠILOV, [5]).

72. Notations. — T est un voisinage d'un point o de K; c'est une boule, que K décompose en deux autres : T' et T''. On choisit $y = z(o)$.

T est la partie réelle d'un domaine $\tilde{T}$ d'un espace affin complexe; K est la partie réelle d'une variété $\tilde{K}$ de $\tilde{T}$; nous nommons λ_+ (et λ_-) un chemin de $\tilde{T} - \tilde{K}$ dont l'origine est dans T', dont l'extrémité est dans T'' et qui fait un demi-tour autour de $\tilde{K}$ dans le sens positif (ou négatif). En prolongeant par continuité h et e le long de λ_+ (ou λ_-) on obtient sur T'' des classes h_+ et e_+ (ou h_- et e_-). Il suffit évidemment de prouver le théorème 5 dans le cas où l'on a choisi

$$e = e_+ \quad \text{sur} \quad T''.$$

Soit $n(t)$ l'indice de Kronecker (11.3); on note

$$n(t) = n' \quad \text{sur} \quad T', \qquad n(t) = n'' \quad \text{sur} \quad T'';$$

évidemment

$$n' = (-1)^{\frac{l(l+1)}{2}} KI[e, h_+].$$

Puisque h dépend continûment de t, il existe un entier m tel que

$$(72.1) \qquad h = h_+ + me \quad \text{sur} \quad T''.$$

En portant cette formule dans la précédente, il vient

$$(72.2) \qquad n'' = n' + (-1)^{\frac{l(l+1)}{2}} mKI[e, e].$$

73. Définition de la distribution $J(t)$ quand l est impair. — Les formules d'E. Picard et S. Lefschetz, (11.3) et (65.2), donnent :

$$KI[e, e] = -2(-1)^{\frac{l(l+1)}{2}}$$

d'où, vu (72.2) :

$$n'' = n' - 2m.$$

Ainsi la discontinuité de $n(t)$ à travers K est un entier pair.

En prolongeant continûment $2h + n'e$ le long de λ_+ on obtient :

$$2h_+ + n'e = 2h + (n' - 2m)e = 2h + n''e;$$

vu le théorème 4, la fonction

$$2J(t) + n(t)j_1(t) = 2F(t)$$

est donc *holomorphe* au point o.

Or, d'après (11.6),

$$n(t)j_1(t) = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[n(t)j_P(t)] \qquad \text{hors de} \quad K.$$

On a donc, hors de K :

$$(73.1)\qquad J(t) = -\frac{1}{2} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[n(t) j_P(t)] + F(t).$$

Lemme. — $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[n(t) j_P(t)]$ est sur T, une distribution, indépendante du choix du polynome P, si (11.4) a lieu et si $q - \frac{l+1}{2} \leqq p$.

Preuve. — D'après le théorème 4, $j_P(t)$ est sommable; par suite $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[n(t) j_P(t)]$ est une distribution. Montrons qu'elle est indépendante du choix de P, c'est-à-dire que, si Q est un autre polynome homogène, vérifiant (11.4) alors on a l'égalité entre distributions :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[n(t) j_P(t)] = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) Q\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[n(t) j_{PQ}(t)];$$

en effet cette égalité a lieu, parce que, hors de K (donc presque partout) l'on a, d'après (11.6) et le théorème 4, l'égalité des fonctions sommables .

$$n(t) j_P(t) = Q\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[n(t) j_{PQ}(t)].$$

Définition *de la distribution* $J(t)$. — Le n° 12 définit cette distribution par la formule (73.1), où $F(t)$ est une fonction holomorphe et où $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[n(t) j_P(t)]$ est la distribution qui vient d'être prouvée indépendante de P.

74. La formule de dérivation de $J(t)$ quand l est impair. — Il s'agit de calculer $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) J(t)$. Si $2(p+q) \leqq l+1$, $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) J(t)$ est, d'après les théorèmes 3 et 4, la fonction mesurable (10.5) ou (10.6). Supposons

$$l+1 < 2(p+q).$$

D'après le théorème 2, on a, hors de K, l'égalité des fonctions :

$$(74.1)\qquad P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) J(t) = \int_{h(S,S')} \frac{d^{p+q-1}[P(-s_t)\omega]}{ds^{p+q}}.$$

D'autre part, d'après la définition de la distribution $J(t)$, si P_1 est un polynome homogène de degré $p_1 \geqq p+q$, alors la distribution

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) J(t) + \frac{1}{2} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[n(t) j_{P_1}(t)]$$

est une fonction holomorphe en o; or, vu la définition (11.5) de j_{P_1} et les théorèmes 3 et 4 on a l'égalité des fonctions continues sur T :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[n(t)j_{P_1}(t)] = n(t)\int_{e(W,S)} \frac{[-s]^{p_1-p-q}}{(p_1-p-q)!}\frac{P(-s_l)\omega}{P_1(-s_l)};$$

donc la distribution

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)J(t) + \frac{1}{2}P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[n(t)\int_{e(W,S)}\cdots\right]$$

est une fonction holomorphe en o; or, par définition, la distribution

$$\int_{h(S,S')} \frac{d^{p+q-1}[P(-s_l)\omega]}{ds^{p+q}} + \frac{1}{2}P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[n(t)\int_{e(W,S)}\cdots\right]$$

est une fonction holomorphe en o; la distribution

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)J(t) - \int_{h(S,S')}\frac{d^{p+q-1}[P(-s_l)\omega]}{ds^{p+q}}$$

est donc une fonction holomorphe en o.

Elle est identiquement nulle, vu (74.1) : *la distribution* $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)J(t)$ *a l'expression* (74.1)

Voici établies toutes les affirmations du n° 12, quand l est impair.

75. Définition de la distribution $J(t)$, quand l est pair. — D'après le théorème d'E. Picard et S. Lefschetz, (n° 65), e est invariant :

$$e_+ = e_- = e;$$

et l'on doit donc avoir

$$KI[e,e] = 0; \tag{75.1}$$

cela est d'ailleurs évident, puisque $\dim e(S,S') = l-1$ est impair.

Vu (72.2) et cette relation (75.1),

$$n' = n'' :$$

$n(t)$ est constant sur T et sera noté n.

De (75.1) et (72.1) résulte d'autre part ceci :

$$KI[e,h_+] = KI[e,h_-] = KI[e,h] = n(-1)^{\frac{l(l+1)}{2}};$$

donc, vu le théorème d'E. Picard et S. Lefschetz

$$h_+ = h_- + ne;$$

d'où, vu (72.1)

$$2h = h_+ + h_- + (2m+n)e \qquad \text{sur} \quad T''. \tag{75.2}$$

Nous disons que h est *régulièrement continu* si

$$2h = h_+ + h_- \quad \text{sur} \quad T'';$$

l'on déduit aisément de l'invariance de e que cette condition n'est pas altérée quand on permute les rôles de T' et T''. D'après le théorème 4

$$(75.3) \quad J(t) - \frac{n}{2\pi i} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_P(t) \log |k(t, y)|] \quad \text{est } \textit{holomorphe}$$

sur T au point o, si h est régulièrement continu.

Soit $N(t)$ un entier, constant de chaque côté de K :

$$N(t) = N' \quad \text{sur} \quad T'; \qquad N(t) = N'' \quad \text{sur} \quad T'';$$

$2h + N(t)e$ est régulièrement continu si

$$2h + N''e = h_+ + h_- + N'e$$

c'est-à-dire si

$$N'' = N' - 2m - n.$$

Faisons un tel choix de $N(t)$; ainsi *la discontinuité de $N(t)$ à travers K à la parité de n*. Vu (75.3), la fonction

$$J(t) - \frac{n}{2\pi i} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_P(t) \log |k(t, y)|] + \frac{1}{2} N(t) j_1(t) + F_P(t)$$

est *holomorphe* sur T au point o.

Or on a, d'après (11.6)

$$N(t) j_1(t) = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[N(t) j_P(t)] \qquad \text{hors de} \quad K.$$

On a donc, hors de K, l'égalité des fonctions :

$$(75.4) \qquad J(t) = \frac{n}{2\pi i} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_P \log |k|] - \frac{1}{2} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[N(t) j_P] + F_P(t).$$

LEMME. — Si (11.4) a lieu et si $q - \frac{l}{2} \leqq p$, alors, sur T, le second membre de (75.4) est une distribution, indépendante du choix de P.

PREUVE. — D'après le théorème 4, j_P et $j_P \log |k|$ sont sommables : le second membre de (75.4) est donc bien une distribution. Cette distribution est indépendante de P hors de K; pour prouver qu'elle est indépendante de P, il suffit donc de prouver ceci : si Q est un autre polynome homogène vérifiant (11.4), alors la distribution

$$\frac{n}{2\pi i} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_P \log |k|] - \frac{1}{2} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[N(t) j_P]$$
$$- \frac{n}{2\pi i} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) Q\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_{PQ} \log |k|] + \frac{1}{2} P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) Q\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[N(t) j_{PQ}]$$

est une fonction sommable. Or cela est bien vrai : comme dans le cas l impair,

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[N(t)j_P] = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)Q\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[N(t)j_{PQ}]$$

est une distribution indépendante du choix de P; d'autre part la distribution

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_P \log|k|] - P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)Q\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_{PQ}\log|k|]$$

est une fonction holomorphe sur T au point o, car

$$j_P \log|k| - Q\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_{PQ}\log|k|]$$

en est une, vu (**11**.6), puisque j_{PQ} s'annule sur K un nombre de fois supérieur au degré de Q $\left(\text{vu le théorème 4 et l'hypothèse } q - \frac{l}{2} \leqq p\right)$.

Définition *de la distribution* $J(t)$. — Le n° **12** définit cette distribution par la formule (**75**.4), comme le lemme précédent l'autorise.

76. La formule de dérivation de $J(t)$, quand l est pair. — Il s'agit de calculer $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)J(t)$. Si $2(p+q) \leqq l$, $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)J(t)$ est la fonction mesurable (**10**.5) ou (**10**.6). Supposons $l < 2(p+q)$. Hors de K :

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)J(t) = \int_{h(S,S')} \frac{d^{p+q-1}[P(-s_t)\omega]}{ds^{p+q}}. \tag{76.1}$$

D'autre part, si P_1 est un polynome homogène de degré $p_1 \geqq p+q$,

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)J(t) - \frac{n}{2\pi i}P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_{P_1}\log|k|]$$
$$+ \frac{1}{2}P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[Nj_{P_1}]$$

est une fonction holomorphe en o; or, vu les théorèmes 3 et 4, on a l'égalité des fonctions continues

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[N(t)j_{P_1}(t)] = N(t)\int_{e(W,S)} \frac{[-s]^{p_1-p-q}}{(p_1-p-q)!}\,\frac{P(-s_t)\omega}{P_1(-s_t)};$$

et

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)[j_{P_1}\log|k|] - (\log|k|)\int_{e(W,S)} \cdots$$

est holomorphe sur T en o. Donc

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)J(t)-\frac{n}{2\pi i}P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[(\log|k|)\int_{e(W,S)}\cdots\right]$$
$$+\frac{1}{2}P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[N\int_{e(W,S)}\cdots\right]$$

est holomorphe sur T en o; la distribution

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)J(t)-\int_{h(S,S)}\frac{d^{p+q-1}[P(-s_t)\,\omega]}{ds^{p+q}}$$

est donc une fonction holomorphe en o.

Elle est identiquement nulle, vu (**76**.1) : *la distribution* $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)J(t)$ *a l'expression* (**76**.1). Le théorème 5 est prouvé.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOCHNER (S) et MARTIN (W. T.). — *Several complex variables.* — Princeton Princeton University Press, 1948.

[2] CARTAN (Elie). — *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes*, (*Publ. math. Univ. Belgrade*, t. 1, 1932, p. 55-74); *Œuvres complètes*, Partie I : *Groupes de Lie*, t. 2. — Paris, Gauthiers-Villars, 1952; p. 1227-1246.

[3] DUFF (G. F. D.). — *Differential forms in manifolds with boundary*, (*Annals of Maths.*, Series 2, t. 56, 1952, p. 115-127).

[4] FÁRY (Istvan). — *Cohomologie des variétés algébriques* (*Annals of Math.*, Séries 2, t. 65, 1957, p. 21-73).

[5] GEL'FAND (I.) et SILOV (G.). — *Les fonctions généralisées et leurs opérations* [en russe]. — Moscou, 1958 (Obobscennye funkcii, 1).

[6] LEFSCHETZ (Solomon). — *L'analysis situs et la géométrie algébrique.* — Paris, Gauthiers-Villars, 1924.

[7] LEFSCHETZ (Solomon). — *Algebraic topology.* — New-York, American mathematical Society, 1942, (Amer. math. Soc. Coll. Publ.. 27).

[8] LERAY (Jean). — *Une définition géométrique de l'anneau de cohomologie d'une multiplicité*, (*Comment. Helvet. Math.*, t. 20, 1947, p. 177-180).

[9] LERAY (Jean). — *L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe*, (*J. Math. pures et appl.*, Séries 9, t. 29, 1950, p. 169-213).

[10] LERAY (Jean). — *Fonction de variables complexes : sa représentation comme somme de puissances négatives de fonctions linéaires* (*Rend. Accad. naz. Lincei*, Série, 8, t. 20, 1956, p. 589-590).

[11] LERAY (Jean). — *Le problème de Cauchy*, (*Congrès mathématique canadien*, 1955, multigraphié).

[12] LICHNEROWICZ (André). — *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie.* — Paris, Dunod; Roma, Cremonese, 1955.

[13] POINCARÉ (Henri). — *Sur les résidus des intégrales doubles*, (*Acta Math.*, t. 9, 1887, p. 321-380).

[14] DE RHAM (Georges). — *Sur la notion d'homologie et les résidus d'intégrales multiples*, (*Congrés international des mathématiciens* [1932, Zürich], t. 2. —

Zürich und Leipzig, Orell, Füssli; p 195); *Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples*, (*Ens. math.*, t. 35, 1936, p. 213-228).

[15] DE RHAM (Georges). — *Sur la division de formes et de courants par une forme linéaire*, (*Comment. Helvet. Math.*, t. 28, 1954, p. 346-352).

[16] DE RHAM (Georges). — *Variétés différentiables, formes, courants, formes harmoniques.* — Paris, Hermann, 1955 (*Act. scient. et ind.*, 1222).

[17] SCHWARTZ (Laurent). — *Théorie des distributions.* — Paris, Hermann; T. 1, : 1950, T. 2, 1951. (*Act. scient. et ind.*, 1091 *et* 1122).

Le présent article a été résumé dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences :

LERAY (Jean). — *La théorie des résidus sur une variété analytique complexe*, (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 247, 1958, p. 2253-2257).

LERAY (Jean). — *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe*, (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 248, 1959. p. 22-28).

Il a été complété par :

[18] NORGUET (François). — *Sur la théorie des résidus*, (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 248, 1959, p. 2057-2059).

(*Manuscrit reçu le* 12 *juin* 1959)

Jean LERAY
12, rue Pierre Curie,
Sceaux (Seine).