BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE CARTIER

Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 86 (1958), p. 177-251
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1958__86__177_0>

Bull. Soc. math. France,
86, 1958, p. 177 à 251.

QUESTIONS DE RATIONALITÉ DES DIVISEURS EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE (1);

PAR

PIERRE CARTIER

(Paris).

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

INTRODUCTION 178

CHAPITRE 1.

PRÉLIMINAIRES DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE.

1. Variétés affines 181
2. Définition des variétés 181
3. Morphismes. Sous-variétés. Produits 183
4. Applications rationnelles 185
5. Extension des scalaires. Conjugués 186

CHAPITRE 2.

THÉORIE DIFFÉRENTIELLE DES CORPS DE CARACTÉRISTIQUE NON NULLE.

1. Définition des dérivations 187
2. Définition des p-bases 189
3. Propriétés des p-algèbres de Lie de dérivations 192
4. Différentielles 195
5. Une identité 199
6. L'opérateur C 200

CHAPITRE 3.

FAISCEAUX ALGÉBRIQUES COHÉRENTS.

1. Faisceaux quasi cohérents 204

(1) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1958.

Pages.
2. Faisceau des anneaux locaux ... 210
3. Faisceaux localement libres ... 211
4. Faisceaux sans torsion ... 212
5. Extension des scalaires ... 215

CHAPITRE 4.

DIVISEURS.

1. Définition des diviseurs ... 222
2. Diviseurs et faisceaux cohérents ... 224
3. Extension des scalaires. Conjugués ... 227
4. Quelques lemmes d'Algèbre linéaire ... 230
5. Normalisation des diviseurs ... 232
6. Critères de rationalité : I. Cas galoisien ... 235
7. Critères de rationalité : II. Cas purement inséparable ... 237
8. Image réciproque des diviseurs ... 241
9. Familles algébriques de diviseurs ... 244

APPENDICE : QUELQUES LEMMES D'ALGÈBRE LOCALE ... 245

BIBLIOGRAPHIE ... 250

INTRODUCTION [2].

Dans un certain nombre de questions de Géométrie algébrique contemporaine (« variété de Picard », « modules », par exemple), se pose le problème du corps minimum de rationalité d'un cycle ou d'un diviseur. Le résultat suivant est classique : si D est un diviseur sur une variété algébrique X, rationnel sur un corps k' extension galoisienne finie de k, pour que D soit rationnel sur k, il faut et suffit qu'il soit invariant par tous les automorphismes de k'/k. Mais les méthodes classiques ne permettent pas d'étudier le cas d'une extension k'/k purement inséparable; pour traiter ce cas, nous avons dû remplacer les automorphismes par des dérivations, idée qui est d'ailleurs à la base de la théorie de Galois des extensions purement inséparables de hauteur 1 due à JACOBSON [15], et de résultats de HOCHSCHILD sur le groupe de BRAUER [13]. Nous avons ainsi pu obtenir des critères assez maniables (*cf.* prop. 14 du chapitre 4, par exemple), que nous appliquerons dans un prochain article à la solution de certains problèmes fondamentaux de la théorie des variétés abéliennes.

[2] Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie située à la fin de cet article.

Dans ce travail, nous nous sommes efforcé de mettre le plus possible en évidence le caractère « linéaire » de la théorie des diviseurs; c'est dire qu'il sera souvent question de corps linéairement disjoints, ou d'extension des scalaires dans un espace vectoriel. Cette linéarisation de la théorie, lointaine héritière des idées de E. ARTIN sur la théorie de Galois, a été rendue possible par l'existence des faisceaux algébriques cohérents de SERRE [17]. Grâce à l'emploi des faisceaux, nous avons pu développer tous les fondements de la théorie, sans jamais faire aucune hypothèse de normalité ou de non-singularité sur les variétés envisagées. En contrepartie, nous avons dû étendre à un corps de base quelconque la théorie développée par SERRE dans le seul cas du corps de base algébriquement clos.

Voici un sommaire rapide des différents chapitres.

Au chapitre 1, nous avons donné un résumé aussi précis et complet que possible des notions fondamentales de Géométrie algébrique. Nous avons suivi essentiellement la méthode d'exposition de CHEVALLEY dans [8], réhabilitant ainsi provisoirement les variétés comme ensembles structurés de points; nous avons donné un soin tout particulier au choix des notations et de la terminologie. En particulier, nous avons utilisé dans la suite de ce travail les notations introduites au chapitre 1, sans référence supplémentaire.

Le chapitre 2 est une théorie assez systématique des dérivations dans un corps de caractéristique non nulle. Nous n'avons pas hésité à redonner les définitions les plus classiques, et à redémontrer des résultats plus ou moins connus sur les p-bases. Les résultats nouveaux sont essentiellement la proposition 3, analogue d'un théorème connu de E. NOETHER en théorie de Galois ; la proposition 6 qui donne la « cohomologie de de Rham » d'un corps de fonctions algébriques en caractéristique $p \neq 0$; les propositions 7 et 8 qui caractérisent les différentielles « exactes » et « logarithmiques » au moyen d'un nouvel opérateur sur les formes différentielles. Cet opérateur a été envisagé dans des cas particuliers par BARSOTTI [1] et TATE [16]; sous forme non intrinsèque, la caractérisation des différentielles logarithmiques est déjà démontrée par JACOBSON dans [14]. Tous ces résultats seront utilisés au chapitre 4, n° 7.

Le chapitre 3 commence par une digression sur les faisceaux quasi cohérents; ce n'est guère qu'une axiomatisation des résultats de SERRE sur les faisceaux cohérents portés par les variétés affines, et nous ne l'avons exposée ici que pour éviter d'avoir à recommencer dans un certain nombre de cas des raisonnements tout à fait semblables. Après quelques résultats élémentaires sur les faisceaux localement libres ou sans torsion, nous étudions dans un cas particulier l'extension des scalaires dans les faisceaux cohérents. Nous nous proposons d'ailleurs de revenir sur la question dans un proche avenir. Le résultat le plus utile est la proposition 14 qui est une généralisation du dernier théorème de WEIL dans ses *Foundations*. Ce chapitre ne contient aucun résultat nouveau, ni intéressant, mais doit être considéré comme une collection de lemmes; le lecteur fera bien de ne lire ces résultats qu'au moment de les utiliser au chapitre 4.

Le chapitre 4 contient une théorie systématique des diviseurs et des questions de rationalité. Quelques commentaires d'abord sur la définition des diviseurs utilisée ici ([3]) : sur une variété affine, nous appelons diviseur un idéal fractionnaire inversible de l'anneau de coordonnées de la variété; lorsque la variété est normale, on obtient ainsi ce qui est classiquement dénommé « diviseurs localement principaux »; sur une variété quelconque, un diviseur est défini par « recollement » à partir de diviseurs sur les différentes cartes affines. Les trois premiers numéros de ce chapitre contiennent les définitions de base et les propriétés élémentaires des diviseurs; le résultat le plus couramment utilisé par la suite est la proposition 6, qu'on peut considérer comme une définition dans notre système. Le n° 4 contient quelques lemmes d'Algèbre linéaire, identiques en substance aux résultats de Bourbaki au paragraphe 5 de son chapitre II d'*Algèbre*. Au n° 5, ces lemmes sont utilisés pour étendre à nos diviseurs un procédé de normalisation dans un système linéaire, employé par Weil dans sa théorie des variétés de Picard. Le n° 6 contient les critères classiques de rationalité des diviseurs dans le cas galoisien et le n° 7 en donne l'extension au cas purement inséparable de hauteur 1; le n° 7 contient les résultats essentiels de ce travail, résultats qui seront appliqués aux variétés abéliennes dans le travail annoncé. Enfin les derniers numéros donnent les définitions de base sur les familles algébriques de diviseurs.

Enfin, dans un Appendice, nous avons groupé un certain nombre de lemmes sur la localisation des anneaux et modules. Ces résultats sont bien connus de plus d'un mathématicien, et la présentation donnée ici s'inspire de travaux récents de J.-P. Serre et N. Bourbaki.

Pour terminer, signalons que ce travail constitue la thèse de doctorat de l'auteur, présentée en octobre 1958 devant la Faculté des Sciences de Paris. A tous les mathématiciens, de quelque nationalité qu'ils soient, qui par leur attention, leur confiance et leur intérêt ont contribué à la naissance de cet enfant, j'exprime la plus grande gratitude; à l'égard de A. Weil et J.-P. Serre, ma dette est particulièrement grande. Je désire enfin témoigner publiquement de la part importante prise par mon épouse dans la préparation mouvementée du texte dactylographié qui a précédé ce texte imprimé.

CHAPITRE 1.

Préliminaires de géométrie algébrique.

On suppose donnés un *domaine universel* $\mathbf{K}$, c'est-à-dire un corps

([3]) Un traitement analogue des diviseurs sur une variété analytique complexe se trouve dans le livre récent de A. Weil sur la Géométrie kählérienne [19].

algébriquement clos de degré de transcendance infini sur son sous-corps premier, et un sous-corps k de $\mathbf{K}$.

1. Variétés affines.

a. Soit X un ensemble. Une structure de *k-variété affine* sur X est définie par la donnée d'un ensemble $A_k(X)$ d'applications de X dans $\mathbf{K}$ satisfaisant aux axiomes suivants :

(A_1) *L'ensemble $A_k(X)$ est un sous-anneau de l'anneau de toutes les applications de X dans $\mathbf{K}$, contenant les constantes à valeurs dans k, et engendré sur k par un nombre fini d'éléments.*

(A_2) *Pour tout k-homomorphisme χ de $A_k(X)$ dans $\mathbf{K}$, il existe un point x de X et un seul tel que $\chi(f)=f(x)$ pour tout $f\in A_k(X)$.*

(A_3) *L'anneau $A_k(X)$ est intègre, et son corps des fractions est une extension régulière de k.*

D'après le théorème des zéros de Hilbert, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $A_k(X)$ ne contenant pas 1, il existe $x\in X$ tel que $f(x)=0$ pour tout $f\in\mathfrak{a}$; en particulier, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $A_k(X)$, il existe $x\in X$ tel que $\mathfrak{m}$ soit l'ensemble des fonctions de $A_k(X)$ nulles en x.

b. Soit X une k-variété affine. Une partie F de X est dite *k-fermée* s'il existe une partie H de $A_k(X)$ telle que F soit l'ensemble des $x\in X$ avec $f(x)=0$ pour tout $f\in H$. Les parties k-fermées de X sont les fermés d'une topologie sur X, appelée *k-topologie*.

c. Soient X une k-variété affine et U un ensemble k-ouvert de X. On dit qu'une application f de U dans $\mathbf{K}$ est *régulière* (sur k) si, pour tout $x\in U$, il existe un voisinage k-ouvert V de x contenu dans U et deux fonctions g et h de $A_k(X)$ telles que $h(y)\neq 0$ et $f(y)=g(y)/h(y)$ pour tout $y\in V$. On dit qu'une application d'une partie $D(f)$ de X dans $\mathbf{K}$ est une *fonction rationnelle* (définie sur k) si $D(f)$ est ouvert, f est régulière sur $D(f)$, et s'il n'existe aucune fonction régulière définie sur un ouvert $U\supsetneqq D(f)$ et induisant f sur $D(f)$. On note $R_k(X)$ l'ensemble des fonctions rationnelles sur X définies sur k.

2. Définition des variétés.

a. Soit X un ensemble. Une structure de *k-variété* sur X est définie par la donnée d'un ensemble $R_k(X)$ d'applications dans $\mathbf{K}$ de parties de X, satisfaisant à l'axiome suivant :

(V) *Il existe un recouvrement fini $(U_i)_{i\in I}$ de X et pour tout $i\in I$ une structure de k-variété affine sur U_i, de sorte que :*

1° *Pour qu'une application f d'une partie $D(f)$ de X appartienne* *à* $R_k(X)$, *il faut et suffit que pour tout* $i \in I$, *l'application de* $D(f) \cap U_i$ *dans* $\mathbf{K}$ *induite par* f *soit une fonction rationnelle* (sur k) *de la* k*-variété affine* U_i.

2° *Pour* $i, j \in I$, *l'ensemble* $U_i \cap U_j$ *est ouvert dans* U_i *pour la* k*-topologie de* U_i. *De plus, l'ensemble* Δ_{ij} *des couples* (x, x) *avec* $x \in U_i \cap U_j$ *est l'ensemble des zéros communs d'une famille* H *de fonctions de la forme*

$$(x, y) \to \sum_{\alpha} f_\alpha(x).g_\alpha(y) \qquad \textit{avec} \quad f_\alpha \in A_k(U_i) \qquad \textit{et} \qquad g_\alpha \in A_k(U_j)$$

sur $U_i \times U_j$.

Il est clair que sur toute k-variété affine X, l'ensemble $R_k(X)$ défini au n° 1 *c* munit X d'une structure de k-variété.

b. Soit X une k-variété. Pour $f \in R_k(X)$, on note $D(f)$ le domaine de définition de f. Les ensembles $D(f)$ pour $f \in R_k(X)$ engendrent une topologie sur X, appelée k*-topologie*, dont les ouverts sont dits k-ouverts et les fermés k-fermés. Lorsque X est affine, cette topologie coïncide avec la k-topologie définie au n° 1 *b*. Pour la k-topologie, l'espace X est quasi-compact, c'est-à-dire, que de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un recouvrement fini; de plus, l'ensemble des k-ouverts de X vérifie la condition maximale et l'espace X est irréductible, c'est-à-dire que l'intersection de deux k-ouverts non vides est non vide. On en déduit que tout k-ouvert de X est connexe et quasi compact pour la topologie induite par celle de X, et que tout k-fermé est réunion d'un nombre fini de k-fermés irréductibles.

c. Soit X une k-variété. Sur l'ensemble $R_k(X)$, il existe une structure de corps bien déterminée par les conditions

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f.g)(x) = f(x).g(x)$$

pour tout $x \in D(f) \cap D(g)$. Si l'on identifie k au sous-corps des applications constantes partout définies de $R_k(X)$, le corps $R_k(X)$ est une extension régulière de type fini de k. Le degré de transcendance de $R_k(X)$ sur k s'appelle la *dimension* de X, et se note $\dim X$.

d. Soit X une k-variété. Une application f d'un k-ouvert U de X dans $\mathbf{K}$ est dite *régulière* s'il existe g dans $R_k(X)$ avec $U \subset D(g)$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in U$; si U n'est pas vide, cette g est alors unique. L'ensemble des fonctions régulières sur un k-ouvert U est un sous-anneau de l'anneau de toutes les applications de U dans $\mathbf{K}$; si cet anneau définit sur U une structure de k-variété affine, on dit que U est un k*-ouvert affine*. Tout k-ouvert de X est réunion d'un nombre fini de k-ouverts affines, et l'intersection de deux k-ouverts affines est un k-ouvert affine. On notera $A_k(X)$ l'anneau des fonctions régulières sur X; ces définitions sont en accord avec les définitions du n° 1 pour les k-variétés affines. Si un k-ouvert U est réunion de k-ouverts U_i, une fonction sur U est régulière si et seulement si sa restriction à chacun des U_i est régulière. Enfin les éléments de $R_k(X)$ sont les fonctions régulières non prolongeables en une fonction régulière définie sur un ouvert strictement plus grand. Par abus de langage, on dira que $f \in R_k(X)$ est régulière sur le k-ouvert U si $D(f)$ contient U.

e. Soit X une k-variété. Si U est un k-ouvert de X et si f est une application régulière de U dans $\mathbf{K}$, l'ensemble U_f des $x \in U$ tels que $f(x) \neq 0$ est k-ouvert; on a $U_f \neq \emptyset$ si U est non vide et f non nulle. De plus, on a

$$U_f \cap U_g = U_{fg}, \qquad U_1 = U \qquad \text{et} \qquad U_0 = \emptyset;$$

si U est k-ouvert affine, tout k-ouvert V contenu dans U est réunion d'un nombre fini d'ensembles U_f; et l'anneau des fonctions régulières sur U_f est engendré par l'anneau des fonctions induites sur U_f par les fonctions régulières sur U et par l'application $x \to 1/f(x)$.

f. Soient X une k-variété et Y une partie de X irréductible pour la k-topologie. L'ensemble des $f \in R_k(X)$ telles que $D(f) \cap Y \neq \emptyset$ est un sous-anneau local de $R_k(X)$, qu'on notera $\mathcal{O}_k(Y/X)$ ou $(\mathcal{O}_k)_Y$; son idéal maximal se compose des fonctions nulles sur $Y \cap D(f)$. Les éléments de $\mathcal{O}_k(Y/X)$ sont appelés *les fonctions rationnelles sur X définies en Y ou le long de Y*. Pour que $\mathcal{O}_k(Y/X) = R_k(X)$, il faut et suffit que Y soit partout dense dans X pour la k-topologie; plus généralement, si $\overline{Y}$ est l'adhérence de Y pour la k-topologie, on a $\mathcal{O}_k(Y/X) = \mathcal{O}_k(\overline{Y}/X)$, mais si Y et Z sont deux parties k-fermées irréductibles distinctes de X, les anneaux locaux $\mathcal{O}_k(Y/X)$ et $\mathcal{O}_k(Z/X)$ sont distincts. Si X est une k-variété affine, pour qu'une partie T de X soit irréductible, il faut et suffit que l'ensemble des fonctions de $A_k(X)$ nulles sur T soit un idéal premier $\mathfrak{p}$; on a alors $\mathcal{O}_k(T/X) = (A_k(X))_{\mathfrak{p}}$, et en particulier $R_k(X)$ est le corps des fractions de $A_k(X)$.

g. Soit X une k-variété. Pour tout $x \in X$, l'ensemble des $f(x)$ pour $f \in (\mathcal{O}_k)_x$ est un sous-corps $k(x)$ de $\mathbf{K}$, isomorphe par $f \to f(x)$ au corps des restes de l'anneau local $(\mathcal{O}_k)_x$. On dit que x est *rationnel sur* k si $k(x) = k$, qu'il est *générique sur* k si $(\mathcal{O}_k)_x = R_k(X)$, auquel cas $f \to f(x)$ est un k-isomorphisme de $R_k(X)$ sur $k(x)$; réciproquement, pour tout k-isomorphisme ζ de $R_k(X)$ dans $\mathbf{K}$, il existe un $x \in X$ et un seul tel que $\zeta(f) = f(x)$ pour tout $f \in R_k(X)$. Soient $x, y \in X$; on dit que y est *spécialisation de x sur k* si $(\mathcal{O}_k)_y \subset (\mathcal{O}_k)_x$, autrement dit si y est adhérent à $\{x\}$ pour la k-topologie; un point de X générique sur k est alors un point dont tout autre point est spécialisation sur k.

3. Morphismes. Sous variétés. Produits.

a. Soient X et Y deux k-variétés. On appelle *k-morphisme* de X dans Y

une application φ de X dans Y, qui soit continue pour les k-topologies de X et de Y, et telle que, pour toute $f \in R_k(Y)$, la fonction $f \circ \varphi$ définie sur le k-ouvert $\varphi^{-1}(D(f))$ de X soit régulière sur cet ouvert. Les morphismes ainsi définis satisfont aux conditions de BOURBAKI [2] (§ 2). L'image d'un k-morphisme de X dans Y est irréductible et contient un ouvert de son adhérence (pour la k-topologie).

b. Soient X une k-variété et Y une partie de X. Si Y est irréductible et intersection d'un k-ouvert et d'un k-fermé et si le corps des restes F de l'anneau local $\mathcal{O}_k(Y/X)$ est extension régulière de k, il existe sur Y une structure induite par la structure de k-variété de X. On dit dans ce cas que Y est une *sous-k-variété localement fermée de* X : on dira que c'est une sous-k-variété *ouverte* ou *fermée* selon que Y est k-ouvert ou k-fermé. La k-topologie de Y est alors induite par la k-topologie de X; de plus, si U est un k-ouvert de Y, pour qu'une application f de U dans $\mathbf{K}$ soit régulière, il faut et suffit que pour tout $y \in U$, il existe un k-ouvert V_y de X contenant y et une fonction g_y régulière dans V_y tels que f et g_y coïncident dans $U \cap V_y$. Si X est une k-variété affine et si Y est k-fermé, alors Y est une k-variété affine et $A_k(Y)$ se compose des restrictions à X des fonctions de $A_k(X)$.

c. Soient X et Y deux k-variétés. Sur l'ensemble $X \times U$, il existe une structure-produit des structures de k-variétés des facteurs. La k-topologie sur $X \times Y$ est plus fine que la topologie-produit des k-topologies de X et de Y, et même strictement plus fine si X et Y ne sont pas réduites à un point. Si $U \subset X$ et $V \subset Y$ sont k-ouverts, alors $U \times V$ est k-ouvert dans $X \times Y$ et les fonctions régulières sur $U \times V$ sont les applications de la forme $(x, y) \to \sum_\alpha f_\alpha(x).g_\alpha(y)$, où les f_α sont régulières sur U et les g_α régulières sur V; de plus, si U et V sont des k-ouverts affines, il en est de même de $U \times V$. Pour $f \in R_k(X)$, l'application $(x, y) \xrightarrow{f'} f(x)$ de $D(f) \times Y$ dans $\mathbf{K}$ appartient à $R_k(X \times Y)$ et l'application $f \to f'$ est un k-isomorphisme de $R_k(X)$ sur un sous-corps de $R_k(X \times Y)$ auquel on l'identifiera; si l'on procède de même avec $R_k(Y)$, alors les corps $R_k(X)$ et $R_k(Y)$ sont linéairement disjoints sur k et engendrent $R_k(X \times Y)$. Pour qu'une application φ de X dans Y soit un k-morphisme, il faut et suffit que son graphe Γ soit une sous-k-variété fermée de $X \times Y$ et que la projection de Γ sur X soit un isomorphisme de k-variété. Enfin, si U est un k-ouvert de $X \times Y$, l'ensemble V des $x \in X$ tels que $U \cap (x \times Y)$ soit non vide est un k-ouvert de X et V est non vide s'il en est ainsi de U.

d. Soit X une k-variété. On dit que X est *complète* si, pour toute k-variété Y, la projection sur Y d'un ensemble k-fermé dans $X \times Y$ est k-fermée dans Y. Il revient au même de dire que tout anneau de valuation du corps $R_k(X)$ qui contient k et admet $R_k(X)$ comme corps des fractions contient l'anneau local $(\mathcal{O}_k)_x$ d'un point de X. Si X est complète, on a $A_k(X) = k$. Une k-variété affine non réduite à un point n'est pas complète; une sous-k-variété fermée d'une k-variété complète, le produit de deux k-variétés complètes, l'image d'un morphisme défini dans une k-variété complète, sont des k-variétés complètes.

e. Une *k-variété de groupe* G est un ensemble muni d'une loi de groupe et d'une structure de k-variété telles que les applications $(x, y) \rightarrow x.y$ et $x \rightarrow x^{-1}$ de $G \times G$ et G respectivement dans G soient des k-morphismes. Soit alors x un point de G rationnel sur k; les translations à gauche $\gamma_x : y \rightarrow x.y$ et à droite $\delta_x : y \rightarrow y.x$ sont alors des automorphismes de la k-variété G. Si G et H sont deux k-variétés de groupe, un *k-homomorphisme* de G dans H est une application de G dans H qui est à la fois une représentation pour les lois de groupes et un k-morphisme pour les structures de k-variétés.

4. Applications rationnelles.

a. Soient X et Y deux k-variétés. Soit $\mathfrak{E}$ l'ensemble des k-morphismes définis dans un k-ouvert non vide de X et à valeurs dans Y; on ordonne $\mathfrak{E}$ par la relation de prolongement. On appellera *application rationnelle* de X dans Y tout élément maximal de $\mathfrak{E}$; tout élément de $\mathfrak{E}$ se prolonge en une application rationnelle de X dans Y et une seule. Soit φ une application rationnelle de X dans Y; l'adhérence dans $X \times Y$ du graphe de φ est une sous-k-variété fermée T de $X \times Y$ et l'ensemble de définition $D(\varphi)$ de φ est le plus grand k-ouvert U de X tel que la projection p de T sur X induise un isomorphisme de k-variété de $p^{-1}(U)$ sur U. Si de plus ψ est une application rationnelle de Y dans une k-variété Z, on dit que φ et ψ sont *composables* si l'image de φ rencontre l'ensemble de définition $D(\psi)$ de ψ; on note alors $\psi \odot \varphi$ l'application rationnelle de X dans Z prolongeant le k-morphisme $\psi \circ \varphi$ de $D(\varphi) \cap \varphi^{-1}(D(\psi))$ dans Z.

b. Soient X et Y deux k-variétés. Si l'on munit $\mathbf{K}$ de la structure de k-variété affine définie par l'ensemble des polynomes à coefficients dans k, les applications rationnelles de X dans $\mathbf{K}$ sont les éléments de $R_k(X)$. Soit φ une application rationnelle de X dans Y et soit T l'adhérence dans Y de l'image de φ; alors T est une sous-k-variété fermée de Y et l'ensemble des $f \in R_k(Y)$ composables avec φ est l'anneau local $\mathcal{O}_k(T/Y)$; de plus l'application $f \rightarrow f \odot \varphi$ est un k-homomorphisme de $\mathcal{O}_k(T/Y)$ dans $R_k(X)$, dont le noyau est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_k(T/Y)$, et qu'on appellera le *cohomomorphisme* de φ. Réciproquement, si Y' est une sous-k-variété fermée de Y, tout k-homomorphisme de $\mathcal{O}_k(Y'/Y)$ dans $R_k(X)$ nul sur l'idéal maximal de l'anneau $\mathcal{O}_k(Y'/Y)$, est le cohomomorphisme d'une application rationnelle de X dans Y et d'une seule. En particulier, les k-isomorphismes de $R_k(Y)$ sur un sous-corps de $R_k(X)$ sont les cohomomorphismes des applications rationnelles *dominantes* de X dans Y, c'est-à-dire, par définition, celles dont l'image est partout dense dans Y. Si Y est une k-variété affine, pour tout k-homomorphisme ζ de $A_k(Y)$ dans $R_k(X)$, il existe une application rationnelle φ de X dans Y et une seule, telle que $\zeta(f) = f \odot \varphi$ pour tout $f \in A_k(Y)$; et pour que φ soit un k-morphisme, il faut et il suffit que ζ applique $A_k(Y)$ dans $A_k(X)$.

c. Soient $f: X \to Y$ un k-morphisme et λ le cohomomorphisme de f. Supposons que $R_k(X)$ soit algébrique sur le corps $\lambda(R_k(Y))$; alors, il existe un k-ouvert non vide U de Y tel que l'image réciproque de tout point de U se compose d'un nombre de points égal au degré séparable $[R_k(X):\lambda(R_k(Y))]_s$. On dira que f est un *morphisme birationnel* si λ est un k-isomorphisme de $R_k(Y)$ sur $R_k(X)$. Si f est un k-morphisme birationnel de X sur Y, il existe un k-ouvert non vide U de X tel que $f(U)$ soit k-ouvert dans Y et que f induise un k-isomorphisme de U sur $f(U)$; cette propriété caractérise d'ailleurs les morphismes birationnels.

5. Extension des scalaires. Conjugués.

a. Soient X une k-variété et k' un sous-corps de $\mathbf{K}$ contenant k. Il existe sur X une structure unique de k'-variété, telle que tout ensemble k-ouvert affine U de X soit k'-ouvert affine et que les fonctions régulières (sur k') sur U soient les combinaisons linéaires à coefficients dans k' des fonctions régulières (sur k) sur U. Cette opération, appelée *extension des scalaires*, est transitive et compatible avec la formation des produits et des sous-variétés. Pour que X soit complète comme k-variété, il faut et suffit qu'elle le soit comme k'-variété et de même pour la propriété d'être affine. Le corps $R_{k'}(X)$ est engendré par les corps k' et $R_k(X)$ qui sont linéairement disjoints sur k. La k-topologie est moins fine que la k'-topologie. Si $T \subset X$ est k'-irréductible, il est k-irréductible et l'on a $\mathcal{O}_k(T/X) = R_k(X) \cap \mathcal{O}_{k'}(T/X)$. Soit U un k-ouvert de X; si B est la k-algèbre des fonctions de $R_k(X)$ régulières sur U, et B' la k'-algèbre des fonctions de $R_{k'}(X)$ régulières sur U, alors toute base de B sur k est une base de B' sur k'.

b. Soient X une k-variété, k' et k'' deux sous corps de $\mathbf{K}$ contenant k et σ un k-isomorphisme de k' sur k''. Alors σ se prolonge de manière unique en un isomorphisme $f \to f^\sigma$ de $R_{k'}(X)$ sur $R_{k''}(X)$ induisant l'identité sur $R_k(X)$. De plus, il existe une bijection $U \to U^\sigma$ de l'ensemble des k'-ouverts de X sur l'ensemble des k''-ouverts, compatible avec intersection et réunion finies et telle que $D(f)^\sigma = D(f^\sigma)$ pour $f \in R_{k'}(X)$. Si U est k'-ouvert affine, alors U^σ est k''-ouvert affine; si U est k'-ouvert et $f \in R_{k'}(X)$ est régulière sur U, alors f^σ est régulière sur U^σ. Par passage au complémentaire, on définit F^σ pour un k'-fermé F; si T est un k'-fermé irréductible, T^σ est un k''-fermé irréductible et l'on a $\mathcal{O}_{k''}(T^\sigma/X) = \mathcal{O}_{k'}(T/X)^\sigma$; si X est affine, et si le k'-fermé F est l'ensemble des zéros communs d'une partie H de $A_{k'}(X)$, alors F^σ est l'ensemble des zéros communs de $H^\sigma \subset A_{k''}(X) = A_{k'}(X)^\sigma$. Si τ

est un k-isomorphisme de k'' sur un sous-corps k''' de $\mathbf{K}$ contenant k, on a la formule de transitivité $(U^\sigma)^\tau = U^{\tau\sigma}$. Supposons alors que k soit le corps des invariants d'un groupe G d'automorphismes de k'; pour qu'un sous-ensemble U de X soit k-ouvert, il faut et suffit qu'il soit k'-ouvert, et qu'on ait $U^\sigma = U$ pour tout $\sigma \in G$. Enfin, si k' est purement inséparable sur k, la k-topologie sur X est identique à la k'-topologie.

c. Lorsque $k = \mathbf{K}$, on omet $\mathbf{K}$ dans toutes les notations; ainsi on appellera variété une $\mathbf{K}$-variété, etc. Par extension des scalaires de k à $\mathbf{K}$, toute k-variété porte une structure de variété. Réciproquement, on peut considérer une k-variété comme une variété X munie de la structure additionnelle définie par un sous-corps $R_k(X)$ de $R(X)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *Les corps $R_k(X)$ et $\mathbf{K}$ sont linéairement disjoints sur k et engendrent $R(X)$.*

2° *Tout point de X a un voisinage ouvert affine U tel que la $\mathbf{K}$-algèbre des fonctions de $R(X)$ régulières sur U soit engendrée par des éléments de $R_k(X)$.*

Cette structure additionnelle s'appelle une k-structure. Si k' est un sous-corps de $\mathbf{K}$ contenant k, une k-structure définit une k'-structure telle que $R_{k'}(X) = k'(R_k(X))$. Le problème de la *descente du corps de base* sur une k-variété X, de k à un sous-corps k_0, consiste à trouver une k_0-structure sur X telle que $R_k(X) = k(R_{k_0}(X))$; il existe toujours un sous-corps k_0 de $\mathbf{K}$, *de type fini sur le sous-corps premier de* $\mathbf{K}$, et tel que la descente du corps de base de k à k_0 soit possible.

CHAPITRE 2.

THÉORIE DIFFÉRENTIELLE DES CORPS DE CARACTÉRISTIQUE NON NULLE.

NOTATIONS. — *Les corps envisagés sont commutatifs et de caractéristique $p \neq 0$, le nombre premier p étant fixé.*

Si A est un anneau, on pose

$$D_u(v) = [u, v] = u.v - v.u$$

pour $u, v \in A$ et pour $u \in A$ on note L_u ou $L(u)$ l'opérateur additif $v \to u.v$ dans A. On note $f.g$ le composé $x \to f(g(x))$ de deux opérateurs additifs dans un groupe abélien G; l'ensemble $\mathcal{E}$ des opérateurs additifs dans G est alors un anneau dont l'élément unité sera noté $\mathbf{1}$.

1. Définition des dérivations ([4]). — *Soit K un corps.* On appelle

([4]) A l'exception de la formule $(3)_p$ et de l'assertion concernant ∂^p, le contenu de ce numéro est valable sans l'hypothèse $p \neq 0$.

dérivation de K toute application ∂ de K dans lui-même qui vérifie les deux identités

$$(1) \qquad \partial(x+y) = \partial(x) + \partial(y),$$

$$(2) \qquad \partial(x.y) = \partial(x).y + x.\partial(y) \qquad (x, y \in K).$$

Une dérivation ∂ de K satisfait à un certain nombre d'identités que nous allons maintenant établir. Tout d'abord, on a la formule

$$(3)_m \qquad \partial(x^m) = m.x^{m-1}.\partial(x)$$

valable pour tout entier m pour $x \in K^*$; pour établir cette formule, on remarque que d'après la formule (2), on a

$$\partial(x^{m+1}) = \partial(x^m).x + x^m.\partial(x)$$

ce qui montre immédiatement que les formules $(3)_m$ et $(3)_{m+1}$ sont équivalentes; la démonstration s'achève en notant que $(3)_1$ est triviale. Comme cas particuliers de la formule $(3)_m$, on obtient les formules suivantes :

$$(3)_0 \qquad \partial(1) = 0,$$

$$(3)_{-1} \qquad \partial(x^{-1}) = -x^{-2}.\partial(x),$$

$$(3)_p \qquad \partial(x^p) = 0.$$

La formule suivante n'est qu'une traduction de la formule (2) :

$$(4) \qquad [\partial, L_x] = L_{\partial(x)}.$$

Les formules (1), (2), $(3)_0$, $(3)_{-1}$ et $(3)_p$ montrent que l'ensemble des éléments de K annulés par une dérivation ∂ est un sous-corps $K(\partial)$ de K contenant K^p. De plus, d'après la formule (4), pour qu'une dérivation ∂ de K soit linéaire par rapport à un sous-corps k de K, il faut et suffit que ∂ soit nulle sur k, c'est-à-dire $k \subset K(\partial)$; une telle dérivation sera appelée une *k-dérivation de K.*

Nous démontrons maintenant la formule de Leibniz :

$$(5)_m \qquad \partial^m(x.y) = \sum_{i+j=m} \binom{m}{i} \partial^i(x).\partial^j(y) \qquad (x, y \in K)$$

valable pour toute dérivation ∂ de K et tout entier $m \geq 0$; on note $\binom{m}{i}$ le coefficient binomial $m!/i!(m-i)!$ pour $0 \leq i \leq m$ et l'on convient que $\binom{m}{i} = 0$ si $i < 0$ ou $i > m$. La formule $(5)_0$ est triviale puisque ∂^0 est l'identité de K; la formule $(5)_1$ n'est autre que la formule (2); enfin la formule $(5)_m$ implique la formule $(5)_{m+1}$, car si l'on admet $(5)_m$, on a

$$\begin{aligned}\partial^{m+1}(x.y) = \partial(\partial^m(x.y)) &= \sum_{i+j=m} \binom{m}{i} \partial(\partial^i(x).\partial^j(y)) \\ &= \sum_{i+j=m} \binom{m}{i} \left\{ \partial^{i+1}(x).\partial^j(y) + \partial^i(x).\partial^{j+1}(y) \right\} \\ &= \sum_{i+j=m+1} \left\{ \binom{m}{i-1} \partial^i(x).\partial^j(y) + \binom{m}{i} \partial^i(x).\partial^j(y) \right\} \\ &= \sum_{i+j=m+1} \binom{m+1}{i} \partial^i(x).\partial^j(y)\end{aligned}$$

en vertu de la formule bien connue $\binom{m}{i-1} + \binom{m}{i} = \binom{m+1}{i}$.

Soit k un sous-corps du corps K; nous noterons $\mathfrak{g}(K/k)$ l'ensemble des k-dérivations de K. Soient ∂ et ∂' deux k-dérivations de K et $a \in K$; il est immédiat que $\partial + \partial'$ et $a.\partial = L_a.\partial$ sont des k-dérivations de K et que $\mathfrak{g}(K/k)$ est un espace vectoriel sur K. De plus, il résulte de la formule $(5)_p$ et des congruences $\binom{p}{i} \equiv 0 \pmod{p}$ pour $0 < i < p$ que ∂^p est une k-dérivation de K; enfin il est clair que $\partial'' = [\partial, \partial']$ est k-linéaire et le calcul suivant montre que ∂'' satisfait à la relation (2), donc appartient à $\mathfrak{g}(K/k)$.

$$\begin{aligned}\partial''(x.y) &= \partial\{\partial'(x.y)\} - \partial'\{\partial(x.y)\} \\ &= \partial\{\partial'(x).y + x.\partial'(y)\} - \partial'\{\partial(x).y + x.\partial(y)\} \\ &= \partial(\partial'(x)).y + \partial'(x).\partial(y) + \partial(x).\partial'(y) + x.\partial(\partial'(y)) \\ &\quad - \partial'(\partial(x)).y - \partial(x).\partial'(y) - \partial'(x).\partial(y) - x.\partial'(\partial(y)) \\ &= \partial''(x).y + x.\partial''(y).\end{aligned}$$

2. Définition des p-bases. — *Soit K un corps, extension d'un corps L; on suppose $[K:L]$ fini et $L \supset K^p$.*

Nous nous proposons de déterminer la structure de $\mathfrak{g}(K/L)$; pour cela nous aurons besoin d'un résultat préliminaire.

LEMME 1. — Soit $k(x) = k'$ *une extension monogène d'un corps k. On suppose $x^p \in k$ et $x \notin k$. Alors les monomes x^i pour $0 \leqq i < p$ forment une base de $k(x)$ sur k et il existe une k-dérivation ∂ de $k(x)$ et une seule telle que $\partial(x) = 1$.*

Posons $x^p = a \in k$; comme x est racine dans k' du polynome $X^p - a$ de $k[X]$, l'assertion sur la base de k' sur k sera prouvée si l'on montre que le polynome $X^p - a$ est irréductible dans $k[X]$. Or, on a

$$X^p - a = (X - x)^p \quad \text{dans } k'[X];$$

par suite, si un polynome unitaire P de $k[X]$ divise $X^p - a$ dans $k[X]$, il le divise *a fortiori* dans $k'[X]$ et est donc de la forme $(X-x)^r$ avec $0 \leqq r \leqq p$. Comme le coefficient de X^{r-1} dans $(X-x)^r$ est égal à $-r.x$ et que $x \notin k$, ce coefficient ne peut être dans k que si $r=0, p$, c'est-à-dire $P=1$ ou $P=X^p-a$.

Si ∂ est une k-dérivation de k' telle que $\partial(x)=1$, on a $\partial(x^i)=i.x^{i-1}$ pour $0 \leqq i < p$ d'après la formule $(3)_i$; réciproquement, comme les monomes x^i ($0 \leqq i < p$) forment une base de k' sur k, il existe un opérateur k-linéaire ∂ dans k' défini par $\partial(x^i)=i.x^{i-1}$ pour $0 \leqq i < p$. Pour montrer que ∂ est une k-dérivation, il suffit, comme les deux membres de la formule (2) sont bilinéaires en x et y, de vérifier cette formule lorsqu'on remplace x par x^i et y par x^j; nous distinguerons deux cas :

$$\begin{aligned} i+j<p: \quad \partial(x^i.x^j) &= \partial(x^{i+j}) = (i+j)\,x^{i+j-1} \\ &= (i.x^{i-1}).x^j + x^i.(j.x^{j-1}) = \partial(x^i).x^j + x^i.\partial(x^j), \\ i+j \geqq p: \quad \partial(x^i.x^j) &= \partial(x^{i+j}) = \partial(a.x^{i+j-p}) = a.(i+j-p).x^{i+j-p-1} \\ &= (i+j).x^{i+j-1} = \partial(x^i).x^j + x^i.\partial(x^j). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Nous appellerons *p-base* de l'extension K/L tout système minimal de générateurs de cette extension; comme $[K:L]$ est fini, une p-base est finie et tout système de générateurs de K sur L contient une p-base de K sur L.

PROPOSITION 1. — *Pour qu'une suite* $\{x_i\}_{1 \leqq i \leqq n}$ *d'éléments de* K *soit une* p-*base de* K *sur* L, *il faut et il suffit que les monomes* $x_1^{j_1}\ldots x_n^{j_n}$ *avec* $0 \leqq j_\alpha < p$ *pour* $1 \leqq \alpha \leqq n$ *forment une base de* K *sur* L.

Nous commencerons par une remarque : soient E, F et G trois corps tels que $E \supset F \supset G$; si $\{u_\alpha\}$ est une base de E sur F et $\{v_\beta\}$ une base de F sur G, alors $\{u_\alpha.v_\beta\}$ est une base de E sur G. En effet, tout $x \in E$ est de la forme $\sum_\alpha x_\alpha.u_\alpha$ avec $x_\alpha \in F$; comme $x_\alpha \in F$, il est de la forme $\sum_\beta x_{\alpha\beta}.v_\beta$ avec $x_{\alpha\beta} \in G$, d'où finalement $x = \sum_{\alpha,\beta} x_{\alpha\beta}.u_\alpha.v_\beta$; de plus, si l'on a une relation $\sum_{\alpha,\beta} x_{\alpha\beta}.u_\alpha.v_\beta = 0$ avec $x_{\alpha\beta} \in G$, on en déduit

$$\sum_\alpha \Big(\sum_\beta x_{\alpha\beta}.v_\beta\Big).u_\alpha = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \sum_\beta x_{\alpha\beta}.v_\beta = 0$$

pour tout α et finalement $x_{\alpha\beta}=0$ quels que soient α et β.

Supposons que $\{x_i\}_{1 \leqq i \leqq n}$ soit une p-base de K sur L; nous poserons

$$L_i = L(x_1, \ldots, x_i) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq n \qquad \text{et} \qquad L_0 = L.$$

On a alors $L_n = K$ et $L_{i+1} = L_i(x_{i+1})$ pour $0 \leqq i \leqq n-1$, tandis que $x_{i+1} \notin L_i$ [sinon on aurait $K = L(x_j)_{j \neq i+1}$ et ceci contredit la définition d'une p-base] et $x_{i+1}^p \in L \subset L_i$. Le lemme 1 montre alors que les monomes x_{i+1}^j pour $0 \leqq j < p$ forment une base de L_{i+1} sur L_i et la remarque précédente montre alors par récurrence sur i que L_i admet les monomes $x_1^{j_1} \ldots x_i^{j_i}$ ($0 \leqq j_\alpha < p$ pour $1 \leqq \alpha \leqq i$) comme base sur L.

Réciproquement, supposons que les monomes $x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}$ avec $0 \leqq j_\alpha < p$ pour $1 \leqq \alpha \leqq n$ forment une base de K sur L; comme $[K : L]$ est fini, tout sous-anneau de K contenant L est un sous-corps de K et par suite, pour toute partie H de $[1, n]$, on a $L(x_i)_{i \in H} = L[x_i]_{i \in H}$. Comme les monomes x_i^j pour $0 \leqq j < p$ forment une base de $L(x_i)$ sur L d'après le lemme 1, on voit que le composé L_H des sous-corps $L(x_i)$ pour $i \in H$ admet pour base sur L les monomes $x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n}$ avec $j_\alpha = 0$ pour $\alpha \notin H$. Il en résulte que $L_H \neq K$ pour $H \neq [1, n]$ et donc $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est une p-base de K/L.

C. Q. F. D.

Le résultat suivant sur le lien entre p-bases et dérivations sera précisé au n° 4 au moyen de la notion de différentielle.

Proposition 2. — *Si $\{x_i\}_{1 \leqq i \leqq n}$ est une p-base de l'extension K/L, il existe une base $\{\partial_i\}_{1 \leqq i \leqq n}$ de l'espace K-vectoriel $\mathfrak{g}(K/L)$ bien déterminée par les conditions $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leqq i, j \leqq n$.*

Pour $1 \leqq i \leqq n$, notons K_i le sous-corps de K engendré par L et les x_j avec $j \neq i$; on a donc $K = K_i(x_i)$, $x_i \notin K_i$ et $x_i^p \in L \subset K_i$. Le lemme 1 montre alors qu'il existe une unique dérivation ∂_i de K nulle sur K_i et telle que $\partial_i(x_i) = 1$; autrement dit, ∂_i est l'unique dérivation de K nulle sur L et telle que $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$, puisque K_i est engendré par L et les x_j pour $j \neq i$. Ceci montre l'existence des ∂_i; de plus, si $\partial \in \mathfrak{g}(K/L)$, la dérivation $\partial - \sum_{1 \leqq i \leqq n} \partial(x_i).\partial_i$ de K est nulle sur L et sur les x_i, donc sur K et l'on a

$$\partial = \sum_{1 \leqq i \leqq n} \partial(x_i).\partial_i;$$

enfin si l'on a une relation linéaire $\sum_{1 \leqq i \leqq n} a_i.\partial_i = 0$, on en déduit

$$a_j = \sum_i a_i \delta_{ij} = \sum_i a_i \partial_i(x_j) = 0$$

pour $1 \leqq j \leqq n$, ce qui démontre l'indépendance linéaire des ∂_i.

C. Q. F. D.

3. Propriétés des p-algèbres de Lie de dérivations. — *Soit K un corps.* Un ensemble $\mathfrak{g}$ de dérivations de K est appelé une *p-algèbre de Lie* lorsque c'est un sous-espace de l'espace K-vectoriel de toutes les dérivations de K, et de plus, stable pour les opérations $(\partial, \partial') \to [\partial, \partial']$ et $\partial \to \partial^p$. Si $\mathfrak{g}$ est une p-algèbre de Lie de dérivations de K, nous noterons $K\mathfrak{g}$ le sous-corps de K formé des éléments annulés par toutes les dérivations ∂ appartenant à $\mathfrak{g}$.

Nous supposons donnée une p-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dérivations de K, de rang fini n sur K. Pour tout $x \in K$, soit u_x la forme linéaire $\partial \to \partial(x)$ sur $\mathfrak{g}$; l'intersection des noyaux des formes u_x étant visiblement réduit à o et $\mathfrak{g}$ étant de dimension finie, il existe des éléments x_i de K $(1 \leqq i \leqq n)$ tels que les formes linéaires u_{x_i} pour $1 \leqq i \leqq n$ forment une base du dual de l'espace K-vectoriel $\mathfrak{g}$. Considérant la base de $\mathfrak{g}$ sur K duale de la base $\{u_{x_i}\}_{1 \leqq i \leqq n}$, on voit finalement qu'*il existe une base $\{\partial_i\}_{1 \leqq i \leqq n}$ de $\mathfrak{g}$ sur K et des éléments $x_i (1 \leqq i \leqq n)$ de K tels que $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$* pour $1 \leqq i, j \leqq n$. Ces données resteront fixées dans la discussion qui suit.

Soit $\partial \in \mathfrak{g}$; on a donc $\partial = \sum_{1 \leqq i \leqq n} a_i . \partial_i$ avec $a_i \in K$, d'où

$$\partial(x_j) = \sum_i a_i . \partial_i(x_j) = \sum_i a_i . \delta_{ij} = a_j$$

et par suite, pour que $\partial = 0$ il faut et suffit qu'on ait $\partial(x_j) = 0$ pour $1 \leqq j \leqq n$. En particulier, on en déduit immédiatement les formules

$$(6) \qquad [\partial_i, \partial_j] = 0, \qquad \partial_i^p = 0$$

pour $1 \leqq i, j \leqq n$, comme on le voit en appliquant à x_l pour $1 \leqq l \leqq n$ les dérivations $[\partial_i, \partial_j]$ et ∂_i^p de $\mathfrak{g}$. Nous poserons $\partial'_i = x_i . \partial_i$ de sorte que

$$\partial'_i(x_j) = x_i . \delta_{ij} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i, j \leqq n;$$

de la même manière que pour les ∂_i, on voit que les ∂'_i satisfont aux formules

$$(7) \qquad [\partial'_i, \partial'_j] = 0, \qquad \partial_i'^p = \partial'_i.$$

Soit alors V un espace vectoriel sur le corps K; nous supposons donnée une application $\partial \to r(\partial)$ de $\mathfrak{g}$ dans l'anneau $\mathcal{E}$ des opérateurs additifs de V qui vérifie les identités suivantes :

$$(8) \qquad r(\partial + \partial') = r(\partial) + r(\partial'),$$

$$(9) \qquad r([\partial, \partial']) = [r(\partial), r(\partial')],$$

$$(10) \qquad r(\partial^p) = r(\partial)^p,$$

$$(11) \qquad r(a.\partial)(x) = a.r(\partial)(x),$$

$$(12) \qquad r(\partial)(a.x) = \partial(a).x + a.r(\partial)(x)$$

pour $\partial, \partial' \in \mathfrak{g}$, $a \in K$ et $x \in V$. Pour $1 \leqq i \leqq n$, nous poserons $r_i = r(\partial'_i)$ de sorte qu'on a $r_i^p = r_i$ et $r_i r_j = r_j r_i$ quels que soient i et j d'après (7); nous allons décomposer l'espace V par rapport aux valeurs propres des opérateurs r_i. Pour cela considérons le polynome $P(X) = X^p - X = \prod_{0 \leqq a < p} (X - a)$ de $K[X]$; pour $0 \leqq a < p$, nous poserons $P(X) = P_a(X).(X - a)$ avec $P_a \in K[X]$; de plus, en prenant les dérivées logarithmiques, on trouve

$$(13) \qquad P'(X)/P(X) = \sum_{0 \leqq a < p} 1/(X - a)$$

soit, en multipliant par P,

$$(14) \qquad \sum_{0 \leqq a < p} P_a(X) = P'(X) = -1,$$

de plus, pour $a \neq b$, il est clair que $P_a(X).P_b(X)$ est divisible par $P(X)$. Par suite, si l'on pose $r_{i,a} = -P_a(r_i)$ pour $0 \leqq a < p$ et $1 \leqq i \leqq n$, on a

$$\sum_{0 \leqq a < p} r_{i,a} = \mathbf{1} \qquad \text{et} \qquad r_{i,a} r_{i,b} = 0$$

pour $a \neq b$ et aussi $r_{i,a} r_{j,b} = r_{j,b} r_{i,a}$ puisque r_i et r_j commutent quels que soient i et j. Si S_n est l'ensemble des suites $(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{a}$ d'entiers tels que $0 \leqq a_i < p$ pour $1 \leqq i \leqq n$, nous pouvons alors poser

$$E(\mathbf{a}) = \prod_{1 \leqq i \leqq n} r_{i, a_i} \qquad \text{pour} \quad \mathbf{a} \in S_n$$

et les relations précédentes montrent qu'on a

$$\sum_{\mathbf{a}} E(\mathbf{a}) = \mathbf{1}, \qquad E(\mathbf{a}) E(\mathbf{b}) = 0$$

pour $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Autrement dit, V est, en tant que groupe abélien, somme directe des sous-groupes $V(\mathbf{a}) = E(\mathbf{a})(V)$ et la relation $(r_i - a.\mathbf{1}).r_{i,a} = 0$ montre immédiatement qu'on a $r_i(x) = a_i.x$ pour $x \in V(\mathbf{a})$. Par suite :

1° $V(\mathbf{0})$ est l'ensemble des éléments de V annulés par les r_i pour $1 \leqq i \leqq n$ donc, puisque les ∂'_i forment une base de $\mathfrak{g}$, il est égal à l'ensemble $V_{\mathfrak{g}}$ des éléments annulés par les $r(\partial)$ pour tout $\partial \in \mathfrak{g}$.

2° Pour $\mathbf{a} \in S_n$, posons $x^{\mathbf{a}} = \prod_{1 \leqq i \leqq n} x_i^{a_i}$; comme ∂'_i annule les x_j pour $j \neq i$, il est linéaire par rapport au corps engendré par ces éléments dans K, et la formule (3) montre alors qu'on a $\partial'_i(x^{\mathbf{a}}) = a_i.x^{\mathbf{a}}$; soit alors $v \in V$, d'où d'après la formule (12)

$$r_i(x^{\mathbf{a}}.v) = \partial_i'(x^{\mathbf{a}}).v + x^{\mathbf{a}}.r_i(v) = a_i.x^{\mathbf{a}}.v + x^{\mathbf{a}}.r_i(v)$$

et ceci montre que pour que $x^{\mathbf{a}}.v$ appartienne à $V(\mathbf{a})$, il faut et suffit que v soit annulé par les r_i, c'est-à-dire appartienne à $V_{\mathfrak{g}}$.

Finalement, on a prouvé que *tout élément de V s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{\mathbf{a}\in S_n} x^{\mathbf{a}}.V_{\mathbf{a}}$ où les $v_{\mathbf{a}}$ appartiennent au sous-groupe $V_{\mathfrak{g}}$ des éléments de V annulés par tous les $r(\partial)$ pour $\partial \in \mathfrak{g}$*. De ceci, nous allons déduire deux résultats importants.

Proposition 3. — *Soient K un corps de caractéristique p, $\mathfrak{g}$ une p-algèbre de Lie de dérivations de K, de rang fini sur K, et V un espace vectoriel sur K. On suppose donnée une application $\partial \rightarrow r(\partial)$ de $\mathfrak{g}$ dans l'anneau des endomorphismes du groupe additif V vérifiant les conditions* (8) *à* (12). *Alors l'ensemble $K_{\mathfrak{g}}$ des éléments de K annulés par tous les $\partial \in \mathfrak{g}$ est un sous-corps de K et l'ensemble $V_{\mathfrak{g}}$ des éléments de V annulés par tous les $r(\partial)$ pour $\partial \in \mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel sur $K_{\mathfrak{g}}$ de V. De plus, l'homomorphisme φ de $K \otimes_{K_{\mathfrak{g}}} V_{\mathfrak{g}}$ dans V défini par $\varphi(x \otimes v) = x.v$ est bijectif.*

On a déjà noté que $K_{\mathfrak{g}}$ est un sous-corps de K et que $V_{\mathfrak{g}} = E(\mathbf{0})(V)$ est un sous-groupe de V; enfin, d'après (12), si $x \in K_{\mathfrak{g}}$ et $v \in V_{\mathfrak{g}}$ on a $x.v \in V_{\mathfrak{g}}$. De plus, si l'on spécialise au cas $V = K$ le résultat de la discussion précédente, on voit que les monomes $x^{\mathbf{a}}$ pour $\mathbf{a} \in S_n$ forment une base de K sur $K_{\mathfrak{g}}$; comme tout élément de V s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{\mathbf{a}\in S_n} x^{\mathbf{a}}.v_{\mathbf{a}}$ avec $v_{\mathbf{a}} \in V_{\mathfrak{g}}$, l'application φ est bijective d'après les propriétés des produits tensoriels. C. Q. F. D.

Remarque. — Comme φ est bijectif, toute base de $V_{\mathfrak{g}}$ sur le corps $K_{\mathfrak{g}}$ est aussi une base de V sur K. De plus, avec les notations précédentes, les x_i pour $1 \leq i \leq n$ forment une p-base de K sur $K_{\mathfrak{g}}$ d'après la proposition 1.

Proposition 4. — *Soit K un corps de caractéristique p. L'application $\Psi : \mathfrak{g} \rightarrow K_{\mathfrak{g}}$ est une bijection de l'ensemble des p-algèbres de Lie de dérivations de K, de rang fini sur K, sur l'ensemble des sous-corps L de K contenant K^p et tels que $[K : L]$ soit fini. La bijection Ψ^{-1} est l'application $L \rightarrow \mathfrak{g}(K/L)$.*

Soit $\mathfrak{g}$ une p-algèbre de Lie de dérivations de K, de rang fini sur K. On a $K_{\mathfrak{g}} \supset K^p$ car toute dérivation de K est nulle sur K^p; de plus, on a vu qu'il existe une base $\{\partial_i\}_{1\leq i\leq n}$ de $\mathfrak{g}$ sur K et une p-base $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ de K sur $K_{\mathfrak{g}}$ ayant même nombre d'éléments et donc $[K : K_{\mathfrak{g}}] = p^{[\mathfrak{g}:K]}$.

Soit L un sous-corps de K contenant K^p et tel que $[K:L]$ soit fini. Alors d'après les propositions 1 et 2, $\mathfrak{g}(K/L)$ est de rang fini sur K et l'on a

$$[K:L] = p^{[\mathfrak{g}(K/L):K]}.$$

On a de manière évidente $L \subset K_{\mathfrak{g}(K/L)} = L'$; mais d'après les formules précédentes de dimension, on a

$$[K:L'] = p^{[\mathfrak{g}(K/L):K]} = [K:L]$$

et donc $L = L'$. On a donc prouvé $L = K_{\mathfrak{g}(K/L)}$ et l'on prouve de manière analogue la formule $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(K/K_{\mathfrak{g}})$.

C. Q. F. D.

4. Différentielles ([5]). — *Soit K un corps et soit L un sous-corps de K contenant K^p et tel que $[K:L]$ soit fini.* On pose $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(K/L)$ et pour tout entier $r \geqq 0$ on note $\Omega^r(K/L) = \Omega^r$ l'espace K-vectoriel des formes K-multilinéaires alternées de r variables dans $\mathfrak{g}$; comme $\mathfrak{g}$ est de rang fini sur K d'après la proposition 4, on peut identifier Ω^r à la puissance extérieure $r^{\text{ième}}$ de Ω^1, le produit extérieur $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r$ s'identifiant à l'application $(\partial_1, \ldots, \partial_r) \to \det \omega_i(\partial_j)$. On note Ω la somme directe des Ω^r, c'est-à-dire l'algèbre extérieure de Ω^1; les éléments de Ω sont appelés *différentielles* (de K sur L).

Pour $x \in K$, on note dx la différentielle $\partial \to \partial(x)$; l'application $x \to dx$ de K dans Ω^1 est L-linéaire et l'on a l'identité

$$(15) \qquad d(x.y) = x.dy + y.dx \qquad (x, y \in K).$$

Soit $\{x_i\}_{1 \leqq i \leqq n}$ une p-base de K sur L; d'après la proposition 2, il existe une base $\{\partial_i\}_{1 \leqq i \leqq n}$ de $\mathfrak{g}$ sur K déterminée par la condition $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$, autrement dit $\langle \partial_i, dx_j \rangle = \delta_{ij}$ pour $1 \leqq i, j \leqq n$, ce qui prouve que $\{dx_i\}_{1 \leqq i \leqq n}$ est la base de Ω^1 duale de la base $\{\partial_i\}$ de $\mathfrak{g}$. Réciproquement, si des diffé-

([5]) Une partie des résultats de ce numéro s'étend aux corps de caractéristique quelconque. Soient en effet K/L une extension *de type fini* et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie (sur le corps L) formée des L-dérivations de K; on peut considérer $\mathfrak{g}$ comme un espace vectoriel sur le corps K. On note alors Ω^r l'espace des applications K-multilinéaires alternées de $\mathfrak{g}^r$ dans K, et pour $x \in K$, on note $dx \in \Omega^1$ l'application $\partial \to \partial(x)$ de $\mathfrak{g}$ dans K. Si $K = L(x_1, \ldots, x_r)$, la relation $\partial(x_1) = \ldots = \partial(x_r) = 0$ pour $\partial \in \mathfrak{g}$ implique $\partial = 0$; il en résulte immédiatement que $\mathfrak{g}$ est de rang fini sur K, et que Ω^1 est engendré sur K par $dx_1, \ldots, dx_r$; changeant au besoin la numérotation des x_i, on peut supposer que $\{dx_i\}_{1 \leqq i \leqq n}$ est une base de Ω^1 sur K. Alors, il existe une base $\{\partial_i\}_{1 \leqq i \leqq n}$ de $\mathfrak{g}$ sur K définie par $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leqq i, j \leqq n$ et si $\partial \in \mathfrak{g}$ annule $x_1, \ldots, x_n$ on a $\partial = 0$; on en déduit alors $[\partial_i, \partial_j] = 0$ pour $1 \leqq i, j \leqq n$. Ceci étant, comme $\mathfrak{g}$ est de rang fini sur K, on peut identifier $\Omega = \sum_{r \geqq 0} \Omega^r$ à l'algèbre extérieure de Ω^1, et la démonstration de la proposition 5 est valable sans changement.

rentielles dx_i pour $1 \leq i \leq n$ forment une base de Ω^1 sur K, il résulte des raisonnements du n° 3 que $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ est une p-base de K sur L (*cf.* remarque suivant la proposition 3). Autrement dit, *l'espace K-vectoriel Ω^1 est engendré par les différentielles dx pour $x \in K$, et pour que les dx_i pour $1 \leq i \leq n$ forment une base de Ω^1, il faut et suffit que les x_i forment une p-base de K sur L.* Enfin, si $x \in K$, la relation « $dx = 0$ » équivaut à « pour toute $\partial \in \mathfrak{g}$, on a $\partial(x) = 0$ », soit d'après la proposition 4 à « $x \in L$ ».

Proposition 5. — *Il existe dans Ω un opérateur L-linéaire d et un seul vérifiant les relations*

$$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^r \omega \wedge d\omega' \qquad (\omega \in \Omega^r,\ \omega' \in \Omega), \tag{16}$$

$$d(d\omega) = 0 \qquad (\omega \in \Omega) \tag{17}$$

et prolongeant l'application $x \to dx$ de $\Omega^0 = K$ dans Ω^1. De plus, d applique Ω^r dans Ω^{r+1}.

Démontrons d'abord l'*unicité* de d. Soient donc d_1 et d_2 deux opérateurs satisfaisant aux conditions de la proposition 5; la formule (16) montre que l'ensemble A des différentielles ω telles que $d_1\omega = d_2\omega$ est un sous-anneau de Ω; de plus, pour $x \in K$, on a $dx = d_1 x = d_2 x$, d'où $K \subset A$; enfin pour $x \in K$, on a $d_1 dx = d_1 d_1 x = 0$ d'après (17) et de même $d_2 dx = 0$ et par suite A contient x et dx pour $x \in K$. Or, comme l'espace K-vectoriel Ω^1 est engendré par les différentielles dx et comme Ω est l'algèbre extérieure de Ω^1, l'anneau Ω est engendré par les x et les dx pour $x \in K$, ce qui prouve $A = \Omega$ et donc $d_1 = d_2$.

Démontrons l'*existence* de d. On peut trouver une base $\{\partial_i\}_{1\leq i\leq n}$ de $\mathfrak{g}$ et des éléments x_i de K pour $1 \leq i \leq n$ tels que $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et les différentielles dx_i forment alors une base de Ω^1 sur K. De plus d'après la formule (6), on a $[\partial_i, \partial_j] = 0$ pour $1 \leq i, j \leq n$ et l'on voit immédiatement qu'on a

$$dx = \sum_{1\leq i\leq n} \partial_i(x).dx_i \qquad (x \in K). \tag{18}$$

Comme Ω est l'algèbre extérieure de Ω^1, les différentielles

$$\omega_H = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$$

pour toutes les suites strictement croissantes $H = (i_1, \ldots, i_r)$ d'indices compris entre 1 et n, forment une base de Ω sur K. Nous définirons alors un opérateur L-linéaire d dans Ω par la formule

$$d\Big(\sum_H x_H.\omega_H\Big) = \sum_H dx_H \wedge \omega_H \qquad (x_H \in K). \tag{19}$$

Faisant $H = \emptyset$, on voit que d prolonge l'application $x \to dx$ de Ω^0

dans Ω^1 ; il est clair que d applique Ω^r dans Ω^{r+1}. Pour vérifier la formule (16), il suffit par linéarité de le faire pour $\omega = a.\omega_H$ et $\omega' = a'.\omega'_H$; on a alors

$$\omega \wedge \omega' = (a.a').(\omega_H \wedge \omega_{H'}),$$

mais comme $\omega_H \wedge \omega_{H'}$ est nul, ou de la forme $\pm\, \omega_{H''}$, on a

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \omega') &= d(a.a') \wedge \omega_H \wedge \omega_{H'} = (a.da' + a'.da) \wedge \omega_H \wedge \omega_{H'} \\ &= (-1)^r(a.\omega_H) \wedge (da' \wedge \omega_{H'}) + (da \wedge \omega_H) \wedge (a'.\omega_{H'}) \\ &= (-1)^r \omega \wedge d\omega' + d\omega \wedge \omega', \end{aligned}$$

si H a r éléments puisque $da' \wedge \omega_H = (-1)^r\, \omega_H \wedge da'$.

Nous vérifierons d'abord la formule (17) lorsque $\omega = x \in K$; on a alors d'après (18) et (19) :

$$d(dx) = \sum_i d(\partial_i(x).dx_i) = \sum_i d(\partial_i(x)) \wedge dx_i = \sum_{i,j} \partial_j\partial_i(x).dx_j \wedge dx_i$$

et par suite $d(dx) = 0$ puisque $dx_i \wedge dx_i = 0$, $dx_i \wedge dx_j + dx_j \wedge dx_i = 0$ et $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$. Dans le cas général on peut se limiter au cas où $\omega = a.\omega_H$, d'où $d\omega = da \wedge \omega_H$ d'après (19) et

$$d(d\omega) = d(da \wedge \omega_H) = dda \wedge \omega_H + (-1)\, da \wedge d\omega_H = 0$$

puisque $dda = 0$ et $d\omega_H = 0$.

C. Q. F. D.

L'application K-linéaire $\omega \to \overline{\omega}$ qui applique $\omega \in \Omega^r$ sur $(-1)^r\omega$ est un automorphisme de l'algèbre Ω ; de plus on a $\overline{d\omega} = -\, d\overline{\omega}$ et la formule (16) s'écrit

$$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + \overline{\omega} \wedge d\omega'.$$

D'après la formule (16), le noyau de d dans Ω est une sous-algèbre Z de la L-algèbre Ω et l'image B de d est un idéal de Z d'après les formules (16) et (17) ; nous allons déterminer l'algèbre de cohomologie $\mathcal{H}(K/L) = Z/B$ qui est l'analogue du « groupe de de Rham » d'une variété différentiable.

PROPOSITION 6. — *Soit $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une p-base de K sur L. La sous-algèbre Z de la L-algèbre Ω est alors somme directe de l'idéal B et de la L-algèbre engendrée par les éléments $f_i = x_i^{p-1}.dx_i$ $(1 \leq i \leq n)$.*

On sait que les dx_i forment une base de Ω^1 sur K et que les monomes $x^{\mathbf{a}} = \prod_{1 \leq i \leq n} x_i^{a_i}$ pour $\mathbf{a} \in S_n$ forment une base de K sur L (6) ; il en résulte

(6) On rappelle que S_n est l'ensemble des suites $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ d'entiers avec $0 \leq a_i < p$ pour $1 \leq i \leq n$.

immédiatement que les différentielles $x^{\mathbf{a}}\omega_H$ pour $\mathbf{a}\in S_n$ et $H\subset [1, n]$, où ω_H est définie comme dans la démonstration de la proposition 5, forment une base de Ω sur L.

Soit r un entier tel que $0\leqq r\leqq n$; nous noterons $\Omega_{(r)}$ la sous-L-algèbre de Ω ayant pour base les $x^{\mathbf{a}}\omega_H$ ne faisant intervenir que les x_i et dx_i pour lesquels $1\leqq i\leqq r$; les formules (18) et (19) montrent que $\Omega_{(r)}$ est stable pour d. Supposons prouvé que le noyau $Z_{(r)}=Z\cap\Omega_{(r)}$ de d dans $\Omega_{(r)}$ est somme directe de l'idéal $B_{(r)}=d(\Omega_{(r)})$ et de la sous-algèbre $H_{(r)}$ engendrée par les f_i pour $1\leqq i\leqq r$; comme $\Omega_{(0)}=L$, ceci est trivialement vérifié pour $r=0$. Posons alors $f=f_{r+1}$ et $e_m=x_{r+1}^m/m$ pour $0<m<p$ de sorte que $de_m=x_{r+1}^{m-1}.dx_{r+1}$; il est alors immédiat que tout élément de $\Omega_{(r+1)}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\omega=\varphi+\varphi'\wedge f+\sum_{0<m<p}\omega_m\wedge e_m+\sum_{0<m<p}\omega'_m\wedge de_m \tag{20}$$

avec φ, φ', ω_m, ω'_m dans $\Omega_{(r)}$; comme $df=0$ et $dde_m=0$, on a alors

$$\begin{aligned} d\omega=d\varphi+d\varphi'\wedge f&+\sum_{0<m<p}d\omega_m\wedge e_m\\ &+\sum_{0<m<p}\{\overline{\omega}_m+d\omega'_m\}\wedge de_m. \end{aligned}\tag{21}$$

Par suite, pour que $\omega\in Z_{(r+1)}$, il faut et il suffit qu'on ait $d\varphi=d\varphi'=0$ et $\overline{\omega}_m=-d\omega'_m$ ce qui implique $d\omega_m=0$ d'après (17); d'après l'hypothèse de récurrence, ceci signifie que φ et φ' sont de la forme $\varphi=d\psi+\eta$ et $\varphi'=d\psi'+\eta'$ avec ψ, $\psi'\in\Omega_{(r)}$ et η, $\eta'\in H_{(r)}$. Finalement les éléments de $Z_{(r+1)}$ sont les différentielles de la forme

$$\begin{aligned} \omega&=d\psi+d\psi'\wedge f+\eta+\eta'\wedge f+\sum_{0<m<p}d\overline{\omega}'_m\wedge e_m+\sum_{0<m<p}\omega'_m\wedge de_m\\ &=d(\psi+\psi'\wedge f+\sum_{0<m<p}\overline{\omega}'_m\wedge e_m)+\eta+\eta'\wedge f, \end{aligned}$$

tandis que d'après (21) où l'on remplace ω_m par $\omega_m+d\omega'_m$, les éléments de $B_{(r+1)}$ sont les différentielles de la forme

$$\begin{aligned} \omega&=d\psi+d\psi'\wedge f+\sum_{0<m<p}d\omega_m\wedge e_m+\sum_{0<m<p}\overline{\omega}_m\wedge de_m\\ &=d(\psi+\psi'\wedge f+\sum_{0<m<p}\omega_m\wedge e_m). \end{aligned}$$

Mais tout élément de $H_{(r+1)}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\eta+\eta'\wedge f$ avec η, $\eta'\in H_{(r)}$, et les deux dernières formules prouvent que $Z_{(r+1)}$ est somme directe de $B_{(r+1)}$ et de $H_{(r+1)}$.

Notre assertion est donc prouvée par récurrence pour tout r tel que $0 \leqq r \leqq n$; en particulier pour $r = n$, on a $\Omega_{(n)} = \Omega$, d'où $Z_{(n)} = Z$ et $B_{(n)} = B$, et ceci prouve la proposition **6**.

C. Q. F. D.

Remarque. — Il résulte de la forme de la base de Ω sur L définie dans le cours de la précédente démonstration que la sous-L-algèbre de Ω engendrée par les f_i admet pour base sur L les monomes $f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_r}$ pour toutes les suites $(i_1, \ldots, i_r)$ strictement croissantes d'entiers compris entre 1 et n.

5. Une identité. — Nous allons maintenant donner la démonstration d'une identité due à Jacobson (*cf.* [14]). La démonstration suivante est copiée de [12].

Lemme 2. — *Soit A un anneau tel que $p.u = 0$ pour tout $u \in A$. Alors, pour u, $v \in A$, on a l'identité*

$$(u+v)^p = u^p + v^p + \sum_{0<i<p} s_i(u, v)/i \tag{22}$$

où $s_i(u, v)$ est le coefficient de T^{i-1} dans le polynome $D_{Tu+v}^{p-1}(u)$ en la variable T.

Pour $x \in A$, on pose $L(x) = u.x$ et $R(x) = x.u$ de sorte que dans l'anneau $\mathcal{E}$ des endomorphismes additifs de A, on a $L.R = R.L$ et $D_u = L - R$; d'après la formule du binome et les congruences $\binom{p-1}{i} \equiv (-1)^i$ et $\binom{p}{i} \equiv 0$ modulo p pour $0 < i < p$, on a donc

$$D_u^{p-1} = \sum_{0 \leqq i < p} L^i . R^{p-1-i} \qquad \text{et} \qquad D_u^p = L^p - R^p,$$

d'où les deux identités dans A :

$$D_u^{p-1}(v) = \sum_{0 \leqq i < p} u^i . v . u^{p-1-i}, \tag{23}$$

$$D_u^p(v) = u^p . v - v . u^p = [u^p, v]. \tag{24}$$

Si T est une indéterminée, on peut écrire

$$(Tu+v)^p = T^p u^p + v^p + \sum_{0<i<p} s'_i(u, v)\, T^i \tag{25}$$

avec $s'_i(u, v) \in A$; en différentiant par rapport à T dans (25), on a

$$\sum_{0 \leqq i < p} (Tu+v)^i u (Tu+v)^{p-1-i} = \sum_{0<i<p} i . s'_i(u, v)\, T^{i-1}, \tag{26}$$

ce qui d'après la formule (23) s'écrit

$$D^{p-1}_{Tu+v}(u) = \sum_{0<i<p} i.s'_i(u, v)\, T^{i-1} \tag{27}$$

soit finalement $s_i(u, v) = i.s'_i(u, v)$ pour $0 < i < p$. La formule (22) résulte alors de (25) où l'on fait $T = 1$.

C. Q. F. D.

Remarque. — Les fonctions s_i s'explicitent immédiatement

$$s_i(u_1, u_2) = \sum_{(j)} D(u_{j_1}) \ldots D(u_{j_{p-1}})(u_1), \tag{28}$$

la sommation étant étendue à toutes les suites $(j) = (j_1, \ldots, j_{p-1})$ renfermant $i-1$ fois 1 et $p-i$ fois 2; on a posé $D(u) = D_u$ pour des raisons typographiques.

6. **L'opérateur** C. — *Soit K un corps et soit L un sous-corps de K contenant K^p et tel que $[K : L]$ soit fini.* On pose toujours

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(K/L) \qquad \text{et} \qquad \Omega^r = \Omega^r(K/L).$$

Si ω appartient à Ω^1, nous définirons une application $C\omega$ de $\mathfrak{g}$ dans le corps $K^{1/p}$ par la formule

$$(C\omega(\partial))^p = \omega(\partial^p) - \partial^{p-1}(\omega(\partial)) \qquad (\partial \in \mathfrak{g}). \tag{29}$$

De cette définition, résultent immédiatement les propriétés suivantes de l'opérateur C :

$$C(\omega + \omega') = C\omega + C\omega', \tag{30}$$

$$C(x.\omega) = x^{1/p}.C\omega \qquad (x \in L), \tag{31}$$

$$C(dx) = 0 \qquad (x \in K). \tag{32}$$

Notre but est maintenant de caractériser les différentielles « exactes » et « logarithmiques » au moyen de l'opérateur C; nous aurons besoin pour cela de deux résultats préliminaires.

Lemme 3. — *Soit $\omega \in \Omega^1$; pour tout $\partial \in \mathfrak{g}$, on note $r(\partial)$ l'opérateur $\partial + L(\omega(\partial))$ de K. On a alors l'identité*

$$[r(\partial), r(\partial')] - r([\partial, \partial']) = L(d\omega(\partial, \partial')) \qquad (\partial, \partial' \in \mathfrak{g}). \tag{33}$$

Supposons $\omega = x.dx'$ avec $x, x' \in K$; on a alors $d\omega = dx \wedge dx'$ d'où

$$d\omega(\partial, \partial') = \partial(x).\partial'(x') - \partial'(x).\partial(x')$$

pour $\partial, \partial' \in \mathfrak{g}$; de plus on a

$$\begin{aligned}\partial(\omega(\partial')) &- \partial'(\omega(\partial)) - \omega([\partial, \partial'])\\ &= \partial\{x.\partial'(x')\} - \partial'\{x.\partial(x')\} - x.([\partial, \partial'])(x')\\ &= \partial(x).\partial'(x') + x.\partial(\partial'(x')) - \partial'(x).\partial(x')\\ &\quad - x.\partial'(\partial(x')) - x.\{\partial(\partial'(x')) - \partial'(\partial(x'))\}\\ &= \partial(x).\partial'(x') - \partial'(x).\partial(x').\end{aligned}$$

Il en résulte que pour $\omega = x.dx'$, on a la formule

(34) $$d\omega(\partial, \partial') = \partial(\omega(\partial')) - \partial'(\omega(\partial)) - \omega([\partial, \partial']),$$

d'où par linéarité la même formule pour toute $\omega \in \Omega^1$.

On a alors

$$\begin{aligned}[r(\partial), r(\partial')] &= [\partial, \partial'] + [\partial, L(\omega(\partial'))]\\ &\qquad - [\partial', L(\omega(\partial))] + [L(\omega(\partial)), L(\omega(\partial'))]\\ &= [\partial, \partial'] + L(\partial(\omega(\partial'))) - L(\partial'(\omega(\partial)))\\ &= [\partial, \partial'] + L(d\omega(\partial, \partial')) + L(\omega([\partial, \partial']))\\ &= r([\partial, \partial']) + L(d\omega(\partial, \partial'))\end{aligned}$$

d'après la formule (4) et la formule $[L(a), L(b)] = 0$.

C. Q. F. D.

Lemme 4. — *Avec les mêmes notations que dans le lemme* 3, *on a*

(35) $$r(\partial)^p - r(\partial^p) = L\{\omega(\partial) - C\omega(\partial)\}^p.$$

D'après le lemme 2 appliqué à l'anneau $\mathcal{E}$ des endomorphismes additifs de K, on a l'identité

(36) $$(L(a) + \partial)^p = L(a)^p + \partial^p + L(\partial^{p-1}(a)),$$

comme on le voit en tenant compte de la formule $[L(a) + \partial, L(b)] = L(\partial(b))$. De (36) on déduit

$$\begin{aligned}r(\partial)^p - r(\partial^p) &= L\{\omega(\partial)\}^p + \partial^p + L\{\partial^{p-1}(\omega(\partial))\} - \partial^p - L\{\omega(\partial^p)\}\\ &= L\{\omega(\partial)^p - \omega(\partial^p) + \partial^{p-1}(\omega(\partial))\}.\end{aligned}$$

Proposition 7. — *Soit* $\omega \in \Omega^1$; *pour qu'il existe* $x \neq 0$ *dans* K *tel que* $\omega = x^{-1}.dx$, *il faut et il suffit qu'on ait* $d\omega = 0$ *et* $C\omega = \omega$.

D'après les formules (33) et (35), les conditions $d\omega = 0$ et $C\omega = \omega$ sont respectivement équivalentes aux suivantes :

(37) $$r([\partial, \partial']) = [r(\partial), r(\partial')], \qquad r(\partial^p) = r(\partial)^p \qquad (\partial, \partial' \in \mathfrak{g}).$$

Supposons d'abord $\omega = x^{-1}.dx$; on a alors

$$r(\partial) = \partial + L(x^{-1}.\partial(x)) = L(x)^{-1}(L(x).\partial + L(\partial(x))) = L(x)^{-1}.\partial.L(x)$$

d'après la formule (4) et la vérification des formules (37) est immédiate.

Supposons maintenant $d\omega = 0$ et $C\omega = \omega$; alors d'après (37), les conditions (8) à (12) sont satisfaites par les opérateurs additifs $r(\partial)$ de K ; d'après la proposition 3, il existe donc $y \neq 0$ dans K annulé par tous les opérateurs $r(\partial)$. Autrement dit, on a $\partial(y) + \omega(\partial).y = 0$ pour tout $\partial \in \mathfrak{g}$; si l'on pose $x = y^{-1}$, la formule $(3)_{-1}$ montre alors que $\partial(x) = \omega(\partial).x$ pour tout $\partial \in \mathfrak{g}$, c'est-à-dire $\omega = x^{-1}.dx$.

C. Q. F. D.

Proposition 8. — *Soit $\omega \in \Omega^1$; pour qu'il existe $x \in K$ tel que $\omega = dx$, il faut et suffit qu'on ait $d\omega = 0$ et $C\omega = 0$.*

D'après la proposition 7, on a $C(x^{-1}.dx) = x^{-1}.dx$ pour $x \in K$ non nul ; comme $x^p \in L$, la formule (31) implique alors

$$C(x^{p-1}.dx) = dx \qquad (x \in K). \tag{38}$$

Introduisons une p-base $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ de K sur L ; d'après la proposition 6, pour que $d\omega = 0$, il faut et suffit que ω soit de la forme

$$\omega = dy + \sum_i a_i.x_i^{p-1}\,dx_i,$$

avec $a_i \in L$ pour $1 \leq i \leq n$; d'après les formules (30), (31), (32) et (38) ceci implique

$$C\omega = \sum_i a_i^{1/p}.dx_i.$$

Comme les dx_i sont linéairement indépendantes sur K, l'égalité $C\omega = 0$ équivaut à $a_i = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et signifie que $\omega = dy$.

C. Q. F. D.

Nous allons pour terminer généraliser l'opérateur C aux éléments de l'algèbre Ω. Nous supposerons pour simplifier que $L = K^p$ et par suite, on a $\Omega = \Omega(K/K^p)$.

Soit donc K un corps tel que $[K : K^p]$ soit fini ; soit $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une p-base de K sur K^p ; si Z est le noyau de d dans Ω et si $B = d(\Omega)$, on sait que les monomes $f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_r}$ pour toutes les suites strictement croissantes $(i_1, \ldots, i_r)$ et $f_i = x_i^{p-1}.dx_i$ forment une base de Z modulo B *sur* K^p. Nous *définirons* l'opérateur C de Z dans Ω par la formule

$$C\omega = \sum_{(i)} a_{i_1, \ldots, i_r}\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r} \tag{39}$$

pour

$$\omega = d\varphi + \sum_{(i)} a^p_{i_1 \ldots i_r} f_{i_1} \wedge \ldots \wedge f_{i_r}.$$

D'après les formules (30) à (32) et (38), on voit que que C coïncide sur $Z \cap \Omega^1$ avec l'opérateur précédemment défini. Or, toute différentielle est somme d'éléments de la forme $a_0 . da_1 \wedge \ldots \wedge da_r$; d'après les formules (16) et (17), on a

$$(40) \qquad d(a_0 . da_1 \wedge \ldots \wedge da_r) = da_0 \wedge \ldots \wedge da_r,$$

ce qui prouve que B est le sous-anneau de Z engendré par les dx. Alors les formules (31), (32) et (38) montrent que C est la seule application de Z dans Ω satisfaisant aux conditions suivantes :

A. *C'est un homomorphisme d'anneau de Z dans Ω.*

B. *Pour tout $x \in K$*, on a

$$C(x^p) = x, \qquad C(x^{p-1} dx) = dx, \qquad C(dx) = 0.$$

En particulier, C est *indépendant du choix de la p-base* $\{x_i\}$ *de* K *sur* K^p. De plus, sur la définition (39) de C, on voit que *le noyau* de C *est l'idéal* B *de* Z *et que* C *est surjectif*. Autrement dit, C définit par passage au quotient un isomorphisme de l'anneau de cohomologie $\mathcal{H}(K/L)$ sur l'anneau Ω.

Remarques. — 1° En explicitant les formules $d\omega = 0$ et $C\omega = \omega$ pour $\omega = x^{-1} . dx$, on obtient les trois identités

$$(41) \qquad \partial(\partial'(x)/x) - \partial'(\partial(x)/x) = [\partial, \partial'](x)/x,$$

$$(42) \qquad \partial^{p-1}(x^{p-1} . \partial(x)) = x^{p-1} . \partial^p(x) - \partial(x)^p,$$

$$(42') \qquad \partial^{p-1}(\partial(x)/x) = \partial^p(x)/x - (\partial(x)/x)^p$$

La formule (41) se démontre facilement directement dans le cas général au moyen des formules (2) et $(3)_{-1}$, tandis que la formule (42) peut se démontrer au moyen de la formule de Leibniz (*cf.* par exemple [1], p. 59).

2° Hochschild a prouvé dans [13] la formule

$$(43) \qquad (a . \partial)^p = a^p . \partial^p + (a . \partial)^{p-1}(a) . \partial$$

valable pour $a \in K$ et toute dérivation ∂ de K. De là on déduit la formule

$$(44) \qquad C\omega(a . \partial) = a . C\omega(\partial) \qquad (a \in K,\ \partial \in \mathfrak{g},\ \omega \in \Omega^1).$$

Le lemme 2 montre que, pour $\omega \in \Omega^1$, on a, en utilisant les mêmes conventions de sommation sur (j) que dans la formule (28), l'identité

$$(45) \quad C\omega(\partial_1 + \partial_2) = C\omega(\partial_1) + C\omega(\partial_2) - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} \sum_{(j)} \sum_{r=0}^{p-2} \{\partial_{j_1} \ldots \partial_{j_r} . d\omega(\partial_{j_{r+1}}, [\partial_{j_{r+2}}, [\ldots[\partial_{j_{p-1}}, \partial_1] \ldots]])\}^{1/p}.$$

En particulier, si $d\omega = 0$, l'application $C\omega$ de $\mathfrak{g}$ dans $K^{1/p}$ est p^{-1}-semi-linéaire.

De plus, avec les notations des lemmes 3 et 4, on montre facilement que, si $d\omega = 0$, on a

$$[r(\partial'), r(\partial^p) - r(\partial)^p] = 0$$

et par suite, $(C\omega(\partial))^p$ est annulé par toute dérivation $\partial' \in \mathfrak{g}(K/L)$. Il en résulte que les valeurs de $C\omega$ appartiennent en fait à $L^{1/p}$ et non seulement à $K^{1/p}$.

CHAPITRE 3.

Faisceaux algébriques cohérents.

Notations. — *On note k un sous-corps du domaine universel* $\mathbf{K}$ *et X une k-variété. On pose $A_k = A_k(X)$ et $R_k = R_k(X)$.*

Pour les faisceaux, les notations sont celles de Serre *dans* [17]. *Pourtant, la restriction d'un faisceau $\mathcal{F}$ à un ouvert U sera notée $\mathcal{F} \mid U$ et non $\mathcal{F}(U)$ et l'on notera $s \mid U$ la restriction à U d'une section s de $\mathcal{F}$.*

Sauf mention du contraire, les anneaux envisagés sont commutatifs avec unité :tout homorphisme d'anneau applique 1 *sur* 1.

1. Faisceaux quasi cohérents. — *Soient A un anneau et T un ensemble.* Nous supposons associée à tout $f \in A$ une partie T_f de T de sorte que les deux axiomes suivants soient satisfaits (7) :

(H_1) *Pour $f, g \in A$, on a $T_{fg} = T_f \cap T_g$; de plus, on a $T_0 = \emptyset$ et $T_1 = T$.*

(H_2) *Soient f et f_i ($i \in I$) des éléments de A. Pour qu'on ait $T_f \subset \bigcup_{i\in I} T_{f_i}$ il faut et suffit qu'il existe un entier $n \geqq 0$ tel que $f^n \in \sum_{i\in I} A.f_i$.*

Ces données resteront fixées dans ce numéro.

Nous munirons T de la topologie dans laquelle les T_f pour $f \in A$ forment une base d'ouverts ; avec les notations de (H_2), il existe une partie *finie* J de I telle que $f^n \in \sum_{i\in J} A.f_i$, d'où $T_f \subset \bigcup_{i\in J} T_{f_i}$, d'où résulte immédiatement que les ensembles T_f pour $f \in A$ sont *quasi compacts* (i. e. vérifient l'axiome de Borel-Lebesgue).

Soit $t \in T$; d'après (H_1) l'ensemble S_t des $f \in A$ tels que $t \in T_f$, est multiplicativement stable, contient 1 et ne contient pas 0; nous noterons $\mathfrak{A}_t$ l'anneau des fractions de A par rapport à S_t et ε_t l'homomorphisme cano-

(7) Les axiomes (H_1) et (H_2) sont satisfaits si T est un ensemble d'idéaux premiers de l'anneau A tel que tout idéal premier de A soit intersection d'une famille d'éléments de T, et si l'on note T_f l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p} \in T$ tels que $f \notin \mathfrak{p}$.

nique de A dans $\mathcal{A}_t$. Si de plus, M est un A-module, nous noterons $\mathcal{A}(\mathrm{M})_t$ le $\mathcal{A}_t$-module $\mathcal{A}_t \otimes_A M$ et ρ_t l'homomorphisme canonique $m \to 1 \otimes m$ de M dans $\mathcal{A}(M)_t$; on sait (*cf.* Appendice) :

a. tout élément de $\mathcal{A}(M)_t$ est de la forme $\varepsilon_t(g)^{-1}.\rho_t(m)$ avec $m \in M$ et $g \in S_t$ (i. e. $t \in T_g$) ;

b. le noyau de ρ_t se compose des $m \in M$ tels qu'il existe $g \in S_t$ (i. e. $t \in T_g$) avec $g.m = 0$;

c. le foncteur $M \to \mathcal{A}(M)_t$ est exact.

Enfin, pour $m \in M$ et $g \in A$, nous noterons m/g l'application qui à $t \in T_g$ fait correspondre l'élément $\varepsilon_t(g)^{-1}.\rho_t(m)$ de $\mathcal{A}(M)_t$.

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 1. — *Soit M un A-module. Il existe sur l'ensemble $\mathcal{A}(M)$, somme des $\mathcal{A}(M)_t$ pour $t \in T$, une structure de faisceau de A-modules et une seule pour laquelle les m/g^n ($n \geqq 0$) soient les sections de $\mathcal{A}(M)$ sur T_g. De plus, pour que la section $m/1$ de $\mathcal{A}(M)$ sur T soit nulle sur T_f, il faut et suffit qu'on ait $f^n.m = 0$ pour un entier $n \geqq 0$.*

D'après *a*, pour tout $t \in T$ et tout $x \in \mathcal{A}(M)_t$, il existe un voisinage ouvert T_g de t et une fonction m/g tels que $(m/g)_t = x$; de plus, d'après *b* si $(m/g)_t = 0$, il existe $h \in A$ avec $t \in T_h$ et $h.m = 0$, d'où $(g/m) \mid T_{gh} = (hm/gh) \mid T_{gh} = 0$ et g/m est nulle dans un voisinage de t. De plus, on a

$$(m + m')/g^n = m/g^n + m'/g^n \qquad \text{et} \qquad a.(m/g^n) = (am)/g^n;$$

il en résulte immédiatement que si l'on munit $\mathcal{A}(M)$ de la topologie engendrée par les images des applications m/g^n définies respectivement dans T_g, on définit sur $\mathcal{A}(M)$ une structure de faisceau de A-modules de base T.

Soient $f \in A$ et $m \in M$; si l'on a $(m/1) \mid T_f = 0$, pour tout $t \in T_f$ il existe $g \in S_t$ tel que $g.m = 0$, autrement dit $t \in T_g$ et $g \in \mathfrak{a}$, en notant $\mathfrak{a}$ l'annulateur de m dans M. Par suite, on a $T_f \subset \bigcup_{g \in \mathfrak{a}} T_g$ d'où $f^n \in \mathfrak{a}$ pour $n \geqq 0$ assez grand d'après (H_2) ; finalement, on a $f^n.m = 0$. Réciproquement si $f^n.m = 0$, on voit immédiatement que $m/1$ est nulle sur T_f (*cf.* la propriété *b* ci-dessus).

Soit maintenant s une section de $\mathcal{A}(M)$ sur T_f pour f dans A. Si $T_h \subset T_g$, on a $(m/g) \mid T_h = (hm/gh)$ et $T_{gh} = T_h$; il en résulte immédiatement, comme tout point de T a un système fondamental de voisinages de la forme T_g avec $g \in S_t$, qu'il existe un recouvrement de T_f par des ensembles T_{f_i} ($i \in I$) et des $m_i \in M$ tels que $s \mid T_{f_i} = (m_i/f_i)$. Comme T_f est quasi compact, on peut supposer I fini; on a alors $m_i/f_i = m_j/f_j$, soit $f_i m_j/1 = f_j m_i/1$ sur $T_{f_i} \cap T_{f_j} = T_{f_i f_j}$; comme I est fini, ce qui précède montre que pour $r \geqq 0$ assez grand, on a $(f_i f_j)^r (f_i m_j - f_j m_i) = 0$ quels que soient i et j dans I.

Posons $f'_i = f_i^{r+1}$ et $m'_i = f_i^r . m_i$ pour tout $i \in I$, de sorte que $T_{f_i} = T_{f'_i}$ et $f'_i\, m'_j = f'_j\, m'_i$; mais comme T_f est réunion des $T_{f'_i}$, l'axiome (H_2) montre qu'il existe des $a_i \in A$ et un entier $n \geqq 0$ tels que $f^n = \sum_{i \in I} a_i . f'_i$. Si l'on pose $m = \sum_{i \in I} a_i . m'_i$, on a

$$(1) \qquad f'_j\, m = \sum_i a_i f'_j\, m'_i = \sum_i a_i f'_i\, m'_j = f^n m'_j,$$

ce qui prouve qu'on a $m'_j / f'_j = m / f^n$ sur $T_{f'_j} \cap T_f = T_{f_j}$; mais par ailleurs on a $s = m_j / f_j = m'_j / f'_j$ sur T_{f_j}, et donc finalement, on a $s = m / f^n$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *L'application* $m \to m/1$ *est un isomorphisme de* M *sur* $\Gamma(T, \mathfrak{A}(M))$.

Si l'on fait $M = A$ dans ce qui précède, on définit une structure de faisceau de A-modules sur $\mathfrak{A}$; mais les $\mathfrak{A}_t$ sont des anneaux, et il est immédiat que le produit de deux sections de $\mathfrak{A}$ sur T_f est une section de $\mathfrak{A}$; par suite $\mathfrak{A}$ est un faisceau d'anneaux et l'on montre de même que $\mathfrak{A}(M)$ est un faisceau de $\mathfrak{A}$-modules. De plus on a $\mathfrak{A}(M) = \mathfrak{A} \otimes_A M$ (produit tensoriel de faisceaux), comme le montre immédiatement la proposition 1 et la définition des modules $\mathfrak{A}(M)_t$.

Soit $f : M \to N$ un homomorphisme de A-modules ; pour $t \in T$, nous poserons $\mathfrak{A}(f)_t = \mathbf{1}_t \otimes f$ où $\mathbf{1}_t$ est l'application identique de $\mathfrak{A}_t$. On vérifie immédiatement que $\mathfrak{A}(f)$ est un $\mathfrak{A}$-homomorphisme de $\mathfrak{A}(M)$ dans $\mathfrak{A}(N)$; d'après c, on voit alors que $\mathfrak{A}(M)$ est un *foncteur covariant exact* en M. De plus, l'application $m \to m/1$ de M sur $\Gamma(T, \mathfrak{A}(M))$ est un isomorphisme naturel ; il en résulte immédiatement que $f \to \mathfrak{A}(f)$ est une bijection de l'ensemble des A-homomorphismes de M dans N sur l'ensemble des $\mathfrak{A}$-homomorphismes de $\mathfrak{A}(M)$ dans $\mathfrak{A}(N)$.

Nous dirons qu'un faisceau de $\mathfrak{A}$-modules est *quasi cohérent* s'il est isomorphe à un faisceau du type $\mathfrak{A}(M)$.

PROPOSITION 2. — *Pour qu'un faisceau de* $\mathfrak{A}$*-modules* $\mathfrak{M}$ *soit quasi cohérent, il faut et suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes pour tout* $f \in A$:

a. Si s *est une section de* $\mathfrak{M}$ *sur* T *nulle sur* T_f, *il existe un entier* $n \geqq 0$ *tel que* $f^n . s = 0$ *sur* T ;

b. Si s *est une section de* $\mathfrak{M}$ *sur* T_f, *il existe un entier* $n \geqq 0$ *tel que* $f^n . s$ *se prolonge en une section de* $\mathfrak{M}$ *sur* T.

Si $\mathfrak{M}$ est quasi cohérent, la proposition 1 montre que $\mathfrak{M}$ satisfait aux conditions a et b. Réciproquement, supposons ces conditions satisfaites et posons $M = \Gamma(T, \mathfrak{M})$. La formule $\varphi_t(a \otimes m) = a.m_t$ définit une application $\mathcal{A}_t$-linéaire φ_t de $\mathcal{A}(M)_t$ dans $\mathfrak{M}_t$ et l'on vérifie immédiatement que les φ_t définissent un $\mathcal{A}$-homomorphisme φ de $\mathcal{A}(M)$ dans $\mathfrak{M}$.

φ *est injectif* : soit $t \in T$; tout $x \in \mathcal{A}(M)_t$ est de la forme $1/g \otimes m$ avec $g \in S_t$ et $m \in M$, d'où $\varphi_t(x) = \varepsilon_t(g)^{-1}.m_t$; si $\varphi_t(x) = 0$, on a $m_t = 0$, d'où $m \mid T_f = 0$ pour un $f \in S_t$, d'où $f^n.m = 0$ d'après a; mais d'après le lemme 3 de l'appendice, on a alors $1 \otimes m = 0$ dans $\mathcal{A}(M)_t = \mathcal{A}_t \otimes_A M$ d'où $x = 0$.

φ *est surjectif* : soit $t \in T$; pour $y \in \mathfrak{M}_t$, il existe une section s de $\mathfrak{M}$ sur T_f avec $s_t = y$ pour un $f \in A$ convenable; d'après b, il existe une section s' de $\mathfrak{M}$ sur T telle que $s' | T_f = f^n.s$, d'où $s'_t = f^n.y$ et finalement $y = \varphi_t(1/f^n \otimes s')$ (on notera que $t \in T_f$, d'où $f \in S_t$).

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant donner quelques propriétés des faisceaux quasi cohérents.

Proposition 3. — *Soit $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ un $\mathcal{A}$-homomorphisme de faisceaux quasi cohérents; alors le noyau, l'image et le conoyau de φ sont quasi cohérents.*

On peut supposer $\mathfrak{M} = \mathcal{A}(M)$, $\mathfrak{N} = \mathcal{A}(N)$, d'où $\varphi = \mathcal{A}(f)$ avec un A-homomorphisme f de M dans N. Comme le foncteur $T : P \to \mathcal{A}(P)$ est exact, il transforme respectivement noyau, image et conoyau de f en noyau, image et conoyau de φ, ce qui prouve que ces derniers faisceaux sont dans l'image du foncteur T, c'est-à-dire sont quasi cohérents.

C. Q. F. D.

Proposition 4. — *Pour tout $f \in A$, le foncteur $\mathfrak{M} \to \Gamma(T_f, \mathfrak{M})$ transforme une suite exacte de faisceaux quasi cohérents en une suite exacte de A-modules.*

D'après la proposition 3, et les propriétés générales des sections, il suffit de montrer que si $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ est surjectif, l'ensemble E des sections $\varphi \circ s$ avec $s \in \Gamma(T_f, \mathfrak{M})$ est égal à $\Gamma(T_f, \mathfrak{N})$. Or soient $s \in \Gamma(T_f, \mathfrak{M})$ et $\mathfrak{a}$ l'idéal de A composé des $a \in A$ tels que $a.s \in E$. Soit $t \in T_f$; comme φ est surjectif, il existe $u \in \mathfrak{M}_t$ avec $\varphi_t(u) = s_t$, et comme $\mathfrak{M}$ est quasi cohérent, il existe $g \in S_t$ et une section m de $\mathfrak{M}$ sur T tels que $g.u = m_t$, d'où $g.s_t = (\varphi \circ m)_t$. Comme $\mathfrak{N}$ est quasi cohérent, il existe alors $h \in S_t$ avec $h(g.s - \varphi \circ m) = 0$, d'où $(hg).s \in E$ et $t \in T_{hg}$. On a donc montré que $T_f \subset \bigcup_{g \in \mathfrak{a}} T_g$, d'où $f^n \in \mathfrak{a}$ d'après l'axiome (H_2). Mais la multiplication par f est un automorphisme de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{N}$ au-dessus de T_f, et comme $f^n.s \in E$, on a $s \in E$.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 5. — *Si un faisceau de $\mathcal{A}$-modules $\mathcal{M}$ est localement isomorphe à un faisceau quasi cohérent, il est quasi cohérent.*

Par hypothèse, on peut trouver un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de T et pour tout $i\in I$ un faisceau quasi cohérent $\mathcal{M}_i$ et un isomorphisme φ_i de $\mathcal{M}_i \mid U_i$ sur $\mathcal{M} \mid U_i$. Comme T est quasi compact et que les T_f forment une base d'ouverts sur T, on peut supposer I fini et $U_i = T_{f_i}$ avec $f_i \in A$.

Comme les $\mathcal{M}_i$ sont quasi cohérents, il résulte immédiatement de la proposition 2 que, si $f\in A$, pour toute section s de $\mathcal{M}$ sur U_i nulle sur $U_i \cap T_f$, il y a un entier $n \geqq 0$ avec $f^n.s = 0$ sur U_i, et que pour toute section s' de $\mathcal{M}$ sur $U_i \cap T_f$, il y a un entier $n' \geqq 0$ tel que $f^{n'}.s'$ se prolonge en une section de $\mathcal{M}$ sur U_i.

Soit alors $f\in A$; si $s\in \Gamma(T, \mathcal{M})$ est nulle sur T_f, elle est nulle sur $T_f \cap U_i$ pour tout $i\in I$, d'où comme I est fini, un entier $n\geqq 0$ tel que $f^n.s = 0$ sur U_i pour tout $i\in I$, d'où $f^n.s = 0$ puisque $T = \bigcup_i U_i$.

Si s' est une section de $\mathcal{M}$ sur T_f, on peut trouver $n' \geqq 0$ et des sections s_i de $\mathcal{M}$ sur U_i avec $f^{n'}.s' = s_i$ sur $U_i \cap T_f$; il en résulte $s_i = s_j$ sur

$$U_i \cap U_j \cap T_f = T_{f_i f_j} \cap T_f ;$$

comme $\mathcal{M}$ est isomorphe sur $U_i \cap U_j$ à un faisceau quasi cohérent, il existe d'après la proposition 2, un entier $n'' \geqq 0$ avec $f^{n''}.s_i = f^{n''}.s_j$ sur $U_i \cap U_j$ quels que soient $i, j \in I$. Il existe alors une section s'' de $\mathcal{M}$ sur T avec $f^{n''}.s_i = s''$ sur U_i pour tout $i\in I$, et par suite $f^{n'+n''}.s' = s''$ sur $U_i \cap T_f$ pour tout $i \in I$, donc sur T_f. La proposition 5 résulte alors immédiatement de la proposition 2.

C. Q. F. D.

Nous pouvons maintenant élucider la structure des faisceaux cohérents de $\mathcal{A}$-modules sur T.

PROPOSITION 6. — *Soit $\mathcal{M}$ un faisceau de $\mathcal{A}$-modules. Si $\mathcal{M}$ est cohérent, il est quasi cohérent et il existe une suite exacte*

$$\mathcal{A}^p \to \mathcal{A}^q \to \mathcal{M} \to 0.$$

Par définition des faisceaux cohérents, pour tout $t\in T$, il existe un voisinage U de t et une suite exacte

$$\mathcal{A}^p \mid U \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}^q \mid U \xrightarrow{\psi} \mathcal{M} \mid U \to 0,$$

On peut supposer $U = T_f$ avec $f\in A$; mais alors, en multipliant les éléments de la matrice définissant φ par f^n avec n assez grand, on peut supposer que φ est la restriction à U d'un homomorphisme φ' de $\mathcal{A}^p$ dans $\mathcal{A}^q$ (la multiplication par f est un automorphisme de $\mathcal{M} \mid U$!),

Alors, $\mathcal{M}$ est isomorphe au-dessus de U au conoyau de φ', conoyau qui est quasi cohérent d'après la proposition 3; la proposition 5 montre alors que $\mathcal{M}$ est quasi cohérent.

Soit $t \in T$; comme $\mathcal{M}$ est quasi cohérent, il est engendré par ses sections sur T, et, comme il est cohérent, le $\mathcal{A}_t$-module $\mathcal{M}_t$ est de type fini; par suite, il existe des sections $s_1, \ldots, s_n$ de $\mathcal{M}$ sur T engendrant $\mathcal{M}$ en t, donc dans un voisinage U de t d'après la proposition 1 du n° 12 de [17]. Comme T est quasi compact, il en résulte que $\mathcal{M}$ est engendré par un nombre fini de sections sur T. La proposition 6 résulte alors de la définition des faisceaux cohérents.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 7. — *Si l'anneau A est noethérien, le faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ est cohérent.*

Il suffit de montrer que, pour $f \in A$, le faisceau $\mathcal{M}$ des relations entre des sections $g_1, \ldots, g_n$ de A sur T_f est engendré par un nombre fini de sections sur T_f. D'après la proposition 1, on a $g_i = h_i/f^r$ pour $1 \leq i \leq n$, avec des h_i dans A et r entier ≥ 0; nous noterons M le sous-module de A^n formé des $(f_1, \ldots, f_n)$ tels que $\sum_i f_i . h_i = 0$; comme A est noethérien, le $\mathcal{A}$-module M est de type fini, donc engendré par un nombre fini d'éléments $m^j = (f_1^j, \ldots, f_n^j)$ pour $1 \leq j \leq p$.

Soit $x \in T_f$ et soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{M}_x$. D'après la proposition 1, on peut trouver $g \in A$ tel que $x \in T_g$ et des $f_i \in A$ pour $1 \leq i \leq n$ tels que $a_i = (f_i/g^s)_x$ avec un entier $s \geq 0$ convenable. On a alors $x \in T_{f.g}$ et la relation

$$(1) \qquad 0 = \sum_i (f_i/g^s)_x . (h_i/f^r)_x = \Big(\sum_i f_i . h_i\Big)_x / (f^r g^s)_x$$

autrement dit, la section $\sum_i f_i . h_i$ de $\mathcal{A}$ sur T est nulle en x. D'après la proposition 1, il existe alors $h \in A$ tel que h_x soit inversible dans $\mathcal{A}_x$ et que $h . \sum_i f_i . h_i = 0$; autrement dit, on a $(h.f_1, \ldots, h.f_n) \in M$ et comme $a_i = (h.f_i)_x/(h.g^s)_x$ pour $1 \leq i \leq n$, il en résulte que $(a_1, \ldots, a_n)$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathcal{A}_x$ des $(m^j)_x$ pour $1 \leq j \leq p$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Si l'anneau A est noethérien, pour que le faisceau de $\mathcal{A}$-modules $\mathcal{M}$ soit cohérent, il faut et suffit qu'il soit isomorphe à un faisceau $\mathcal{A}(M)$, où M est un A-module de type fini.*

En effet, comme $\mathcal{A}$ est cohérent, pour que $\mathcal{M}$ soit cohérent, il faut et suffit d'après la proposition 6, qu'il existe une suite exacte

$$\mathcal{A}^p \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}^q \xrightarrow{\psi} \mathcal{M} \to 0, \text{ soit } \quad \mathcal{A}(A^p) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}(A^q) \xrightarrow{\psi} \mathcal{M} \to 0.$$

Comme le foncteur $M \to \mathcal{A}(M)$ est exact, ceci signifie $\mathcal{M} = \mathcal{A}(M)$, où M est le conoyau d'un homomorphisme $A^p \xrightarrow{\alpha} A^q$, c'est-à-dire, comme A est noethérien, un A-module de type fini.

2. **Faisceau des anneaux locaux.** — La variété X sera munie de la k-topologie. On notera $\mathcal{R}_k(X)$ ou $\mathcal{R}_k$, le faisceau constant de base X et de fibre R_k; comme espace topologique, $\mathcal{R}_k$ est donc le produit de X muni de la k-topologie et de R_k muni de la topologie discrète.

On notera $\mathcal{O}_k(X)$ ou $\mathcal{O}_k$ le sous-ensemble de $\mathcal{R}_k = X \times R_k$ formé des couples (x, f) tels que $x \in D(f)$, ce qui équivaut à $f \in (\mathcal{O}_k)_x$. Comme les ensembles $D(f)$ pour $f \in R_k$ sont k-ouverts, on voit que $\mathcal{O}_k$ est ouvert dans $\mathcal{R}_k$; de plus pour tout $x \in X$, $(\mathcal{O}_k)_x$ est un sous-anneau de R_k et par suite $\mathcal{O}_k$ est un sous-faisceau d'anneaux du faisceau d'anneaux $\mathcal{R}_k$. Le faisceau $\mathcal{O}_k$ s'appelle le *faisceau des anneaux locaux de* X (sur k).

Comme X est irréductible pour la k-topologie, tout ensemble k-ouvert U de X est connexe; par suite, une section de $\mathcal{R}_k$ sur U est une application continue de l'espace connexe U dans l'espace discret R_k, donc est constante. On peut par suite identifier $\Gamma(U, \mathcal{R}_k)$ à R_k pour tout k-ouvert $U \neq \emptyset$, et ceci fait, $\Gamma(U, \mathcal{O}_k)$ est l'anneau des fonctions de R_k régulières sur U.

Supposons X affine. Si l'on note comme d'habitude X_f l'ensemble des $x \in X$ où $f \in A_k$ ne s'annule pas, l'axiome (H_1) du n° 1 est trivialement vérifié avec $T = X$ et $A = A_k$, tandis que l'axiome (H_2) n'est autre que le théorème des zéros de Hilbert; de plus, pour $x \in X$, l'ensemble des $f \in A_k$ tels que $x \in X_f$ est l'ensemble des f tels que $f(x) \neq 0$, ce qui montre que l'anneau $\mathcal{A}_x$ est égal à $(\mathcal{O}_k)_x$, et pour $a, f \in A_k$, on a $a/f \in (\mathcal{O}_k)_x$ pour tout $x \in X_f$. La proposition 1 montre alors que le faisceau $\mathcal{A}$ défini au n° 1 n'est autre que $\mathcal{O}_k$; on retrouve ainsi le fait que l'anneau des fonctions régulières sur X_f est égal à $A_k[f^{-1}]$. De plus, comme l'anneau A_k est engendré sur k par un nombre fini d'éléments, il est noethérien, et la proposition 7 montre que le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_k$ est cohérent et que les faisceaux cohérents de $\mathcal{O}_k$-modules sont les faisceaux de la forme $\mathcal{A}(M)$ où M est un A_k-module de type fini.

Revenons au cas général. Comme X admet un recouvrement par des k-ouverts affines, ce qui précède, et le caractère local de la notion de cohérence, montre que le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_k$ est cohérent. Nous dirons que le faisceau de $\mathcal{O}_k$-modules $\mathcal{M}$ est *quasi cohérent* s'il existe un recouvrement k-ouvert affine $(U_i)_{i \in I}$ tel que pour tout $i \in I$, le faisceau $\mathcal{M} \mid U_i$ soit isomorphe à un faisceau $\mathcal{A}(M_i)$ où M_i est un module sur l'anneau de fonctions de R_k régulières sur U_i. Comme un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_k$-modules est par définition localement isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $\mathcal{O}_k^p \to \mathcal{O}_k^q$ il est quasi cohérent; raisonnant comme dans la proposition 5, on voit que *pour qu'un faisceau* $\mathcal{M}$ *de* $\mathcal{O}_k$*-modules soit quasi cohérent, il faut et suffit que pour tout k-ouvert U et toute fonction* $f \in R_k$ *régulière sur U, les deux conditions suivantes soient remplies :*

a. Si une section s de $\mathcal{M}$ *sur U est nulle sur* U_f, *il y a un entier* $n \geq 0$ *tel que* $f^n.s = 0$.

b. Si s est une section de $\mathcal{M}$ *sur* U_f, *il existe un entier* $n \geq 0$ *tel que* $f^n.s$ *se prolonge en une section de* $\mathcal{M}$ *sur U.*

En particulier $\mathcal{R}_k$ est quasi cohérent. De plus, un faisceau de $\mathcal{O}_k$-modules est cohérent si et seulement s'il est quasi cohérent et de type fini.

3. **Faisceaux localement libres.** — Nous démontrerons d'abord un lemme général.

Lemme 1. — *Soient* $\mathcal{A}$ *un faisceau d'anneaux sur un espace topologique T et* $\mathcal{M}$ *un faisceau cohérent de* $\mathcal{A}$*-modules. Si pour* $t \in T$, *le* $\mathcal{A}_t$*-module* $\mathcal{M}_t$ *est libre, il existe un voisinage ouvert U de t et un entier* $n \geq 0$ *tels que* $\mathcal{M} \mid U$ *soit isomorphe à* $\mathcal{A}^n \mid U$; *en particulier le* $\mathcal{A}_{t'}$*-module* $\mathcal{M}_{t'}$ *est libre pour tout* $t' \in U$.

Soit $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une base de $\mathcal{M}_t$ sur $\mathcal{A}_t$ (on notera que puisque $\mathcal{M}$ est $\mathcal{A}$-cohérent, $\mathcal{M}_t$ est un $\mathcal{A}_t$-module de type fini). On peut trouver un voisinage ouvert U de t et des sections s_i de $\mathcal{M}$ sur U telles que $(s_i)_t = e_i$ pour $1 \leq i \leq n$. D'après la proposition 1 du n° 12 de [17], il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de t tel que les $(s_i)_{t'}$ engendrent le $\mathcal{A}_{t'}$-module $\mathcal{M}_{t'}$ pour $t \in V$ puisque les $(s_i)_t$ engendrent $\mathcal{M}_t$. Soit $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}^n \mid V$ le faisceau des relations entre les s_i; puisque les e_i sont linéairement indépendants, on a $\mathcal{R}_t = 0$ et il existe par suite un voisinage ouvert W de t contenu dans V tel que $\mathcal{R}_{t'} = 0$ pour tout $t' \in W$; en effet comme le faisceau $\mathcal{M}$ est cohérent, $\mathcal{R}$ est un faisceau de type fini, et la conclusion résulte de la référence précédente. On a donc $\mathcal{R} \mid W = 0$ d'où $\mathcal{M} \mid W \simeq \mathcal{A}^n \mid W$.

C. Q. F. D.

Proposition 8. — *Soit* $\mathcal{M}$ *un faisceau cohérent de* $\mathcal{O}_k$*-modules sur X. L'ensemble des* $x \in X$ *tels que* $\mathcal{M}_x$ *soit libre sur* $(\mathcal{O}_k)_x$ *est un k-ouvert non vide U de X; il existe un entier* $n \geq 0$ *tel que* $\mathcal{M}$ *soit localement isomorphe sur U à* $\mathcal{O}_k^n$.

D'après le lemme 1, l'ensemble U est k-ouvert et le rang n_x de $\mathcal{M}_x$ sur $(\mathcal{O}_k)_x$ pour $x \in U$ est localement constant sur U, donc constant puisque U est connexe, d'où la dernière assertion. Il reste à prouver que U est non vide. Soit $V \subset X$ un ensemble k-ouvert affine non vide et soit $B = \Gamma(V, \mathcal{O}_k)$; comme $\mathcal{M}$ est cohérent, on peut trouver un B-module de type fini N tel que $\mathcal{M} \mid V = \mathcal{A}(N)$; soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une partie linéairement indépendante maximale de N sur B et soit P le sous-module libre de N engendré par les e_i; pour tout $m \in N$, il existe $b \subset B$ non nul tel que $b.m \in P$, et comme N est de type fini, il existe $f \in B$ non nul avec $f.N \subset P$, donc f annule N/P; d'après les propriétés b et c du nº 1, on voit immédiatement que

$$\mathcal{A}(N) \mid V_f \simeq \mathcal{A}(P) \mid V_f,$$

et comme P est libre, $\mathcal{A}(P)_x$ est libre, sur $(\mathcal{O}_k)_x$ pour tout $x \in N_f$. La proposition résulte alors de ce que V_f est non vide.

C. Q. F. D.

On dira que le faisceau cohérent de $\mathcal{O}_k$-modules $\mathcal{M}$ est *localement libre* si le module $\mathcal{M}_x$ est libre de type fini sur l'anneau $(\mathcal{O}_k)_x$ pour tout $x \in X$. Alors il existe un entier $n \geqq 0$ tel que $\mathcal{M}$ soit localement isomorphe à $\mathcal{O}_k^n$.

PROPOSITION 9. — *Supposons X affine. Pour qu'un faisceau de $\mathcal{O}_k$-modules $\mathcal{M}$ soit localement libre, il faut et suffit qu'il soit cohérent et que le A_k-module $\Gamma(X, \mathcal{M})$ soit projectif.*

Tout faisceau localement libre est cohérent par définition. Supposons donc $\mathcal{M}$ cohérent et notons M le A_k-module de type fini $\Gamma(X, \mathcal{M})$, de sorte que $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathcal{A}(M)$.

Si M est projectif, alors pour tout $x \in X$, le module $\mathcal{A}(M)_x = (\mathcal{O}_k)_x \otimes_{A_k} M$ sur l'anneau local $(\mathcal{O}_k)_x$ est projectif de type fini, donc libre d'après le lemme 2 de l'Appendice.

Supposons $\mathcal{M}$ localement libre. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A_k; il existe donc un $x \in X$ tel que $\mathfrak{m}$ soit l'ensemble des $f \in A_k$ nulles en x, et l'on a $(A_k)_\mathfrak{m} = (\mathcal{O}_k)_x$; mais comme $\mathcal{M}_x$ est libre, le module $\mathcal{A}(M)_x = (A_k)_\mathfrak{m} \otimes_{A_k} M$ est libre sur $(A_k)_\mathfrak{m}$ et ceci pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A_k. Il résulte alors du lemme 5 de l'Appendice que M est projectif, car A_k est intègre.

C. Q. F. D.

4. **Faisceaux sans torsion.** — On dira qu'un faisceau de $\mathcal{O}_k$-modules $\mathcal{M}$ est *sans torsion* si le $(\mathcal{O}_k)_x$-module $\mathcal{M}_x$ est sans torsion pour tout $x \in X$. De plus, pour tout espace vectoriel V sur le corps R_k, on notera $\mathcal{V}$ le faisceau constant de base X et de fibre V. Comme tout k-ouvert U de X est connexe, toute section de $\mathcal{V}$ sur U est constante et l'on peut identifier V et $\Gamma(U, \mathcal{V})$ si $U \neq \emptyset$. Il en résulte que $\mathcal{V}$ est quasi cohérent, d'après la proposition 2.

PROPOSITION 10. — *Soit $\mathcal{M}$ un faisceau cohérent sans torsion de $\mathcal{O}_k$-modules. Il existe alors un espace vectoriel V de dimension finie sur R_k tel que $\mathcal{M}$ soit isomorphe à un sous-faisceau de $\mathcal{O}_k$-modules de V.*

Nous poserons $\mathcal{F} = \mathcal{R}_k \otimes_{\mathcal{O}_k} \mathcal{M}$; pour tout $x \in X$, l'application $(\mathcal{O}_k)_x$-linéaire $\varphi_x : m \to 1 \otimes m$ est injective car les $\mathcal{M}_x$ sont sans torsion, et les φ_x

définissent une application continue de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{F}$, car si s est une section de $\mathcal{M}$ sur un ensemble k-ouvert U, on a $\varphi \circ s = 1 \otimes s$, ce qui est une section de $\mathcal{F}$ par définition des produits tensoriels. Donc φ est un homomorphisme injectif de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{F}$, et $\mathcal{M}$ est isomorphe à un sous-faisceau de $\mathcal{F}$.

Supposons d'abord X affine. Alors $\mathcal{M}$ est isomorphe à un faisceau $\mathcal{A}(M)$ où M est un A_k-module de type fini ; mais alors $\mathcal{F}$ est isomorphe à $\mathcal{R}_k \otimes_{\mathcal{O}_k} \mathcal{A}(M) = \mathcal{R}_k \otimes_{\mathcal{O}_k} (\mathcal{O}_k \otimes_{A_k} M)$, donc isomorphe à $\mathcal{R}_k \otimes_{A_k} M$ d'après l'associativité des produits tensoriels. Dans ce cas $\mathcal{F}$ est le faisceau constant $\mathcal{V}$ avec $V = R_k \otimes_{A_k} M$, qui est un R_k-espace vectoriel de dimension finie.

Dans le cas général, ce qui précède montre que le faisceau $\mathcal{F}$ d'espaces vectoriels sur R_k est localement constant, donc constant d'après le lemme 2 du n° 36 de [17], puisque X est irréductible pour la k-topologie.

C. Q. F. D.

Nous pouvons maintenant caractériser les sous-faisceaux cohérents d'un faisceau constant $\mathcal{V}$.

Proposition 11. — *Supposons donnés un espace vectoriel V de dimension finie sur R_k, et pour tout $x \in X$, un sous-$(\mathcal{O}_k)_x$-module $\mathcal{M}_x$ de V. Pour que l'ensemble $\mathcal{M}$ somme des $\mathcal{M}_x$ pour $x \in X$ soit un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}_k$-modules de $\mathcal{V}$, il faut et suffit que pour tout $x \in X$, il existe un ensemble k-ouvert U contenant x et un nombre fini d'éléments $v_1, \ldots, v_n$ de V engendrant $\mathcal{M}_y$ sur l'anneau $(\mathcal{O}_k)_y$ pour tout $y \in U$.*

La condition est nécessaire en vertu de la définition d'un faisceau cohérent et de la constance des sections de $\mathcal{V}$.

Réciproquement, supposons cette condition vérifiée. Montrons d'abord que $\mathcal{M}$ est ouvert dans $\mathcal{V}$, donc est un sous-faisceau de $\mathcal{V}$. Soient donc $x \in X$ et $m \in \mathcal{M}_x$; on peut trouver un ensemble k-ouvert U contenant x et des éléments $v_1, \ldots, v_n$ de V tels que $\mathcal{M}_y = \sum_i (\mathcal{O}_k)_y . v_i$ pour $y \in U$. Il y a alors des éléments $f_1, \ldots, f_n$ de $(\mathcal{O}_k)_x$ tels que $m = \sum_i f_i . v_i$; mais l'ensemble $U' = \bigcap_{1 \leq i \leq n} D(f_i)$ est k-ouvert et contient x, et l'on a $f_i \in (\mathcal{O}_k)_y$ pour $y \in U'$ et $1 \leq i \leq n$, d'où $m \in \mathcal{M}_y$ pour $y \in U \cap U'$.

Ceci étant, soit $x \in X$ et soient U et les v_i comme plus haut; nous pouvons supposer U affine, puisque tout k-ouvert est réunion de k-ouverts affines. Posons $B = \Gamma(U, \mathcal{O}_k)$ et $M = \sum_i B . v_i$; alors d'après les propriétés des produits tensoriels des faisceaux, il existe un homomorphisme $\mathcal{O}_k \mid U$-linéaire φ de $\mathcal{A}(M) = \mathcal{O}_k \mid U \otimes_B M$ dans $\mathcal{V} \mid U$ et un seul tel que $\varphi_y(f \otimes m) = f.m$ pour $y \in U$, $f \in (\mathcal{O}_k)_y$ et $m \in M$. Il est clair que φ applique $\mathcal{A}(M)$ sur $\mathcal{M} \mid U$

et la propriété b du n° 1 montre immédiatement que φ est injectif. Il en résulte que $\mathcal{M} \mid U$ est cohérent d'après le corollaire de la proposition 7, donc que $\mathcal{M}$ est cohérent. C. Q. F. D.

Remarque. — En omettant les conditions de finitude des énoncés des propositions 10 et 11, on obtient des énoncés valables pour les faisceaux quasi cohérents, les démonstrations s'appliquant presque sans changement. On peut faire une remarque analogue à propos de la proposition 12.

Sur une variété affine, on a le résultat plus précis, conséquence de la proposition 7.

Proposition 12. — *Supposons X affine et soit V un espace vectoriel de dimension finie sur R_k. Alors pour tout sous-A_k-module du type fini M de V, l'ensemble $M.\mathcal{O}_k$ somme des $M.(\mathcal{O}_k)_x$ pour $x \in X$, est un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}_k$-modules de $\mathcal{V}$. L'application $M \to M.\mathcal{O}_k$ est une bijection de l'ensemble des sous-A_k-modules de type fini de V sur l'ensemble des sous-faisceaux cohérents de $\mathcal{O}_k$-modules de $\mathcal{V}$, et la bijection réciproque est $\mathcal{F} \to \Gamma(X, \mathcal{F})$.*

La première assertion résulte de la proposition 11.

Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$ est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_k$-modules, alors $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ est un A_k-module de type fini; on a $M = \bigcap_{x \in X} \mathcal{F}_x \subset V$ et $\mathcal{F}$ est engendré en tout point par ses sections, d'où $\mathcal{F}_x = M.(\mathcal{O}_k)_x$ pour tout $x \in X$, soit $\mathcal{F} = M.\mathcal{O}_k$.

Enfin, soit M un sous-A_k-module de type fini de V, soit $\mathcal{M} = M.\mathcal{O}_k$ et soit s une section de $\mathcal{M}$ sur X; soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de A_k formé des $f \in A_k$ tels que $f.s \in M$; si l'on avait $\mathfrak{a} \neq A_k$, il existerait un $x \in X$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $f \in \mathfrak{a}$; mais comme $s \in \mathcal{M}_x = M.(\mathcal{O}_k)_x$, il existe $f \in A_k$ avec $f(x) \neq 0$ et $m \in M$ tels que $s = f^{-1}.m$, ce qui est contradictoire. On a donc $1 \in \mathfrak{a}$ soit $s \in M$. C. Q. F. D.

Il nous reste à déterminer la structure des homomorphismes des faisceaux sans torsion. Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie sur R_k, $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$) un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}_k$-modules de $\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{W}$) et φ un homomorphisme de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$. Le rang de $\mathcal{M}_x$ pour $x \in X$ est localement constant d'après la proposition 11, donc constant puisque X est connexe; il en résulte qu'on peut supposer que $\mathcal{M}_x$ engendre V pour tout $x \in X$, et de même que $\mathcal{N}_x$ engendre W pour tout $x \in X$. Ceci dit, φ_x se prolonge de manière unique en une application R_k-linéaire $\overline{\varphi}_x$ de V dans W, comme on le voit facilement; on peut trouver un ensemble k-ouvert U contenant x et des éléments $v_1, \ldots, v_n$ de V tels que $\mathcal{M}_y = \sum_i (\mathcal{O}_k)_y.v_i$ pour $y \in U$; alors les v_i sont des sections de $\mathcal{M}$ sur U, de sorte que l'application $y \to \overline{\varphi}_y(v_i)$ de U dans V est continue, donc constante pour $1 \leq i \leq n$. Comme les v_i engendrent V sur R_k, on a donc $\overline{\varphi}_y = \overline{\varphi}_x$ pour $y \in U$, c'est-à-dire que l'application $x \to \overline{\varphi}_x$ de X dans $\mathcal{L}(V, W)$ est localement constante, donc constante puisque X est connexe. Il en résulte que les homomorphismes φ de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ sont en correspondance biunivoque avec les applications R_k-linéaires f de V dans W telles que $f(\mathcal{M}_x) \subset \mathcal{N}_x$ pour tout $x \in X$, φ_x étant la restriction de f à $\mathcal{M}_x$. On en déduit l'énoncé suivant :

Proposition 13. — *Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie sur R_k, et soient respectivement $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ des sous-faisceaux cohérents de $\mathcal{O}_k$-modules de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$. On suppose que $\mathcal{M}_x$* (resp. $\mathcal{N}_x$) *engendre V* (resp. W) *sur R_k pour tout $x \in X$, et l'on note $\mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_x$ l'ensemble des $f \in \mathcal{L}(V, W) = T$ telles que $f(\mathcal{M}_x) \subset \mathcal{N}_x$; alors $\mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ est un sous-faisceau de $\mathcal{O}_k$-modules de $\mathcal{T}$ canoniquement isomorphe à* **Hom**$(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ [8].

Posons $\mathcal{F} =$ **Hom**$(\mathcal{M}, \mathcal{N})$; on sait que c'est un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_k$-modules (prop. 6 du n° 14 de [17]); de plus, pour $x \in X$, un élément f de $\mathcal{F}_x$ est un germe d'homomorphisme de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ au voisinage de x; si à f, on associe l'unique application linéaire de V dans W induisant sur $\mathcal{M}_x$ la valeur de f en x, on obtient un isomorphisme ρ_x de $(\mathcal{O}_k)_x$-modules de $\mathcal{F}_x$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_x$ d'après la proposition 5 du n° 14 de [17]. Il reste à prouver que l'application ρ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{T}$ définie par les ρ_x est continue, ou ce qui revient au même transforme section en section car $\rho(\mathcal{F}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Soient donc $U \subset X$ un ensemble k-ouvert et s une section de $\mathcal{F}$ sur U; il existe un homomorphisme φ de $\mathcal{M} \mid U$ dans $\mathcal{N} \mid U$ tel que pour tout $x \in U$, s_x soit le germe en x de φ, et alors $\rho_x(s_x)$ est l'élément de T induisant φ_x sur $\mathcal{M}_x$; alors l'application $x \to \rho_x(s_x)$ de U dans T est constante d'après ce qu'on a vu plus haut, donc est une section de $\mathcal{T}$.

C. Q. F. D.

Remarques. — 1° lorsque $V = W = R_k$, T est l'ensemble des homothéties de R_k de sorte qu'on peut identifier T et R_k; alors $\mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_x$ est le transporteur $(\mathcal{N}_x : \mathcal{M}_x)$ de $\mathcal{M}_x$ dans $\mathcal{N}_x$, par définition même [9].

2° Supposons X affine, et posons $M = \Gamma(X, \mathcal{M})$, $N = \Gamma(X, \mathcal{N})$ et $P = \Gamma(X, \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N}))$. Comme $\mathcal{M} = M.\mathcal{O}_k$ et $\mathcal{N} = N.\mathcal{O}_k$, les homomorphismes de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ sont induits par les applications R_k-linéaires de V dans W qui appliquent M dans N; d'après la proposition 13, P est l'ensemble de ces applications. En particulier, si $V = W = R_k$, on a $P = (N : M)$.

5. **Extension des scalaires.** — *Soient k' un sous-corps de* $\mathbf{K}$ *contenant k,*

---

(8) On note ainsi le *faisceau* des germes d'homomorphismes de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$, dénoté par Hom$(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ dans l'article de Serre [17]; cette dernière notation sera employée pour l'*ensemble* des homomorphismes de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$.

(9) Si K est un corps et A et B deux sous-groupes additifs de K, on note $(B : A)$ le *transporteur* de A dans B, ensemble des $x \in K$ tels que $xA \subset B$.

V' un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $R_{k'}$, et V un sous-espace R_k-vectoriel de V' tel que toute base de V sur R_k soit une base de V' sur $R_{k'}$.

LEMME 2. — *Si des éléments v_α de V sont linéairement indépendants sur k, ils sont linéairement indépendants sur k'. De plus, pour tout sous-espace k-vectoriel M de V, on a $k'.M \cap V = M$.*

Soit $\{c_\beta\}$ une base de k' sur k, et soit $\{x_i\}$ une base de V sur R_k; comme les corps R_k et k' sont linéairement disjoints sur k, les c_β sont linéairement indépendants par rapport à R_k dans $R_{k'}$. Soient d_α des éléments de k' tels que $\sum_\alpha d_\alpha . v_\alpha = 0$; nous poserons

$$d_\alpha = \sum_\beta d_{\alpha\beta} . c_\beta \qquad \text{et} \qquad v_\alpha = \sum_i v_{\alpha,i} . x_i$$

avec les $d_{\alpha\beta}$ dans k et les $v_{\alpha,i}$ dans R_k. On a alors

$$(2) \qquad 0 = \sum_\alpha d_\alpha . v_\alpha = \sum_{\alpha,\beta,i} d_{\alpha\beta} . c_\beta . v_{\alpha,i} . x_i = \sum_i \left(\sum_\beta \left(\sum_\alpha d_{\alpha\beta} . v_{\alpha,i} \right) . c_\beta \right) . x_i$$

avec $d_{\alpha\beta} \in k$, $v_{\alpha,i} \in R_k$, d'où $h_{\beta,i} = \sum_\alpha d_{\alpha\beta} . v_{\alpha,i} \in R_k$; comme les x_i sont linéairement indépendants sur $R_{k'}$, on déduit de (2) qu'on a $\sum_\beta h_{\beta,i} . c_\beta = 0$ pour tout i, puis comme les c_β sont linéairement indépendants sur R_k, on en déduit $h_{\beta,i} = 0$ pour tout β et tout i, et finalement $\sum_i h_{\beta,i} x_i = 0$ pour tout β. Mais on a

$$\sum_i h_{\beta,i} . x_i = \sum_\alpha d_{\alpha\beta} . v_\alpha,$$

et comme les v_α sont linéairement indépendants sur k et que les $d_{\alpha\beta}$ sont dans k, on en déduit $d_{\alpha\beta} = 0$ pour tout α et tout β, d'où $d_\alpha = \sum_\beta d_{\alpha\beta} . c_\beta = 0$ pour tout α.

Supposons maintenant que les v_α forment une base sur k d'un sous-espace k-vectoriel M de V et soit $v \in V \cap k'.M$; si $v \notin M$, la famille formée des v_α et de v est linéairement indépendante sur k, donc sur k' d'après ce qui précède; ceci contredit le fait que v est dans $k'.M$, c'est-à-dire combinaison linéaire à coefficients dans k' des v_α.

C. Q. F. D.

LEMME 3. — *Soient* $\{c_\alpha\}$ *une base de* k' *sur* k *et* T *un sous-espace* k*-vectoriel de* V. *Tout élément de* $k'.T$ *s'écrit de manière unique sous la forme*

$$(3) \qquad t' = \sum_\alpha c_\alpha . t_\alpha, \qquad t_\alpha \in T.$$

Si de plus T *est intersection d'une famille de sous-espaces* k*-vectoriels* T_i *de* V $(i \in I)$, *on a*

$$k'.T = \bigcap_{i \in I} k'.T_i.$$

Soit $\{v_\beta\}$ une base de T sur k, donc de T' sur k' d'après le lemme 2; il est clair que les éléments de la forme (3) forment un sous-espace k'-vectoriel de V' contenu dans $k'.T$ et contenant T, donc égal à $k'.T$. Supposons qu'on ait $\sum_\alpha c_\alpha . t_\alpha = 0$ avec $t_\alpha \in T$; on a $t_\alpha = \sum_\beta x_{\alpha\beta}.v_\beta$ avec $x_{\alpha\beta} \in k$, d'où

$$0 = \sum_\beta \left(\sum_\alpha x_{\alpha\beta} . c_\alpha \right) . v_\beta,$$

ce qui implique successivement $\sum_\alpha x_{\alpha\beta} . c_\alpha = 0$ pour tout β, car les v_β sont indépendants sur k' d'après le lemme 2, puis $x_{\alpha\beta} = 0$ pour tout α et tout β puisque les c_α sont linéairement indépendants sur k, soit finalement $t_\alpha = 0$ pour tout α.

La seconde assertion résulte immédiatement de la première.

C. Q. F. D.

On notera $\mathcal{V}$ le faisceau constant de base X et de fibre V, X étant munie de la k*-topologie*, et $\mathcal{V}'$ le faisceau constant $X \times V'$, où X est munie de la k'*-topologie*. Soit alors $\mathcal{M}$ un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}_k$-modules de $\mathcal{V}$; comme tout ensemble k-ouvert est k'-ouvert, la proposition 11 montre que si $\mathcal{M}'_x$ est le sous-module de V' engendré par $\mathcal{M}_x$ sur l'anneau $(\mathcal{O}_{k'})_x$, alors l'ensemble $\mathcal{M}' = \mathcal{M}.\mathcal{O}_{k'}$ somme des $\mathcal{M}'_x$ est un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{k'}$-modules de $\mathcal{V}'$. Nous dirons que $\mathcal{M}.\mathcal{O}_{k'}$ est déduit de $\mathcal{M}$ par extension des scalaires.

Supposons X affine. On a alors $\mathcal{M} = M.\mathcal{O}_k$ où M est un sous-A_k-module de type fini de V; alors $M' = k'.M$ est le sous-$A_{k'}$-module de V' engendré par M car on a $A_{k'} = k'.A_k$ et il est immédiat qu'on a $\mathcal{M}.\mathcal{O}_{k'} = M'.\mathcal{O}_{k'}$.

PROPOSITION 14. — *Soit* $\mathcal{M}$ *un sous-faisceau cohérent de* $\mathcal{O}_k$*-modules de* $\mathcal{V}$, *et soit* $U \subset X$ *un ensemble* k*-ouvert. Alors toute base sur* k *de l'espace* k*-vectoriel* $\Gamma(U, \mathcal{M})$ *est une base sur* k' *de l'espace* k'*-vectoriel* $\Gamma(U, \mathcal{M}')$ *avec* $\mathcal{M}' = \mathcal{M}.\mathcal{O}_{k'}$. *De plus, on a* $\Gamma(U, \mathcal{M}) = V \cap \Gamma(U, \mathcal{M}')$.

Posons $M = \Gamma(X, \mathcal{M})$ et $M' = \Gamma(X, \mathcal{M}')$. Si X est affine, on a $\mathcal{M} = M.\mathcal{O}_k$ et $\mathcal{M}' = M'.\mathcal{O}_{k'}$ d'après la proposition 12; comme on a aussi $\mathcal{M}' = (k'.M).\mathcal{O}_{k'}$ d'après ce qui précède, la proposition 12 montre qu'on a $M' = k'.M$, et d'après le lemme 2, toute base de M sur k est une base de M' sur k' et l'on a $M = V \cap M'$.

Dans le cas général, soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ensembles k-ouverts affines : nous poserons $M_i = \Gamma(U_i, \mathcal{M})$ et $M'_i = \Gamma(U_i, \mathcal{M}')$ pour tout $i \in I$. On a alors

$$M = \bigcap_{i \in I} M_i \qquad \text{et} \qquad M'_i = \bigcap_{i \in I} M'_i$$

et ce qui précède montre que $M_i = k'.M_i$ pour tout $i \in I$; le lemme 3 montre alors que $M' = k'.M$, et d'après le lemme 2 on a alors $M = V \cap M'$ et toute base de M sur k est une base de M' sur k'.

C. Q. F. D.

Nous allons donner un critère général permettant de reconnaître qu'un faisceau s'obtient par extension des scalaires.

PROPOSITION 15. — *Soit $\mathcal{M}'$ un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{k'}$-modules de $\mathcal{V}'$. Pour qu'il existe un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}_k$-modules $\mathcal{M}$ de $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{M}' = \mathcal{M}.\mathcal{O}_{k'}$, il faut que pour tout ensemble k-ouvert U de X, l'espace k'-vectoriel $\Gamma(U, \mathcal{M}')$ ait une base formée d'éléments de V, et il suffit que cette condition soit satisfaite pour des k-ouverts affines U_l dont la réunion soit X. On a alors $\mathcal{M}_x = \mathcal{M}'_x \cap V$ pour tout $x \in X$.*

La condition est nécessaire d'après la proposition 14.

Réciproquement, supposons d'abord que, X étant affine, $M' = \Gamma(X, \mathcal{M}')$ ait une base sur k' formée d'éléments de V. Si l'on pose $M = V \cap M'$, M' a une base sur k' formée d'éléments de M, et par conséquent $M' = k'.M$. Comme M' est un sous-$A_{k'}$-module de V' et que A_k est contenu dans $A_{k'}$, il est clair que M est un sous-A_k-module de V, engendrant M' comme $A_{k'}$-module. Comme M' est de type fini sur $A_{k'}$, il existe un nombre fini d'éléments v_i de M tels que $M' = \sum_i A_{k'}.v_i$; or on a $A_{k'} = k'.A_k$, d'où $M' = k'.M_0$ avec $M_0 = \sum_i A_k.v_i$. D'après le lemme 2, on a alors

$$M = V \cap M' = V \cap k'.M_0 = M_0,$$

ce qui prouve que M est un A_k-module de type fini. D'après la proposition 12, le faisceau de $\mathcal{O}_k$-modules $\mathcal{M} = M.\mathcal{O}_k$ est un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{V}$, et les remarques précédant la proposition 14 montrent qu'on a $\mathcal{M}' = M'.\mathcal{O}_{k'} = \mathcal{M}.\mathcal{O}_{k'}$. Il reste à prouver qu'on a $\mathcal{M}_x = V \cap \mathcal{M}'_x$ pour tout $x \in X$. Soit $\mathfrak{p}'$ l'idéal premier de $A_{k'}$ formé des fonctions de $A_{k'}$ nulles en x

et soit $\mathfrak{p} = A_k \cap \mathfrak{p}'$; on a $(\mathcal{O}_k)_x = (A_k)_\mathfrak{p}$, $(\mathcal{O}_{k'})_x = (A_{k'})_{\mathfrak{p}'}$ et par conséquent $\mathcal{M}'_x = M'.(\mathcal{O}_{k'})_x$ se compose des $s'^{-1}.m'$ avec $s' \in A_{k'} - \mathfrak{p}'$ et $m' \in M'$ tandis que $\mathcal{M}_x$ se compose des $s^{-1}.m$ avec $s \in A_k - \mathfrak{p}$ et $m \in M$. On a donc $\mathcal{M}_x \subset \mathcal{M}'_x \cap V$; soit réciproquement $v \in \mathcal{M}'_x \cap V$ et soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de A_k formé des $f \in A_k$ tels que $f.v \in M$; soit $\{c_\alpha\}$ une base de k' sur k et soit $f' = \sum_\alpha f_\alpha . c_\alpha$ un élément de $A_{k'}$; on a alors $f'.v = \sum_\alpha c_\alpha.(f_\alpha . v)$ et par conséquent pour qu'on ait $f'.v \in M' = k'.M$, il faut et il suffit qu'on ait $f_\alpha . v \in M$ pour tout α, d'après le lemme 3, soit $f_\alpha \in \mathfrak{a}$ pour tout α. Par suite $k'.\mathfrak{a}$ est l'idéal $\mathfrak{a}'$ de $A_{k'}$ formé des $f' \in A_{k'}$ tels que $f'.v \in M'$; comme $v \in \mathcal{M}'_x$, on a $\mathfrak{a}' \not\subset \mathfrak{p}'$; comme $k'.\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$, on ne peut avoir $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ ce qui exprime que v appartient à $\mathcal{M}_x$.

Passons au cas général. Posons $\mathcal{M}_x = V \cap \mathcal{M}'_x$ et supposons que pour tout i, l'espace k'-vectoriel $\Gamma(U_i, \mathcal{M}')$ ait une base formée d'éléments de V. Ce qui précède montre que pour tout i, l'ensemble somme des $\mathcal{M}_x$ pour $x \in U_i$ est un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}_k$-modules de $\mathcal{V} \mid U_i$ et qu'on a $\mathcal{M}'_x = \mathcal{M}_x.(\mathcal{O}_{k'})_x$ pour tout $x \in U_i$. Il en résulte immédiatement que l'ensemble $\mathcal{M}$ somme des $\mathcal{M}_x$ pour $x \in X$ est un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}_k$-modules de $\mathcal{V}$, et qu'on a $\mathcal{M}' = \mathcal{M}.\mathcal{O}_{k'}$.

C. Q. F. D.

Proposition 16. — *Soit $\mathcal{M}$ un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}_k$-modules de $\mathcal{V}$ et soit $\mathcal{M}' = \mathcal{M}.\mathcal{O}_{k'}$. Pour que $\mathcal{M}$ soit localement libre sur $\mathcal{O}_k$, il faut et suffit que $\mathcal{M}'$ soit localement libre sur $\mathcal{O}_{k'}$.*

La question étant locale, on se limitera au cas où X est affine. On posera alors $M = \Gamma(X, \mathcal{M})$ et d'après la proposition 9, il s'agit de démontrer que pour que le A_k-module soit projectif, il faut et suffit que le $A_{k'}$-module $M' = k'.M$ soit projectif.

On peut écrire

$$M = \sum_{1 \leq i \leq n} (A_k).m_i, \qquad \text{d'où} \qquad M' = \sum_{1 \leq i \leq n} A_{k'}.m_i ;$$

on peut se limiter au cas où M engendre l'espace R_k-vectoriel V et où par suite, M' engendre V' sur $R_{k'}$. Comme toute base de V sur R_k est une base de V' sur $R_{k'}$, les formes R_k-linéaires sur V sont les restrictions à V des formes $R_{k'}$-linéaires f' sur V' telles que $f'(V) \subset R_k$; on notera V'^0 le dual de l'espace R_k-vectoriel V et V^0 l'ensemble des $f \in V'^0$ telles que $f(V) \subset R_k$. Il est immédiat que toute base de V^0 sur R_k est une base de V'^0 sur $R_{k'}$. De plus, nous noterons M^0 l'ensemble des $f \in V^0$ telles que $f(M) \subset A_k$ et M'^0 l'ensemble des $f' \in V'^0$ telles que $f'(M') \subset A_{k'}$; il est clair que toute forme A_k-linéaire sur M (resp. M') est la restriction d'un élément unique de M^0 (resp. M'^0).

Nous allons démontrer que $M'^0 = k'.M^0$; tout d'abord, nous allons faire voir que $M'^0 \subset k'.V^0$. En effet, comme M engendre V sur R_k, il existe une base $\{v_j\}$ de V sur R_k composée d'éléments de M; alors $\{v_j\}$ est une base de V' sur $R_{k'}$ et si $\{v'_j\}$ est la base de V'^0 sur $R_{k'}$ duale de $\{v_j\}$, c'est aussi une base de V^0 sur R_k; pour $f' \in M'^0$, on a $f'(v_j) = a_j \in A_{k'} = k'.A_k$ puisque $v_j \in M$ et $f' = \sum_j a_j . v'_j \in k'.V^0$. Si $\{c_\alpha\}$ est une base de k' sur k, tout élément de $k'.V^0$ s'écrit de manière unique sous la forme $f' = \sum_\alpha c_\alpha . f_\alpha$ avec $f_\alpha \in V^0$; pour qu'on ait $f'(M') \subset A_{k'}$, il faut et suffit qu'on ait $f'(M) \subset A_{k'}$ puisque $M' = k'.M$, c'est-à-dire $f_\alpha(m) \in A_k$ pour tout α et tout $m \in M$ puisque $A_{k'} = k'.A_k$; finalement $f' \in M^0$ équivaut à $f_\alpha \in M'^0$ pour tout α, et ceci démontre notre assertion.

D'après le n° 1, *b* de l'Appendice, dire que M' est un $A_{k'}$-module projectif signifie qu'il existe des $f'_i \in M'^0$ pour $1 \leqq i \leqq n$ tels que $m' = \sum_i f'_i(m').m_i$ pour tout $m' \in M'$; comme $M' = k'.M$, cette condition équivaut à $m = \sum_i f'_i(m).m_i$ pour tout $m \in M$. Si M est un A_k-module projectif, il existe des $f'_i \in M^0$ vérifiant cette identité, et M' est projectif sur $A_{k'}$. Si M' est projectif sur $A_{k'}$, il existe des $f'_i \in M'^0 = k'.M^0$ vérifiant cette identité; on peut alors poser $f'_i = \sum_\alpha c_\alpha . f_{i,\alpha}$ avec des $f_{i,\alpha} \in M^0$ et l'on peut de plus supposer que $1 = c_{\alpha_0}$ avec un indice α_0 particulier; on aura alors

$$0 = m - \sum_i f'_i(m).m_i = c_{\alpha_0}.\left(m - \sum_i f_{i,\alpha_0}(m).m_i\right) + \sum_{\alpha \neq \alpha_0} c_\alpha . \left(\sum_i f'_{i,\alpha}(m).m_i\right),$$

d'où

$$m = \sum_i f_{i,\alpha_0}(m).m_i$$

d'après le lemme 3; autrement dit, M est projectif sur A_k.

C. Q. F. D.

Nous allons terminer en étudiant l'influence de l'extension des scalaires sur les homomorphismes de faisceaux.

Nous supposerons donnés en plus un espace vectoriel de dimension finie W' sur $R_{k'}$ et un sous-espace R_k-vectoriel W de W' tel que toute base de W sur R_k soit une base de W' sur $R_{k'}$. Toute application R_k-linéaire de V dans W se prolonge de manière unique en une application $R_{k'}$-linéaire de V' dans W' et par suite on peut identifier $T = \mathcal{L}_{R_k}(V, W)$ à un sous-ensemble de $T' = \mathcal{L}_{R_{k'}}(V', W')$; si l'on prend une base de V et une base de W sur R_k et la base matricielle correspondante de T, on voit qu'il existe une base $\{f_\alpha\}$ de T' sur $R_{k'}$ telle que T se compose des combinaisons linéaires à coefficients dans R_k des f_α. Les faisceaux $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}'$ sont définis de manière analogue à $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$.

Proposition 17. — *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ respectivement des sous-faisceaux cohérents de $\mathcal{O}_k$-modules de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$. On suppose que $\mathcal{M}_x$ et $\mathcal{N}_x$ engendrent respectivement V et W sur R_k pour tout $x \in X$. On a alors*

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}.\mathcal{O}_{k'}, \mathcal{N}.\mathcal{O}_{k'}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N}).\mathcal{O}_{k'}.$$

La question étant locale (et même ponctuelle !), on peut se limiter au cas où X est affine. Il existe alors des sous-A_k-modules de type fini M et N de V et W respectivement tels que $\mathcal{M} = M.\mathcal{O}_k$ et $\mathcal{N} = N.\mathcal{O}_k$; si P est le sous-espace k-vectoriel de T formé des $f \in T$ telles que $f(M) \subset N$, on a $\mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = P.\mathcal{O}_k$. Si l'on pose $M' = k'.M$, $N' = k'.N$ et $P' = k'.P$, on a

$$\mathcal{M}.\mathcal{O}_{k'} = M'.\mathcal{O}_{k'}, \qquad \mathcal{N}.\mathcal{O}_{k'} = N'.\mathcal{O}_{k'}, \qquad \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N}).\mathcal{O}_{k'} = P'.\mathcal{O}_{k'}$$

tandis que si P'' est l'ensemble des $f' \in T'$ telles que $f'(M') \subset N'$, on a $\mathcal{L}(\mathcal{M}.\mathcal{O}_{k'}, \mathcal{N}.\mathcal{O}_{k'}) = P''.\mathcal{O}_{k'}$. Tout revient donc à prouver qu'on a $P'' = P'$, autrement dit $P'' = k'.P$; la démonstration est tout à fait analogue à celle de la formule $M'^0 = k'.M^0$ dans la démonstration de la proposition 16, et nous la laisserons au lecteur.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Si $H \subset T$ est l'espace k-vectoriel des homomorphismes de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ et $H' \subset T'$ l'espace k'-vectoriel des homomorphismes de $\mathcal{M}.\mathcal{O}_{k'}$ dans $\mathcal{N}.\mathcal{O}_{k'}$, toute base de H sur k est une base de H' sur k'.*

En effet, on a

$$H = \Gamma(X, \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N})) \qquad \text{et} \qquad H' = \Gamma(X, \mathcal{L}(\mathcal{M}.\mathcal{O}_{k'}, \mathcal{N}.\mathcal{O}_{k'}))$$

de sorte que le corollaire résulte de la proposition 17 et de la proposition 14.

C. Q. F. D.

Remarques. — On notera que la formule $\mathcal{M}_x = V \cap \mathcal{M}'_x$ de la proposition 15 redémontre la formule $(\mathcal{O}_k)_x = R_k \cap (\mathcal{O}_{k'})_x$ comme cas très particulier; la démonstration de la proposition 15 est d'ailleurs la démonstration la plus simple de cette dernière formule.

2° En omettant les conditions de finitude, on peut définir l'extension des scalaires pour les faisceaux quasi cohérents sans torsion. Nous laissons au lecteur le soin de cette extension, ainsi que celle des propositions 14 et 15.

CHAPITRE 4.

DIVISEURS.

NOTATIONS. — *Si A est un anneau, on note A^* le groupe multiplicatif des éléments inversibles de A. Soit $\mathfrak{A}$ un faisceau d'anneaux sur l'espace topologique T; l'ensemble somme des groupes $\mathfrak{A}_t^*$ lorsque t parcourt T, muni de la topologie induite par celle de $\mathfrak{A}$, est un faisceau de groupes, noté $\mathfrak{A}^*$.*

On désigne par X une k-variété, où k est un sous-corps du domaine universel **K**. *On omet X dans les notations $A_k(X)$, $R_k(X)$. ...; ainsi le faisceau des anneaux locaux de X se note $\mathcal{O}_k$, etc.*

1. **Définition des diviseurs.** — *Soit G une k-variété de groupe.* On note F_k l'ensemble des applications rationnelles de X dans G définies sur le corps k pour tout $x \in X$, on note $(F'_k)_x$ l'ensemble des $f \in F_k$ dont le domaine de définition contient x. Comme G est une k-variété de groupe, on définit une loi de groupe sur F_k par la formule $(f.f')(x) = f(x).f'(x)$ pour $x \in D(f) \cap D(f')$; alors, pour tout $x \in X$, $(F'_k)_x$ est un sous-groupe de F_k. On fera opérer $(F'_k)_x$ sur F_k au moyen des multiplications à gauche.

Soit $\mathcal{F}_k$ le faisceau constant de groupes $X \times F_k$, la variété X étant munie de la k-topologie; l'ensemble $\mathcal{F}'_k$ somme des $(F'_k)_x$, pour x parcourant X, est ouvert dans $\mathcal{F}_k$ puisque c'est l'ensemble des couples (x, f) avec $x \in D(f)$ et que, pour $f \in F_k$, l'ensemble $D(f)$ est k-ouvert. Par suite $\mathcal{F}'_k$ est un sous-faisceau de groupes de $\mathcal{F}_k$, opérant à gauche sur $\mathcal{F}_k$. Par définition, un *k-diviseur de type G* sur X est une section du faisceau d'espaces homogènes $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}'_k$; l'image de la section unité de $\mathcal{F}_k$ est appelée le k-diviseur *neutre*. Comme toute section d'un faisceau-quotient se remonte localement, un k-diviseur de type G, soit D, est défini par la donnée pour tout $x \in X$ d'une classe D_x de F_k modulo $(F'_k)_x$ telle qu'il existe un recouvrement k-ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X et des éléments $f_i \in F_k$ pour $i \in I$ avec $D_x = (F'_k)_x . f_i$ pour $x \in U_i$. Pour $i, j \in I$, la fonction $f_{ij} = f_i . f_j^{-1}$ est dans F_k et définie en tout point de $U_{ij} = U_i \cap U_j$ et l'on a $f_{ij} . f_{jl} = f_{il}$ pour $i, j, l \in I$. Réciproquement, si $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement k-ouvert de X et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de F_k telle que $f_i . f_j^{-1}$ soit définie en tout point de U_{ij} pour $i, j \in I$, alors la formule

$$D_x = (F'_k)_x . f_i \qquad \text{pour} \quad x \in U_i$$

définit un k-diviseur D de type G sur X. De plus, pour que $(U_i, f_i)_{i\in I}$ et $(V_j, g_j)_{j\in J}$ définissent le même k-diviseur de type G, il faut et il suffit que $f_i . g_j^{-1}$ soit définie en tout point de $U_i \cap V_j$ pour $i \in I$ et $j \in J$.

Le groupe F_k opère sur le faisceau constant $\mathcal{F}_k$ par les multiplications à droite; les opérations de F_k commutant aux opérations du sous-faisceau $\mathcal{F}'_k$, le groupe F_k opère sur le faisceau $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}'_k$ et donc aussi sur ses sections. Si D est un k-diviseur de type G et si $f \in F_k$, on a $(D.f)_x = D_x.f$ et si D est défini par la famille (U_i, f_i), alors $D.f$ est défini par $(U_i, f_i.f)$. Deux k-diviseurs D et D' de type G seront dits *équivalents* s'il existe $f \in F_k$ avec $D' = D.f$; les classes de k-diviseurs sont donc les orbites du groupe F_k dans l'ensemble des k-diviseurs de type G sur X.

Lorsque le groupe G est commutatif, le faisceau $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}'_k$ est un faisceau de groupes commutatifs et l'ensemble des k-diviseurs de type G est donc un groupe commutatif; les k-diviseurs de type G équivalant au diviseur neutre forment un sous-groupe, et l'équivalence des k-diviseurs de type G est la congruence modulo ce sous-groupe.

Revenant au cas général, nous allons interpréter ces définitions dans le langage de la cohomologie. Nous rappellerons d'abord quelques définitions; si $\mathcal{G}$ est un faisceau de groupes sur l'espace topologique T, on note $H^0(T, \mathcal{G})$ l'ensemble de ses sections sur T; pour tout recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de T, on note $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ l'ensemble des systèmes $\{g_{ij}\}$ où g_{ij} est pour $i, j \in I$ une section de $\mathcal{G}$ sur $U_i \cap U_j = U_{ij}$ et où l'on a l'identité $g_{ij}.g_{jl} = g_{il}$ dans $U_i \cap U_j \cap U_l$ quels que soient i, j, l dans I. On dit que $g = \{g_{ij}\}$ est *homologue* à $g' = \{g'_{ij}\}$ s'il existe des sections h_i de $\mathcal{G}$ sur U_i telles qu'on ait $g'_{ij} = h_i.g_{ij}.h_j^{-1}$ dans U_{ij}; c'est là une relation d'équivalence dans $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ dont l'ensemble des classes se note $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$. Soit $\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J}$ un recouvrement plus fin que $\mathfrak{U}$ et soit τ une application de J dans I telle que V_j soit contenu dans $U_{\tau(j)}$ pour tout $j \in J$; pour g dans $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$, on définit $\tau^*(g) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$ par la formule

$$(\tau^*(g))_{j,j'} = g_{\tau(j)\tau(j')} \mid V_{jj'}.$$

L'application $\rho(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ de $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ dans $H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$ déduite de τ^* par passage au quotient ne dépend pas de τ et l'on a

$$\rho(\mathfrak{U}, \mathfrak{W}) = \rho(\mathfrak{V}, \mathfrak{W}) \circ \rho(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$$

si $\mathfrak{W}$ est plus fin que $\mathfrak{V}$; on note alors $H^1(T, \mathcal{G})$ la limite inductive des ensembles $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ par rapport aux applications $\rho(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$. De plus, $H^0(T, \mathcal{G})$ et $H^1(T, \mathcal{G})$ sont des foncteurs covariants en $\mathcal{G}$.

Soit alors $\mathcal{G}'$ un sous-faisceau de groupes de $\mathcal{G}$; on démontre l'existence de la « suite exacte de cohomologie » suivante (*cf.* [9] et [10]) :

$$(1) \quad (1) \to H^0(T, \mathcal{G}') \xrightarrow{\alpha} H^0(T, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta} \mathrm{H}^0(T, \mathcal{G}/\mathcal{G}') \xrightarrow{\delta} H^1(T, \mathcal{G}') \xrightarrow{\alpha'} H^1(T, \mathcal{G}),$$

où α et α' sont définis par l'inclusion de $\mathcal{G}'$ dans $\mathcal{G}$, où β est défini par l'application canonique β de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{G}/\mathcal{G}'$ ($\mathcal{G}'$ opère *à gauche* sur $\mathcal{G}$) et où δ est définie ainsi. Si s est une section de $\mathcal{G}/\mathcal{G}'$ sur T, il existe un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)$ de T et pour tout i une section s_i de $\mathcal{G}$ sur U_i telle que $s \mid U_i = \beta \circ s_i$; si l'on définit t_{ij} comme égale à $s_i . s_j^{-1}$ sur $U_i \cap U_j$, c'est une section de $\mathcal{G}'$ et $t = \{ t_{ij} \}$ est dans $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}')$; alors $\delta(s)$ est la classe de t dans $H^1(T, \mathcal{G}')$, qui ne dépend que de s. Pour que $\delta(s) = \delta(s')$, il faut et suffit que s et s' soient conjugués par le groupe $H^0(T, \mathcal{G})$ opérant à droite sur $H^0(T, \mathcal{G}/\mathcal{G}')$ et l'image de δ se compose des éléments dont l'image par α' est l'élément neutre de $H^1(T, \mathcal{G})$, classe de l'élément $\{ e \}$ de $Z^1(\{ X \}, \mathcal{G})$ Si le faisceau $\mathcal{G}$ est commutatif, la suite (1) est une suite exacte de groupes commutatifs.

Dans le cas qui nous intéresse, on a le lemme suivant :

Lemme 1. — *Soit $\mathcal{H}$ un faisceau constant de groupes, de base X et de fibre H; alors toute section de $\mathcal{H}$ sur un sous-ensemble k-ouvert de X est constante et $H^1(X, \mathcal{H})$ est réduit à l'élément neutre.*

Comme X est irréductible pour la k-topologie, il en est de même de toute partie k-ouverte U de X, qui est donc en particulier connexe. Une section de $\mathcal{H}$ sur U est une application continue de l'espace connexe U dans l'espace discret H, donc est constante.

Soient $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement k-ouvert de X et $s = \{ s_{ij} \}$ un élément de $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H})$; on peut supposer I et les U_i non vides. Comme X est irréductible, on a $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$ pour $i, j \in I$. Si h_{ij} est la valeur constante de s_{ij} sur U_{ij}, on a $h_{ij} . h_{jl} = h_{il}$ pour $i, j, l \in I$, d'où $h_{ij} = h_{io} . h_{jo}^{-1}$ pour $o \in I$ fixé; si t_i est la section constante de $\mathcal{H}$ dans U_i de valeur h_{io}, on aura alors $s_{ij} = t_i . t_j^{-1}$ dans U_{ij} ce qui prouve que s est homologue à l'élément $\{ e \}$ de $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H})$.

C. Q. F. D.

Ce lemme et la suite exacte (1) démontrent immédiatement l'exactitude de la suite suivante :

$$(2) \qquad (1) \rightarrow F'_k \rightarrow F_k \xrightarrow{\beta} H^0(X, \mathcal{F}_k/\mathcal{F}'_k) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}'_k) \rightarrow (1),$$

ce qui permet d'identifier par δ l'ensemble des classes de k-diviseurs de type G à $H^1(X, \mathcal{F}'_k)$.

2. Diviseurs et faisceaux cohérents. — Lorsque G est le groupe multiplicatif à une variable G_m, un k-diviseur de type G sera appelé simplement un *k-diviseur*. Dans ce cas, le groupe F_k est le groupe multiplicatif R_k^* du corps R_k et l'on a $(F'_k)_x = (\mathcal{O}_k^*)_x$ pour $x \in X$. Le groupe commutatif des k-diviseurs sera noté $\mathbf{D}_k(X)$ ou $\mathbf{D}_k$; pour f dans R_k^*, on notera (f) le k-diviseur défini par $(f)_x = f . (\mathcal{O}_k^*)_x$ pour tout $x \in X$; on notera $\mathbf{P}_k(X)$ ou $\mathbf{P}_k$ l'image de l'homomorphisme $f \rightarrow (f)$ de R_k^* dans $\mathbf{D}_k$ et l'on posera $\mathbf{C}_k = \mathbf{D}_k/\mathbf{P}_k$; un élément de $\mathbf{C}_k$ s'appellera une *classe* de k-diviseurs; la congruence modulo $\mathbf{P}_k$ dans $\mathbf{D}_k$ sera notée $\underset{k}{\sim}$. Enfin, lorsque $k = \mathbf{K}$, on omet k dans les notations, comme d'habitude.

Mais lorsque $G = G_m$, nous avons la notion supplémentaire de positivité d'un k-diviseur. Le k-diviseur D sera dit *positif en* $x \in X$ si $D_x \subset (\mathcal{O}_k)_x$ et il sera dit *positif sur* X s'il est positif en tout point de X. La relation « $D - D'$ est positif sur X », qui se notera $D \succ D'$, est alors une relation d'ordre sur $\mathbf{D}_k$, compatible avec sa structure de groupe. Soit $f \in R_k^*$; dire que (f) est positif en x signifie que f est régulière en x, et par suite $(f) \succ 0$ équivaut à $f \in A_k$. Les k-diviseurs positifs sont donc ceux qui peuvent se définir par une famille (U_i, f_i) où, pour tout i, la fonction f_i est régulière sur U_i; de plus $(f) = 0$ signifie que f appartient à A_k^*, donc, si X est complète, que f est une constante non nulle.

Soit D un k-diviseur. Nous noterons $\mathcal{L}_k(D)$ le sous-ensemble de $\mathcal{R}_k = X \times R_k$ formé des couples (x, f) tels que $f = 0$ ou $(f) + D$ soit positif en x. Si D est défini par une famille (U_i, f_i), on a $\mathcal{L}_k(D)_x = f_i^{-1}.(\mathcal{O}_k)_x$ pour tout $x \in U_i$ et pour tout i; ceci prouve que $\mathcal{L}_k(D)$ est un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}_k$-modules de $\mathcal{R}_k$, localement isomorphe à $\mathcal{O}_k$. Comme toute section de $\mathcal{R}_k$ est constante d'après le lemme 1, pour tout k-ouvert U de X l'ensemble $\Gamma(U, \mathcal{L}_k(D))$ se compose des fonctions f de R_k telles que $f = 0$ ou que $(f) + D$ soit positif en tout point de U; on posera $L_k(D) = \Gamma(X, \mathcal{L}_k(D))$; c'est là un espace vectoriel sur k, qui est de dimension finie si X est complète, d'après la proposition 14 du chapitre 3 et le théorème 4 de [11]. Pour $x \in X$, on a $\mathcal{L}_k(D)_x = g^{-1}.(\mathcal{O}_k)_x$ quelle que soit $g \in D_x$; on en déduit que si D' est un k-diviseur, les relations $D \succ D'$ et $\mathcal{L}_k(D) \supset \mathcal{L}_k(D')$ sont équivalentes.

Nous allons maintenant démontrer deux théorèmes de structure pour les faisceaux.

PROPOSITION 1. — *L'application $D \to \mathcal{L}_k(D)$ est une bijection de l'ensemble des k-diviseurs sur l'ensemble des sous-faisceaux de $\mathcal{O}_k$-modules de $\mathcal{R}_k$, localement isomorphes à $\mathcal{O}_k$.*

Si D est un k-diviseur, pour tout $x \in X$, l'ensemble D_x se compose des fonctions $g \in R_k^*$ telles que $\mathcal{L}_k(D)_x = g^{-1}.(\mathcal{O}_k)_x$, et par suite, l'application $D \to \mathcal{L}_k(D)$ est injective.

Soit maintenant $\mathcal{F}$ un sous-faisceau de $\mathcal{O}_k$-modules de $\mathcal{R}_k$, localement isomorphe à $\mathcal{O}_k$. Pour tout $x \in X$, le module $\mathcal{F}_x$ sur l'anneau $(\mathcal{O}_k)_x$ est monogène et l'ensemble de ses générateurs est une classe D'_x de R_k^* modulo $(\mathcal{O}_k^*)_x$. Comme $\mathcal{F}$ est localement isomorphe à $\mathcal{O}_k$, il existe un recouvrement k-ouvert (U_i) de X et des fonctions f_i de R_k^* tels que $\mathcal{F}_x = f_i.(\mathcal{O}_k)_x$ pour $x \in U_i$ et tout i; ceci montre que les D'_x constituent un k-diviseur D' associé à la famille (U_i, f_i) et il est immédiat qu'on a $\mathcal{F} = \mathcal{L}_k(-D')$.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2. — *Tout faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_k$-modules, localement isomorphe à $\mathcal{O}_k$, est isomorphe à un faisceau $\mathcal{L}_k(D)$.*

Le faisceau $\mathcal{F}$ est sans torsion de rang 1 ; la proposition 10 du chapitre 3 montre que $\mathcal{F}$ est isomorphe à un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}_k$-modules de $\mathcal{V}$ où V est un espace vectoriel de dimension 1 sur R_k ; on peut prendre $V = R_k$, d'où $\mathcal{V} = \mathcal{R}_k$ et la proposition 2 résulte alors de la proposition 1.

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant étudier le comportement des faisceaux du type $\mathcal{L}_k(D)$ par rapport aux principales opérations sur les faisceaux.

PROPOSITION 3. — *Soient D et D' deux k-diviseurs. Les faisceaux de $\mathcal{O}_k$-modules $\mathcal{L}_k(\mathrm{D}) \otimes_{\mathcal{O}_k} \mathcal{L}_k(D')$ et $\mathcal{L}_k(D+D')$ sont alors isomorphes.*

Posons $\mathcal{F} = \mathcal{L}_k(D)$, $\mathcal{F}' = \mathcal{L}_k(D')$ et $\mathcal{G} = \mathcal{L}_k(D+D')$; il est immédiat que $\mathcal{F}_x . \mathcal{F}'_x = \mathcal{G}_x$ pour tout $x \in X$, et comme les modules $\mathcal{F}_x$, $\mathcal{F}'_x$ et $\mathcal{G}_x$ sont monogènes et libres, l'application φ_x de $\mathcal{F}_x \otimes_{(\mathcal{O}_k)_x} \mathcal{F}'_x$ dans $\mathcal{G}_x$ définie par $\varphi_x(f \otimes g) = f.g$ est un isomorphisme de modules sur l'anneau $(\mathcal{O}_k)_x$. Soit φ l'application de $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_k} \mathcal{F}'$ dans $\mathcal{G}$ induisant φ_x en chaque point x de X. Pour prouver que φ est un isomorphisme, il suffit de prouver que φ est continue ou encore, que si s est une section de $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_k} \mathcal{F}'$ sur un k-ouvert U de X, alors $\varphi \circ s$ est une section de $\mathcal{G}$ sur U. Or, par définition des produits tensoriels de faisceaux, s est localement de la forme $\sum_i s_i \otimes s'_i$, et par suite $\varphi \circ s$ est localement de la forme $\sum_i s_i . s'_i$, donc est une section de $\mathcal{G}$ sur U, puisque la multiplication dans $\mathcal{R}_k$ est continue.

C. Q. F. D.

PROPOSITION 4. — *Soient D et D' deux k-diviseurs. Alors le faisceau* $\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_k}(\mathcal{L}_k(D), \mathcal{L}_k(D'))$ *est isomorphe à $\mathcal{L}_k(D'-D)$.*

D'après la proposition 13 du chapitre 3, il suffit de prouver que

$$\mathcal{L}_k(D'-D)_x = (\mathcal{L}_k(D')_x : \mathcal{L}_k(D)_x),$$

ce qui résulte de la forme des générateurs des idéaux principaux fractionnaires en question.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. — *Les $\mathcal{O}_k$-homomorphismes de $\mathcal{L}_k(D)$ dans $\mathcal{L}_k(D')$ sont les multiplications par les fonctions de $L_k(D'-D)$.*

COROLLAIRE 2. — *Pour que les faisceaux de $\mathcal{O}_k$-modules $\mathcal{L}_k(D)$ et $\mathcal{L}_k(D')$ soient isomorphes, il faut et il suffit qu'on ait $D \underset{k}{\sim} D'$.*

En effet, d'après le corollaire 1, un $\mathcal{O}_k$-isomorphisme de $\mathcal{L}_k(D)$ sur $\mathcal{L}_k(D')$

est la multiplication par une fonction non nulle de $L_k(D'-D)$ dont l'inverse est dans $L_k(D-D')$, i. e. une fonction f telle que $(f)=D-D'$.

C. Q. F. D.

Remarque. — Les résultats précédents montrent qu'il existe un isomorphisme du groupe $\mathbf{C}_k$ des classes de k-diviseurs sur X, sur le groupe des classes de faisceaux de $\mathcal{O}_k$-modules, localement isomorphes à $\mathcal{O}_k$; on rappelle qu'une classe de faisceaux se compose de tous les faisceaux isomorphes à un faisceau donné, et que la composition est définie par le produit tensoriel; comme $\mathcal{L}_k(0)=\mathcal{O}_k$, la classe de $\mathcal{O}_k$ est élément neutre.

Il nous reste à classifier les diviseurs sur une variété affine

Proposition 5. — *Supposons la k-variété X affine. Alors l'application $D\to L_k(D)$ est un isomorphisme du groupe $\mathbf{D}_k$ des k-diviseurs sur le groupe multiplicatif des idéaux fractionnaires inversibles de l'anneau A_k.*

D'après les propositions 9 et 12 du chapitre 3 et la proposition 1 ci-dessus, l'application $D\to L_k(D)=\Gamma(X, \mathcal{L}_k(D))$ est une bijection de $\mathbf{D}_k$ sur l'ensemble des sous-A_k-modules projectifs de type fini de R_k, c'est-à-dire de l'ensemble des idéaux fractionnaires inversibles de A_k d'après le lemme 6 de l'Appendice.

Enfin, si $I=L_k(D)$ et $I'=L_k(D')$, on a

$$\mathcal{L}_k(D)=I.\mathcal{O}_k \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_k(D')=I'.\mathcal{O}_k,$$

de sorte que $\mathcal{L}_k(D+D')_x=\mathcal{L}_k(D)_x.\mathcal{L}_k(D')_x=I.I'.(\mathcal{O}_k)_x$ pour tout $x\in X$ et donc $I.I'=L_k(D+D')$ d'après la proposition 12 du chapitre 3; ceci montre que l'application bijective $D\to L_k(D)$ est un homomorphisme de groupes.

C. Q. F. D.

Remarque. — Si $f\in R_k^*$, le diviseur (f) correspond à l'idéal fractionnaire principal $f^{-1}.A_k$; de plus, les diviseurs positifs correspondent aux idéaux inversibles contenant A_k.

3. **Extension des scalaires. Conjugués.** — *Soit k' un sous-corps de* $\mathbf{K}$ *contenant k.* Nous nous proposons d'associer un k'-diviseur à tout k-diviseur. Nous démontrerons ensuite quelques critères généraux de rationalité pour les diviseurs.

Soit D un k-diviseur; comme le faisceau de $\mathcal{O}_k$-modules $\mathcal{L}_k(D)$ est localement libre, le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{k'}$-modules $\mathcal{L}_k(D).\mathcal{O}_{k'}$ de $\mathcal{R}_{k'}$ est localement libre d'après la proposition 16 du chapitre 3, et la proposition 1 montre qu'il existe un unique k'-diviseur $D'=\gamma_{k'/k}(D)$ tel que

$$\mathcal{L}_{k'}(D')=\mathcal{L}_k(D).\mathcal{O}_{k'}.$$

L'application $\gamma_{k'/k}$ de $\mathbf{D}_k$ dans $\mathbf{D}_{k'}$ a les propriétés suivantes :

a. Soient x dans X et ρ_x l'application canonique de $R_k^*/(\mathcal{O}_k^*)_x$ dans $R_{k'}^*/(\mathcal{O}_{k'}^*)_x$; alors, on a $D'_x = \rho_x(D_x)$: en effet, pour $f \in D_x$, on a

$$\mathcal{L}_k(D)_x = f^{-1}.(\mathcal{O}_k)_x,$$

d'où $\mathcal{L}_{k'}(D')_x = f^{-1}.(\mathcal{O}_{k'})_x$ et donc $f \in D'_x$, d'où finalement $D_x \subset D'_x$, ce qui prouve notre assertion.

b. $\gamma_{k'/k}$ est un isomorphisme de groupe : cela résulte de *a*.

c. Pour $x \in X$, on a $\mathcal{L}_k(D)_x = R_k \cap \mathcal{L}_{k'}(D')_x$: cela résulte de la proposition 15 du chapitre 3; on en déduit que $\gamma_{k'/k}$ est injective, et que les relations $D \succ 0$ et $D' \succ 0$ sont équivalentes.

d. Si $D = (f)$ avec $f \in R_k^*$, on a $D' = (f)$: trivial.

e. Toute base de $L_k(D)$ sur k est une base de $L_{k'}(D')$ sur k' : cela résulte de la proposition 14 du chapitre 3. On en déduit :

f. Supposons X affine. Si le k-diviseur D est associé à l'idéal fractionnaire inversible I de A_k, le k'-diviseur D' est associé à l'idéal fractionnaire $k'.I$ de $A_{k'}$.

g. Si k'' est un sous-corps de $\mathbf{K}$ contenant k', on a $\gamma_{k''/k} = \gamma_{k''/k'} \circ \gamma_{k'/k}$: trivial.

D'après *d*, l'homomorphisme $\gamma_{k'/k}$ applique $\mathbf{P}_k$ dans $\mathbf{P}_{k'}$, et définit donc par passage au quotient un homomorphisme, noté encore $\gamma_{k'/k}$, de $\mathbf{C}_k$ dans $\mathbf{C}_{k'}$. Nous dirons qu'*un élément de $\mathbf{D}_{k'}$ ou de $\mathbf{C}_{k'}$ est rationnel sur k s'il appartient à l'image de $\gamma_{k'/k}$*.

Soit D' un k'-diviseur quelconque; on voit immédiatement que pour que D' soit rationnel sur k, il faut et suffit que pour tout $x \in X$, il existe un ensemble k-ouvert U contenant X et une fonction $f \in R_k^*$ tels que $D'_y = (f)_y$ pour tout $y \in U$. Par suite, la notion de k'-diviseur rationnel sur k est *locale par rapport à la k-topologie*. De plus, cette formulation montre que si D' est rationnel sur k, il est rationnel sur tout sous-corps de k' contenant k. Enfin, pour qu'une classe de k'-diviseurs soit rationnelle sur k, il faut et suffit qu'elle contienne un k'-diviseur rationnel sur k.

Nous allons maintenant donner un critère général de rationalité sur k.

Proposition 6. — *Soit D' un k'-diviseur sur X. Pour que D' soit rationnel sur k, il faut que pour tout sous-ensemble k-ouvert U de X, l'espace k'-vectoriel $\Gamma(U, \mathcal{L}_{k'}(D'))$ ait une base formée d'éléments de R_k, et il suffit qu'il en soit ainsi pour des k-ouverts affines dont la réunion soit X.*

D'après la proposition 15 du chapitre 3, les conditions énoncées signifient qu'il existe un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}_k$-modules $\mathcal{F}$ de $\mathcal{R}_k$, tel que $\mathcal{L}_{k'}(D') = \mathcal{F}.\mathcal{O}_{k'}$. Mais comme le faisceau $\mathcal{L}_{k'}(D')$ est localement libre sur $\mathcal{O}_{k'}$, il en est de même de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{O}_k$ d'après la proposition 16 du chapitre 3; en sorte qu'il existe un k-diviseur D tel que $\mathcal{F} = \mathcal{L}_k(D)$ et la formule

$$\mathcal{L}_{k'}(D') = \mathcal{L}_k(D).\mathcal{O}_{k'}$$

signifie alors $D' = \gamma_{k'/k}(D)$.

C. Q. F. D.

Nous ajouterons deux résultats subsidiaires.

PROPOSITION 7. — *Si une classe C' de k'-diviseurs est rationnelle sur k et contient un k'-diviseur positif, elle contient un k'-diviseur positif rationnel sur k.*

Il existe un k-diviseur D tel que $D' = \gamma_{k'/k}(D)$ appartienne à C'. Les éléments positifs de C' sont les k'-diviseurs de la forme $D' + (f')$ avec $f' \in L_{k'}(D')$. D'après l'hypothèse faite, on a donc $L_{k'}(D') \neq (0)$, d'où $L_k(D) \neq (0)$ d'après e ci-dessus ; si $f \in L_k(D)$ est non nulle, alors $E' = D' + (f)$ est positif puisque $f \in L_{k'}(D')$ et il est rationnel sur k puisque D' est rationnel sur k et que $f \in R_k^*$. C. Q. F. D.

PROPOSITION 8. — *Si toute fonction régulière sur X est constante (en particulier, si X est complète), l'homomorphisme $\gamma_{k'/k}$ de $\mathbf{C}_k$ dans $\mathbf{C}_{k'}$ est injectif.*

Il suffit de montrer que si $D \in \mathbf{D}_k$ est tel que $D' = \gamma_{k'/k}(D)$ soit dans $\mathbf{P}_{k'}$, alors D est dans $\mathbf{P}_k$. Or si $D' \in \mathbf{P}_{k'}$, on peut trouver $f' \in R_{k'}^*$ telle que $D' + (f') = 0$. L'hypothèse sur X exprime que $L_{k'}(0) = k'$, soit $f'^{-1}.L_{k'}(D') = k'$ et finalement on a $L_{k'}(D') = k'.f$; mais d'après e, on pourra trouver $f \in L_k(D)$ et $\lambda \in k'$ tels que $f' = \lambda.f$. On aura alors $(f') = (f)$ puisque le diviseur de toute fonction constante est nul, et donc $D' = -(f) = (f^{-1})$, d'où aussi $D = (f^{-1}) \in \mathbf{P}_k$ puisque l'application $\gamma_{k'/k}$ de $\mathbf{D}_k$ dans $\mathbf{D}_{k'}$ est injective.

C. Q. F. D.

Nous terminerons ce numéro par la définition des conjugués d'un diviseur.

Soit σ un k-isomorphisme de k' sur un sous-corps k'' de $\mathbf{K}$ contenant k. Pour $f \in R_{k'}$, on a $f^\sigma \in R_{k''}$ et si U est k'-ouvert, alors U^σ est k''-ouvert ; de plus, si f est régulière sur U, alors f^σ est régulière sur U^σ. De ceci résulte l'existence d'une application $\bar{\sigma} : D' \rightarrow D'^\sigma$ de $\mathbf{D}_{k'}$ dans $\mathbf{D}_{k''}$ caractérisée par le fait que si D' est défini par la famille (U_i, f_i), alors D'^σ est défini par la famille (U_i^σ, f_i^σ). Il est clair que $\bar{\sigma}$ est un isomorphisme de $\mathbf{D}_{k'}$ sur $\mathbf{D}_{k''}$, que $(f)^\sigma = (f^\sigma)$ pour $f \in R_{k'}^*$, que les relations $D' \succ 0$ et $D'^\sigma \succ 0$ sont équivalentes, que D' est rationnel sur un sous-corps k_1 de k' contenant k si et seulement si D'^σ est rationnel sur k_1^σ, et enfin que si σ' est un k-isomorphisme de k'' sur k''', on a $\overline{(\sigma' \circ \sigma)} = \bar{\sigma}' \circ \bar{\sigma}$. Comme $\bar{\sigma}$ applique $\mathbf{P}_{k'}$ sur $\mathbf{P}_{k''}$, elle définit par passage au quotient un isomorphisme, noté encore $\bar{\sigma}$, de $\mathbf{C}_{k'}$ sur $\mathbf{C}_{k''}$. De plus, les propriétés précédentes impliquent la formule $L_{k''}(D'^\sigma) = L_{k'}(D')^\sigma$; en particulier, si X est affine et si D' est associé à l'idéal fractionnaire I' de $A_{k'}$, alors D'^{σ} est associé à l'idéal fractionnaire I'^{σ} de $A_{k''} = A^{\sigma}_{k'}$.

4. Quelques lemmes d'Algèbre linéaire. — Ces lemmes nous serviront dans les prochains numéros à établir les critères de rationalité pour les diviseurs.

Soient K' un corps, K un sous-corps de K', V' un espace vectoriel sur le corps K' et V un sous-espace K-vectoriel de V'; on suppose qu'il existe une base de V sur K qui est en même temps une base de V' sur K'.

Toute base de V sur K jouit alors de la même propriété. Si L est un sous-corps de K' contenant K, nous noterons V_L le sous-espace L-vectoriel de V' engendré par V; il existe alors une base de V_L sur L, qui est en même temps une base de V' sur K', par exemple une base de V sur K.

Soit $\{v_i\}$ une base de V sur K, donc de V' sur K'; pour toute application K-linéaire φ de K' dans K', on définit l'application $\tilde{\varphi}$ de V' dans V' par la formule

$$\tilde{\varphi}\left(\sum_i \xi_i . v_i\right) = \sum_i \varphi(\xi_i) . v_i \qquad (\xi_i \in K'). \tag{3}$$

On vérifie immédiatement que $\tilde{\varphi}$ est la seule application additive de V' dans lui-même qui vérifie la condition

$$\tilde{\varphi}(\xi . v) = \varphi(\xi) . v \qquad (\xi \in K',\ v \in V), \tag{4}$$

ce qui implique qu'elle ne dépend pas de la base $\{v_i\}$.

On notera $\mathfrak{E}$ l'ensemble des applications K-linéaires de K' dans K'.

Lemme 2. — *Soit $\mathfrak{M}$ une partie de $\mathfrak{E}$ et soit L l'ensemble des $\eta \in K'$ tels que $\varphi(\xi . \eta) = \varphi(\xi) . \eta$ pour tout $\varphi \in \mathfrak{M}$ et tout $\xi \in K'$. Alors L est un sous-corps de K' et V_L est l'ensemble des $v' \in V'$ tels qu'on ait*

$$\tilde{\varphi}(\xi . v') = \varphi(\xi) . v' \tag{5}$$

quels que soient $\varphi \in \mathfrak{M}$ et $\xi \in K'$.

Il est immédiat que L est un sous-corps de K'.

Soit $\{v_i\}$ une base de V sur K; c'est donc une base de V_L sur L et de V' sur K'. Si $v' = \sum_i \xi_i . v_i$, on a

$$\tilde{\varphi}(\xi . v') - \varphi(\xi) . v' = \sum_i \{\varphi(\xi . \xi_i) - \varphi(\xi) . \xi_i\} . v_i$$

pour $\varphi \in \mathfrak{M}$ et $\xi \in K'$, et par suite, la relation (5) équivaut à l'ensemble des relations $\varphi(\xi.\xi_i) = \varphi(\xi).\xi_i$ lorsque i varie. Par suite, pour que v' vérifie (5) pour tout $\varphi \in \mathfrak{M}$ et tout $\xi \in K'$, il faut et suffit qu'on ait $\xi_i \in L$ pour tout i, soit $v' \in V_L$. C. Q. F. D.

LEMME 3. — *Si $\mathfrak{M}$ et L sont comme dans le lemme 2, pour qu'un sous-espace K'-vectoriel W' de V' admette une base formée d'éléments de V_L, il faut et suffit qu'on ait $\tilde{\varphi}(W') \subset W'$ pour tout $\varphi \in \mathfrak{M}$.*

Pour $\xi \in K'$ et $v \in V_L \cap W'$, on a $\tilde{\varphi}(\xi.v) = \varphi(\xi).v$ d'après le lemme 2, d'où $\tilde{\varphi}(\xi.v) \in W'$. Par suite, si W' est engendré, comme espace K'-vectoriel, par des éléments de V_L, il est stable par $\tilde{\varphi}$ pour tout $\varphi \in \mathfrak{M}$.

Soit $\{v_i\}_{i \in I}$ une base de V sur K, donc de V' sur K'. Il existe une partie J de I telle que V' soit somme directe de W' et du sous-espace K'-vectoriel V'_1 engendré par les v_i pour $i \in J$. Mais V' est somme directe de V'_1 et du sous-espace K'-vectoriel V'_2 engendré par les v_i pour $i \in I - J$; par suite, il existe un K'-isomorphisme P de V'_2 sur W' défini par la condition $P(v') \equiv v'$ modulo V'_1 pour $v' \in V'_2$.

Supposons qu'on ait $\tilde{\varphi}(W') \subset W'$ pour tout $\varphi \in \mathfrak{M}$; comme V'_1 et V'_2 sont engendrés sur K' par des éléments de $V \subset V_L$, ils sont stables par les opérateurs $\tilde{\varphi}$, et il en résulte immédiatement que P commute à ces $\tilde{\varphi}$. Posons $w_i = P(v_i)$ pour $i \in I - J$ de sorte que $\{w_i\}$ est une base de W' sur K', puisque $\{v_i\}_{i \in I-J}$ est une base de V'_2 sur K'. De plus, pour $\xi \in K'$ et $\varphi \in \mathfrak{M}$, on a

$$\tilde{\varphi}(\xi.w_i) = \tilde{\varphi}(P(\xi.v_i)) = P(\tilde{\varphi}(\xi.v_i)) = P(\varphi(\xi).v_i) = \varphi(\xi).w_i.$$

et par conséquent on a $w_i \in V_L$ par le lemme 2.

C. Q. F. D.

LEMME 4. — *Soit W' un sous-espace K'-vectoriel de V'. L'ensemble des sous-corps L de K' contenant K et tels que W' ait une base sur K' formée d'éléments de V_L admet un plus petit élément L_0. De plus, pour $\varphi \in \mathfrak{E}$, les relations $\tilde{\varphi}(W') \subset W'$ et « φ est linéaire sur L_0 » sont équivalentes.*

Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des $\varphi \in \mathfrak{E}$ telles que $\tilde{\varphi}(W') \subset W'$ et soit L_0 le sous-corps attaché à $\mathfrak{M}$ comme dans le lemme 2. Toute application $\varphi \in \mathfrak{M}$ est alors linéaire sur L_0 et d'après le lemme 3, W' admet une base formée d'éléments de V_{L_0}. Par suite, toujours d'après le lemme 3, si $\varphi \in \mathfrak{E}$ est linéaire sur L_0, on a $\tilde{\varphi}(W') \subset W'$, d'où $\varphi \in \mathfrak{M}$.

Il reste à prouver que, si L est un sous-corps de K' contenant K et si W' admet une base sur K' formée d'éléments de V_L, alors on a $L \supset L_0$. D'après le lemme 3, si $\varphi \in \mathfrak{E}$ est L-linéaire, on a $\tilde{\varphi}(W') \subset W'$, d'où $\varphi \in \mathfrak{M}$ et φ est linéaire sur L_0; or on peut choisir pour φ un projecteur L-linéaire de K' sur L; pour $\xi \in L_0$, on aura alors $\xi = \xi.\varphi(1) = \varphi(\xi.1) = \varphi(\xi) \in L$ puisque φ est linéaire sur L_0, et donc $L_0 \subset L$. C. Q. F. D.

5. **Normalisation des diviseurs.** — *Soit k' un sous-corps de* **K** *contenant k.*

PROPOSITION 9. — *Soit D' un k'-diviseur* positif *sur X. Alors l'ensemble des sous-corps de k' contenant k et sur lesquels D' est rationnel contient un plus petit élément k_1. Si σ est un k-automorphisme de k', pour que $D'^{\sigma} = D'$, il faut et suffit que σ induise l'identité sur k_1.*

Soit k'' un sous-corps de k' contenant k. Pour tout ensemble k-ouvert affine U de X, posons

$$B'(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_{k'}), \qquad B(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_k) = R_k \cap B'(U)$$

et

$$I'(U) = \Gamma(U, \mathcal{L}_{k'}(-\mathrm{D}')).$$

Comme D' est positif, on a $I'(U) \subset B'(U)$; comme U est k-ouvert, toute base de $B(U)$ sur k est une base de $B''(U) = B'(U) \cap R_{k''}$ sur k'' et une base de $B'(U)$ sur k'. D'après le lemme 4, il existe un sous-corps k_U de k' contenant k et tel que les relations $k'' \supset k_U$ et « $I'(U)$ admet une base sur k' formée d'éléments de $R_{k''}$ » soient équivalentes. D'après la proposition 6, pour que D' soit rationnel sur k'', il faut et suffit qu'on ait $k'' \supset k_U$ pour tout k-ouvert affine U, c'est-à-dire que k'' contienne le composé k_1 des corps k_U.

Soit σ un k-automorphisme de k'. Si U est k-ouvert affine, on a $U^{\sigma} = U$ et pour $f \in B(U)$ et $\xi \in k'$, on a $(\xi . f)^{\sigma} = \xi^{\sigma} . f$, d'où $B'(U)^{\sigma} \subset B'(U)$ et $\tilde{\sigma}(g) = g^{\sigma}$ pour $g \in B'(U)$ avec les notations du n° 4. Pour qu'on ait $D'^{\sigma} = D'$, il faut et suffit qu'on ait $\mathcal{L}_{k'}(D'^{\sigma}) = \mathcal{L}_{k'}(D')$, c'est-à-dire $\Gamma(U, \mathcal{L}_{k'}(D'^{\sigma})) = \Gamma(U, \mathcal{L}_{k'}(D'))$ pour tout ensemble k-ouvert affine U d'après la proposition 12 du chapitre 3. De la formule générale

$$\Gamma(U^{\sigma}, \mathcal{L}_{k'}(D'^{\sigma})) = \Gamma(U, \mathcal{L}_{k'}(D'))^{\sigma}$$

on déduit que $D'^{\sigma} = D'$ équivaut à « $I'(U)^{\sigma} = I'(U)$ pour tout ensemble k-ouvert affine U ». D'après le lemme 4, cette dernière condition signifie que σ est k_U-linéaire pour tout U, c'est-à-dire k_1-linéaire, soit encore que σ induit l'identité sur k_1. C. Q. F. D.

REMARQUES. — *a*. Si tous les points de X sont simples, on peut montrer que la proposition 9 est valable pour tout diviseur, positif ou non.

b. Si k' est algébrique sur k, toute base de R_k sur k est une base de $R_{k''}$ sur k'' et de $R_{k'}$ sur k'. La démonstration précédente s'applique alors avec très peu de modifications au cas d'un diviseur non nécessairement positif.

Nous nous intéressons maintenant aux *classes* de k'-diviseurs. Nous supposons que X possède un point x rationnel sur k, nous noterons $\mathfrak{o}$ l'anneau local $(\mathcal{O}_k)_x$ et $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}$; comme x est rationnel sur k, pour toute $f \in \mathfrak{o}$, on a $f(x) \in k$, d'où $\mathfrak{o} = k + \mathfrak{m}$. Il existe dans l'anneau $\mathfrak{o}$ une suite strictement décroissante d'idéaux $\mathfrak{a}_n$ pour $n \geqq 0$ telle que $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{o}$ et qu'il n'y ait aucun idéal de $\mathfrak{o}$ compris strictement entre $\mathfrak{a}_n$ et $\mathfrak{a}_{n+1}$: comme $\mathfrak{o}$ est noethérien, on construit en effet une telle suite par récurrence sur n en prenant pour $\mathfrak{a}_{n+1}$ un élément maximal de l'ensemble des idéaux de $\mathfrak{o}$ strictement contenus dans $\mathfrak{a}_n$ [on a $\mathfrak{a}_n \neq (0)$ pour tout $n \geqq 0$, sinon l'anneau $\mathfrak{o}$ serait de longueur finie, ce qui est absurde puisque la suite des idéaux $\mathfrak{m}^r$ est strictement décroissante dans l'anneau intègre $\mathfrak{o}$]. Comme $\mathfrak{o}$ est noethérien, le $\mathfrak{o}$-module $\mathfrak{a}_n$ est de type fini et le lemme 1 de l'Appendice montre qu'on a $\mathfrak{a}_n \neq \mathfrak{m}.\mathfrak{a}_n + \mathfrak{a}_{n+1}$; d'après la construction des $\mathfrak{a}_n$, on a donc $\mathfrak{m}.\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_{n+1}$ et comme $\mathfrak{o} = \mathfrak{m} + k$ et que le $\mathfrak{o}$-module $\mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_{n+1}$ est simple, il s'ensuit que $\mathfrak{a}_{n+1}$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{a}_n$, sur k. De plus, de l'inclusion $\mathfrak{m}.\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_{n+1}$, on déduit $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{a}_n$ par récurrence sur n ; inversement, comme $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}^r$ est de longueur finie et que la suite des idéaux $\mathfrak{a}_n$ est strictement décroissante, toute puissance de $\mathfrak{m}$ contient l'un des $\mathfrak{a}_n$. Du théorème de Krull : $\bigcap_{n \geqq 0} \mathfrak{m}^n = (0)$ résulte alors que l'intersection des $\mathfrak{a}_n$ est réduite à (0).

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_k$-modules, soit $\mathcal{A}_n$, tel que $(\mathcal{A}_n)_y = (\mathcal{O}_k)_y$ pour $y \neq x$ et $(\mathcal{A}_n)_x = \mathfrak{a}_n$. Soit U un ensemble k-ouvert affine contenant x et soit B l'algèbre des fonctions de R_k régulières sur U ; nous poserons $\mathfrak{b}_n = B \cap \mathfrak{a}_n$ et $\mathfrak{p} = B \cap \mathfrak{m}$; d'après la proposition **11** du chapitre **3** il suffit de prouver qu'on a $\mathfrak{b}_n.(\mathcal{O}_k)_y = (\mathcal{O}_k)_y$ pour $y \in U$ différent de x et $\mathfrak{b}_n.(\mathcal{O}_k)_x = \mathfrak{a}_n$. Si $y \in U$ est différent de x, on a $(\mathcal{O}_k)_y = B_\mathfrak{q}$ où l'idéal premier $\mathfrak{q}$ de B est distinct de $\mathfrak{p}$: si $f \in \mathfrak{p}$, mais $f \notin \mathfrak{q}$, on a alors $f^n \in \mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{a}_n$, d'où $f^n \in \mathfrak{b}_n = B \cap \mathfrak{a}_n$, mais $f^n \notin \mathfrak{q}$ et par suite f^n est inversible dans $B_\mathfrak{q}$ et l'on a $\mathfrak{b}_n.B_\mathfrak{q} = B_\mathfrak{q}$. Par ailleurs, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{o}$, on a $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}.(B \cap \mathfrak{a})$ puisque $\mathfrak{o} = B_\mathfrak{p}$; en particulier, on a $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}.\mathfrak{b}_n$, et ceci achève de démontrer notre assertion.

Enfin, pour terminer ces préliminaires, nous allons déterminer le faisceau de $\mathcal{O}_{k'}$-modules $\mathcal{A}'_n = \mathcal{O}_{k'}.\mathcal{A}_n$. Pour $y \neq x$, on a visiblement $(\mathcal{A}'_n)_y = (\mathcal{O}_{k'})_y$ et $(\mathcal{A}'_n)_x$ est l'idéal $\mathfrak{o}'.\mathfrak{a}_n = \mathfrak{o}'.\mathfrak{b}_n$ de l'anneau $\mathfrak{o}' = (\mathcal{O}_{k'})_x$. Conservons les notations précédentes. Comme $\mathfrak{b}_n \neq \mathfrak{b}_{n+1} = \mathfrak{b}_n \cap \mathfrak{a}_{n+1}$ et que $\mathfrak{b}_n$ est contenu dans $\mathfrak{a}_n$, il est clair que $\mathfrak{b}_n/\mathfrak{b}_{n+1}$ est de dimension 1 sur k puisqu'il en est ainsi de $\mathfrak{a}_n/\mathfrak{a}_{n+1}$; si par ailleurs, on pose $B' = \Gamma(U, \mathcal{O}_{k'})$, toute base de B sur k est une base de B' sur k', et si l'on pose $\mathfrak{b}'_n = \mathrm{B}'.\mathfrak{b}_n = k'.\mathfrak{b}_n$, il est immédiat que $\mathfrak{b}'_n/\mathfrak{b}'_{n+1}$ est de dimension 1 sur k'. Ceci prouve qu'il n'existe aucun idéal de B' compris strictement entre $\mathfrak{b}'_n$ et $\mathfrak{b}'_{n+1}$. Or, comme x est rationnel sur k et que $\mathfrak{p}$ est l'idéal des fonctions de B nulles en x, on a $B = k + \mathfrak{p}$, d'où $B' = k' + \mathfrak{p}'$ si l'on pose $\mathfrak{p}' = B'.\mathfrak{p} = k'.\mathfrak{p}$; ceci prouve que $\mathfrak{p}'$ est l'idéal des fonctions de B' nulles en x, et par suite, on a $\mathfrak{o}' = B'_{\mathfrak{p}'}$. Or, pour tout $n \geqq 0$ on a $\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{b}'_n \supset \mathfrak{p}'^n$; il en résulte que $\mathfrak{b}'_n$ est primaire pour $\mathfrak{p}'$ puisque l'idéal premier $\mathfrak{p}'$ est maximal, d'où $\mathfrak{b}'_n = B' \cap \mathfrak{b}'_n.B'_{\mathfrak{p}'}$ et finalement $\mathfrak{b}'_n = B' \cap \mathfrak{a}'_n$. On en conclut $\mathfrak{a}'_n \neq \mathfrak{a}'_{n+1}$; mais par ailleurs, l'application $\mathfrak{a}' \to B' \cap \mathfrak{a}'$ est injective sur l'ensemble des idéaux de $\mathfrak{o}'$ puisque $\mathfrak{o}' = B'_{\mathfrak{p}'}$ et il n'y a donc aucun idéal de $\mathfrak{o}'$ compris strictement entre $\mathfrak{a}'_n$ et $\mathfrak{a}'_{n+1}$. Raisonnant comme plus haut, en remplaçant $\mathfrak{o}$ par $\mathfrak{o}'$ et $\mathfrak{a}_n$ par $\mathfrak{a}'_n$, on voit alors que $\mathfrak{a}'_{n+1}$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{a}'_n$ (par rapport au corps k') et que $\bigcap_{n\geqq 0} \mathfrak{a}'_n = (0)$.

Nous pouvons maintenant décrire le procédé de « normalisation » des diviseurs dans une classe de diviseurs.

Proposition 10. — *On suppose que X est complète et possède un point x rationnel sur k; les faisceaux $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{A}'_n$ sont construits comme plus haut. Soit C' une classe de k'-diviseurs contenant un k'-diviseur positif et pour tout $n \geqq 0$, soit C'_n l'ensemble des $D' \in C'$ tels que $\mathcal{L}_{k'}(-D') \subset \mathcal{A}'_n$. Il existe alors un entier $n_1 \geqq 0$ tel que $C'_{n_1+1} = \emptyset$ et que C'_{n_1} se réduise à un élément E'. De plus, si k'' est un sous-corps de k' contenant k, pour que C' soit rationnelle sur k'', il faut et suffit que E' soit rationnel sur k''.*

Comme $\mathcal{A}'_0 = \mathcal{O}_{k'}$, on voit que C'_0 se compose de l'ensemble des k'-diviseurs positifs de C', ensemble qui est non vide par hypothèse. Par ailleurs, si $D'_1 \in C'$, on voit que C'_0 se compose des k'-diviseurs de la forme $D'_1 + (f')$ où f' parcourt l'ensemble des éléments non nuls de $L' = L_{k'}(D'_1)$; de plus, C'_n se compose des k'-diviseurs $D' \in C'_0$ tels que $\mathcal{L}_{k'}(-D')_x \subset \mathfrak{a}'_n$ puisque $\mathcal{A}'_n$ et $\mathcal{O}_{k'}$ sont égaux en dehors de x. Si l'on choisit un élément g' de $(D'_1)_x$, alors pour $D' = D'_1 + (f')$, il est clair que $\mathcal{L}_{k'}(-D')_x$ est l'idéal fractionnaire principal $f'g'.\mathfrak{o}'$ de $\mathfrak{o}'$. Par suite C'_n se compose des k'-diviseurs $D'_1 + (f')$ avec $f' \in L' \cap U'_n$ non nulle, où l'on a posé $U'_n = g'^{-1}.\mathfrak{a}'_n$. Comme X est complète, L' est de dimension finie sur k', et d'après ce qu'on a vu, la suite des U'_n est décroissante, d'intersection nulle et U'_n/U'_{n+1} est de dimension 1 sur k'. Il en résulte l'existence d'un entier $n_1 \geqq 0$ tel que $L' \cap U'_{n_1+1} = (0)$ et que $L' \cap U'_{n_1}$ soit de dimension 1 sur k'; il est alors immédiat que C'_{n_1+1} est vide et que C'_{n_1} se réduit à un seul élément E'.

Si E' est rationnel sur k'', la classe C' de E' est rationnelle sur k'' par définition. Réciproquement, supposons C' rationnelle sur k''. Soit $D'' \in C''$ rationnel sur k'' et soit H'_n l'ensemble des $f' \in R_{k'}$ telles que $f'.\mathcal{L}_{k'}(D'') \subset \mathcal{A}'_n$; or, comme on a $\mathcal{L}_{k'}(D'') = \mathcal{O}_{k'}.\mathcal{L}_{k''}(D'')$ et $\mathcal{A}'_n = \mathcal{O}_{k'}.\mathcal{A}''_n$ (on a posé $\mathcal{A}''_n = \mathcal{O}_{k''}.\mathcal{A}_n$), il résulte du corollaire de la proposition 17 du chapitre 3 que H'_n a une base formée d'éléments de $R_{k''}$. En particulier, il existe une fonction non nulle f'' de $R_{k''}$ dans H'_{n_1}; or, par définition même, C'_n se compose des k'-diviseurs $D'' + (h)$ où h parcourt H'_n, et par suite, on a $E' = D'' + (f'')$ puisque C'_{n_1} se compose du seul élément E', ce qui prouve que E' est rationnel sur k''.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Supposons que X soit complète et admette un point rationnel sur k. Alors, si une classe de k'-diviseurs C' contient un élément positif, il existe un plus petit élément k_1 dans l'ensemble des sous-corps de k' contenant k et sur lesquels C' soit rationnelle. De plus, si σ est un*

k-automorphisme de k', pour que $C'^{\sigma} = C'$, il faut et suffit que σ induise l'identité sur k_1.

La première assertion résulte des propositions 9 et 10.

Soit σ un k-automorphisme de k'. Supposons d'abord que σ induise l'identité sur k_1; comme le k'-diviseur $E' \in C'$ défini dans la proposition 10 est rationnel sur k_1 puisque C' est rationnelle sur k_1, on a $E'^{\sigma} = E'$, d'où $C'^{\sigma} = C'$. Réciproquement, supposons qu'on ait $C'^{\sigma} = C'$; soit n un entier $\geqq 0$ et soit $D' \in C'_n$; par définition de C'_n, on a $\Gamma(U, \mathcal{L}_{k'}(-D')) \subset \Gamma(U, \mathfrak{A}'_n)$ pour tout k-ouvert affine U de X, mais comme $\mathfrak{A}'_n = \mathcal{O}_{k'} . \mathfrak{A}_n$, il résulte de la proposition 14 du chapitre 3 que $\Gamma(U, \mathfrak{A}'_n)$ admet une base formée d'éléments de R_k, d'où $\Gamma(U, \mathfrak{A}'_n)^{\sigma} = \Gamma(U, \mathfrak{A}'_n)$. On en déduit la formule

$$\Gamma(U, \mathcal{L}_{k'}(-D'^{\sigma})) = \Gamma(U, \mathcal{L}_{k'}(-D'))^{\sigma} \subset \Gamma(U, \mathfrak{A}'_n)$$

pour tout k-ouvert affine U, d'où $\mathcal{L}_{k'}(-D'^{\sigma}) \subset \mathfrak{A}'_n$; autrement dit, on a $D'^{\sigma} \in C'_n$. Appliquant ceci avec $n = n_1$ et tenant compte de $C'_{n_1} = \{E'\}$, on voit donc que $E'^{\sigma} = E'$ et comme k_1 est le plus petit corps de rationalité de E', la proposition 9 montre que σ induit l'identité sur k_1.

C. Q. F. D.

Remarque. — Soit D' un k'-diviseur. Il est associé à une famille $(U_i, f_i)_{i \in I}$ et l'on peut supposer I fini. Par suite, il existe un sous-corps k'' de k' contenant k, extension *finie* de k, tel que les U_i soient k''-ouverts et $f_i \in R_{k''}$ pour tout i; alors D' est rationnel sur k'', ce qui montre que le plus petit corps de rationalité d'un k'-diviseur est une extension de type fini de k.

6. Critères de rationalité : I. Cas galoisien. — *Soit k' un sous-corps de* $\mathbf{K}$, *extension galoisienne* (finie ou non) *de k et soit G le groupe de Galois de k' sur k.*

Proposition 11. — *Soit D' un k'-diviseur. Pour que D' soit rationnel sur k, il faut et suffit qu'on ait $D'^{\sigma} = D'$ pour tout $\sigma \in G$.*

Si D' est rationnel sur k, il est associé à une famille (U_i, f_i) telle que U_i soit k-ouvert et f_i appartienne à R_k pour tout i; on a alors $U_i^{\sigma} = U_i$ et $f_i^{\sigma} = f_i$ pour tout i; d'où $D'^{\sigma} = D'$ pour tout $\sigma \in G$.

Supposons maintenant qu'on ait $D'^{\sigma} = D'$ pour tout $\sigma \in G$. Soit k_1 le plus petit corps contenu dans k' et contenant k sur lequel D' soit rationnel. La proposition 9 montre alors que tout $\sigma \in G$ induit l'identité sur k_1 et par conséquent, on a $k_1 = k$ par la théorie de Galois.

C. Q. F. D.

Proposition 12. — *Soit C' une classe de k'-diviseurs. Si X est complète et possède un point x rationnel sur k, pour que C' soit rationnelle sur k, il faut et suffit qu'on ait $C'^{\sigma} = C'$ pour tout $\sigma \in G$.*

Si C' est rationnelle sur k, elle contient un diviseur D' rationnel sur k; on a alors $D'^{\sigma} = D'$, d'où $C'^{\sigma} = C'$ pour tout $\sigma \in G$.

Réciproquement, supposons qu'on ait $C'^{\sigma} = C'$ pour tout $\sigma \in G$. D'après la remarque terminant le numéro précédent, la classe C' est rationnelle sur une extension galoisienne finie k'_1 de k; on peut donc supposer $[k' : k]$ fini. Nous ferons d'abord quelques remarques :

a. σ applique $(\mathcal{O}_{k'})_x = \mathfrak{o}'$ dans lui-même, et pour tout $f' \in \mathfrak{o}'$, on a $f'^{\sigma}(x) = f'(x)^{\sigma}$: soit U un ensemble k-ouvert affine contenant x et soit B l'algèbre des fonctions de R_k régulières sur U; si $\mathfrak{p}$ est l'idéal des fonctions de B nulles en x, on a $\mathfrak{o} = (\mathcal{O}_k)_x = B_{\mathfrak{p}}$, et comme x est rationnel sur k, on a $B = k + \mathfrak{p}$. Toute base de B sur k est une base sur k' de l'anneau B' des fonctions de $R_{k'}$ régulières sur U; par suite, si $\mathfrak{p}' = B'.\mathfrak{p} = k'.\mathfrak{p}$, on a $B' = k' + \mathfrak{p}'$, ce qui prouve que $\mathfrak{p}'$ est l'idéal des fonctions de B' nulles en x et que $\mathfrak{o}' = B'_{\mathfrak{p}'}$. On a évidemment $B'^{\sigma} = B'$ puisque $B' = k'.B$, et $\mathfrak{p}'^{\sigma} = \mathfrak{p}'$ puisque $\mathfrak{p}' = k'.\mathfrak{p}$; on en déduit $\mathfrak{o}'^{\sigma} = \mathfrak{o}'$. Comme tout élément de $\mathfrak{o}'$ est quotient de deux éléments de B', il suffit de démontrer la formule $f'^{\sigma}(x) = f'(x)^{\sigma}$ pour $f' \in B' = k' + \mathfrak{p}'$; mais cette formule est évidente pour $f' \in k'$ ou $f' \in \mathfrak{p}'$.

b. Il existe $D' \in C'$ tel que $(D')_x = 0$: en effet si $D'_1 \in C'$ et si $f' \in (D'_1)_x$, il suffit de poser $D' = D'_1 - (f')$.

c. Si $(D')_x = 0$ et si $\sigma \in G$, on a $(D'^{\sigma})_x = 0$: en effet, il existe un ensemble k'-ouvert U' contenant x et f' dans $R_{k'}$ tels que $(D')_y = (f')_y$ pour $y \in U'$; par définition de D'^{σ}, on a alors $(D'^{\sigma})_z = (f'^{\sigma})_z$ pour $z \in U'^{\sigma}$; mais comme x est rationnel sur k, on a $x \in U'^{\sigma}$, d'où $(D'^{\sigma})_x = (f'^{\sigma})_x$, et comme $(D')_x = 0$, on a $f' \in (\mathcal{O}^*_{k'})_x$, d'où $f'^{\sigma} \in (\mathcal{O}^*_{k'})_x$ d'après a et finalement $(D'^{\sigma})_x = 0$.

Ces remarques étant faites, choisissons un k'-diviseur $D' \in C'$ tel que $(D')_x = 0$; comme $C'^{\sigma} = C'$ pour tout $\sigma \in G$, on peut trouver des fonctions f_{σ} de $R_{k'}$ telles que $D'^{\sigma} = D' + (f_{\sigma})$ pour tout $\sigma \in G$. Mais comme $(D')_x = (D'^{\sigma})_x = 0$, la fonction f_{σ} est régulière et inversible en x; remplaçant f_{σ} par $f_{\sigma}/f_{\sigma}(x)$, ce qui ne change pas le diviseur de f_{σ}, on se ramène donc au cas où $f_{\sigma}(x) = 1$. Pour $\sigma, \tau \in G$, nous définissons $c_{\sigma,\tau} \in R^*_{k'}$ par la formule $f_{\sigma\tau} = (f_{\tau})^{\sigma}.f_{\sigma}.c_{\sigma,\tau}$; d'après l'identité

$$(D'^{\sigma\tau} - D') = (D'^{\tau} - D')^{\sigma} + (D'^{\sigma} - D')$$

et la définition de f_{σ}, on a alors $(c_{\sigma,\tau}) = 0$, et comme X est complète, $c_{\sigma,\tau}$ est une constante. Mais on a $f_{\sigma}(x) = 1$ pour tout $\sigma \in G$ et d'après la remarque a précédente, on a donc $c_{\sigma,\tau}(x) = 1$; autrement dit, on a $c_{\sigma,\tau} = 1$, soit $f_{\sigma\tau} = (f_{\tau})^{\sigma}.f_{\sigma}$. D'après un théorème bien connu de la théorie de Galois ([10]),

([10]) Rappelons brièvement la démonstration de ce résultat; d'après le théorème de Dedekind (*cf.* th. 3, § 7, chap. V de [5]), comme les f_{σ} ne sont pas tous nuls, il existe il existe alors $g \in R^*_{k'}$ avec $f_\sigma = g^\sigma/g$ pour tout $\sigma \in G$. Si l'on pose $D = D' - (g)$, on a alors $D \in C'$ et $D^\sigma = D$ pour tout $\sigma \in G$ et la proposition **11** montre que D est rationnel sur k, ce qui prouve que C' est rationnelle sur k.

C. Q. F. D.

Remarques. — *a.* Lorsque la classe C' contient un élément positif, la proposition **12** résulte de la proposition **10**. Mais, même si C' ne contient pas de k'-diviseur positif, la proposition **12** démontre l'existence d'un plus petit corps de rationalité pour C', à savoir l'ensemble des invariants des $\sigma \in G$ pour lesquels $C'^\sigma = C'$.

b. Dans la démonstration de la proposition **12**, l'hypothèse que X est complète sert seulement à assurer que toute fonction régulière sur X est constante. Même remarque pour la proposition **14** plus loin.

7. Critères de rationalité. II. Cas inséparable. — *On suppose* $\mathbf{K}$ *de caractéristique* $p \neq 0$. *Soit* k' *un sous-corps de* $\mathbf{K}$ *contenant* k; *on suppose* $[k' : k]$ *fini et* $k'^p \subset k$. *On note* $\mathfrak{g}$ *la p-algèbre de Lie des k-dérivations de* k'.

Nous démontrerons d'abord quelques lemmes.

LEMME 5. — *Pour tout* $\partial \in \mathfrak{g}$, *il existe une dérivation de* $R_{k'}$ *sur* R_k *et une seule, notée* $\tilde{\partial}$, *prolongeant* ∂; *pour* ∂, $\partial' \in \mathfrak{g}$, *on a les formules*

$$\widetilde{[\partial, \partial']} = [\tilde{\partial}, \tilde{\partial}'], \qquad \widetilde{(\partial^p)} = (\tilde{\partial})^p \tag{6}$$

et pour qu'un sous-espace k'*-vectoriel* V' *de* $R_{k'}$ *ait une base formée d'éléments de* R_k, *il faut et suffit qu'on ait* $\tilde{\partial}(V') \subset V'$ *pour tout* $\partial \in \mathfrak{g}$.

Les corps R_k et k' sont linéairement disjoints sur k et engendrent $R_{k'}$; comme $[k' : k]$ est fini, toute base de R_k sur k est une base de $R_{k'}$ sur k', et toute base de k' sur k est une base de $R_{k'}$ sur R_k. Soit alors $\partial \in \mathfrak{g}$ et soit $\tilde{\partial}$ l'unique application R_k-linéaire de $R_{k'}$ dans lui-même prolongeant ∂; pour $x, y \in R_{k'}$, posons

$$f(x, y) = \tilde{\partial}(x.y) - x.\tilde{\partial}(y) - \tilde{\partial}(x).y.$$

---

g' non nulle dans $R_{k'}$ telle que $\sum_\tau f_\tau . g'^\tau \neq 0$; si l'on pose $g'' = \sum_\tau f_\tau . g'^\tau$, on aura :

$$f_\sigma . g''^\sigma = f_\sigma . \Big(\sum_\tau f_\tau . g'^\tau\Big)^\sigma = \sum_\tau f_\sigma . (f_\tau)^\sigma . g'^{\sigma\tau} = \sum_\tau f_{\sigma\tau} . g'^{\sigma\tau} = g''$$

d'après l'identité $f_{\sigma\tau} = (f_\tau)^\sigma . f_\sigma$; il suffit alors de poser $g = 1/g''$.

On a $f(x, y) = 0$ pour $x, y \in k'$ puisque ∂ est une dérivation de k', et $f(x, y)$ est linéaire en x et y par rapport au corps R_k; il en résulte $f = 0$, autrement dit que $\tilde{\partial}$ est une dérivation de $R_{k'}$ sur R_k.

Comme les dérivations $\widetilde{[\partial, \partial']}$ et $[\tilde{\partial}, \tilde{\partial}']$ de $R_{k'}$ sur R_k induisent toutes deux $[\partial, \partial']$ sur k', elles sont égales d'après la première partie de la démonstration. On démontre de même la deuxième formule (6).

Enfin, pour $\nu \in R_k$ et $\xi \in k'$, on a $\tilde{\partial}(\xi.\nu) = \partial(\xi).\nu$ pour tout $\partial \in \mathfrak{g}$; de plus, si $\eta \in k'$ est tel qu'on ait $\partial(\xi.\eta) = \partial(\xi).\eta$ pour tout $\partial \in \mathfrak{g}$ et tout $\xi \in k'$, on a $\partial(\eta) = 0$ en faisant $\xi = 1$, d'où $\eta \in k$ d'après la proposition **4** du chapitre **2**. La seconde assertion du lemme **5** résulte alors du lemme **3**.

C. Q. F. D.

Lemme 6. — *Soient $x \in X$ et $\partial \in \mathfrak{g}$; alors $\tilde{\partial}$ applique $\mathfrak{o}' = (\mathcal{O}_{k'})_x$ dans lui-même. Si de plus, x est rationnel sur k, on a*

$$(\tilde{\partial}(f'))(x) = \partial(f'(x)) \tag{7}$$

pour tout $f' \in \mathfrak{o}'$.

Soit U' un voisinage k'-ouvert de x; comme k' est purement inséparable sur k, U' est k-ouvert, et par suite $\Gamma(U', \mathcal{O}_{k'})$ admet une base formée d'éléments de R_k, donc est stable par $\tilde{\partial}$. Mais, par définition d'un faisceau, l'anneau $\mathfrak{o}'$ est réunion des $\Gamma(U', \mathcal{O}_{k'})$ pour U' parcourant l'ensemble des k'-ouverts de X contenant x, et l'on a donc $\tilde{\partial}(\mathfrak{o}') \subset \mathfrak{o}'$.

Soit $f' \in \mathfrak{o}'$; comme $\mathfrak{o}'$ est stable par $\tilde{\partial}$ pour tout $\tilde{\partial} \in \mathfrak{g}$, le lemme **5** montre qu'on a $f' = \sum_\alpha c_\alpha . f_\alpha$ avec $c_\alpha \in k'$ et $f_\alpha \in \mathfrak{o} = (\mathcal{O}_k)_x$, mais comme x est rationnel sur k, on a $f(x) \in k$ pour tout $f \in \mathfrak{o}$, d'où

$$(\tilde{\partial}(f'))(x) = \sum_\alpha \partial(c_\alpha).f_\alpha(x) = \partial\left(\sum_\alpha c_\alpha . f_\alpha(x)\right) = \partial(f'(x)).$$

C. Q. F. D.

D'après le lemme 6, l'application $\tilde{\partial}$ de $R_{k'}$ dans lui-même définit un endomorphisme $\tilde{\partial}$ du faisceau de groupes abéliens $\mathcal{R}_{k'}$, qui applique $\mathcal{O}_{k'}$ dans lui-même. L'application $\tilde{\partial}^* : f' \to \tilde{\partial}(f')/f'$ est un homomorphisme du groupe multiplicatif $R^*_{k'}$ dans le groupe additif $R_{k'}$. Le lemme **6** montre que l'homomorphisme de faisceaux de $\mathcal{R}^*_{k'}$ dans $\mathcal{R}_{k'}$ défini par $\tilde{\partial}^*$ applique $\mathcal{O}^*_k$ dans $\mathcal{O}_{k'}$ et définit donc par passage au quotient un homomorphisme du faisceau $\mathcal{R}^*_{k'}/\mathcal{O}^*_{k'}$ dans le faisceau $\mathcal{R}_{k'}/\mathcal{O}_{k'}$; ces trois homomorphismes seront notés ∂^*. Par passage à la cohomologie, on en déduit le diagramme commutatif suivant, dont les deux lignes horizontales sont exactes d'après le n° 1.

$$(\star)\qquad \begin{array}{ccccccccccccc} (1) & \to & A^*_{k'} & \to & R^*_{k'} & \xrightarrow{\beta^*} & \mathbf{D}_{k'} & \xrightarrow{\quad\delta^*\quad} & H^1(X, \mathcal{O}^*_{k'}) & \to & (0) \\ & & \downarrow{\scriptstyle\tilde\partial^*} & & \downarrow{\scriptstyle\tilde\partial^*} & & \downarrow{\scriptstyle\partial^*_1} & & \downarrow{\scriptstyle\partial^*_2} & & \\ (0) & \to & A_{k'} & \to & R_{k'} & \xrightarrow{\beta} & H^0(X, \mathcal{R}_{k'}/\mathcal{O}_{k'}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathcal{O}_{k'}) & \to & (0) \end{array}$$

Nous allons expliciter les noyaux de ∂^*_1 et de ∂^*_2.

Lemme 7. — *Soient D' un k'-diviseur et $\partial \in \mathfrak{g}$. Pour qu'on ait $\partial^*_1(D') = 0$, il faut et suffit que l'endomorphisme $\tilde\partial$ de $\mathcal{R}_{k'}$ applique $\mathcal{L}_{k'}(D')$ dans lui-même.*

Soient $x \in X$ et $f' \in (D')_x$; nous poserons $E = \partial^*_1(D')$. On a alors $E_x = \tilde\partial(f')/f' + (\mathcal{O}_{k'})_x$; par suite, si l'on pose $g' = 1/f'$, on a

$$\mathcal{M}_x = \mathcal{L}_{k'}(D')_x = g'.(\mathcal{O}_{k'})_x$$

et la relation $E_x = 0$ équivaut à $\tilde\partial(g') \in \mathcal{M}_x$, soit comme $\tilde\partial$ est une dérivation de $R_{k'}$, à $\tilde\partial(\mathcal{M}_x) \subset \mathcal{M}_x$.

C. Q. F. D.

On identifiera désormais $\mathbf{C}_{k'}$ et $H^1(X, \mathcal{O}^*_{k'})$.

Lemme 8. — *Soient C' une classe de k'-diviseurs, D' un élément de C' et ∂ un élément de $\mathfrak{g}$. Pour qu'on ait $\partial^*_2(C') = 0$, il faut et suffit qu'il existe $h' \in R_{k'}$ tel que l'opérateur $\tilde\partial + L_{h'}$ de $R_{k'}$ applique le faisceau $\mathcal{L}_{k'}(D')$ dans lui-même. La fonction h' est alors définie à l'addition près d'une fonction de $A_{k'}$.*

D'après le diagramme précédent, la relation $\partial^*_2(C') = 0$ signifie qu'il existe $h' \in R_{k'}$ avec $\partial^*_1(D') = \beta(h')$, et h' est définie par cette relation à l'addition près d'une fonction de $A_{k'}$. Posons $E = \partial^*_1(D')$ et soient $x \in X$ et $f' \in (D')_x$; la relation $E_x = \beta(h')_x$, s'écrit

$$\tilde\partial(f')/f' - h' \in (\mathcal{O}_{k'})_x$$

autrement dit

$$\tilde\partial(g') + h'.g' \in \mathcal{L}_{k'}(D')_x = \mathcal{M}_x$$

en posant $g' = 1/f'$. Comme $\tilde\partial$ est une dérivation de $R_{k'}$, on voit facilement que cette dernière relation signifie que l'opérateur $\tilde\partial + L_{h'}$ applique $\mathcal{M}_x$ dans lui-même. C. Q. F. D.

Nous pouvons maintenant démontrer les deux critères de rationalité que nous avions en vue.

Proposition 13. — *Soit D' un k'-diviseur. Pour que D' soit rationnel sur k, il faut et suffit qu'on ait $\partial^*_1(C') = 0$ pour tout $\partial \in \mathfrak{g}$.*

D'après le lemme 7, pour qu'on ait $\partial_1^*(D') = 0$, pour tout $\partial \in \mathfrak{g}$, il faut et suffit que $\tilde{\partial}$ applique le faisceau $\mathcal{L}_{k'}(D')$ dans lui-même pour tout $\partial \in \mathfrak{g}$, c'est-à-dire applique $\Gamma(U', \mathcal{L}_{k'}(D'))$ dans lui-même pour tout k'-ouvert U' de X. Mais comme la k-topologie et la k'-topologie sont identiques, la proposition 13 résulte immédiatement de la proposition 6 et de la dernière assertion du lemme 5. C. Q. F. D.

Proposition 14. — *Soit C' une classe de k'-diviseurs. On suppose X complète et possédant un point x rationnel sur k. Alors, pour que C' soit rationnelle sur k, il faut et suffit qu'on ait $\partial_2^*(C') = 0$ pour tout $\partial \in \mathfrak{g}$.*

Si C' est rationnelle sur k, il existe $D' \in C'$ rationnel sur k, et par suite, on a $\partial_1^*(D') = 0$ pour tout $\partial \in \mathfrak{g}$ d'après la proposition 13, d'où $\partial_2^*(C') = 0$.

Réciproquement, supposons qu'on ait $\partial_2^*(C') = 0$ pour tout $\partial \in \mathfrak{g}$. Si $D'_1 \in C'$ et si $f' \in (D'_1)_x$, on posera $D' = D'_1 - (f')$ de sorte que $D' \in C'$ et que $(D')_x = 0$. Soit $\partial \in \mathfrak{g}$; comme $\partial_2^*(C') = 0$, il existe $h' \in R_{k'}$ telle que $\partial_1^*(D') = \beta(h')$ d'après le diagramme ($\bigstar$); comme $(D')_x = 0$, on a $\beta(h')_x = 0$, et h' est régulière en x. Or la condition ci-dessus définit h' à l'addition près d'une fonction de $A_{k'}$ d'après le diagramme ($\bigstar$); comme X est complète, toute fonction de $A_{k'}$ est constante. Finalement, en appliquant le lemme 8, on voit que pour tout $\partial \in \mathfrak{g}$, il existe une fonction $h'(\partial)$ de $R_{k'}$ et une seule telle que l'opérateur $r(\partial) = \tilde{\partial} + L(h'(\partial))$ applique le faisceau $\mathcal{L}_{k'}(D')$ dans lui-même, et qui soit régulière et nulle en x.

On a alors

$$[r(\partial), r(\partial')] = [\partial, \partial'] + L\big(\tilde{\partial}(h'(\partial')) - \tilde{\partial}'(h'(\partial))\big) \tag{8}$$

d'après la formule (4) du chapitre 2, mais le lemme 6 montre que la fonction $\tilde{\partial}(h'(\partial')) - \tilde{\partial}'(h(\partial))$ de $R_{k'}$ est régulière et nulle en x puisque x est rationnel sur k; la forme du second membre de (8) et la définition de $h([\partial, \partial'])$ démontrent alors l'identité

$$[r(\partial), r(\partial')] = r([\partial, \partial']). \tag{9}$$

La formule

$$r(\partial)^p = r(\partial^p) \tag{10}$$

se démontre de manière analogue en utilisant le lemme 5 et la formule

$$r(\partial)^p = \tilde{\partial}^p + L\big(h'(\partial)^p + \tilde{\partial}^{p-1}(h'(\partial))\big) \tag{11}$$

qui résulte de la formule (36) du chapitre 2. Un raisonnement analogue et plus facile, basé toujours sur l'unicité de $h'(\partial)$, démontre que $r(\partial)$ est

k'-linéaire en ∂. Enfin, on vérifie immédiatement la formule

$$(12) \qquad r(\partial)(\xi.f) = \partial(\xi).f + \xi.r(\partial)(f)$$

pour tout $\xi \in k'$ et tout $f \in R_{k'}$.

D'après les identités (9), (10) et (12), on peut appliquer dans notre cas la proposition 3 du chapitre 2, qui implique en particulier l'existence d'un $g' \in R_{k'}$ non nul annulé par tous les opérateurs $r(\partial)$. On a donc

$$(13) \qquad \tilde{\partial}(g') + h'(\partial).g' = 0$$

pour tout $\partial \in \mathfrak{g}$, ce qui s'écrit aussi

$$(14) \qquad r(\partial) = L(g').\tilde{\partial}.L(g')^{-1}.$$

Posons $D = D' + (g')$; comme les $r(\partial)$ conservent le faisceau $\mathcal{L}_{k'}(D')$, la formule (14) montre que les opérateurs $\tilde{\partial}$ conservent le faisceau $g'^{-1}.\mathcal{L}_{k'}(D') = \mathcal{L}_{k'}(D)$. D'après la proposition 13 et le lemme 7 ceci exprime que D est rationnel sur k; comme $D \in C'$, la classe C' est donc rationnelle sur k. C. Q. F. D.

Corollaire. — *L'ensemble des sous-corps de k' contenant k et sur lesquels C' est rationnelle contient un plus petit élément k_1. Pour que $\partial \in \mathfrak{g}$ soit nulle sur k_1, il faut et suffit qu'on ait $\partial_2^*(C') = 0$.*

Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ l'ensemble des $\partial \in \mathfrak{g}$ tels que $\partial_2^*(C') = 0$. Le lemme 8 et les formules (8) et (11) montrent que $\mathfrak{h}$ est une sous-p-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, donc est l'ensemble des dérivations de k' nulles sur un sous-corps k_1 de k' contenant k (*cf.* prop. 4 du chapitre 2). De plus, si k'' est un sous-corps de k' contenant k, pour que C' soit rationnelle sur k'', il faut et suffit qu'on ait $\partial_2^*(C') = 0$ pour tout $\partial \in \mathfrak{g}(k'/k'')$, c'est-à-dire $\mathfrak{g}(k'/k'') \subset \mathfrak{h}$, ou encore $k'' \supset k_1$ d'après la proposition 4 du chapitre 2.

C. Q. F. D.

Remarque. — Par un raisonnement analogue à celui du corollaire de la proposition 14, on déduit de la proposition 13 et du lemme 7 que le plus petit corps de rationalité d'un k'-diviseur D' est le sous-corps annulé par les $\partial \in \mathfrak{g}$ telles que $\partial_1^*(D') = 0$.

8. Image réciproque des diviseurs. — Nous allons définir la notion d'image réciproque pour les diviseurs et les classes de diviseurs, et donner quelques propriétés élémentaires de cette opération.

Soient X et Y deux k-variétés et φ un k-morphisme de X dans Y. Nous poserons $\mathfrak{O} = \mathcal{O}_k(\varphi(X)/Y)$, et nous noterons $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{O}$; alors $\mathfrak{O}$ est réunion des anneaux locaux $(\mathcal{O}_k)_{\varphi(x)}$ pour x parcourant X, et $\mathfrak{O}^* = \mathfrak{O} - \mathfrak{M}$ est réunion des groupes multiplicatifs $(\mathcal{O}_k^*)_{\varphi(x)}$ pour $x \in \mathrm{X}$. Comme $\mathfrak{O}^*$ est un sous-groupe de $R_k^*(X)$, l'ensemble $\mathbf{D}_k^0$ des k-diviseurs D

sur Y tels que $D_y \in \mathfrak{O}^*$ pour $y \in \varphi(X)$ est un sous-groupe de $\mathbf{D}_k(Y)$. De plus, le cohomomorphisme de φ induit un homomorphisme de $\mathfrak{O}$ dans $R_k(X)$, dont le noyau est $\mathfrak{M}$, et par suite détermine un homomorphisme du groupe multiplicatif $\mathfrak{O}^*$ dans le groupe multiplicatif $R_k^*(X)$.

Soit alors D un k-diviseur défini par la famille $(U_i, f_i)_{i \in I}$ et soit I' l'ensemble des indices i tels que $\varphi^{-1}(U_i)$ soit non vide. Comme on a $D_y = f_i . (\mathcal{O}_k^*)_y$ pour $y \in U_i$, il est immédiat que $D \in \mathbf{D}_k^0$ si et seulement si $f_i \in \mathfrak{O}^*$ pour tout $i \in I'$; de plus, s'il en est ainsi, on vérifie facilement que la famille $(\varphi^{-1}(U_i), f_i \odot \varphi)_{i \in I'}$ définit un k-diviseur sur X qui ne dépend que de D. Ce k-diviseur sera noté $\varphi^{-1}(D)$.

Les propriétés a à e qui suivent sont des conséquences immédiates des définitions.

a. L'application $D \to \varphi^{-1}(D)$ est un homomorphisme du groupe $\mathbf{D}_k^0$ dans le groupe $\mathbf{D}_k(X)$.

b. Soient $f \in R_k^*(Y)$ et $D = (f)$. Pour que $\varphi^{-1}(D)$ soit défini, il faut et suffit que f et f^{-1} soient composables avec φ, et l'on a alors $\varphi^{-1}(D) = (f \odot \varphi)$.

c. Soit φ' un k-morphisme de Y dans une k-variété Z; si D est un k-diviseur et si $\varphi'^{-1}(D)$ et $\varphi^{-1}(\varphi'^{-1}(D))$ sont définis, alors $(\varphi' \odot \varphi)^{-1}(D)$ est défini et égal à $\varphi^{-1}(\varphi'^{-1}(D))$.

d. Soit k' un sous-corps de $\mathbf{K}$ contenant k; alors $\gamma_{k'/k}$ applique $\mathbf{D}_k^0$ dans $\mathbf{D}_{k'}^0$, et l'on a, pour $D \in \mathbf{D}_k^0$:

$$\gamma_{k'/k}(\varphi^{-1}(D)) = \varphi^{-1}(\gamma_{k'/k}(D)). \tag{15}$$

e. Soit k' comme en d et soit σ un k-isomorphisme de k' sur un sous-corps k'' de $\mathbf{K}$. Alors, pour $D \in \mathbf{D}_{k'}^0$, on a $D^\sigma \in \mathbf{D}_{k''}^0$ et la formule

$$\varphi^{-1}(D)^\sigma = \varphi^{-1}(D^\sigma). \tag{16}$$

Pour définir la notion d'image réciproque d'une *classe* de k-diviseurs, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 9. — *Soit D un k-diviseur sur Y. Pour que $\varphi^{-1}(D)$ soit défini, il faut et suffit qu'il existe $y \in \varphi(X)$ tel que $D_y = 0$.*

Supposons D associé à une famille $(U_i, f_i)_{i \in I}$ et soit I' l'ensemble des $i \in I$ tels que $\varphi^{-1}(U_i) \neq \emptyset$. Par définition, D est une section d'un faisceau de groupes abéliens sur X muni de la k-topologie; par suite, l'ensemble U des $y \in Y$ tels que $D_y = 0$ est un k-ouvert non vide de Y.

Comme X est irréductible pour la k-topologie, et comme les k-ouverts non vides $\varphi^{-1}(U_i)$ pour $i \in I'$ recouvrent X, la condition $\varphi^{-1}(U) \neq \emptyset$ équivaut à « $\varphi^{-1}(U \cap U_i) \neq \emptyset$ pour tout $i \in I'$ ». Or pour $y \in U_i$ et $i \in I'$, on a $D_y = f_i . (\mathcal{O}_k^*)_y$ et par suite $\varphi^{-1}(U \cap U_i) \neq \emptyset$ signifie qu'il existe $y \in \varphi(X) \cap U_i$ avec $f_i \in (\mathcal{O}_k^*)_y$, c'est-à-dire que f_i appartient à $\mathfrak{O}^*$. Par suite $\varphi^{-1}(U) \neq \emptyset$ équivaut à $D \in \mathbf{D}_k^0$ et le lemme se déduit immédiatement de là.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Pour tout k-diviseur D sur Y, il existe $f \in R_k^*(X)$ tel que $D + (f) \in \mathbf{D}_k^0$.*

En effet, si $y \in \varphi(X)$ et si $f \in (-D)_y$, on aura $(f)_y = -(D)_y$, d'où $(D + (f))_y = 0$, et finalement $D + (f) \in \mathbf{D}_k^0$ d'après le lemme 9.

C. Q. F. D.

D'après la propriété *b* plus haut, l'opération $D \to \varphi^{-1}(D)$ applique $\mathbf{D}_k^0 \cap \mathbf{P}_k(Y)$ dans $\mathbf{P}_k(X)$, tandis que d'après le corollaire du lemme 9, on a $\mathbf{D}_k(Y) = \mathbf{D}_k^0 + \mathbf{P}_k(Y)$; elle définit donc par passage au quotient un homomorphisme φ^* de $\mathbf{C}_k(Y)$ dans $\mathbf{C}_k(X)$. Le formulaire suivant est alors une conséquence immédiate des propriétés *c*, *d* et *e* énoncées plus haut :

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*, \tag{17}$$

$$\gamma_{k'/k}(\varphi^*(C)) = \varphi^*(\gamma_{k'/k}(C)), \tag{18}$$

$$\varphi^*(C')^\sigma = \varphi^*(C'^\sigma), \tag{19}$$

où ψ est un k-morphisme de Y dans une k-variété Z, où k' est un sous-corps de $\mathbf{K}$ contenant k et σ un k-isomorphisme de k' sur un sous-corps de $\mathbf{K}$, et où $C \in \mathbf{C}_k(Y)$ et $C' \in \mathbf{C}_{k'}(Y)$.

Pour terminer, nous ferons le lien entre ces opérations et la cohomologie. Pour tout k-ouvert U de Y tel que $\varphi^{-1}(U)$ soit non vide, et tout $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_k^*(Y))$, on a $f \odot \varphi \in \Gamma(U, \mathcal{O}_k^*(X))$; pour tout recouvrement fini $\mathfrak{U}$ de Y par des k-ouverts non vides, on définit un homomorphisme de groupes abéliens de $H(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_k^*(Y))$ dans $H(\varphi^{-1}(\mathfrak{U}), \mathcal{O}_k^*(X))$ en associant à la classe de cohomologie de $\{c_{ij}\}_{i,j \in I}$ celle de $\{c_{ij} \odot \varphi\}_{i,j \in I}$; puis par passage à la limite sur $\mathfrak{U}$, on définit un homomorphisme φ^* de $H(Y, \mathcal{O}_k^*(Y))$ dans $H(X, \mathcal{O}_k^*(X))$. De plus, pour toute classe de k-diviseurs C, on notera $\eta(C)$ la classe de cohomologie de degré 1 qui lui est associée; on sait que $C \to \eta(C)$ est bijective; on a alors le lemme suivant :

LEMME 10. — *Pour toute classe de k-diviseurs C sur Y, on a*

$$\varphi^*(\eta(C)) = \eta(\varphi^*(C)).$$

On peut trouver dans C un k-diviseur D tel que $\varphi^{-1}(D)$ soit défini; supposons que D soit associé à la famille $(U_i, f_i)_{i \in I}$ et soit I' l'ensemble des $i \in I$ tels que $\varphi^{-1}(U_i)$ soit non vide. Alors le k-diviseur $\varphi^{-1}(D)$ est associé à la famille $(\varphi^{-1}(U_i), f_i \odot \varphi)_{i \in I'}$, et sa classe est égale à $\varphi^*(C)$ par définition. Il en résulte que $\eta(\varphi^*(C))$ est représentée par le 1-cocycle $\{(f_i \odot \varphi)/(f_j \odot \varphi)\}$ du recouvrement $\varphi^{-1}(\mathfrak{U})$ de X [on a posé $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$].

Par ailleurs, $\eta(C)$ est représentée par le 1-cocycle $\{f_i/f_j\}$ du recouvrement $\mathfrak{U}$, et par conséquent, $\varphi^*(\eta(C))$ est représentée par le 1-cocycle $\{(f_i/f_j) \odot \varphi\}$ du recouvrement $\varphi^{-1}(\mathfrak{U})$ de X.

C. Q. F. D.

9. **Familles algébriques de diviseurs.** — Soit X une k-variété. Si T est une k-variété et si $t \in T$, on notera p_t le morphisme $x \to (x, t)$ de X dans $X \times T$; pour toute classe de diviseurs C sur $X \times T$, on posera $C(t) = p_t^*(C)$, de sorte que $C(t)$ est une classe de diviseurs sur X. On peut donner des définitions analogues pour le cas des diviseurs et non pas seulement des classes : nous laisserons au lecteur le soin de le faire. On a d'abord les deux propriétés suivantes :

a. Soit k' un sous-corps de $\mathbf{K}$ contenant k; si C et t sont rationnels sur k', alors $C(t)$ est rationnelle sur k' : comme t est rationnel sur k', p_t est un k'-morphisme de X dans $X \times T$; comme C est rationnelle sur k', il existe une classe C' de k'-diviseurs sur $X \times T$ telle que $C = \gamma_{\mathbf{K}/k'}(C)$; on a alors

$$C(t) = p_t^*(C) = p_t^*(\gamma_{\mathbf{K}/k'}(C')) = \gamma_{\mathbf{K}/k'}(p_t^*(C'))$$

et $C(t)$ est rationnelle sur k'.

b. Si $T = T' \times T''$, on a $C(t', t'') = C(t'')(t')$ pour $t' \in T'$ et $t'' \in T''$: comme C est une classe de diviseurs sur $X \times T = (X \times T') \times T''$, on a par définition $C(t'') = \varphi^*(C)$, où φ est défini par $\varphi(x, u) = (x, u, t'')$ et $C(t'')$ est donc une classe de diviseurs sur $X \times T'$; mais on a alors

$$C(t'')(t') = p_{t'}^*(\varphi^*(C)) = (\varphi \circ p_{t'})^*(C) = p_{(t', t'')}^*(C) = C(t', t'')$$

d'après la formule évidente $\varphi \circ p_{t'} = p_{(t', t'')}$.

Soit T une k-variété. On dit qu'une application $t \to C_t$ de T dans $\mathbf{C}(X)$ est une *famille algébrique* (de classes de diviseurs), s'il existe une classe de diviseurs C sur $X \times T$ telle que $C_t = C(t)$ pour tout $t \in T$. On peut démontrer que C est déterminée par cette condition à l'addition près d'une classe de la forme $p^*(C_0)$ où p est la projection de $X \times T$ sur T, et où C_0 est une classe de diviseurs sur T.

Le maniement des familles algébriques de classes de diviseurs est gouverné par des règles élémentaires, dont nous indiquons quelques-unes :

c. Toute application constante de T dans $\mathbf{C}(X)$ est une famille algébrique.

d. Si $(C_t)_{t \in T}$ et $(C')_{t \in T}$ sont deux familles algébriques, il en est de même de $(C_t + C'_t)_{t \in T}$.

e. Soit φ un morphisme de T dans une k-variété T'; si $(C_{t'})_{t' \in T}$ est une famille algébrique, il en est de même de $(C_{\varphi(t)})_{t \in T}$.

f. Soit ψ un morphisme de X dans une k-variété Y. Si $(C'_t)_{t \in T}$ est une famille algébrique sur Y, alors $(\psi^*(C'_t))_{t \in T}$ est une famille algébrique sur X.

Les démonstrations de ces règles reposent essentiellement sur la formule (17). Démontrons par exemple c :

Soient $C_0 \in \mathbf{C}(X)$ et p la projection de $X \times T$ sur X : alors pour tout

$t \in T$, le morphisme $p \circ p_t$ est l'identité sur X, d'où par suite :

$$C_0 = (p \circ p_t)^*(C_0) = p_t^*(p^*(C_0)) = (p^*(C_0))(t),$$

ce qui prouve que l'application $t \to C_0$ est une famille algébrique.

APPENDICE.

Quelques lemmes d'algèbre locale.

1. — Soit A un anneau. On dit, selon [6], qu'un A-module M est *projectif* s'il existe un A-module N tel que $M \oplus N$ soit libre ; il revient au même de supposer qu'il existe un A-module libre L et des A-homomorphismes $f : M \to L$ et $g : L \to M$ tels que $g \circ f$ soit l'identité sur M.

a. Soit φ un homomorphisme de A dans un anneau B ; si le A-module M est projectif, le B-module $M_{(B)}$ déduit de M par extension des scalaires (*cf.* [4], App. II, n° 10) est projectif : en effet, si le A-module $M \oplus N$ est libre, le B-module $M_{(B)} \oplus N_{(B)}$, isomorphe à $(M \oplus N)_{(B)}$ est libre.

b. Soit M un A-module de type fini ; si M est projectif et si f, g et L sont comme plus haut, $f(M)$ est contenu dans le sous-module libre de L engendré par un nombre fini d'éléments d'une base de L, ce qui montre qu'on peut supposer que L a une base finie $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$. Mais les A-homomorphismes de M dans L sont alors les applications $m \to \sum_i f_i(m) . e_i$ où les f_i sont des formes linéaires sur M, tandis que les A-homomorphismes de L dans M sont les applications $\sum_i a_i . e_i \to \sum_i a_i . m_i$ avec m_i arbitraires dans M. Finalement, pour que M soit projectif, il faut et il suffit qu'il existe des éléments m_i de M et des formes linéaires f_i sur M pour $1 \leq i \leq n$, vérifiant l'identité

$$\sum_{1 \leq i \leq n} f_i(m) . m_i = m \qquad (m \in M). \tag{1}$$

Si cette condition est satisfaite, les m_i engendrent M ; inversement, si des éléments m'_j $(1 \leq j \leq p)$ engendrent M, on peut poser $m_i = \sum_j a_{ij} . m'_j$, d'où l'identité

$$\sum_{1 \leq j \leq p} f'_j(m) . m'_j = m \qquad (m \in M) \tag{1'}$$

si l'on pose $f'_j = \sum_i f_i . a_{ij}$.

c. Il est clair que tout A-module libre est projectif.

d. Si l'anneau A est commutatif et intègre, tout A-module projectif est sans torsion, puisqu'il en est ainsi de tout A-module libre.

2. — Nous nous proposons de caractériser les modules projectifs sur un anneau *local*. Soit A un anneau local, c'est-à-dire un anneau commutatif ayant un plus grand idéal $\mathfrak{m} \neq A$; on notera k le corps $A/\mathfrak{m}$; tout élément de $A - \mathfrak{m}$ est inversible dans A.

LEMME 1. — *Soient M un module de type fini sur un anneau local A et N un sous-module de M. Si l'on a $M = \mathfrak{m}.M + N$, on a $M = N$.*

Soit $\{m_i\}_{1 \leq i \leq n}$ un système de générateurs de M; par hypothèse, il existe des éléments p_{ij} de $\mathfrak{m}$ et n_i de N tels que

$$(2) \qquad m_i = \sum_i p_{ij}.m_j + n_i \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Posons $a_{ij} = \delta_{ij} - p_{ij}$; on a donc $n_i = \sum_j a_{ij}.m_j$ et $a_{ij} \equiv \delta_{ij} \pmod{\mathfrak{m}}$; il en résulte que le déterminant de la matrice $\|a_{ij}\|$ est congru à 1 modulo $\mathfrak{m}$, donc est inversible et par suite la matrice $\|a_{ij}\|$ a un inverse $\|b_{ij}\|$; on a alors $m_i = \sum_j b_{ij}.n_j$ et par suite $m_i \in N$ pour $1 \leq i \leq n$, de sorte que $M = N$.

C. Q. F. D.

LEMME 2. — *Tout module M projectif de type fini sur un anneau local A est libre.*

Posons $\overline{M} = M/\mathfrak{m}.M$, que nous considérerons comme espace vectoriel sur le corps k; comme M est de type fini, l'espace k-vectoriel $\overline{M}$ est de rang fini, et il existe des éléments m_i de M pour $1 \leq i \leq n$ dont les classes $\overline{m}_i$ modulo $\mathfrak{m}$ forment une base de $\overline{M}$ sur k. On a alors $M = \mathfrak{m}.M + \sum_i A.m_i$ d'où $M = \sum_i A.m_i$ d'après le lemme 1; autrement dit, les m_i engendrent M.

Comme M est projectif, il existe des formes linéaires f_i sur M vérifiant l'identité (1); alors l'application $u : m \to (f_i(m))_{1 \leq i \leq n}$ de M dans A^n est un A-homomorphisme injectif. Par passage au quotient, on déduit de u une application k-linéaire $\overline{u}$ de $\overline{M}$ dans k^n, et comme de (1) on déduit l'identité

$$\overline{m} = \sum_i \bar{f}_i(m).\overline{m}_i \qquad (\overline{m} \in \overline{M}),$$

il en résulte que $\overline{u}$ est injective. Comme les espaces k-vectoriels $\overline{M}$ et k^n ont même dimension n, ceci implique que $\bar{u}$ est surjective; autrement dit, on a $A^n = \mathfrak{m}.A^n + u(M)$, d'où $A^n = u(M)$ d'après le lemme 1. On a donc montré que u est bijective, et donc que M est libre.

C. Q. F. D.

3. — Nous rappellerons d'abord la définition des anneaux de fractions. Soient A un anneau commutatif et S une partie de A telle que $S.S \subset S$, $1 \in S$ et $0 \notin S$; une telle partie est dite *multiplicative*. Alors l'ensemble $\mathfrak{n}$ des $a \in A$ pour lesquels il existe un $s \in S$ avec $s.a = 0$ est un idéal de A, distinct de A. Soit ε l'homomorphisme canonique de A sur $A/\mathfrak{n}$; il est immédiat que $\varepsilon(S)$ ne contient aucun diviseur de 0 dans $A/\mathfrak{n}$; de plus, dans l'anneau total des fractions de $A/\mathfrak{n}$, les éléments de la forme $\varepsilon(a).\varepsilon(s)^{-1}$ avec $a \in A$ et $s \in S$ forment un sous-anneau A_S. On pose $a/s = \varepsilon(a).\varepsilon(s)^{-1}$ de sorte qu'on a les règles de calcul usuelles :

$$(3)\qquad \begin{gathered} a/s + a'/s' = (a.s' + a'.s)/s.s', \\ (a/s).(a'/s') = aa'/ss' \end{gathered}$$

et $a/s = 0$ signifie qu'il existe $s' \in S$ avec $s'.a = 0$; enfin on a $\varepsilon(a) = a/1$.

Soit M un A-module; nous noterons M_S le A_S-module déduit de M par extension des scalaires au moyen de l'homomorphisme ε; comme groupe abélien, M_S est donc le produit tensoriel $A_S \otimes_A M$. Pour $m \in M$ et $s \in S$, nous poserons $m/s = \varepsilon(s)^{-1} \otimes m$; on a alors les formules

$$(4)\qquad \begin{gathered} m/s + m'/s' = (s.m' + s'.m)/ss', \\ (a/s).(m/s') = a.m/ss' \end{gathered}$$

qui se démontrent immédiatement et montrent que l'ensemble des m/s est un sous-A_S-module de M_S; comme cet ensemble contient les éléments $m/1 = 1 \otimes m$, il est égal à M_S et donc, tout élément de M_S est de la forme m/s.

Lemme 3. — *Soient M un A-module et S une partie multiplicative de A. Pour qu'on ait $m/s = 0$ avec $m \in M$ et $s \in S$, il faut et suffit qu'il existe $s' \in S$ avec $s'.m = 0$.*

Il est clair qu'on a $m/s = s'.m/s's$ pour $s' \in S$ et par conséquent si $s'.m = 0$, on a $m/s = 0$.

Réciproquement, supposons $m/s = 0$. Supposons d'abord que M soit libre et soit $\{m_i\}$ une base de M sur A; les éléments $m'_i = 1 \otimes m_i$ forment alors une base de M_S sur A_S et si $m = \sum_i a_i m_i$, on aura $m/s = \sum_i (a_i/s).m'_i = 0$ et par conséquent $a_i/s = 0$ pour tout i. On peut donc trouver des éléments $s'_i \in S$ avec $s'_i.a_i = 0$ pour tout i, mais comme les a_i sont nuls sauf pour un nombre fini, on peut supposer que tous les s'_i sauf un nombre fini sont égaux à 1. Si s' est le produit des s'_i, on a alors $s'.a_i = 0$ pour tout i, d'où $s'.m = 0$.

Dans le cas général, il existe une suite exacte

$$L_1 \xrightarrow{\alpha} L_0 \xrightarrow{\beta} M \to (0),$$

où les A-modules L_0 et L_1 sont libres; d'après les propriétés générales des produits tensoriels, la suite

$$(L_1)_S \xrightarrow{\alpha'} (L_0)_S \xrightarrow{\beta'} M_S \to (0),$$

où $\alpha' = 1 \otimes \alpha$ et $\beta' = 1 \otimes \beta$ est exacte. Soit $x \in L_0$ avec $\beta(x) = m$, d'où $\beta'(x/s) = m/s = 0$; il existe donc $y \in L_1$ et $t \in S$ tels que $\alpha'(y/t) = x/s$, c'est-à-dire $(s.\alpha(y) - t.x)/st = 0$; comme L_0 est libre, on peut donc trouver $t' \in S$ tel que

$$t'.(s.\alpha(y) - t.x) = 0$$

d'après la première partie de la démonstration, d'où

$$t.t'.m = \beta(t.t'.x) = \beta(t'.s.\alpha(y)) = t'.s.\beta(\alpha(y)) = 0.$$

C. Q. F. D.

Soient M et N deux A-modules; pour tout A-homomorphisme f de M dans N, nous poserons $f_S = 1 \otimes f$ qui est un A_S-homomorphisme de M_S dans N_S; on a $1_S = 1$ et $(g \circ f)_S = g_S \circ f_S$, et par conséquent, M_S est un foncteur covariant en M. Ce foncteur est en fait exact :

LEMME 4. — *Soit $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ une suite exacte de A-modules. Alors pour toute partie multiplicative S, la suite $M_S \xrightarrow{f_S} N_S \xrightarrow{g_S} P_S$ est exacte.*

Comme $g \circ f = 0$, on a $g_S \circ f_S = 0$. De plus, soit n/s dans le noyau de g_S; on a donc $0 = g_S(n/s) = g(n)/s$ et par suite, il existe $s' \in S$ avec

$$s'.g(n) = g(s'.n) = 0;$$

on peut alors trouver $m \in M$ avec $s'/n = f(m)$, d'où

$$n/s = s'.n/s's = f_S(m/s's).$$

C. Q. F. D.

On notera enfin que l'application $\rho : m \to m/1$ de M dans M_S est *naturelle par rapport aux A-homomorphismes.*

4. Soit A un anneau commutatif intègre, et soit K son corps des fractions. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, l'ensemble $S = A - \mathfrak{p}$ est une partie multiplicative de A, et l'anneau A_S, qu'on notera aussi $A_{\mathfrak{p}}$, est l'ensemble des éléments a/s de K avec $a \in A$ et $s \in A - \mathfrak{p}$. L'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{p}.A_{\mathfrak{p}}$; pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $A_{\mathfrak{p}}$, on a $\mathfrak{a} = A_{\mathfrak{p}}.(A \cap \mathfrak{a})$ et pour tout idéal *premier* $\mathfrak{q}$ de A, contenu dans $\mathfrak{p}$, on a $\mathfrak{q} = A \cap \mathfrak{q}.A_{\mathfrak{p}}$. Si M est un A-module, nous poserons $M_{\mathfrak{p}} = M_{A-\mathfrak{p}}$ pour tout idéal $\mathfrak{p}$ de A.

Si M est un A-module projectif de type fini, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, le $A_{\mathfrak{p}}$-module $M_{\mathfrak{p}}$ est projectif d'après 1.*a*, donc libre d'après le lemme 2. On a la réciproque suivante :

LEMME 5. — *Soit M un module de type fini sur un anneau* intègre A. *Si, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, le module $M_{\mathfrak{m}}$ sur l'anneau $A_{\mathfrak{m}}$ est libre, alors M est un A-module projectif.*

Montrons d'abord que M est sans torsion. Soit en effet $a \neq 0$ dans A et soit $m \in M$ tel que $a.m = 0$. Si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de A, on a alors $(a/1).(m/1) = 0$ dans $M_{\mathfrak{m}}$, mais $a/1 \neq 0$ dans $A_{\mathfrak{m}} \subset K$; comme $M_{\mathfrak{m}}$ est libre sur $A_{\mathfrak{m}}$ par hypothèse, on a donc $m/1 = 0$, ce qui signifie, d'après le lemme 3, qu'il existe $s \in A$ avec $s.m = 0$ et $s \notin \mathfrak{m}$. Autrement dit, l'annulateur $\mathfrak{a}$ de m dans M est un idéal de A, qui n'est contenu dans aucun idéal maximal de A, ce qui implique $\mathfrak{a} = A$ et $m = 0$.

Soit $\{m_i\}_{1 \leq i \leq n}$ un système de générateurs de M sur l'anneau A, et soit P l'ensemble des A-endomorphismes de M de la forme $m \rightarrow \sum_i f_i(m).m_i$ où les f_i sont des formes linéaires sur M. Tout revient d'après 1.*b* à prouver que P contient 1. Or, soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A; comme $M_{\mathfrak{m}}$ est libre sur $A_{\mathfrak{m}}$, donc projectif, il existe des formes linéaires f'_i sur $M_{\mathfrak{m}}$ telles que $m' = \sum_i f'_i(m').(m_i/1)$ pour tout $m' \in M_{\mathfrak{m}}$; mais comme M est sans torsion, l'application $m \rightarrow m/1$ de M dans $M_{\mathfrak{m}}$ est injective par le lemme 3. De plus, on peut trouver $s \in A - \mathfrak{m}$ tel que $s.f'_i(m_j/1)$ soit dans A pour $1 \leq i, j \leq n$ (noter que $A \subset A_{\mathfrak{m}}$); de ceci résulte $s.1 \in P$.

Soit alors $\mathfrak{a}$ l'ensemble des $a \in A$ tels que $a.1 \in P$; comme P est un sous-A-module de $\mathcal{L}_A(M, M)$, il est clair que $\mathfrak{a}$ est un idéal de A; d'après ce qui précède, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, il existe $s \in \mathfrak{a}$ avec $s \notin \mathfrak{m}$; $\mathfrak{a}$ n'est donc contenu dans aucun idéal maximal de A, et par suite $1 \in \mathfrak{a}$, c'est-à-dire $1 \in P$. C. Q. F. D.

REMARQUE. — Le lemme 5 est valable pour tout anneau *noethérien*, non nécessairement intègre.

5. Soient K un corps et A un sous-anneau de K engendrant K en tant que corps. On rappelle qu'un *idéal fractionnaire principal* de A est un sous-A-module monogène de K, et qu'un *idéal fractionnaire* de A est un sous-A-module de K contenu dans un A-module monogène. Il est immédiat que tout sous-A-module de type fini de K est un idéal fractionnaire de A, et que la réciproque est vraie si A est noethérien. Si B est un sous-anneau de K contenant A, et si I est un idéal fractionnaire de A, il est clair que $B.I$ est un idéal fractionnaire de B, et si I est principal, il en est de même de $B.I$.

Pour la multiplication, l'ensemble des sous-A-modules de K forme un monoïde $\mathfrak{M}$ admettant A comme élément unité; le produit de deux idéaux fractionnaires est un idéal fractionnaire, et les idéaux fractionnaires principaux de A forment un sous-groupe de $\mathfrak{M}$. Soit M un élément inversible de $\mathfrak{M}$; il existe donc $N \in \mathfrak{M}$ tel que $M.N = A$; on a alors $N \subset (A:M)$ d'où $A = M.N \subset M.(A:M) \subset A$, soit $M.(A:M) = A$; ceci prouve que l'inverse de M dans $\mathfrak{M}$ est le transporteur $(A:M)$; mais comme les formes K-linéaires sur K sont les homothéties $x \to x.y$, pour $y \in K$, les formes A-linéaires sur M sont ces homothéties pour $y \in (A:M)$; autrement dit, $(A:M)$ s'identifie au dual de M.

Nous pouvons maintenant caractériser les éléments inversibles de $\mathfrak{M}$.

Lemme 6. — *Soit M un sous-A-module du corps K. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a. M est inversible dans le monoïde $\mathfrak{M}$;

b. M est un A-module projectif de type fini;

c. M est de type fini, et pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, l'idéal fractionnaire $M.A_{\mathfrak{m}}$ de $A_{\mathfrak{m}}$ est principal.

Pour que M soit inversible dans $\mathfrak{M}$, il faut et suffit qu'on ait $M.(A:M) = A$ d'après les remarques précédentes; comme $M.(A:M)$ est un idéal de A, ceci équivaut à $1 \in M.(A:M)$, soit à l'existence d'une relation de la forme $1 = \sum_i m'_i.m_i$ avec $m_i \in M$ et $m'_i \in (A:M)$. D'après l'identification précédemment signalée de $(A:M)$ au dual de M, ceci équivaut à l'existence d'une identité de la forme (1); les résultats de 1.b montrent alors que ceci signifie que M est projectif de type fini.

L'équivalence de b et de c résulte alors du lemme 5 puisque tout sous-A-module libre de K est nécessairement de rang 1, et que d'après le lemme 3, on peut identifier $M_{\mathfrak{m}}$ et $M.A_{\mathfrak{m}}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Barsotti (I). — *Repartitions on abelian varieties* (*Illinois J. Math.*, t. 2, 1958, p. 43-70).

[2] Bourbaki (Nicolas). — *Théorie des ensembles*, chap. IV : *Structures*. Paris, Hermann, 1957 (*Act. scient. et ind.*, 1258; *Éléments de Mathématique*, 22).

[3] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre*, chap. II : *Algèbre linéaire*. Paris, Hermann, 1955 (*Act. scient. et ind.*, 1032-1236; *Éléments de Mathématique*, 6).

[4] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre*, chap. III : *Algèbre multilinéaire*, 2e éd. Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1044; *Éléments de Mathématique*, 7).

[5] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre*, chap. IV : *Polynomes et fractions rationnelles*, chap. V : *Corps commutatifs*. Paris, Hermann, 1950 (*Act. scient. et ind.*, 1102; *Éléments de Mathématique*, 11).

[6] CARTAN (H.) et EILENBERG (S). — *Homological algebra.* Princeton, Princeton University Press, 1956 (*Princeton mathematical Series*, 19).

[7] CARTIER (Pierre). — *Une nouvelle opération sur les formes différentielles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 426-428).

[8] CHEVALLEY (Claude). — *Sur la théorie des variétés algébriques* (*Nagoya math. J.*, t. 7, 1956, p. 1-43).

[9] FRENKEL (Jean). — *Cohomologie non abélienne et espaces fibrés* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 85, 1957, p. 135-237; (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1956).

[10] GROTHENDIECK (Alexandre). — *A general theory of fibre spaces with structure sheaf.* Lawrence, University of Kansas, 1955 (*Nat. Sc. Found. Res.*, Report 4).

[11] GROTHENDIECK (Alexandre). — *Sur les faisceaux algébriques et analytiques cohérents* (*Séminaire Cartan*, t. 9. 1956-1957, n° 2).

[12] HOCHSCHILD (G.). — *Cohomology of restricted Lie algebras* (*Amer. J. Math.*, t. 76, 1954, p. 550-580).

[13] HOCHSCHILD (G.). — *Simple algebras with purely inseparable splitting fields of exponent* 1 (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 79, 1955, p. 477-489).

[14] JACOBSON (N.). — *Abstract derivations and Lie algebras* (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 42, 1937, p. 206-224).

[15] JACOBSON (N.) — *Galois theory of purely inseparable fields of exponent* 1 (*Amer. J. Math.*, t. 66, 1944, p. 645-648).

[16] TATE (J.) *Genus change in inseparable extension of function fields* (*Proc. Amer. math. Soc.*, t. 3, 1952, p. 400-406).

[17] SERRE (J.-P.). — *Faisceaux algébriques cohérents* (*Annals of Math.*, 2e série, t. 61, 1955, p. 197-278).

[18] SERRE (J.-P.). — *Sur la cohomologie des variétés algébriques* (*J. Math. pures et appl.*, 2e série, t. 36, 1957, p. 1-16).

[19] WEIL (André). — *Introduction à l'étude des variétés kählériennes.* Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1267).

[20] WEIL (André). — *Foundations of algebraic geometry.* New York, American mathematical Society, 1946 (*Amer. math. Soc. Coll. Publ.*, 29).

Pierre CARTIER,
La Résidence, n° 57.
Orsay (Seine-et-Oise).