BULLETIN DE LA S. M. F.

CIPRIAN FOIAS

La mesure harmonique-spectrale et la théorie spectrale des opérateurs généraux d'un espace de Hilbert

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 263-282
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__263_0>

Bull. Soc. math. France,
85, 1957, p. 263 à 282.

LA MESURE HARMONIQUE-SPECTRALE ET LA THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS GÉNÉRAUX D'UN ESPACE DE HILBERT ;

PAR

CIPRIAN FOIAŞ
(Bucarest).

Soient H un espace de Hilbert, T un opérateur dans cet espace (c'est-à-dire une transformation linéaire, bornée, de H dans H) et S un ensemble spectral, au sens de J. VON NEUMANN [1], de T, borné, et ayant comme frontière une courbe jordanienne fermée. Dans ce travail, on étend le calcul fonctionnel de DUNFORD [2] relativement à T, pour des fonctions analytiques dans S, bornées sur S, avec un nombre fini de points de discontinuité situés sur $\mathrm{Fr}\,S$, en lesquels les fonctions peuvent ne pas être définies, et qui ne sont pas des valeurs propres de T. Pour cela on introduit la mesure harmonique-spectrale de T, qu'on peut considérer comme l'extension par T de la mesure harmonique $\omega(\lambda;\, \alpha, \mathrm{Int}\, S)$, $\alpha \subset \mathrm{Fr}\, S$ et qui coïncide dans le cas de T unitaire ou symétrique avec la mesure spectrale proprement dite de T. La propriété essentielle de cette mesure (qui permet l'extension du calcul fonctionnel) est que ses points de discontinuité sont les valeurs propres de T, situées sur $\mathrm{Fr}\, S$ (th. 3.3).

Je remercie MM. M. BRELOT, G. CHOQUET, J. DIXMIER et F. BRUHAT qui ont eu la bienveillance de lire le manuscrit et de me faire d'utiles remarques.

1. Préliminaires. — Nous désignerons par $\sigma(T)$ le spectre de T, par $\rho(T)$ l'ensemble résolvant de T, par $\rho_e(T)$ l'ensemble des nombres complexes λ, pour lesquels il existe un $\varepsilon_\lambda > 0$, tel que

$$\|(\lambda I - T)x\| \geqq \varepsilon_\lambda \|x\|,$$

quel que soit $x \in H$, et par $\sigma_p(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T.

Pour une fonction $f(\lambda)$ analytique (holomorphe) dans un ouvert G, $G \supset \sigma(T)$, nous désignerons d'après DUNFORD [2], par $f(T)$ l'extension de $f(\lambda)$ par T. Nous supposons connus les résultats principaux concernant cette extension ([2], p. 193-196), aussi bien que le travail de J. von Neumann ([1], p. 258-281), sur les ensembles spectraux (*voir* aussi [3], p. 411-440).

Nous considérons seulement des ensembles spectraux S, bornés, dont la frontière est une courbe simple, fermée (on appellera un tel ensemble jordanien). Nous désignerons

$$(1) \text{ par } \quad \mathcal{A}[S] \quad (\text{resp. } \mathcal{O}[S])$$

l'ensemble des fonctions $u(\lambda)$ harmoniques [resp. $f(\lambda)$ holomorphes] dans un domaine D_u(resp. D_f) tel que $D_u \supset S (D_f \supset S)$,

$$(2) \text{ par } \quad \overline{\mathcal{A}}[S] \quad (\text{resp. } \overline{\mathcal{O}}[S])$$

l'ensemble des fonctions harmoniques (resp. holomorphes) dans S, continues sur S; lorsque aucune ambiguïté n'est possible, nous écrirons

$$\mathcal{A}[S] = \mathcal{A} \qquad (\text{de même } \mathcal{O}[S] = \mathcal{O}, \ldots).$$

2. Le calcul fonctionnel pour les fonctions de $\overline{\mathcal{A}}$ et $\overline{\mathcal{O}}$. — Pour établir un calcul fonctionnel pour les fonctions de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{O}$, remarquons que $\sigma(T) \subset S$, donc pour toute $f \in \mathcal{O}$, on peut définir $f(T)$ comme l'extension, au sens de Dunford, de $f(\lambda)$ par T. En ce qui concerne $u(\lambda) \in \mathcal{A}$, la connexion simple de S entraîne l'existence de fonctions $f(\lambda) \in \mathcal{O}$, telles que $\mathrm{Re} f(\lambda) = u(\lambda)$, pour $\lambda \in D_f$, où D_f est un domaine convenablement choisi, $S \subset D_f \subset D_u$; si $f_1(\lambda)$ et $f_2(\lambda)$ sont de telles fonctions, alors

$$f_1(\lambda) = f_2(\lambda) + ir, \qquad \lambda \in S \qquad (r \text{ réel})$$

On a

$$f_1(T) = f_2(T) + riI, \qquad \text{donc} \quad \mathrm{Re} f_1(T) = \mathrm{Re} f_2(T) \quad (^1).$$

Nous poserons :

Définition 2.1. — *Si $u(\lambda) \in \mathcal{A}$, alors $u(T) = \mathrm{Re} f(T)$, où*

$$f(\lambda) \in \mathcal{O} \qquad \textit{et} \qquad u(\lambda) = \mathrm{Re} f(\lambda) \qquad \textit{pour} \quad \lambda \in S.$$

Évidemment :

(1) $u(T)$ est un opérateur symétrique;
(2) si $u, v \in \mathcal{A}$, alors $(u + v)(T) = u(T) + v(T)$;
(3) si r est réel, alors $(ru)(T) = r.u(T)$.

---

(1) Pour un opérateur T, on pose

$$\mathrm{Re}\, T = \frac{1}{2}(T + T^*), \qquad \mathrm{Im}\, T = \frac{1}{2} i(T^* - T);$$

où T^* est l'opérateur adjoint de T.

Un théorème de HEINZ ([4], *voir* aussi [3], p. 433) donne, de plus :

(4) $u(\lambda) \geqq 0$ entraîne $u(T) \geqq 0$, et

(5) $\| u(T) \| \leqq \max\limits_{\lambda \in S} | u(\lambda) |$.

Pour étendre le calcul à $\overline{\mathfrak{A}}$ et $\overline{\mathcal{O}}$, il suffit de remarquer que, d'après un résultat de M. BRELOT ([5], *voir* aussi [6], p. 73), $\overline{\mathfrak{A}}(\overline{\mathcal{O}})$ est la fermeture par rapport à la norme

$$\| u \|_S = \max_{\lambda \in S} | u(\lambda) | \qquad (\| f \|_S = \max_{\lambda \in S} | f(\lambda) |)$$

de $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$. En effet, soient $\{ u_n \}$ et $\{ v_n \}$ deux suites de $\mathfrak{A}$, convergeant uniformément sur S vers $u(\lambda) \in \overline{\mathfrak{A}}$. Alors, d'après (5), on a

$$\| u_n(T) - u_m(T) \| \to 0, \qquad \| v_n(T) - v_m(T) \| \to 0,$$
$$\| v_n(T) - u_n(T) \| \to 0,$$

pour $n \to \infty$. Comme ceci est vrai aussi pour $f \in \overline{\mathcal{O}}$, on peut poser la

DÉFINITION 2.2. — *Si $u \in \overline{\mathfrak{A}}$ et $f \in \overline{\mathcal{O}}$ et si $\{ u_n \} \subset \mathfrak{A}$, $\{ f_n \} \subset \mathcal{O}$ et*

$$\| u_n - u \|_S \to 0, \qquad \| f_n - f \|_S \to 0 \qquad \textit{pour} \qquad n \to \infty,$$

alors, par définition,

$$u(T) = \lim u_n(T) \qquad \textit{et} \qquad f(T) = \lim f_n(T).$$

Nous venons de voir que ces limites existent en norme et dépendent seulement de u et f.

De la définition et des propriétés correspondantes dans le cas de $\mathfrak{A}$ et $\mathcal{O}$ résulte la

PROPRIÉTÉ 2.1. — (1) *Si $u \in \mathfrak{A}$ et $f \in \mathcal{O}$, l'extension par la définition 2.2 coïncide avec la définition initiale;*

(2) *Si $u \in \overline{\mathfrak{A}}$, $u(T)$ est symétrique;*

(3) *Si u, $v \in \overline{\mathfrak{A}}$ et r est réel, alors*

$$(u + v)(T) = u(T) + v(T), \qquad (ru)(T) = r \cdot u(T);$$

(4) *Si f, $g \in \overline{\mathcal{O}}$ et μ est complexe, alors*

$$(f + g)(T) = f(T) + g(T), \qquad (fg)(T) = f(T) g(T),$$
$$(\mu f)(T) = \mu f(T), \qquad (\mathrm{Re} f)(T) = \mathrm{Re} f(T);$$

(5) *Si $f \in \overline{\mathcal{O}}$ et $u \in \overline{\mathfrak{A}}$, on a*

$$\| f(T) \| \leqq \| f \|_S, \qquad \| u(T) \| \leqq \| u \|_S$$

et

(2.1) $$\inf_{\lambda \in S} u(\lambda) \leqq \inf_{\| x \| = 1} \langle u(T)x, x \rangle \leqq \sup_{\| x \| = 1} \langle u(T)x, x \rangle \leqq \sup_{\lambda \in S} u(\lambda).$$

Une inégalité « duale » de (2.1) est donnée par la

Propriété 2.2. — *Soit* $u \in \overline{\mathfrak{A}}$, *alors :*

(1) *à tout* $\lambda \notin \rho_e(T)$ *correspond une suite* $\{x_n\} \subset H$, $\|x_n\| = 1$, *telle que*

$$\langle u(T)x_n, x_n \rangle \to u(\lambda);$$

(2) *si* $\lambda \in \sigma_p(T)$ *et* $Tx_\lambda = \lambda x_\lambda$, $\|x_\lambda\| = 1$, *alors*

$$\langle u(T)x_\lambda, x_\lambda \rangle = u(\lambda);$$

(3) *on a*

$$\inf_{\|x\|=1} \langle u(T)x, x \rangle \leqq \inf_{\lambda \notin \rho_e(T)} u(\lambda) \leqq \sup_{\lambda \notin \rho_e(T)} u(\lambda) \leqq \sup_{\|x\|=1} \langle u(T)x, x \rangle. \tag{2.2}$$

Démonstration. — Remarquons d'abord que (2.2) résulte directement de (1) et qu'il suffit de démontrer (1) et (2) pour $u \in \mathfrak{A}$. Pour cela soit C une courbe simple, fermée et rectifiable contenant S dans son « intérieur », contenue dans D_u, et soit $f \in \mathcal{O}$, telle que $\operatorname{Re} f(\lambda) = u(\lambda)$ pour λ dans l' « intérieur » de C et sur C. Si $\lambda \notin \rho_e(T)$, il existe une suite $\{x_n\} \subset H$, $\|x_n\| = 1$, telle que $y_n = (\lambda I - T)x_n \to 0$; si $\lambda \in \sigma_p(T)$, on peut prendre $x_n = x_\lambda$. D'après la formule de Dunford (*voir* [2], p. 193), on a donc

$$\begin{aligned}
&|\langle u(T)x_n, x_n \rangle - u(\lambda)| \leqq |\langle f(T)x_n, x_n \rangle - f(\lambda)| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta)\,[\langle (\zeta I - T)^{-1}x_n, x_n \rangle - (\zeta - \lambda)^{-1}]\, d\zeta \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta)(\zeta - \lambda)^{-1} \langle (\zeta I - T)^{-1} y_n, x_n \rangle\, d\zeta \right| \leqq M(C)\,\|y_n\| \to 0.
\end{aligned}$$

(1) est donc démontré : si $\lambda \in \sigma_p(T)$, on a $x_n = x_\lambda$, donc d'après (1), $\langle u(T)x_\lambda, x_\lambda \rangle \to u(\lambda)$, ce qui est possible seulement si $\langle u(T)x_\lambda, x_\lambda \rangle = u(\lambda)$.

C. Q. F. D.

Nous allons chercher maintenant à donner les analogues des « spectral mapping theorems » de Dunford; les relations n'étant pas vraies dans le cas général quand $f \in \overline{\mathcal{O}}$ est arbitraire, nous nous bornons à un cas particulier, le seul que nous utiliserons dans la suite.

Théorème 2.1. — *Si* $\lambda' = f(\lambda)$ *est une transformation conforme* (2) *de* S *sur* S', *où* S' *est jordanien, alors :*

(1) $S' = f(S)$ *est un ensemble spectral de* $f(T)$;

(2) *si* $F(\lambda') \in \overline{\mathcal{O}}[S']$ $(U \in \overline{\mathfrak{A}}[S'])$, *alors*

$$F \circ f(\lambda) = F[f(\lambda)] \in \overline{\mathcal{O}}[S] \qquad (U \circ f(\lambda) \in \overline{\mathfrak{A}}[S])$$

---

(2) Dans tout ce qui suit, nous entendrons par transformation conforme d'un ensemble jordanien S sur un autre ensemble jordanien S', une transformation conforme de $\operatorname{Int} S$ sur $\operatorname{Int} S'$, prolongée en une transformation topologique (en vertu du théorème de Carathéodory) de S sur S'.

et

$$(2.3) \qquad F[f(T)] = F \circ f(T), \qquad (U[f(T)] = U \circ f(T)).$$

Comme (1) et la partie de (2) concernant la fonction $F \in \overline{\mathcal{O}}[S']$ sont un cas particulier d'un théorème de J. VON NEUMANN (*voir* [1], p. 266) et comme, d'autre part, la partie concernant $U \in \overline{\mathfrak{A}}[S']$ se démontre de la même manière, nous ne donnerons pas la démonstration de ce théorème.

THÉORÈME 2.2. — *Avec les hypothèses du théorème précédent, on a :*

(1) $\sigma[f(T)] = f[\sigma(T)]$;

(2) $\sigma_p[f(T)] = f[\sigma_p(T)]$

et

(3) *si* $\lambda \in \sigma_p(T)$ *et* $E_\lambda[T]$ *est la projection (orthogonale) de* H *sur l'espace des éléments propres en* λ *de* T, *alors*

$$(2.4) \qquad E_\lambda[T] = E_{f(\lambda)}[f(T)]$$

(où la signification de $E_{f(\lambda)}[f(T)]$ est évidente).

DÉMONSTRATION. — Soit $\{f_n(\lambda)\} \subset \mathcal{O}$, une suite de définition pour $f(T)$. Alors, d'après le « spectral mapping theorem » de DUNFORD, on a

$$f_n[\sigma(T)] = \sigma[f_n(T)].$$

Passant à la limite et utilisant le fait que le spectre d'un opérateur est un ensemble « continu » de l'opérateur ([7], p. 118), on obtient

$$f[\sigma(T)] \subset \sigma[f(T)].$$

Or, la fonction $f^{-1}(\lambda')$, $\lambda' \in S'$, appartient à $\overline{\mathcal{O}}[S']$ et, d'après (2.3), on a $f^{-1}[f(T)] = T$, donc

$$f^{-1}\{\sigma[f(T)]\} \subset \sigma\{f^{-1}[f(T)]\} = \sigma(T).$$

Cette inclusion, ajoutée à l'autre inclusion, donne la relation (1).

Posons

$$g_n(\lambda) = [f_n(\lambda_0) - f_n(\lambda)](\lambda_0 - \lambda)^{-1} \qquad (\lambda_0 \in S);$$

alors $g_n \in \mathcal{O}[S]$ et

$$f_n(\lambda_0)I - f_n(T) = g_n(T)(\lambda_0 I - T).$$

Si $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$ et $Tx_{\lambda_0} = \lambda_0 x_{\lambda_0}$, alors

$$[f_n(\lambda_0)I - f_n(T)]x_{\lambda_0} = 0;$$

passant à limite, on obtient que

$$f[\sigma_p(T)] \subset \sigma_p[f(T)] \qquad \text{et} \qquad E_{f(\lambda_0)}[f(T)]E_{\lambda_0}[T] = E_{\lambda_0}[T].$$

Appliquons ces résultats à la fonction $f^{-1}(\lambda')$ et à l'opérateur $f(T)$; (2) s'obtient comme (1), (3) résulte des relations

$$\begin{aligned}E_{\lambda_0}[T] &= E_{\lambda_0}[T]\,E_{f(\lambda_0)}[f(T)]\\ &= E_{f^{-1}[f(\lambda_0)]}\{f^{-1}[f(T)]\}\,E_{f(\lambda_0)}[f(T)] = E_{f(\lambda_0)}[f(T)].\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

3. La mesure harmonique-spectrale. — Soit $C[F]$ l'espace des fonctions continues à valeurs complexes, définies sur $F = \mathrm{Fr}\ S$ et $C_R[F] \subset C[F]$ le sous-ensemble des fonctions à valeurs réelles. A chaque $\rho(\zeta) \in C_R[F]$ correspond une seule fonction $u(\lambda) \in \overline{\mathfrak{A}}[S]$, telle que $u(\zeta) = \rho(\zeta)$ pour $\zeta \in F$. L'application $\rho(\zeta) \to u_\rho(\lambda)$ est additive, homogène, positive et isométrique (car $\| u \|_S = \| \rho \|_F$); comme $u_\rho \in \overline{\mathfrak{A}}$, l'opérateur $u_\rho(T)$ existe et l'on a, d'après la propriété 2.1,

$$u_{r\rho}(T) = r u_\rho(T), \tag{1}$$

$$u_{\rho_1+\rho_2}(T) = u_{\rho_1}(T) + u_{\rho_2}(T), \qquad \| u_\rho(T) \| \leqq \| \rho \|_F;$$

$$u_\rho(T) \geqq 0 \quad si \quad \rho \geqq 0, \tag{2}$$

où r est réel et ρ_1, ρ_2, $\rho \in C_R[F]$.

Si $\varphi \in C[F]$, posons par définition

$$u_\varphi(T) = u_{\mathrm{Re}\,\varphi}(T) + i u_{\mathrm{Im}\,\varphi}(T).$$

On voit sans peine que si λ_1 et λ_2 sont des nombres complexes et si φ_1, φ_2, $\varphi \in C[F]$, alors

$$u_{\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2}(T) = \lambda_1 u_{\varphi_1}(T) + \lambda_2 u_{\varphi_2}(T) \qquad u_{\overline{\varphi}}(T) = [u_\varphi(T)]^*$$

et $\| u_\varphi(T) \| \leqq 2 \| \varphi \|_F$ (3). Ces propriétés montrent que

$$\mu_{x,y}(\varphi) = \langle u_\varphi(T)x, y \rangle$$

est une famille semi-spectrale (4) ([8], p. 163) positive ($\mu_{x,x} \geqq 0$ pour tout $x \in H$). On en déduit qu'à toute fonction ψ borélienne, bornée, définie sur F correspond un opérateur $u_\psi(T)$ tel que

$$\langle u_\psi(T)x, y \rangle = \int_F \psi(\zeta)\, d\mu_{x,y}(\zeta) \qquad (x, y \in H).$$

Pour l'application $\psi \to u_\psi(T)$, toutes les propriétés du cas $\psi \in C[F]$ sont valables aussi pour ψ borélienne, bornée. Posons la

---

(3) Remarquons que $u_\lambda(T) = T$, $u_{\overline{\lambda}}(T) = T^*$.

(4) C'est-à-dire une famille qui vérifie les propriétés (a), (b), (c), (d) des familles spectrales de GODEMENT ([9], p. 70).

DÉFINITION 3.1. — *On appelle mesure harmonique-spectrale de T, la famille d'opérateurs $\omega(T;\ \beta,\ S)$ définis pour tout ensemble borélien $\beta \subset F$, par $\omega(T;\ \beta,\ S) = u_{\varphi_\beta}(T)$, où φ_β est la fonction caractéristique de β.*

Évidemment, $\omega(T;\ \beta,\ S)$ est uniquement définie aussi par

$$(3.1)\qquad \begin{cases} \langle u_\varphi(T)x,\ y\rangle = \displaystyle\int_F \varphi(\zeta)\langle \omega(T;\ d\alpha_\zeta,\ S)x,\ y\rangle \\ \qquad\qquad (\varphi \in C[F],\ x,\ y \in H). \end{cases}$$

PROPRIÉTÉ 3.1. — (1) $\omega(T;\ \beta,\ S)$ *est additif par rapport à* $\beta \subset F$;

(2) $\omega(T;\ \beta,\ S)$ *est un opérateur symétrique, positif* $\leqq I$;

(3) *si* $0 \leqq \rho_n(\zeta) \in C[F]$ *tend en croissant, vers* $\varphi_\alpha(\zeta)$, α *étant un arc ouvert de* F, *alors* $u_{\rho_n}(T)x \to \omega(T;\ \alpha,\ S)x$, $x \in H$.

DÉMONSTRATION. — (1) et (2) découlent du fait que $(\mu_{x,y})$ est une famille semi-spectrale positive et que $\mu_{x,x}(\varphi_F) = \|x\|^2$. Du théorème de BEPPO LEVI, il résulte que $\langle u_{\rho_n}(T)x,\ x\rangle \uparrow \langle u_{\varphi_\alpha}(T)x,\ x\rangle$ et (3) découle du théorème de convergence au sens fort de suites monotones d'opérateurs positifs ([3], p. 261). C. Q. F. D.

On peut maintenant justifier la dénomination de mesure harmonique-spectrale donnée à $\omega(T;\ \beta,\ S)$; en effet, $u_{\rho_n}(\lambda) \uparrow \omega(\lambda;\ \alpha,\ S)$ dans S, où $\omega(\lambda;\ \alpha,\ S)$ est la mesure harmonique de α par rapport à $\mathrm{Int}\, S$ ([10], chap. II, § 3).

La propriété suivante découle directement de la propriété 2.2 et 3.1 (3) :

PROPRIÉTÉ 3.2. — (1) *Si α est un arc ouvert de F, alors*

$$(3.2)\qquad \sup_{\lambda \notin \rho_e(T)} \omega(\lambda;\ \alpha,\ S) \leqq \sup_{\|x\|=1} \langle \omega(T;\ \alpha,\ S)x,\ x\rangle,$$

où, sur F, $\omega(\zeta;\ \alpha,\ S) = \varphi_\alpha(\zeta)$;

(2) *Si* $\lambda \in \sigma_p(T)$ *et* $Tx_\lambda = \lambda x_\lambda$, $\|x_\lambda\| = 1$, *on a*

$$\langle \omega(T;\ \alpha,\ S)x_\lambda,\ x_\lambda\rangle = \omega(\lambda;\ \alpha,\ S) \quad (5).$$

On sait que la transformation conforme de S sur un autre ensemble jordanien S', conserve les mesures harmoniques ([10], chap. III, § 1). Pour les mesures harmoniques-spectrales on a une propriété analogue :

PROPRIÉTÉ 3.3. — *Si $\lambda' = f(\lambda)$ est une transformation conforme de S sur S', où S' est jordanien, alors pour tout $\beta \subset F$, β borélien, on a*

$$(3.3)\qquad \omega[f(T);\ \beta',\ S'] = \omega(T;\ \beta,\ S), \qquad \text{où}\quad \beta' = f(\beta) \subset F' = \mathrm{Fr}\, S'.$$

---

(5) Cette propriété est aussi vraie si α (considéré comme ensemble linéaire) est un ouvert de F.

Démonstration. — β' sera borélien, puisque f est une transformation topologique de F sur F'; vu le théorème **2.1** (1), S' est un ensemble spectral de $f(T)$, donc on peut considérer la mesure harmonique-spectrale $\omega[f(T); \beta', S']$. Il suffira de montrer (**3**.3) pour des arcs ouverts $\alpha \subset F$, car ils forment une base de la famille des ensembles boréliens de F. Or, dans ce cas particulier, la relation (**3**.3) résulte aisément du théorème **2.1**, (2) et de la propriété **3.1**, (3). C. Q. F. D.

La notion de mesure harmonique-spectrale contient celle de mesure spectrale des opérateurs symétriques ou unitaires. En effet, on a le

Théorème 3.1. — *L'opérateur T est normal et $\sigma(T) \subset F$, si et seulement si $\omega(T; \beta, S)$ sont des projections. Dans ce cas, si $E(\beta)$ ($\beta \subset F$, β borélien) est la mesure spectrale de l'opérateur T, on a*

$$\omega(T; \beta, S) = E(\beta). \tag{3.4}$$

Démonstration. — Si $\sigma(T) \subset F$, T normal et $E(\beta)$ est la mesure spectrale de T, alors du calcul fonctionnel pour les opérateurs normaux ([**11**], p. 315) il résulte que

$$\omega(T; \beta, S) = u_{\varphi_\beta}(T) = E(\beta).$$

Inversement, si $\omega(T; \beta, S) = P(\beta)$ sont des projections, alors des propriétés de la mesure harmonique-spectrale, on déduit que $\beta_1 \subset \beta_2$ entraîne $P(\beta_1) \leqq P(\beta_2)$. Mais dans ce cas $P(\beta)$ est une mesure spectrale, donc $(\mu_{x,y})$, où

$$\mu_{x,y}(\beta) = \langle \omega(T; \beta, S)x, y \rangle = \langle P(\beta)x, y \rangle,$$

est une famille spectrale ([**8**], p. 185); donc

$$u_\varphi(T)\, u_\psi(T) = u_{\varphi\psi}(T) = u_\psi(T)\, u_\varphi(T) \qquad (\varphi, \psi \in C[F]).$$

Si l'on prend $\varphi(\zeta) = \zeta$, $\psi(\zeta) = \bar{\zeta}$, on a $TT^* = T^*T$ et pour $\varphi(\zeta) = \lambda - \zeta$, $\psi(\zeta) = (\lambda - \zeta)^{-1}$, où $\lambda \notin F$, la même égalité entraîne que $\sigma(T) \subset F$.

C. Q. F. D.

Théorème 3.2. — *Si pour un arc $\alpha \subset F$, $\omega(T; \alpha, S) = 0$, alors T est normal et $\sigma(T) \subset F - \alpha$.*

Démonstration. — Soit $\lambda' = f(\lambda)$ la transformation conforme de S sur $S' = \{\lambda' : |\lambda'| \leqq 1\}$, alors si $T' = f(T)$, S' est un ensemble spectral de T' (donc $\|T'\| \leqq 1$) et $\omega(T'; \alpha', S') = \omega(T; \alpha, S) = 0$, où $\alpha' = f(\alpha)$. Nous allons montrer que dans ces conditions T' est unitaire et $\sigma(T') \subset F' - \alpha'$. Cette dernière assertion est immédiate. En effet, de (**3**.2) il s'ensuit

$$\complement \rho_e(T') \subset \{\lambda' : \omega(\lambda'; \alpha', S') = 0\} = \mathrm{F}' - \alpha'$$

et comme aucun point de $\rho_e(T')$ ne peut être point frontière de $\sigma(T')$ (conséquence de la première équation résolvante [7], p. 100), il résulte que

$$\rho_e(T') = \rho(T'), \qquad \text{donc} \quad \sigma(T') = \complement \rho_e(T') \subset F' - \alpha'.$$

Pour démontrer que T' est normal, soit $v(\lambda')$ une fonction appartenant à $\bar{\mathfrak{A}}[S']$, satisfaisant aux conditions :

(1) la dérivée $\dfrac{\partial v}{\partial s'}$ (où s' est la longueur d'arc, sur $F' = \operatorname{Fr} S'$) est continue;

(2) $v(\lambda') \geqq \omega(\lambda'; \alpha'_1, S')$, où α'_1 est un arc contenu dans l'intérieur de α', et

(3) $F' - \alpha'$ est contenu dans l'intérieur de $Z = \{\lambda' : v(\lambda') = 0\}$, considéré comme ensemble linéaire sur F'. Il existe (cas particulier du problème classique de Riemann-Hilbert [12]) une fonction $u \in \bar{\mathfrak{A}}[S']$, telle que

$$f(\lambda') = u(\lambda') + iv(\lambda') \in \bar{\mathcal{O}}[S'].$$

Le principe de prolongement de Schwarz, nous assure l'existence des dérivées $\dfrac{\partial u}{\partial s'}, \dfrac{\partial v}{\partial n'}, \dfrac{\partial \omega}{\partial n'}$ sur Z. On a $\dfrac{\partial u}{\partial s'} = \dfrac{\partial v}{\partial n'} \geqq \dfrac{\partial \omega}{\partial n'}$; or si l'on utilise l'interprétation géométrique de $\omega(\lambda'; \alpha'_1, S')$ ([10], chap. I, § 1) on obtient que $\left.\dfrac{\partial \omega}{\partial n'}\right|_{\zeta \in F' - \alpha'} > 0$, ce qui entraîne

$$u(\zeta') \neq u(\zeta'') \qquad \text{pour} \quad \zeta' \neq \zeta'', \ \zeta', \zeta'' \in F' - \alpha'.$$

Soit $\rho(\zeta)$ la restriction de $u(\lambda')$ à $F' - \alpha'$ et soit $\mathfrak{U}$ l'algèbre engendrée par $\rho(\zeta)$. Le théorème de Stone-Weierstrass [13], montre que toute fonction réelle continue sur $F' - \alpha'$ est limite uniforme de fonctions de $\mathfrak{U}$. D'autre part, si $r(\zeta) \in \mathfrak{U}$, on a $r(\zeta) = P[\rho(\zeta)]$, où $P(.)$ est un polynome à coefficients réels et $r(\zeta) = P[f(\zeta)]$ pour $\zeta \in F' - \alpha'$, où $f(\lambda') = u(\lambda') + iv(\lambda')$. Comme, pour $u(\lambda') \in \bar{\mathfrak{A}}[S']$, on a

$$\begin{aligned} \langle u(T')x, y \rangle &= \int_{F'} u(\zeta) \langle \omega(T'; d\alpha'_\zeta, S')x, y \rangle \\ &= \int_{F' - \alpha'} u(\zeta) \langle \omega(T'; d\alpha'_\zeta, S')x, y \rangle \end{aligned}$$

et comme, d'autre part, une fonction $r \in C_R[F' - \alpha']$ peut être prolongée en une fonction continue sur F', ayant la même borne que $r(\zeta)$, la relation antérieure nous donne pour chaque $r \in C_R[F' - \alpha']$ un opérateur $u_r(T')$, tel que

$$(1) \quad \| u_r(T') \| \leqq \| r \|_{F' - \alpha'}$$

et

$$(2) \qquad u_r(T') = u(T')$$

si $u(\zeta)=r(\zeta)$ pour $\zeta\in F'-\alpha'$. Pour $r\in\mathfrak{U}$, on a

$$\begin{aligned}\langle u_r(T')x, y\rangle &= \int_{F'-\alpha'} P[f(\zeta)]\langle\omega(T';\, d\alpha'_\zeta,\, S')x, y\rangle \\ &= \langle P\circ f(T')x, y\rangle = \langle P[f(T')]x, y\rangle,\end{aligned}$$

donc $u_r(T')=P[f(T')]$. Soit maintenant $r_1, r_2\in\mathfrak{U}$, $r_1=P_1(f)$, $r_2=P_2(f)$ pour $\zeta\in F'-\alpha'$; alors $r_1r_2(\zeta)=P_1P_2[f(\zeta)]$, donc

$$u_{r_1r_2}(T')=P_1P_2[f(T')]=P_1[f(T')]\,P_2[f(T')]=u_{r_1}(T')\,u_{r_2}(T').$$

L'algèbre $\mathfrak{U}$ étant dense dans $C_R[F'-\alpha']$, l'isomorphisme algébrique de r à $u_r(T')$ peut être prolongé par continuité sur toute $C_R[F'-\alpha']$. Mais $\mathrm{Re}\,\zeta'\,\mathrm{Im}\,\zeta'=\mathrm{Im}\,\zeta'\,\mathrm{Re}\,\zeta'$, entraîne $\mathrm{Re}\,T'\,\mathrm{Im}\,T'=\mathrm{Im}\,T'\,\mathrm{Re}\,T'$; il en résulte que $T'=\mathrm{Re}\,T'+i\,\mathrm{Im}\,T'$ est normal.

Donc T' est un opérateur unitaire à spectre $\sigma(T')\subset F'-\alpha'$; d'après le théorème 2.2, (1), $T=f^{-1}(T')$ aura son spectre situé dans $F-\alpha$. D'autre part, le théorème 3.1 montre que $\omega(T';\alpha', S')=E(\alpha')$, où $E(\alpha')$ est la mesure spectrale de l'opérateur unitaire T'. Comme

$$\omega(T;\,\beta,\, S)=\omega(T';\,\beta',\, S')=E(\beta') \qquad [\beta'=f(\beta)],$$

il en résulte que T est normal. C. Q. F. D.

Pour pouvoir énoncer le théorème suivant, nous poserons la

Définition 3.2. — *Un point $\zeta\in F$ est point de discontinuité pour la mesure harmonique-spectrale si* $\omega(T;\,\{\zeta\},\, S)\neq 0$.

Passons maintenant au théorème principal sur les mesures harmoniques-spectrales :

Théorème 3.3. — *Un point $\zeta\in F$ est point de discontinuité pour la mesure harmonique-spectrale si et seulement si $\zeta\in\sigma_p(T)$; dans ce cas*

$$\omega(T;\,\{\zeta\},\, S)=E_\zeta[T]$$

(où $E_\zeta[T]$ a été défini dans le théorème 2.2, (3)).

Démonstration. — Soit $\gamma\subset F$ un ouvert (considéré comme ensemble linéaire) et soit $\zeta\in\gamma\cap\sigma_p(T)$; alors si $Tx_\zeta=\zeta x_\zeta$ et $\|x_\zeta\|=1$, d'après la propriété 3.2, (2), on a

$$\langle\omega(T;\,\gamma,\, S)x_\zeta, x_\zeta\rangle=\omega(\zeta;\,\gamma,\, S)=1;$$

mais

$$\|\omega(T;\,\gamma,\, S)\|\leqq 1 \qquad \text{et} \qquad \|x_\zeta\|=1$$

et, d'après l'inégalité de Schwarz, l'égalité antérieure est possible seulement si $\omega(T;\,\gamma,\, S)x_\zeta=x_\zeta$, donc

$$\omega(T;\,\gamma,\, S)E_\zeta=E_\zeta, \qquad E_\zeta=E_\zeta[T]. \tag{3.5}$$

En considérant une suite $\{\alpha_n\}$ d'arcs $\alpha_1 \supset \alpha_2 \supset \ldots$ convergeant vers ζ, on déduit de (3.5) que $\zeta \in \sigma_p(T)$ entraîne

$$\omega(T;\{\zeta\}, S) E_\zeta = E_\zeta \neq 0,$$

donc ζ est un point de discontinuité de $\omega(T;\beta, S)$ et

$$E_\zeta = \omega(T;\{\zeta\}, S) E_\zeta = E_\zeta \omega(T;\{\zeta\}, S). \tag{3.6}$$

Supposons maintenant que ζ soit un point de discontinuité de $\omega(T;\beta, S)$. Nous allons montrer que, dans ce cas,

$$(\zeta I - T)\,\omega(T;\{\zeta\}, S) = 0.$$

Pour cela, on doit démontrer qu'*il existe une suite $f_n(\lambda)$ de fonctions, telle que :*

(1) $\{f_n(\lambda)\} \subset \overline{\mathcal{O}}[S]$;

(2) *$f_n(\lambda)$ converge uniformément vers zéro sur tout compact de $S - \{\zeta\}$;*

(3) *si $f_n(\lambda) = u_n(\lambda) + iv_n(\lambda)$, alors $\{u_n(\lambda)\}$ est une suite décroissante convergeant vers $\varphi_{\{\zeta\}}$ et $v_n(\lambda)$ converge vers zéro, uniformément sur S.*

Désignons par Σ, l'ensemble des points

$$\mu = s + it, \qquad 0 \leq s \leq 1, \qquad -1 + \sqrt{s(2-s)} \leq t \leq 1 - \sqrt{s(2-s)}$$

et soit $\mu = \mu(\lambda)$ la transformation conforme de S sur Σ, telle que $\mu(\zeta) = 1$. Désignons par $\omega(\mu;\delta)$ $\left(\delta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ la mesure harmonique de l'arc $(e^{-i\delta}, e^{i\delta})$ par rapport à $\{\mu : |\mu| < 1\}$ et par $\overline{\omega}(\mu;\delta)$ sa conjuguée harmonique. Pour $\delta \downarrow 0$, $\omega(\mu;\delta)$ est une suite décroissante, convergeant vers zéro sur tout compact de $\{\mu : |\mu| \leq 1, \mu \neq 1\}$ et $\omega(1;\delta) = 1$. On a

$$\overline{\omega}(\mu;\delta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta} \operatorname{Im} \frac{e^{i\theta}+\mu}{e^{i\theta}-\mu}\,d\theta = -\frac{1}{\pi}\log\left|\frac{e^{i\delta}-\mu}{e^{-i\delta}-\mu}\right|.$$

En considérant les cercles d'Apollonius

$$|(e^{i\delta}-\mu)(e^{-i\delta}-\mu)^{-1}| = \text{const.},$$

qui passent par les points (0, 1), resp. (0, −1), on obtient par des calculs simples que pour tout $\mu \in \Sigma$ et $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$,

$$\sqrt{\frac{1-\sin\delta}{1+\sin\delta}} \leq \left|\frac{e^{i\delta}-\mu}{e^{-i\delta}-\mu}\right| \leq \sqrt{\frac{1+\sin\delta}{1-\sin\delta}}.$$

Donc pour tout $\mu \in \Sigma$ et $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, on a

$$|\overline{\omega}(\mu;\delta)| \leq \frac{1}{\pi}\log\sqrt{\frac{1+\sin\delta}{1-\sin\delta}}.$$

Cette dernière fonction étant une fonction croissante de δ pour $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, il résulte que $\bar{\omega}(\mu;\, \delta) \to 0$, uniformément sur Σ, pour $\delta \downarrow 0$. Si l'on pose maintenant

$$f_n(\lambda) = \omega\left[\mu(\lambda);\, \frac{1}{n}\right] + i\bar{\omega}\left[\mu(\lambda);\, \frac{1}{n}\right],$$

on obtient précisément la suite de fonctions satisfaisant aux conditions (1)-(3).

Les propriétés du calcul fonctionnel établi entraînent

$$\|(\zeta I - T) f_n(T)\| \to 0, \qquad \text{car} \quad (\zeta - \lambda) f_n(\lambda) \to 0,$$

uniformément sur S, et $\| v_n(T) \| \to 0$,
donc

$$\|(\zeta I - T)\, u_n(T)\| \to 0 \quad \text{pour } n \to \infty.$$

Mais sur F, $u_n \to \varphi_{\{\zeta\}}$, ce qui entraîne [*voir* la démonstration de la propriété **3.1**, (3)] que

$$u_n(T)x \to \omega(T;\, \{\zeta\},\, S)x,$$

donc

$$(\zeta I - T)\, \omega(T;\, \{\zeta\},\, S)x = 0, \qquad (x \in H).$$

Cette relation donne

$$\zeta \in \sigma_p(T) \qquad \text{et} \qquad E_\zeta \omega(T;\, \{\zeta\},\, S) = \omega(T;\, \{\zeta\},\, S).$$

Compte tenu de (**3.6**), on obtient

$$E_\zeta = \omega(T;\, \{\zeta\},\, S).$$

C. Q. F. D.

Donnons une application directe de ces résultats.

Proposition 3.1. — (1) *Si* $\zeta_1 \neq \zeta_2$, $\zeta_1, \zeta_2 \in F \cap \sigma_p(T)$, *alors*

$$E_{\zeta_1}[T]\, E_{\zeta_2}[T] = 0;$$

(2) *Si* $\zeta \in F$, $\zeta \notin \sigma_p(T)$, $(\zeta I - T)^{-1}$ *est à domaine dense dans* H.

Démonstration. — Soient α_1 et α_2 des arcs ouverts tels que

$$\alpha_1 \cap \alpha_2 = \emptyset \qquad \text{et} \qquad \zeta_1 \in \alpha_1, \quad \zeta_2 \in \alpha_2.$$

Alors, d'après (**3.5**), on a

$$\omega(T;\, \alpha_1 \cup \alpha_2,\, S)\, E_{\zeta_2} = \omega(T;\, \alpha_2,\, S)\, E_{\zeta_2} = E_{\zeta_2},$$

d'où l'additivité de la mesure harmonique-spectrale entraîne

$$\omega(T;\, \alpha_1,\, S)\, E_{\zeta_2} = 0,$$

donc

$$E_{\zeta_1}E_{\zeta_2} = [E_{\zeta_1}\omega(T;\, \alpha_1,\, S)]\,E_{\zeta_2} = E_{\zeta_1}[\omega(T;\, \alpha_1,\, S)\,E_{\zeta_2}] = 0.$$

Pour démontrer (2), remarquons que $\overline{S} = \{\lambda : \overline{\lambda} \in S\}$ est un ensemble spectral de T^*, et que

$$\omega(T^*;\, \overline{\beta},\, \overline{S}) = \omega(T;\, \beta,\, S) \qquad \text{pour} \quad \beta \subset F.$$

Si $(\zeta I - T)^{-1}$ n'est pas à domaine dense, il résulte que

$$\overline{\zeta} \in \sigma_p(T^*), \qquad \text{donc} \quad \omega(T^*;\, \{\overline{\zeta}\},\, \overline{S}) \neq 0;$$

l'égalité

$$\omega(T;\, \{\zeta\},\, S) = \omega(T^*;\, \{\overline{\zeta}\},\, \overline{S})$$

et le théorème 3.3 donnent que $\zeta \in \sigma_p(T)$. C. Q. F. D.

4. L'extension du calcul fonctionnel (6). — Soit $\overline{\mathcal{A}}_e[S;\, T]\,(\overline{\mathcal{O}}_e[S;\, T])$ l'ensemble des fonctions harmoniques (resp. holomorphes) dans S, bornées sur S, avec un nombre fini de points de discontinuité (où la fonction n'est pas obligatoirement définie) situés sur F et qui ne sont pas des valeurs propres de T. Notre but est de prolonger le calcul fonctionnel établi pour des fonctions de $\overline{\mathcal{A}}$ et $\overline{\mathcal{O}}$ à des fonctions de $\overline{\mathcal{A}}_e$ et $\overline{\mathcal{O}}_e$.

Soit $L^\infty[F;\, T]$ l'ensemble des fonctions bornées, mesurables et définies presque partout par rapport à chaque mesure $\mu_{x,y}$, $x,\, y \in H$,

$$\mu_{x,y}(\beta) = \langle \omega(T;\, \beta,\, S)x,\, y \rangle \qquad (\beta \subset F,\ \beta \text{ borélien}),$$

$L^\infty_R[F;\, T]$ le sous-ensemble des fonctions réelles de $L^\infty[F;\, T]$ et $C_e[F;\, T]$ l'ensemble des fonctions bornées, définies et continues sur F à l'exception d'un nombre fini (dépendant de la fonction) de points, qui ne sont pas des valeurs propres de T. D'après le théorème 3.3, on a $C_e[F;\, T] \subset L^\infty[F;\, T]$. Pour tout $\varphi \in L^\infty[F;\, T]$, la relation

$$\langle u_\varphi(T)x,\, y \rangle = \int_F \varphi(\zeta)\, d\mu_{x,y}(\zeta)$$

définit un opérateur $u_\varphi(T)$ de H. On a :

(1) Si $\varphi,\, \psi \in L^\infty$, et μ est complexe, alors

$$u_{\varphi+\psi}(T) = u_\varphi(T) + u_\psi(T), \qquad u_{\mu\varphi}(T) = \mu u_\varphi(T)$$

et

$$u_{\overline{\varphi}}(T) = [u_\varphi(T)]^*.$$

(6) La mesure harmonique-spectrale, de même que ce calcul fonctionnel, sont en étroite liaison avec les prolongements au sens de Sz. NAGY [14] des opérateurs. On peut obtenir des résultats nouveaux dans cette direction à l'aide de la mesure harmonique-spectrale, mais on peut aussi, comme nous l'a obligeamment indiqué M. Sz. NAGY, déduire ces résultats d'un théorème sur le prolongement d'une contraction ([14], p. 13, th. III). Toute cette étude sera faite ailleurs.

Comme la mesure semi-spectrale $\mu_{x,y}$ est positive et $\| x \|^2 = \mu_{x,x}(\varphi_F)$, on a aussi :

(2) $\varphi \geqq 0$ entraîne $u_\varphi(T) \geqq 0$;

(3) Si $\varphi \in L_R^\infty$, alors

$$\| u_\varphi(T) \| \leqq \operatorname*{vrai\,max}_{\zeta \in F} | \varphi(\zeta) | \quad ([7])$$

et

$$(4) \qquad \| u_\varphi(T) \| \leqq 2 \operatorname*{vrai\,max}_{\zeta \in F} | \varphi(\zeta) |,$$

où $\varphi \in L^\infty$; cette dernière assertion résulte de (1), (3) et du fait que $| \operatorname{Re} \varphi |$, $| \operatorname{Im} \varphi | \leqq | \varphi |$.

Nous aurons besoin d'une inégalité simple : *Soit A un opérateur positif et B symétrique, tel que $-A \leqq B \leqq A$, alors*

$$(4.1) \qquad \| Bx \| \leqq 3 \sqrt{\| A \| \langle Ax, x \rangle} \qquad (x \in H).$$

Comme cette inégalité découle immédiatement de l'inégalité de Schwarz pour les opérateurs positifs, nous passons au

Théorème 4.1. — *Si $\varphi_n(\zeta) \in L^\infty[F;\, T]$ satisfont aux conditions :*

(1) *La suite $\{ \varphi_n(\zeta) \}$ est également bornée* ([8]);

(2) *En dehors d'un nombre fini de points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$* (c'est-à-dire sur tout compact qui ne contient pas ces points), *les fonctions $\varphi_n(\zeta)$ convergent uniformément* ([8]);

(3) $\lambda_r \notin \sigma_p(T)$ $(r = 1, 2, \ldots, N)$;
alors $u_{\varphi_n}(T)x \to u_\varphi(T)x$, pour tout $x \in H$, où

$$\varphi(\zeta) = \lim \varphi_n(\zeta) \in L^\infty[F;\, T].$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer le théorème pour des fonctions $\varphi_n \in L_R^\infty$. Soit $\theta_n(\zeta) = \varphi_n(\zeta) - \varphi(\zeta)$ et soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ des arcs tels que $\lambda_r \in \beta_r$ et $\sum \langle \omega(T;\, \beta_r,\, S)x,\, x \rangle \leqq \varepsilon''$, $\varepsilon'' > 0$ donné; comme $\theta \to 0$ uniformément ([8]) sur $F - \bigcup_r \beta_r$, il existe un $N' = N_{\varepsilon', \varepsilon'', x}$ tel que pour $n > N'$ on ait $| \theta_n(\zeta) | < \varepsilon'$ $(\varepsilon' > 0$ donné) pour tout ([8]) $\zeta \in F - \bigcup_r \beta_r$. Mais

---

([7]) Le « vrai maximum » étant considéré par rapport à la famille spectrale $(\mu_{x,y})$, c'est-à-dire par rapport à chaque $\mu_{x,y}$, $x, y \in H$.

([8]) On sous-entend toujours : presque partout par rapport à $(\mu_{x,y})$.

$\mu_{x,x}(\beta) = \langle \omega(T; \beta, S)x, x \rangle$, donc pour tout $n > N'$

$$-\varepsilon' \omega\left(T; F - \bigcup_r \beta_r, S\right) - M \sum_r \omega(T; \beta_r, S) \leqq u_{\theta_n}(T)$$

$$\leqq \varepsilon' \omega\left(T; F - \bigcup_r \beta_r, S\right) + M \sum_r \omega(T; \beta_r; S),$$

où $M \geqq |\theta_n(\zeta)|$, $\zeta \in F$ [8] [l'existence de M est assurée par (1)]. D'après l'inégalité (4.1), on obtient

$$\| u_{\theta_n}(T)x \|^2 \leqq 9(\varepsilon' + M)(\varepsilon' \| x \|^2 + M\varepsilon'') \qquad (n > N'),$$

ce qui entraîne $\| u_{\theta_n}(T)x \| \to 0$ pour $n \to \infty$. Mais

$$u_{\theta_n}(T) = u_{\varphi_n}(T) - u_{\varphi}(T), \qquad \text{donc} \quad u_{\varphi_n}(T)x \to u_{\varphi}(T)x.$$

C. Q. F. D.

Corollaire 4.1. — *Pour $\varphi \in C_e[F; T]$, $u_\varphi(T)$ existe comme intégrale de Stieltjes-Riemann au sens fort* [c'est-à-dire que les sommes de Stieltjes-Riemann $\sum \varphi(\zeta_k)\,\omega(T; \alpha_k, S)x$, où $\zeta_k \in \alpha_k$ et où $\{\alpha_k\}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$ est une partition en arcs de F, convergent vers $u_\varphi(T)x$, pour la norme de la partition tendant vers zéro, et cela pour tout $x \in H$]; *si $\varphi \in C[F]$, alors l'intégrale existe en norme.*

Démonstration. — On n'a qu'à poser $\varphi_{(\delta)}(\zeta) = \varphi(\zeta_k)$ pour $\zeta \in \alpha_k$, où (δ) est la partition $F = \bigcup \alpha_k$ de F, et remarquer que

$$\sum \varphi(\zeta_k)\,\omega(T; \alpha_k, S) = u_{\varphi_{(\delta)}}(T);$$

en effet, si $\varphi \in C_e[F; T]$, $\varphi_{(\delta)} \to \varphi$ au sens du théorème 4.1, pour la norme de (δ) tendant vers zéro, et si $\varphi \in C[F]$, alors la convergence étant uniforme sur F, $u_{\varphi_{(\delta)}}(T) \to u_\varphi(T)$ en norme [*voir* § 4, (4)].

Passons maintenant à la construction du calcul fonctionnel pour $\overline{\mathfrak{A}}_e$ et $\overline{\mathcal{O}}_c$. En ce qui concerne $\overline{\mathfrak{A}}_e$, les choses sont simples. A chaque fonction $\rho \in C_e[F; T]$ réelle, correspond une seule fonction $u_\rho(\lambda) \in \overline{\mathfrak{A}}_e$, telle que $u_\rho(\zeta) = \rho(\zeta)$, pour $\zeta \in F$. Inversement, la restriction à F de $u(\lambda) \in \overline{\mathfrak{A}}_e$ appartient à $C_e[F] \cap L^\infty_R$. Cette application biunivoque de $\overline{\mathfrak{A}}_e$ à $C_e \cap L^\infty_R$ est linéaire, positive et isométrique si l'on munit $\overline{\mathfrak{A}}_e$ et $C_e \cap L^\infty_R$ de normes égales au maximum du module de ces fonctions sur S (resp. sur F). De cette manière, on peut poser la

DÉFINITION 4.1. — (1) *Soit* $u(\lambda) \in \overline{\mathfrak{A}}_e$ *et soit* $\rho(\zeta)$ *la restriction à* F *de* $u(\lambda)$, *alors par définition* $u(T) = u_\rho(T)$;

(2) *Soit* $f(\lambda) \in \overline{\mathcal{O}}_e$ *et* $\varphi(\zeta)$ *la restriction de* f *à* F, *alors par définition* $f(T) = u_\varphi(T)$.

Évidemment, on a la

PROPRIÉTÉ 4.1. — (1) $u(T)$ *est symétrique;*

(2) *Si* r *est réel et* u, u_1, $u_2 \in \overline{\mathfrak{A}}_e$, *alors*

$$(u_1 + u_2)(T) = u_1(T) + u_2(T) \qquad \text{et} \qquad (ru)(T) = r\,u(T);$$

(3) *Si* $u \geqq 0$, *alors* $u(T) \geqq 0$;

(4) $\| u(T) \| \leqq \| u \|_S$;

(5) *Si* μ *est complexe et* f, f_1, $f_2 \in \overline{\mathcal{O}}_e$, *alors*

$$(f_1 + f_2)(T) = f_1(T) + f_2(T), \qquad (\mu f)(T) = \mu f(T)$$

et

$$(\mathrm{Re} f)(T) = \mathrm{Re} f(T).$$

De considérations de théorie des fonctions [9] résulte que pour tout $f \in \overline{\mathcal{O}}_e \big(u \in \overline{\mathfrak{A}}_e\big)$, il existe une suite

$$\{ f_{(n)} \} \subset \mathcal{O} (\{ u_{(n)} \} \subset \mathfrak{A}),$$

telle que

$$(fg)_{(n)} = f_{(n)} g_{(n)}, \qquad \| f_{(n)} \|_S \leqq \| f \|_S \qquad \text{et} \qquad f_{(n)}(\zeta) \to f(\zeta) \quad (u_{(n)}(\zeta) \to u(\zeta))$$

au sens du théorème 4.1. On a la

PROPRIÉTÉ 4.2. — (1) *Pour* $f \in \overline{\mathcal{O}}_e$, *on a* $\| f(T) \| \leqq \| f \|_S$ *et*

(2) *si* f, $g \in \overline{\mathcal{O}}_e$, *alors* $fg(T) = f(T) g(T)$.

DÉMONSTRATION. — (1) résulte du $\| f_{(n)}(T) x \| \leqq \| f \|_S \| x \|$ et du théorème 4.1. Comme $(fg)_{(n)}$, $f_{(n)}$, $g_{(n)} \in \mathcal{O}$, on a

$$(fg)_{(n)}(T) = f_{(n)}(T) g_{(n)}(T),$$

---

(9) D'après un théorème de RADÓ [15] sur les représentations conformes et du théorème classique d'Antoine, il résulte qu'il existe une suite $\{ S_n \}$ d'ensembles jordaniens ($S \subset \mathrm{Int}\, S_n$) et une suite $\{ \mu_n(\lambda) \}$ de transformations conformes de S_n sur $\{ \mu : | \mu | \leqq 1 \}$, convergeant uniformément sur S vers $\mu(\lambda)$, $\mu(\lambda)$ étant une transformation conforme de S sur $\{ \mu : | \mu | \leqq 1 \}$.

Si $\lambda(\mu)$ est la fonction inverse de $\mu(\lambda)$, en posant

$$f_{(n)}(\lambda) = f \{ \lambda [\mu_n(\lambda)] \} \qquad \text{et} \qquad u_{(n)}(\lambda) = u \{ \lambda [\mu_n(\lambda)] \},$$

on trouve les suites satisfaisant aux propriétés exigées.

et, d'après le théorème 4.1, $(fg)_{(n)}(T)$, $f_{(n)}(T)$, $g_{(n)}(T)$ convergent au sens fort vers $fg(T)$, $f(T)$, $g(T)$; mais alors le produit $f_{(n)}(T)g_{(n)}(T)$ converge faiblement vers $f(T)g(T)$, d'où l'égalité.

PROPRIÉTÉ 4.3. — *Si $\lambda' = f(\lambda)$ est une transformation conforme de S sur S', où S' est jordanien, alors si*

$$F(\lambda') \in \overline{\mathcal{O}}_e[S'; f(T)], \qquad (U \in \overline{\mathfrak{A}}_e[S'; f(T)]),$$

on a

$$F \circ f(\lambda) \in \overline{\mathcal{O}}_e[S; T], \qquad (U \circ f(\lambda) \in \overline{\mathfrak{A}}_e[S; T])$$

et

$$F[f(T)] = F \circ f(T), \qquad (U[f(T)] = U \circ f(T)).$$

DÉMONSTRATION. — La première assertion découle du théorème 2.2, (2), donc $F \circ f(T)$ et $U \circ f(T)$ existent. Si l'on conserve le sens de $F_{(n)}$ en remplaçant seulement S par S' d'après le théorème 2.1, (2), on a

$$F_{(n)}[f(T)] = F_{(n)} \circ f(T).$$

Mais $F_{(n)}(\zeta')$ et $F_{(n)} \circ f(\zeta)$ convergent au sens du théorème 4.1 vers $F(\zeta')$, resp. $F \circ f(\zeta)$ $(\zeta' \in \mathrm{Fr}\, S',\ \zeta \in \mathrm{Fr}\, S)$, donc, d'après le même théorème

$$F_{(n)}[f(T)]x \to F[f(T)]x, \qquad F_{(n)} \circ f(T)x \to F \circ f(T)x$$

pour tout $x \in H$, d'où l'égalité cherchée ; de même pour

$$U[f(T)] = U \circ f(T).$$

C. Q. F. D.

5. Le théorème de Yosida et Hille. — Une application de ces résultats sera le théorème de YOSIDA [16] et HILLE sur les semi-groupes de contractions. On sait que si $T_t (t \geq 0)$ est un semi-groupe fortement continu et $T_t \to I$ pour $t \to 0$, alors son générateur A ([3], p. 394) est une transformation linéaire, fermée, à domaine D_A dense dans H. On peut aisément déduire de la définition du générateur A, que si $\| T_t \| \leq 1$, alors $(I - \varepsilon A)^{-1}$ existe, comme opérateur, pour $\varepsilon > 0$ et $\| (I - \varepsilon A)^{-1} \| \leq 1$ ([3], p. 400). De la première formule exponentielle de HILLE

$$T_t x = \lim_{\eta \to 0} e^{tA_\eta} x, \qquad \text{où} \quad A_\eta = \frac{1}{\eta}(T_\eta - I),$$

résulte que deux semi-groupes ayant le même générateur coïncident. Ces remarques faites, nous pouvons passer à l'énoncé de la partie constructive du théorème de YOSIDA et HILLE :

---

(10) Le fait qu'on ne doit pas supposer D_A dense dans H, s'explique, par exemple, par la proposition 3.1, (2).

Théorème 5.1. — *Si A est une transformation linéaire* ([10]), *telle que $(I-\varepsilon A)^{-1}$ existe comme opérateur pour tout $\varepsilon > 0$ et $\|(I-\varepsilon A)^{-1}\| \leqq 1$, alors A est le générateur d'un semi-groupe fortement continu de contractions T_t, tel que $T_t \to I$ fortement pour $t \to 0$. Pour un tel semi-groupe on a, pour tout $x \in H$,*

$$(5.1)\quad T_t x = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{\frac{t}{\varepsilon}[(I-\varepsilon A)^{-1}-I]} x \quad \text{et} \quad T_t x = \lim_{k\to\infty}\left(I - \frac{t}{k}A\right)^{-k} x,$$

la convergence étant uniforme en t pour $t \in [0, \tau]$, $\tau < \infty$.

Démonstration. — Remarquons d'abord que des conditions imposées à A, il résulte que $(A+I)(A-I)^{-1} = T$ est une contraction, donc que $S = \{\lambda : |\lambda| \leqq 1\}$ est un ensemble spectral de T. Considérons la fonction

$$f(t;\lambda) = e^{t(\lambda+1)(\lambda-1)^{-1}} \quad \text{pour} \quad t \geqq 0.$$

On a

$$f(t;\lambda) \in \overline{\mathcal{O}}[S;\, T] = \overline{\mathcal{O}}_e,$$

car son seul point de discontinuité est $\lambda = 1 \notin \sigma_p(T)$, [$Tx = x$ entraîne $(A-I)^{-1}x = 0$, donc $x = 0$] et $\|f(t;\,.)\|_S \leqq 1$.

Soit T_t l'extension par T de la fonction $f(t;\lambda)$, c'est-à-dire

$$T_t x = f(t;\, T)x = \int_{F(=\mathrm{Fr}\, S)} e^{t(\zeta+1)(\zeta-1)^{-1}} \omega(T;\, d\alpha_\zeta,\, S)x \qquad (x \in H).$$

D'après la propriété 4.2, (1), on a $\|T_t| \leqq 1$ et, d'après 4.2, (2), $T_{t_1+t_2} = T_{t_1}T_{t_2}$ car

$$f(t_1+t_2;\lambda) = f(t_1;\lambda)f(t_2;\lambda).$$

La continuité de $f(t;\lambda)$ en t ($t \geqq 0$) uniforme par rapport à λ, à l'exception du point $\lambda = 1$, donne, compte tenu du théorème 4.1, que T_t est un semi-groupe fortement continu pour $t \geqq 0$ et que $T_t \to I$ au sens fort pour $t \to 0$. Montrons maintenant que pour tout $x \in D_A$, on a

$$A_\varepsilon x = \frac{1}{\varepsilon}(T_\varepsilon - I)x \to Ax.$$

Mais

$$D_A = D_{(T+I)(T-I)^{-1}} = (T-I)(H),$$

donc il nous reste à démontrer que pour tout $x = (T-I)y$,

$$A_\varepsilon x \to Ax = (T+I)y.$$

La fonction A_ε est l'extension par T de la fonction $\frac{1}{\varepsilon}[f(\varepsilon;\lambda) - 1]$ et $A_\varepsilon x = A_\varepsilon(T-I)y$ est, en raison de la propriété 4.2, (2), l'extension de

$\frac{1}{\varepsilon}[f(\varepsilon;\lambda)-1](\lambda-1)$ par T, appliquée à y. Cette fonction, égale à

$$(\lambda+1)\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(s;\lambda)\,ds=(\lambda+1)\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} e^{s(\lambda+1)(\lambda-1)^{-1}}\,ds$$

tend uniformément, en dehors de tout voisinage de 1, vers $\lambda+1$ pour $\varepsilon\to 0$. Donc, d'après le théorème 4.1, $A_\varepsilon x\to(T+I)y$. Si A' est le générateur du semi-groupe T_t, alors $A'\supseteq A$; comme A' satisfait aux mêmes conditions que A, $(A'-I)^{-1}$ existe, donc

$$(A'-I)^{-1}=(A-I)^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad A=A'.$$

D'après une remarque faite au commencement de ce paragraphe, si T_t est un semi-groupe satisfaisant aux conditions du théorème et A son générateur, alors l'extension par $T=(A+I)(A-I)^{-1}$ de $f(t;\lambda)$ coïncide avec T_t.

Les opérateurs

$$e^{\frac{t}{\varepsilon}[(I-\varepsilon A)^{-1}-I]} \qquad \text{et} \qquad \left(I-\frac{t}{k}A\right)^{-k}$$

sont les extensions par T des fonctions

$$e^{\frac{t}{\varepsilon}\left[\left(1-\varepsilon\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^{-1}-1\right]} \qquad \text{et} \qquad \left(1-\frac{t}{k}\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right)^{-k} \qquad (\in\mathcal{O}[S]).$$

Les formules (5.1) découlent maintenant du fait que ces fonctions satisfont pour $\varepsilon\to 0$, (resp. $k\to\infty$) aux conditions du théorème 4.1, la convergence vers $f(t;\lambda)$ étant uniforme (hors de tout voisinage de $\lambda=1$) aussi par rapport à $t\in[0,\tau]$, $\tau<\infty$. C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. von Neumann, *Eine spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes* (*Math. Nachr.*, t. 4, 1951, p. 258-281).

[2] N. Dunford, *Spectral theory. I. Convergence to projections* (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 54, 1943, p. 185-217).

[3] F. Riesz et B. Sz. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest, 1953.

[4] E. Heinz, *Ein von Neumannscher Satz über beschränkte Operatoren im Hilbertschen Raum* (*Gött. Nachr.*, 1952, p. 5-6).

[5] M. Brelot, *Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 73, 1945, p. 55-70).

[6] J. Deny, *Sur l'approximation des fonctions harmoniques* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 73, 1945, p. 71-73).

[7] E. Hille, *Functional analysis and semi-groups*, New York, 1948.

[8] C. T. Ionescu Tulcea, *Espaces hilbertiens* (en roumain), Bucarest, 1956.

[9] R. Godement, *Sur la théorie des représentations unitaires* (*Ann. Math.*, t. 53, 1951, p. 68-124).

[10] R. NEVANLINNA, *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin, 1936.
[11] M. H. STONE, *Linear transformations in Hilbert space*, New York, 1932.
[12] D. HILBERT, *Ueber eine Anwendung der Integralgleichung auf ein Problem de Funktionen-theorie* (*Verhandl. des* III *Intern. Math. Kongresses*, Heidelberg, 1904).
[13] M. H. STONE, *The generalized Weierstrass approximation theorem* (*Math. Mag.*, t. 21, 1948, p. 167-184 et 237-254).
[14] B. SZ. NAGY, *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace*, Appendice au livre *Leçons d'analyse fonctionnelle*, par F. RIESZ et B. SZ. NAGY.
[15] T. RADÓ, *Sur la représentation conforme des domaines variables* (*Acta Szeged*, t. 1, 1923, p. 180-186).
[16] K. YOSIDA, *On the differentiability and the representation of one-parameter semi-group of linear operations* (*J. math. Soc. Japan*, t. 1, 1948, p. 15-21).

(Manuscrit reçu le 24 mai 1957.)