BULLETIN DE LA S. M. F.

ÉMILE DURAND

Identités conduisant aux solutions des équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants

Bulletin de la S. M. F., tome 82 (1954), p. 361-411

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1954__82__361_0>

IDENTITÉS CONDUISANT AUX SOLUTIONS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES ET A COEFFICIENTS CONSTANTS ;

PAR M. ÉMILE DURAND.
Faculté des Sciences de Toulouse.

Sommaire. — On établit une série d'identités faisant intervenir les opérateurs des équations aux dérivées partielles. Ces identités ont l'avantage d'être très condensées; on peut donc opérer sur elles les transformations importantes qui font passer des opérateurs du type elliptique aux opérateurs du type hyperbolique et enfin aux opérateurs du type parabolique. Ces transformations seraient impossibles ou extrêmement pénibles sur les solutions des équations.

Comme l'opérateur différentiel est en dehors des signes d'intégrations, les identités ont toujours un sens et il n'est pas nécessaire d'introduire un symbolisme particulier comme dans la méthode de Hadamard. Elles sont valables quelle que soit la parité du nombre n des variables, et il suffit de prendre éventuellement les précautions nécessaires quand on effectue les dérivations.

Ces identités conduisent directement aux solutions des équations aux dérivées partielles avec second membre sans qu'il soit nécessaire de faire appel à la méthode de variation des constantes. Elles fournissent de plus la solution des systèmes d'équations du premier ordre qui résultent de la décomposition ordinaire ou matricielle de l'opérateur du second ordre en un produit de deux opérateurs du premier ordre.

On considère les équations les plus générales avec un terme d'amortissement et pour un nombre quelconque de variables avec des données portées par une surface spatiotemporelle quelconque. On donne ensuite les solutions des problèmes de Kirchhoff et de Cauchy comme cas particuliers et l'on retrouve ainsi les résultats connus.

I. — Les équations du type elliptique.

1. Identités concernant le laplacien à n variables. — Elle s'écrit

$$\left.\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix}\right\} \psi(x_j) = \left[\sum_{j=1}^{n} \partial_j^2\right] \underbrace{\int \cdots \int}_{n} \psi(x'_j)\, \mathrm{G}(x_j, x'_j)\, d\mathrm{V}'_n, \tag{1}$$

avec

$$G(x_j, x'_j) = -\frac{1}{(n-2)\Omega_n}\frac{1}{r^{n-2}} \qquad (n \neq 2), \tag{2}$$

$$r = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - x'_j)^2}, \qquad dV'_n = dx'_1\, dx'_2 \ldots dx'_n, \tag{3}$$

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma^{\frac{n}{2}}} \qquad \text{(Surface de l'hypersphère de rayon 1).} \tag{4}$$

Les trois valeurs 1, 1/2, 0, correspondent respectivement au cas où x_j est dans le domaine V_n limité par la surface S_n, sur S_n ou en dehors du domaine. $\psi(x_j)$ est une fonction des n variables x_j avec $j = 1, 2, \ldots n$ et ∂_j désigne la dérivée partielle par rapport à x_j. L'intégrale n-uple est étendue au domaine fermé V_n ; éventuellement le domaine peut s'étendre jusqu'à l'infini, mais à condition que les intégrales qui apparaissent dans les calculs aient un sens.

Comme les limites du domaine ne dépendent pas des x_j, l'opérateur différentiel $\Sigma\,\partial_j^2$ dans (1) peut être appliqué directement à $G(x_j, x'_j)$. Or, on vérifie aisément que l'on a

$$\sum_{j=1}^{n}\partial_j^2\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = \frac{0}{r^n}. \tag{5}$$

Ceci est donc nul partout sauf peut-être pour $r = 0$ où l'on a la forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour que l'intégrale de (1) ait une valeur finie dans ces conditions, il faut que la valeur du laplacien de $\frac{1}{r^{n-2}}$ soit partout nulle sauf en $r = 0$ où elle devient brusquement infinie. Le laplacien a donc un comportement singulier en ce point et l'intégrale de volume n'a pas nécessairement un sens. Nous lui en

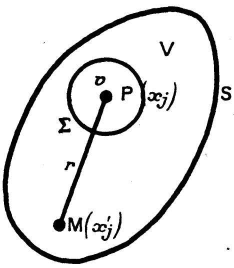

Fig. 1.

donnerons un en la transformant en intégrale de surface par les méthodes habituelles de l'analyse. En particulier, à cause de (5), nous pouvons réduire le volume V au volume v intérieur à l'hypersphère Σ de centre x_j et de rayon aussi petit qu'on le veut mais non nul (*fig.* 1). On continue à donner un sens à cette intégrale de volume en la transformant en une intégrale étendue à la surface Σ. Si

$\psi(x'_j)$ est régulière au point x_j on peut la faire sortir des signes d'intégration en lui donnant la valeur $\psi(x_j)$. Si ∂'_j désigne la dérivée partielle par rapport à x'_j. on a $\partial_i = -\partial'_j$ quand ces opérateurs sont appliqués à une fonction de r. En définitive on peut donc écrire successivement

$$(6)\qquad \underbrace{\int\cdots\int_V}_{n} \psi(x'_j) \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 \left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) dV'_n = \psi(x_j) \underbrace{\int\cdots\int_v}_{n} \sum_{j=1}^{n} \partial'^2_j \left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) dv'_n$$

$$= \psi(x_j) \underbrace{\int\cdots\int_\Sigma}_{n-1} \sum_{i=j}^{n} n_j \partial'_j \left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) dS'_n.$$

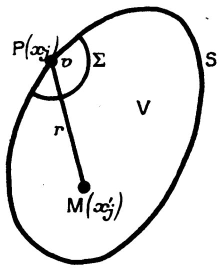

Fig. 2

Les n_j sont les cosinus directeurs de la normale extérieure à l'hypersphère Σ Pour calculer cette dernière intégrale on utilise les coordonnées hypersphériques de centre x_j, soit

$$(7)\qquad \begin{cases} x'_1 - x_1 = r\cos\theta_1, \\ x'_2 - x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ x'_3 - x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ x'_4 - x_4 = r\sin\theta_2\sin\theta_2\sin\theta_3\cos\theta_4, \\ \ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_{n-1} - x_{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\varphi, \\ x'_n - x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\varphi; \end{cases}$$

$$(8)\qquad d\Omega_n = \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2}\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_n\, d\varphi;$$

$$(9)\qquad dS'_n = r^{n-1}\, d\Omega_n.$$

Comme $n_j = \dfrac{x'_j - x_j}{r}$ on a

$$\sum_{j=1}^{n} n_j \partial'_j = \frac{\partial}{\partial r},$$

en portant dans (6), on obtient

$$(10)\qquad \underbrace{\int\cdots\int_\Sigma}_{n-1} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) r^{n-1}\, d\Omega_n = -(n-2) \underbrace{\int\cdots\int}_{n-1} d\Omega_n = -(n-2)\,\Omega_n.$$

On notera que ce résultat ne dépend pas du rayon de Σ. En portant ce résultat dans (1) on voit que le second membre est égal à $\psi(x_j)$.

Le cas de la figure 2 où $P(x_j)$ est sur la surface S_n se traite comme précédemment, mais seule intervient la surface de la demi-sphère Σ; d'où le facteur $1/2$ dans le premier membre de (1).

Quand $P(x_j)$ est à l'extérieur comme dans la figure 3, on a toujours

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 \left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = 0$$

d'où la valeur zéro au premier membre de (1).

Quand le point P est l'intérieur de S mais se trouve sur une surface σ de discontinuité pour la fonction $\psi(x'_j)$. on a $\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2)$, ψ_1 et ψ_2 étant les valeurs de la fonction ψ de chaque côté de σ et au voisinage du point x_j.

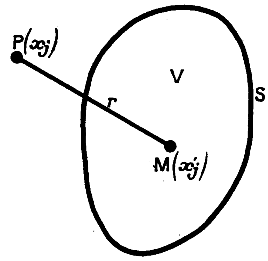

Fig. 3.

Enfin quand le point $P(x_j)$ est sur la surface S en un point singulier de celle-ci (point conique, arêtė, etc.) il faut remplacer $\frac{1}{2}\Omega_n$ par l'angle solide des tangentes.

2. **Étude de quelques exemples particuliers.** — $n = 1$. — Avec $r = |x - x'|$, l'identité (1) s'écrit

$$\text{(11)} \qquad \left.\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix}\right\} \psi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_a^b \psi(x') \, |x - x'| \, dx'.$$

On a 1, $1/2$, 0 suivant que x est dans l'intervalle (a, b), sur une des limites ou en dehors. Il est d'ailleurs facile de l'établir directement, car on a

$$\text{(12)} \qquad \psi(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x \psi(x') \, dx' = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_a^x \psi(x')(x - x') \, dx',$$

$$\text{(13)} \qquad \psi(x) = -\frac{d}{dx}\int_x^b \psi(x') \, dx' = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 \int_x^b \psi(x')(x' - x) \, dx'.$$

On voit que dans les domaines respectifs de variation de x' pour (12) et (13), $(x - x')$ et $(x' - x)$ sont positifs; il est donc possible d'écrire $|x - x'|$ dans les deux cas et par addition on obtient (11).

Il est intéressant de remarquer que (11) n'est qu'un aspect de l'identité intégrale de Fourier. On a, en effet

$$\frac{d}{dx}|x-x'| = -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{im(x-x')}\frac{dm}{m} \tag{14}$$

et en portant (14) dans (11) il vient après dérivation

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty}\psi(x')\,e^{im(x-x')}\,dx'\,dm \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dm\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x')\cos[m(x-x')]\,dx'.\end{aligned} \tag{15}$$

Dans ce cas les limites a et b ont été rejetées à $-\infty$, $+\infty$ et l'on a toujours 1 au premier membre de (11). Il faut également supposer que dans ce cas les intégrales que l'on rencontre sont convergentes et ont un sens.

$n=2$. — L'identité (1) n'est pas valable pour $n=2$. On sait que dans ce cas on a

$$G(x'_j, x_j) = \frac{\operatorname{Log} r}{2\pi} \quad \text{au lieu de} \quad \left\{-\frac{1}{(n-2)\Omega_n}\,\frac{1}{r^{n-2}}\right\}, \tag{16}$$

soit

$$\left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x_1, x_2) = [\partial_1^2+\partial_2^2]\left\{\frac{1}{2\pi}\iint\psi(x'_1, x'_2)\operatorname{Log}\sqrt{(x_1-x'_1)^2+(x_2-x'_2)^2}\,dx'_1\,dx'_2\right\}. \tag{17}$$

On notera en passant que l'identité de Cauchy du plan complexe

$$\left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\psi(z')}{z'-z}\,dz' \tag{18}$$

n'est que la forme complexe de (17). En effet, en séparant les parties réelles et imaginaires de (18) avec

$$\psi = \Phi + i\Theta, \qquad z = x_1 + ix_2, \qquad z' = x'_1 + ix'_2, \tag{19}$$

en tenant compte des relations de Cauchy-Riemann

$$\partial'_1\Phi - \partial'_2\Theta = 0, \qquad \partial'_1\Theta + \partial'_2\Phi = 0$$

et en transformant les intégrales curvilignes en intégrales de surface, on trouve deux expressions identiques à (17) pour $\Phi(x_1, x_2)$ et $\Theta(x_1, x_2)$.

$n=3$. — On a alors le potentiel coulombien et l'identité

$$\left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4\pi}(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2)\int_v \psi(x'_1, x'_2, x'^3)\frac{1}{r}\,dx'_1\,dx'_2\,dx'_3. \tag{20}$$

3. Identité concernant l'opérateur $\left[\sum_{j=1}^{n}\partial_j^2 \pm \lambda^2\right]$. — Remplaçons n par $(n+1)$ dans (1) et considérons une fonction $\psi(x_j, x_{n+1})$ du type

$$\psi(x_j, x_{n+1}) = \Phi(x_j)\,e^{i\lambda x_{n+1}}.$$

Il vient

$$(21)\qquad \left.\begin{matrix}1\\ 1/2\\ 0\end{matrix}\right\}\Phi(x_j)\,e^{i\lambda x_{n+1}} = \frac{-1}{(n-1)\,\Omega_{n+1}}\left[\sum_{j=1}^{n}\partial_j^2+\partial_{n+1}^2\right]$$
$$\times\underbrace{\int\cdots\int}_{n}\Phi(x'_j)\,dV'_n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\lambda x'_{n+1}}}{[r^2+(x'-x)^2_{n+1}]^{\frac{n-1}{2}}}\,dx'_{n+1}.$$

Ceci s'écrit encore

$$(22)\qquad \left.\begin{matrix}1\\ 2/1\\ 0\end{matrix}\right\}\Phi(x_j) = \frac{-1}{(n-1)\Omega_{n+1}}\left[\sum_{j=1}^{n}\partial_j^2-\lambda^2\right]\underbrace{\int\cdots\int}_{n}\Phi(x'_j)\,dV'_n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\lambda u}}{[r^2+u^2]^{\frac{n-1}{2}}}\,du$$
$$= \frac{-1}{(n-1)\Omega_{n+1}}\left[\sum_{j=1}^{n}\partial_j^2-\lambda^2\right]\underbrace{\int\cdots\int}_{n}\frac{\Phi(x'_j)}{r^{n-2}}\,dV'_n\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\lambda r w}}{[1+w^2]^{\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2}}}\,dw.$$

Intégrer de $-\infty$ à $+\infty$ revient à dire que l'on prend un domaine limité par un hypercylindre de génératrices parallèles à l'axe des x'_{n+1}. On suppose que les intégrales ont un sens et sont convergentes.

Rappelons-nous maintenant la définition des fonctions de Bessel $K_p(x)$ (*voir* par exemple : Wittaker et Watson, *Modern analysis*, p. 384), soit

$$(23)\qquad K_p(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^p\frac{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ixw}}{[1+w^2]^{p+\frac{1}{2}}}\,dw.$$

En tenant compte de (23), de (4) avec $n+1$ au lieu de n, et de

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{n-1}{2}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

(22) devient

$$(24)\qquad \left.\begin{matrix}1\\ 1/2\\ 0\end{matrix}\right\}\Phi(x_j) = \left[\sum_{j=1}^{n}\partial_j^2-\lambda^2\right]\underbrace{\int\cdots\int}_{n}\Phi(x'_j)\,G(x_j,x'_j),\,d = Y'_n,$$

avec

$$(25)\qquad G_n(x_j,x'_j) = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^{\frac{n-2}{2}}K_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r).$$

Pour $n = 1, 2, 3.$ avec

$$K_{\frac{1}{2}} = K_{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi}{2\lambda r}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\lambda r},$$

on a respectivement

$$(26)\qquad G_1 = -\frac{e^{-\lambda r}}{2\lambda},\quad G_2 = -\frac{K_0(\lambda r)}{2\pi},\qquad G_3 = -\frac{e^{-\lambda r}}{4\pi r}.$$

Pour faire apparaître le terme $+\lambda^2$ dans l'opérateur il suffit de changer λ en $\pm i\lambda$, En introduisant les fonctions de Hankel H^1_p et H^2_p, on sait que l'on a

$$(27)\qquad K_p(x) = \frac{\pi i}{2}e^{p\pi i}\,H^1_p(ix),$$

d'où

$$(28)\qquad K_p(ix) = \frac{\pi i}{2} e^{p\pi i} H_p^1(-x), \qquad K_p(-ix) = \frac{\pi i}{2} e^{p\pi i} H_p^1(x).$$

Les fonctions de Hankel sont elles-mêmes définies à partir des fonctions de Bessel $J_p(x)$ et de Neumann $N_p(x)$ par les expressions

$$\left.\begin{array}{ll}(29) & H_p^1(x) = J_p(x) + iN_p(x) \\ (30) & H_p^2(x) = J_p(x) - iN_p(x)\end{array}\right\} \text{ si } p \text{ est entier}$$

et si p n'est pas un nombre entier, on a les définitions

$$(31)\qquad H_p^1(x) = \frac{i}{\sin(p\pi)}[e^{ip\pi} J_p(x) - J_{-p}(x)],$$

$$(32)\qquad H_p^2(x) = -\frac{i}{\sin(p\pi)}[e^{ip\pi} J_p(x) - J_{-p}(x)].$$

En tenant compte de (27) et (28), les expressions (24) et (25) deviennent

$$(33)\qquad \left.\begin{array}{c}1\\1/2\\0\end{array}\right\}\Phi(x_j) = \left[\sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 + \lambda^2\right] \underbrace{\int\cdots\int}_{n} \Phi(x'_j)\, G(x_j, x'_j)\, dV'_n,$$

avec

$$(34)\qquad G_n(x_j, x'_j) = \frac{1}{4i}\left(\frac{\pm\lambda}{2\pi r}\right)^{\frac{n-2}{2}} H^1_{\frac{n-2}{2}}(\pm\lambda r).$$

Avec $n = 1, 2, 3, 4$ et

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

on a respectivement

$$(35)\qquad G_1(x_j, x'_j) = \frac{e^{\pm i\lambda r}}{\pm 2i\lambda}, \qquad G_3 = -\frac{e^{\pm i\lambda r}}{4\pi r},$$

$$(36)\qquad G_2(x_j, x'_j) = \frac{H_0^1(\pm\lambda r)}{4i}, \qquad G_4 = \frac{1}{4i}\left(\frac{\pm\lambda}{2\pi r}\right) H_1^1(\pm\lambda r).$$

4. **Solution générale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre.** — Considérons l'équation aux dérivées partielles avec second membre

$$(37)\qquad \left[\sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 \pm \lambda^2\right] \psi(x_j) = f(x_j),$$

Nous allons voir que les identités (1), (24) et (33) qui s'écrivent

$$(38)\qquad \left.\begin{array}{c}1\\1/2\\0\end{array}\right\}\psi(x_j) = \left[\sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 \pm \lambda^2\right] \underbrace{\int\cdots\int_{V_n}}_{n} \psi(x'_j)\, G_n\, dV'_n$$

donnent la solution de (37) à l'intérieur de l'hypervolume V_n quand on connaît ψ et sa dérivée normale $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ sur l'hypersurface S_n qui limite V_n. En effet comme

$\partial_j G_n = -\partial'_j G_n$, on peut écrire successivement en intégrant par parties

$$(39) \qquad \partial_j \int \cdots \int \psi G_n \, dV'_n = \int \cdots \int \psi \, \partial_j G_n \, dV'_n = -\int \cdots \int \psi \, \partial'_j G_n \, dV'_n$$
$$= -\int \cdots \int \{ \partial'_j [\psi G_n] + G_n \partial'_j \psi \} \, dV'_n$$
$$= -\int \cdots \int_{S_n} n_j \psi G_n \, dS'_n + \int \cdots \int_{V_n} G_n \partial'_j \psi \, dV'_n,$$

les n_j sont les cosinus directeurs de l'hypersurface. Appliquons de nouveau l'opérateur ∂_j à cette expression, ce qui donne

$$(40) \qquad \partial_j^2 \int \cdots \int \psi G_n \, dV'_n = \int_S n_j \psi \, \partial'_j G_n \, dS'_n - \int_V (\partial'_j G_n)(\partial'_j \psi) \, dV'_n$$
$$= \int_S n_j \psi \, \partial'_j G_n \, dS'_n - \int_V \partial'_j [(\partial'_j \psi) G_n] \, dV'_n + \int_V G_n \{ \partial'^2_j \psi \} \, dV'_n.$$

En sommant par rapport à j et en posant

$$(41) \qquad \sum_{j=1}^{n} n_j \partial'_j = \frac{\partial}{\partial n} \qquad \text{(dérivée normale)},$$

l'identité (38) prend la forme

$$(42) \qquad \left.\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix}\right\} \psi(x_j) = \underbrace{\int \cdots \int_V}_{n} G_n \left[\sum_{j=1}^{n} \partial'^2_j \pm \lambda^2 \right] \psi(x'_j) \, dV'_n$$
$$+ \underbrace{\int \cdots \int_S}_{n-1} \left[\psi \frac{\partial G_n}{\partial n} - G_n \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] dS'_n.$$

Cette expression (42) est une identité valable quelle que soit la fonction $\psi(x_j)$ pourvu que les intégrales aient un sens. Mais si $\psi(x_j)$ obéit à (37), on a la solution cherchée

$$(43) \qquad \left.\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix}\right\} \psi(x_j) = \underbrace{\int \cdots \int_V}_{n} G_n f \, dV'_n + \underbrace{\int \cdots \int_S}_{n-1} \left[\psi \frac{\partial G_n}{\partial n} - G_n \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] dS'_n.$$

Si l'on effectue un changement de variables $x'_j = x'_j(q^1, q^2, \ldots, q^n)$ et si l'on utilise la notation $\partial_i x_j$ pour $\frac{\partial x_j}{\partial q_i}$ l'élément de volume devient

$$(44) \qquad dV'_n = [dx'_1 \, dx'_2 \ldots dx'_n] = \begin{vmatrix} \partial_1 x'_1 & \partial_1 x'_2 & \ldots & \partial_1 x'_n \\ \partial_2 x'_1 & \partial_2 x'_2 & \ldots & \partial_2 x'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_n x'_1 & \partial_n x'_2 & \ldots & \partial_n x'_n \end{vmatrix} dq^1 \, dq^2 \ldots dq^n.$$

Plus exactement on voit que c'est un tenseur complètement antisymétrique sur tous les indices; on peut lui faire correspondre un invariant par la méthode habituelle des tenseurs adjoints.

Par exemple avec les coordonnées hyperpolaires (7), on trouve

$$dV'_n = r^{n-1}\, dr\, d\Omega_n,$$

l'élément d'angle solide $d\Omega_n$ étant donné par (8).

Une hypersurface dans un espace à n dimensions est définie sous forme paramétrique par les n expressions

$$x'_j = x'_j(q^1, q^2, \ldots, q^{n-1}),$$

et les éléments d'hypersurface sont définis par

$$(45)\qquad dS'_j = [dx'_1\, dx'_2 \ldots dx'_{j-1}\, dx'_{j+1} \ldots dx'_n]$$
$$= \begin{vmatrix} \partial_1\ x'_1 & \partial_1\ x'_2 & \ldots & \partial_1\ x'_{j-1} & \partial_1\ x'_{j+1} & \ldots & \partial_1\ x'_n \\ \partial_2\ x'_1 & \partial_2\ x'_2 & \ldots & \partial_2\ x'_{j-1} & \partial_2\ x'_{j+1} & \ldots & \partial_2\ x'_n \\ \partial_{n-1} x'_1 & \partial_{n-1} x'_2 & \ldots & \partial_{n-1} x'_{j-1} & \partial_{n-1} x'_{j+1} & \ldots & \partial_{n-1} x'_n \end{vmatrix} dq^1\, dq^2 \ldots dq^{n-1}.$$

On définit ensuite dS' et le vecteur unitaire n_j par

$$(46)\qquad dS' = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} dS'_j\, dS'_j}, \qquad n_j = \frac{dS'_j}{dS'}.$$

Exemples. — 1° Avec les coordonnées cartésiennes

$$x'_1 = q^1, \qquad x'_2 = q^2, \qquad \ldots, \qquad x'_n = f(q^1, q^2, \ldots, q^{n-1}),$$

on a

$$(47)\qquad \begin{cases} dS'_1 = \partial_1 f, \qquad dS'_2 = \partial_2 f, \qquad \ldots, \qquad dS'_{n-1} = \partial_{n-1} f; \\ dS' = \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n-1} (\partial_j f)^2}\, dx'_1\, dx'_2 \ldots dx'_{n-1}. \end{cases}$$

2° Avec les coordonnées hyperpolaires (7), on trouve pour l'élément de surface pe l'hypersphère de rayon 1 :

$$(48)\qquad dS = \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-2}\, d\theta_1\, d\theta_2, \ldots d\theta_n\, d\varphi$$

et pour la surface

$$S = \Omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

soit

n	1	2	3	4	5
Ω_n	2	2π	4π	$2\pi^2$	$\frac{8\pi^2}{3}$

5. Solutions des systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. — Considérons le système

$$(49)\qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, \partial_k \psi(x_j) = f,$$

où les α_k désignent les n matrices carrées à n rangs et telles que

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\alpha_0\,\delta_{ij}, \tag{50}$$

α_0 étant la matrice unité à n rangs. L'équation matricielle (49) représente n équations si ψ et f sont des matrices à une colonne et n lignes. Ces matrices permettent de décomposer l'opérateur du second ordre en un produit de deux opérateurs du premier ordre; (1) ou (38) peut alors s'écrire

$$\left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x_j) = \left[\sum_{l=k}^{n}\alpha_l\,\partial_l\right]\left[\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,\partial_k\right]\int_{V_n}\psi(x'_j)\,G_n\,dV'_n. \tag{51}$$

En dérivant sous le signe somme, puis transformant ∂_j en ∂'_j et en intégrant par parties, on obtient successivement

$$\begin{aligned}\left[\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,\partial_k\right]\int_{V_n}\psi(x'_j)\,G_n\,dV'_n &= -\int_{V_n}\psi\,(x'_j)\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,\partial'_k\,G_n\,dV'_n\\ &= -\int_{V_n}\sum_k\partial'_k[\psi(x'_j)(G_n\alpha_k)]dV'_n + \int_{V_n}G_n\sum_k\alpha_k\partial'_k\psi(x'_j)dV'_n\\ &= -\int_{S_n}\left[\sum_k n_k\alpha_k\right]\psi(x'_j)G_n dS'_n + \int_{V_n}G_n\sum_k\alpha_k\partial'_k\psi(x'_j)dV'_n\end{aligned} \tag{52}$$

Si ψ obéit à (49). on voit en portant (52) dans (51) que l'on a

$$\left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x_j) = \left[\sum_{l=1}^{n}\alpha_l\,\partial_l\right]\left\{\int_{V_n}fG_n\,dV'_n - \int_{S_n}\psi(x'_j)\,G_n\left[\sum_k n_k\alpha_k\right]dS'_n.\right\}. \tag{53}$$

On voit que (53) donne la solution de (49) quand on connaît le second membre et quand on connaît ψ sur l'hypersurface qui limite le domaine.

Premier exemple. — $n = 2$; le système (49) peut s'écrire

$$[\alpha_1\,\partial_1 + \alpha_2\,\partial_2]\psi(x_1,\,x_2) = f(x_1,\,x_2), \tag{54}$$

avec

$$\alpha_1 = \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} \tag{55}$$

ou encore

$$\begin{vmatrix}\partial_1 & \partial_1\\ \partial_2 & -\partial_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}f_1\\ f_2\end{vmatrix}, \qquad \begin{matrix}\partial_2\psi_1 + \partial_1\psi_2 = f_1,\\ \partial_1\psi_1 - \partial_2\psi_2 = f_2,\end{matrix} \tag{56}$$

la fonction G ayant l'expression

$$G_2(x,\,x_2\,x'_1,\,x'_2) = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Log} r. \tag{57}$$

Quand $f = 0$ on notera que les équations (56) se réduisent aux conditions de Cauchy-Riemann pour les fonctions analytiques; il est donc indiqué de décomposer l'opérateur $(\partial_1^2 + \partial_2^2)$ en un produit $(\partial_1 - i\,\partial_2)\,(\partial_1 + i\,\partial_2)$.

Deuxième exemple. — On considère trois matrices α_j de rang 4, mais des fonctions de trois variables x_j seulement, soit

$$(58)\qquad \begin{vmatrix} 0 & -\partial_3 & \partial_2 & -\partial_1 \\ \partial_3 & 0 & -\partial_1 & -\partial_2 \\ -\partial_2 & \partial_1 & 0 & -\partial_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{vmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \sum_{j=1} \alpha_j \partial_j \psi = f.$$

Sous forme vectorielle d'espace ces équations s'écrivent aussi

$$(59)\qquad \left\{\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\psi} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\psi_4 &= \vec{f} \\ \mathrm{div}\,\vec{\psi} &= f_4 \end{aligned}\right\} \qquad \text{avec} \qquad \left\{\begin{aligned} \vec{\psi} &= (\psi_1, \psi_{2j}, \psi_3), \\ \vec{f} &= (f_1, f_2, f_3), \end{aligned}\right.$$

Remarque. — (53) suggère l'introduction d'un « potentiel » Φ des fonctions ψ tel que

$$(60)\qquad \psi = \sum_l \alpha_l \partial_l \Phi,$$

$$(61)\qquad \Phi = \int_{V_n} f G_n \, dV'_n - \int_{S_n} \psi G_n \left[\sum_k n_k \alpha_k \right] dS'_n.$$

C'est ce que l'on fait couramment en élcctromagnétisme par exemple.

6. **Relations intégrales entre les fonctions de Hankel de différents ordres.** — Considérons les identités (24) ou (33) écrites pour $n+1$ au lieu de n, soit

$$(62)\qquad \left.\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix}\right\} \Phi(x_j, x_{n+1}) = \left[\sum_{j=1}^{n+1} \partial_j^2 \pm \lambda^2 \right] \int_{V_{n+1}} \Phi(x'_j, x'_{n+1}) G_{n+1}(\lambda, r_{n+1}) \, dV'_{n+1},$$

les fonctions $G_{n+1}(\lambda, r_{n+1})$ étant données par (25) ou (34). Considérons une fonction Φ du type $\psi(x_j)\exp(\pm i\mu x_{n+1})$. L'expression (62) s'écrit alors

$$(63)\qquad \left.\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix}\right\} \psi(x_j) = \left[\sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 \pm (\lambda^2 + \mu^2) \right] \int_{V_n} \psi(x'_j) \, dv'_n \int_{-\infty}^{+\infty} G_{n+1} \, e^{\pm i\mu(x-x')_{n+1}} \, dx'_{n+1},$$

avec

$$(64)\qquad G_{n+1}(\lambda, r_{n+1}) = G_{n+1}\left(\lambda, \sqrt{r_n^2 + (x-x')_{n+1}^2}\right).$$

En posant $u = x' - x$ et en comparant (63) à (33) ou (24) écrites pour $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, on en déduit que l'on doit avoir

$$(65)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm i\mu u} G_{n+1}\left(\lambda, \sqrt{r_n^2 + u^2}\right) du = G_n\left(\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, r_n\right).$$

Cette expression (65) est l'identité cherchée. Quand on y fait $\mu = 0$, on retrouve des identités connues, au moins pour les petites valeurs de n, soit :

$$(66)\qquad n = 1 : \quad \int_0^{+\infty} H_0^1\left(\pm\lambda \sqrt{r_1^2 + u^2}\right) du = \frac{e^{\pm i\lambda r_1}}{\pm i\lambda}.$$

On peut y remplacer λ par $i\lambda$ et r_1 est un nombre toujours positif :

$$(67) \qquad n=2: \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{\pm i\lambda\sqrt{r_2^2+u^2}}}{\sqrt{r_2^2+u^2}}\,du = -\frac{1}{2i}\mathrm{H}_0^1(\pm\lambda r_2);$$

$$(68) \qquad n=3: \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{H}_1^1(\pm\lambda\sqrt{r_3^2+u})}{\sqrt{r_3^2+u^2}}\,du = \frac{e^{\pm i\lambda r_3}}{\pm i\lambda r_3}.$$

II. — Les équations du type hyperbolique.

1. Identité concernant l'opérateur hyperbolique $\left[v^{-2}\partial_t^2 - \sum_{j=1}^{2q+1}\partial_j^2\right]$ **déduite de l'identité concernant l'opérateur elliptique** $\left[\sum_{j=1}^{2q+2}\partial_j^2\right]$. — On part de l'identité (1) concernant l'opérateur elliptique à $n = 2q+2$ variables et l'on intègre de $-\infty$ à $+\infty$ sur la variable x'_{2q+2}, soit

$$(69) \qquad \left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x_j, x_{2q+2}) = -\left[\partial_{2q+2}^2 + \sum_{j=1}^{2q+1}\partial_j^2\right]\{\ldots\},$$

$$(70) \qquad \{\ldots\} = \frac{1}{2q\,\Omega_{2q+2}}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q+1} dv'_{2q+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(x'_j, x'_{2q+2})}{[r_{2q+1}^2+(x-x')_{2q+2}^2]^q}\,dx'_{2q+2}.$$

Dans tout ce paragraphe nous écrirons simplement r au lieu de

$$r_{2q+1} = \sqrt{\sum_{=1}^{2q+1}(x_j - x'_j)^2}.$$

Posons

$$(71) \qquad x'_{2q+2} = x_{2q+2} + \lambda.$$

La dernière intégrale de (70) s'écrit alors

$$(72) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(x'_j, x_{2q+2}+\lambda)}{[r^2+\lambda^2]^q}\,d\lambda$$

ou

$$(73) \qquad \frac{1}{(q-1)!}\left[-\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{q-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(x'_j, x_{2q+2}+\lambda)}{[r^2+\lambda^2]^q}\,d\lambda$$
$$= \frac{1}{(q-1)!}\left[-\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{q-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2ir}\left[\frac{1}{\lambda-ir}-\frac{1}{\lambda+ir}\right]\psi(x'_j, x_{2q+2}+\lambda)\,d\lambda.$$

Des intégrales de ce type concernant la variable réelle λ peuvent se calculer par la méthode des résidus. Si $\psi(z)$ est holomorphe dans l'un des deux demi-plans situés de part et d'autre de l'axe réel et si $\frac{z\psi(z)}{r^2+z^2}$ tend vers zéro uniformément pour toutes les valeurs de z ayant un argument compris entre zéro et π, quand $|z| \to \infty$, on sait que l'on peut remplacer la variable réelle λ par la variable complexe z et compléter l'axe réel $(-\infty, +\infty)$ par le demi-cercle supérieur ou inférieur de rayon infini.

L'intégrale (73) se sépare en deux; si l'on considère le contour relatif au demi-plan supérieur, seul le pôle $\lambda = ir$ se trouve à l'intérieur; si l'on considère le demi-plan inférieur, seul le pôle $\lambda = -ir$ se trouve à l'intérieur. Il faut bien noter que si ψ est holomorphe dans l'un des deux demi-plans elle ne l'est pas dans l'autre, à moins qu'elle se réduise à une constante.

Si les conditions précédentes sont réalisées, on a pour (73) l'expression

$$(74) \qquad \frac{\pi}{(q-1)!}\left[-\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{q-1}[r^{-1}\psi(x'_j,\, x_{2q+2} \pm ir)],$$

le signe $+$ correspond au demi-plan supérieur et le signe $-$ au demi-plan inférieur. Portons cette expression (74) de l'intégrale sur λ dans (70) en notant que $\Omega_{2q+2}\, q\,! = 2\pi^{q+1}$; il vient

$$(75) \qquad \{\ldots\} = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^q}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{q-1}[r^{-1}\psi(x'_j,\, x_{2q+2} \pm ir)].$$

Appliquons l'identité formée par l'ensemble de (69) et (75) à la fonction $\psi(x'_j, -ix_{2q+2})$. On a alors $\psi(x'_j, -ix_{2q+2} \pm r)$ dans (75). Puis posons $x_{2q+2} = ivt$; il vient alors l'identité cherchée concernant l'opérateur hyperbolique

$$(76) \qquad \left.\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix}\right\} \psi(x_j, vt) = \left[v^{-2}\partial_t^2 - \sum_{j=1}^{2q+1}\partial_j^2\right]\{\ldots\},$$

$$(77) \qquad \{\ldots\} = \frac{1}{2(2\pi)^q}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q+1}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{q-1}[r^{-1}\psi(x'_j,\, vt \pm r)]\, dv'_{2q+1},$$

∂_t désigne la dérivée partielle par rapport au temps t.

Suivant que l'on a $+$ ou $-$, (77) peut encore s'écrire

$$(78) \qquad \{\ldots\} = \frac{v}{2}\frac{1}{(2\pi)^q}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q+1} dv'_{2q+1}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^q \int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}} \psi(x'_j, v\tau)\, d\tau,$$

$$(79) \qquad \{\ldots\} = \frac{v}{2}\frac{1}{(2\pi)^q}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q+1} dv'_{2q+1}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^q \int_{t+\frac{r}{v}}^{g(x'_j)} \psi(x'_j, v\tau)\, d\tau.$$

Dans (76) on a 1, 1/2, 0 suivant que le point x_j est dans le domaine v_{2q+1}, sur l'hypersurface qui le limite ou en dehors de lui.

D'après les conditions auxquelles devrait satisfaire ψ, on obtient soit l'une, soit l'autre des expressions (77) correspondant à $+$ ou $-$. En fait on peut vérifier directement sur les formules obtenues que l'identité est satisfaite dans les deux cas. On peut donc écrire deux autres identités en prenant la demi-somme ou la demi-différence des deux identités, ce qui conduit à deux types d'ondes stationnaires, soit

$$(80)\qquad \left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x_j,\, vt) = \left[v^{-2}\partial_t^2 - \sum_{j=1}^{2q+1}\partial_j^2\right]\{\ldots\},$$

$$(81)\qquad \{\ldots\} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi)^q}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q+1}\left[-\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right]^{q-1}\left\{\frac{1}{2r}[\psi(x'_j,\, vt-r) + \psi(x'_j,\, vt+r)]\right\}dv'_{2q+1},$$

$$(82)\qquad \{\ldots\} = -\frac{v}{4}\,\frac{1}{(2\pi)^q}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q+1} dv'_{2q+1}\left[-\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right]^q\int_{t-\frac{r}{v}}^{t+\frac{r}{v}}\psi(x'_j,\, v\tau)\,d\tau.$$

Noter que (82) est un cas particulier d'ondes stationnaires; on pourrait envisager une identité plus générale où l'on n'aurait pas comme volume dans l'espace-temps un hypercylindre parallèle à l'axe $O\tau$ et limité aux deux nappes de l'hypercône caractéristique.

En prenant la demi-différence on a toujours zéro au premier membre de l'identité, soit

$$(83)\qquad 0 = \left[v^{-2}\partial_t^2 - \sum_{j=1}^{2q+1}\partial_j^2\right]\{\ldots\},$$

$$(84)\qquad \{\ldots\} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi)^q}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q+1}\left[-\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right]^{q-1}\left\{\frac{1}{2r}[\psi(x'_j,\, vt-r) - \psi(x'_j,\, vt+r)]\right\}dv'_{2q+2}.$$

2. Passage de l'identité concernant $n = 2q+1$ à celle concernant $n = 2q$ par la méthode de descente. — Dans (76) et (77) choisissons une fonction $\psi(x'_j,\, vt)$ qui ne dépende pas de la variable x_{2q+1}. On a donc $\partial^2_{2q+1}\{\ldots\} = 0$. Posons

$$(85)\qquad r^2 = (x'-x)_{2q+1} + \sum_{j=1}^{2q}(x'_j - x_j)^2 = (x'-x)^2_{2q+1} + \rho^2.$$

On en déduit que l'on a entre opérateurs la relation

$$(86)\qquad \frac{\partial}{\partial\rho} = \frac{\partial r}{\partial\rho}\,\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\rho}{r}\,\frac{\partial}{\partial r},\qquad \text{soit}\quad \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}.$$

En intégrant sur x'_{2q+1} de $x_{2q+1} - h(x'_j)$ à $x_{2q+1} + h(x'_j)$ avec $j = 1, 2, \ldots, 2q$, on a, en tenant compte de (85) et (86)

$$(87)\qquad \left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x_j,\, vt) = \left[v^{-2}\partial_t^2 - \sum_{j=1}^{2q}\partial_j^2\right]\{\ldots\},$$

$$(88)\qquad \{\ldots\} = \frac{1}{(2\pi)^q}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q} dv'_{2q}\left[-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\right]^{q-1}\int_{x_{2q+1}-h(x'_j)}^{x_{2q+1}+h(x'_j)}\psi(x'_j,\, vt\pm r)\frac{dx'_{2q+1}}{2r}.$$

La dernière intégrale s'écrit encore

$$(89)\qquad \int_{-h(x'_j)}^{+h(x'_j)}\psi(x'_j,\, vt\pm r)\frac{d(x'-x)_{2q+1}}{2r} = \int_0^{h(x'_j)}\psi(x'_j,\, vt\pm r)\frac{d(x'-x)_{2q+1}}{r}.$$

Au lieu de la variable $(x'-x)_{2q+1}$ introduisons la variable τ définie par

$$\tau = t \pm \frac{r}{v} = t \pm \frac{1}{v}\sqrt{(x'-x)^2_{2q+1}+\rho^2}. \tag{90}$$

Dans cette transformation les deux surfaces $(x'-x)_{2q+1} = \pm h(x'_j)$ sont confondues en une surface unique que nous écrirons $\tau = g(x'_j)$ et la limite inférieure $(x'-x)_{2q+1} = 0$ correspond à l'hypercône $\tau = t \pm \frac{\rho}{v}$. τ varie donc de $t+\frac{\rho}{v}$ à $g(x'_j)$ ou de $g(x'_j)$ à $t-\frac{\rho}{v}$.

De l'expression (90) on tire

$$(x'-x)_{2q+1} = \pm\sqrt{v^2(t-\tau)^2-\rho^2} = \pm\gamma \tag{91}$$

et l'on ne conserve que le signe $+$ puisque $(x'-x)_{2q+1}$ varie de zéro à $h(x'_j)$. En différentiant (90), on obtient alors

$$d\tau = \pm\frac{1}{v}\frac{(x'-x)_{2q+1}\,d(x'-x)_{2q+1}}{\sqrt{(x'-x)^2_{2q+1}+\rho^2}} = \pm\frac{\gamma}{v}\frac{d(x'-x)_{2q+1}}{r}. \tag{92}$$

En portant (92) dans (89), il vient

$$\int_{t+\frac{\rho}{v}}^{g(x'_j)} \psi(x'_j, v\tau)\frac{v\,d\tau}{\gamma} \quad \text{ou} \quad \int_{g(x'_j)}^{t-\frac{\rho}{v}} \psi(x'_j, v\tau)\frac{v\,d\tau}{\gamma}. \tag{93}$$

En portant cette expression (93) dans (88), il vient

$$\{\dots\} = \frac{v}{(2\pi)^q}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q} dv'_{2q}\left[-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right]^{q-1}\int_{g(x'_j)}^{t-\frac{\rho}{v}}\psi(x'_j, v\tau)\gamma^{-1}\,d\tau, \tag{94}$$

$$\{\dots\} = \frac{v}{(2\pi)^q}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q} dv'_{2q}\left[-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right]^{q-1}\int_{t+\frac{\rho}{v}}^{g(x'_j)}\psi(x'_j, v\tau)\gamma^{-1}\,d\tau. \tag{95}$$

On ne peut dériver brutalement par rapport à ρ l'intégrale relative à la variable τ car le résultat se présente sous la forme $(\infty-\infty)$; il y a de nombreuses manières d'éviter cette difficulté apparente; on en trouvera un exemple plus loin où nous étudions en détail le cas $n=1$; on pourrait aussi introduire la variable u définie par $\tau = t \pm \frac{\rho}{v}\operatorname{ch} u$.

Il existe une troisième identité qui est l'analogue de (80) et (82) mais qui correspond à une valeur toujours nulle du premier membre, soit

$$0 = \left[v^{-2}\partial_t^2 - \sum_{j=1}^{2q}\partial_j^2\right]\{\dots\}, \tag{96}$$

$$\{\dots\} = \frac{1}{2}\frac{v}{(2\pi)^q}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q} dv'_{2q}\left[-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right]^{q-1}\int_{t-\frac{\rho}{v}}^{t+\frac{\rho}{v}}\psi(x'_j, v\tau)(\gamma)^{-1}\,d\tau. \tag{97}$$

Nous la retrouverons plus loin et nous aurons l'occasion d'en vérifier les conséquences. On pourrait supprimer les coefficients constants de (97) puisque le premier membre est nul.

3. **Forme plus générale de l'identité fondamentale avec une intégrale curviligne dans le plan complexe.** — Pour passer de l'opérateur elliptique à l'opérateur hyperbolique nous avons eu à calculer une intégrale de $-\infty$ à $+\infty$; pour pouvoir utiliser la méthode des résidus nous avons complété l'axe réel par un demi-cercle à l'infini et supposé que la fonction à intégrer était telle que l'intégrale correspondant à ce demi-cercle était nulle. Or, il est possible de vérifier directement les identités obtenues et l'on constate que les conditions

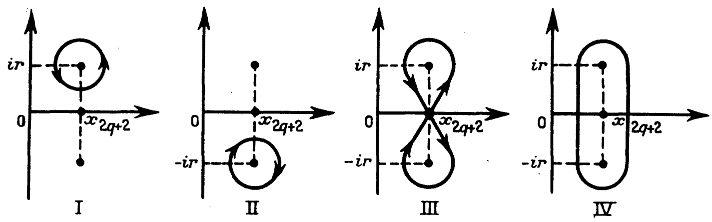

Fig. 4.

imposées à la fonction ψ ne sont pas indispensables. Cela correspond à une identité plus générale que (69) et qui s'écrirait

$$\left.\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix}\right\}\psi(x_j,\, x_{2q+2}) = -\left[\partial^2_{2q+2} + \sum_{j=1}^{2q+1} \partial_j^2\right]\{\ldots\} \tag{98}$$

$$\{\ldots\} = \frac{(q-1)!}{4\pi^{q+1}} \underbrace{\int\cdots\int}_{2q+1} dv'_n \oint \frac{\psi(x'_j,\, x'_{2q+2})}{[r^2_{2q+1} + (x-x')^2_{2q+2}]^q}\, dx'_{2q+2}, \tag{99}$$

la variable x'_{2q+2} étant considérée comme une variable du plan complexe et l'intégrale curviligne étant étendue au contour I ou au contour II de la figure 4 entourant l'un ou l'autre des pôles $x'_{2q+2} = x_{2q+2} \pm ir$.

Dans ces conditions on trouve en effet que (98) et (99) conduisent aux expressions (79) et (78).

Si l'on prend le contour III, il faut multiplier le second membre de (99) par $\frac{1}{2}$; On est alors conduit à (82). Enfin si l'on prend le contour IV on est conduit à (83) et (84) comme les contours ne dépendent pas de r, (99) peut encore s'écrire

$$\{\ldots\} = \frac{1}{(2\pi)^{q+1}} \underbrace{\int\cdots\int}_{2q+1} dv'_{2q+1} \left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{q-1} \oint \frac{\psi(x'_j,\, x'_{2q+2})}{[r^2 + (x'-x)^2_{2q+2}]^q}\, dx'_{2q+2}. \tag{100}$$

Tous les contours précédents peuvent être déformés et réduits à des cercles infiniment petits entourant les pôles.

Avec une variable de moins, on a des identités analogues qui s'écrivent

$$\left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x_j,\, x_{2q+1}) = -\left[\partial^2_{2q+1} + \sum_{j=1}^{2q+1}\partial_j^2\right]\{\ldots\}, \tag{101}$$

$$\{\ldots\} = \frac{1}{2i(2\pi)^q}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q} dv'_{2q}\left[-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right]^{q-1}\oint\frac{\psi(x'_j,\, x'_{2q+1})}{\sqrt{\rho^2+(x-x')^2_{2q+1}}}\,dx'_{2q+1}, \tag{102}$$

l'intégrale curviligne étant prise le long des contours I ou II de la figure 5. Tous ces contours peuvent être aplatis le long de la droite parallèle à l'axe imaginaire et passant par les points de branchement $\pm i\rho$. Vérifions dans ces conditions que l'on retrouve bien (95) pour $g = +\infty$, avec le contour I.

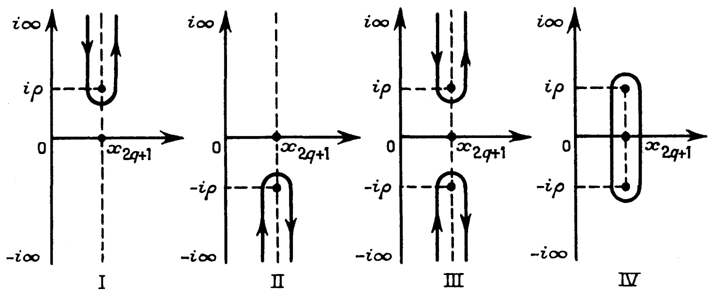

Fig. 5.

Pour cela prenons une fonction $\psi(x_j, -ix_{2q+1})$, ce qui donne pour la dernière intégrale de (102)

$$2\int_{x_{2q+1}+i\rho}^{x_{2q+1}+i\infty}\frac{\psi(x'_j,\, -ix'_{2q+1})}{\sqrt{\rho^2+(x'-x)^2_{2q+1}}}\,dx'_{2q+1}.$$

Puis faisons $x_{2q+1} = ivt$ et prenons la nouvelle variable d'intégration τ définie par $x'_{2q+1} = iv\tau$; il vient

$$2iv\int_{t+\frac{\rho}{v}}^{+\infty}\frac{\psi(x'_j,\, v\tau)}{\sqrt{\rho^2-v^2(t-\tau)^2}}\,d\tau.$$

En portant ceci dans (102) on retrouve bien (95). Cette dernière est cependant plus générale avec $g(x'_j)$ au lieu de $+\infty$.

Avec le contour II on serait conduit à (94) où $g(x'_j) = -\infty$. Enfin en choisissant le contour IV et avec zéro au premier membre de (101) on serait conduit à (97). Cette dernière expression n'est d'ailleurs pas l'identité la plus générale car on pourrait prendre une surface quelconque au lieu d'avoir un cylindre parallèle à l'axe des τ et limité aux deux nappes de l'hypercône.

4. Passage de n pair ($n = 2q$) à n impair ($n = 2q-1$) par la méthode de descente. — Partons de la formule (94) et prenons une fonction $\psi(x_j, vt)$ qui ne dépende pas de x_{2q}. On a donc avec

$$(103)\qquad \rho = \sum_{j=1}^{2q}(x'_j - x_j)^2 = \sum_{j=1}^{2q+1}(x'_j - x_j)^2 + (x' - x)^2_{2q} = r^2 + (x' - x)^2_{2q}$$

et en tenant compte de $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}$, l'expression

$$(104)\qquad \{\ldots\} = \frac{v}{(2\pi)^q}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q-1} dv'_{2q-1}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{q-1}\int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}}\psi(x'_j, vt)$$
$$\times\, d\tau\int_{x_{2q}-\sqrt{v^2(t-\tau)^2-r^2}}^{x_{2q}+\sqrt{v^2(t-\tau)^2-r^2}}\frac{dx'_{2q}}{\sqrt{v^2(t-\tau)^2 - r^2 - (x-x')^2_{2q}}}.$$

On a supposé aussi que $g(x'_j)$ ne dépendait pas de x'_{2q}. Les limites d'intégration sont choisies de manière que x_{2q} disparaisse et que, par conséquent, ∂^2_{2q} disparaisse aussi de l'opérateur. On notera que x_{2q} est dans l'intervalle d'intégration, ce qui ne change rien à l'alternative $1, \frac{1}{2}$, 0 du premier membre de l'identité. Posons

$$(105)\qquad u = \frac{(x'-x)_{2q}}{\sqrt{v^2(t-\tau)^2 - r^2}};$$

l'intégrale devient

$$\int_{-1}^{+1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = [\arcsin u]_{-1}^{+1} = \pi.$$

On voit alors que (104) devient identique à (78) où q est remplacé par $q-1$.

5. **Réunion des formules pour n pair ($n = 2q$) et n impair ($n = 2q+1$) en une formule unique (ondes ordinaires).** — Par dérivations successives on vérifie aisément l'identité

$$(106)\qquad \left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^q\int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}}\gamma^{2q}\psi(x'_j, v\tau)\,d\tau = 2.4.6\ldots(2q)\int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}}\psi(x'_j, v\tau)\,d\tau,$$

avec

$$\gamma = \sqrt{v^2(t-\tau)^2 - r^2}.$$

En portant cette expression dans (78), on obtient

$$(107)\qquad \frac{v}{2}\,\frac{1}{q\,!(4\pi)^q}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q+1} dv'_{2q+1}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{2q}\int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}}\gamma^{2q}\,\psi(x'_j, v\tau)\,d\tau.$$

Comme on a $n = 2q+1$ et que $\Gamma(q+1) = q\,!$, on peut encore écrire

$$(108)\qquad \{\ldots\} = \frac{v}{2}\,\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\underbrace{\int\cdots\int}_{n} dv'_n\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{n-1}\int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}}\gamma^{n-1}\,\psi(x'_j, v\tau)\,d\tau.$$

On pourrait écrire le coefficient autrement en introduisant l'angle solide Ω_n puisque l'on a

$$2(4\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=(n-1)!\,\Omega_n. \tag{109}$$

Il s'agit maintenant de transformer l'expression (94) et de montrer qu'avec $n=2q$ elle s'écrit aussi sous la forme (108). Pour cela nous partons de l'identité

$$\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^q\int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}}\gamma^{2q-1}\psi(x'_j,v\tau)\,d\tau=1.3.5\ldots(2q-1)\int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}}\gamma^{-1}\psi(x'_j,v\tau)\,d\tau. \tag{110}$$

En portant (110) dans (94) et en notant que l'on a

$$2^q\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right)=1.3.5\ldots(2q-1)\sqrt{\pi}, \tag{111}$$

on obtient

$$\{\ldots\}=\frac{v}{2}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{2q-1}{2}}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q}dv'_{2q}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{2q-1}\int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}}\psi(x'_j,v\tau)\gamma^{2q-1}\,d\tau. \tag{112}$$

et comme on a dans ce cas, $n=2q$ on voit que (112) est bien identique à (108). Nous avons donc bien réuni (78) et (94) en une formule unique. On pourrait de même réunir (79) et (95) en une formule unique analogue à (112) mais où l'intégrale sur τ irait de $t+\frac{\rho}{v}$ à $g(x'_j)$ au lieu de $g(x'_j)$ à $t-\frac{\rho}{v}$.

Enfin on peut aussi rassembler (82) et (97) en une identité unique qui s'écrit

$$\left.\begin{matrix}0\\1/2\\1\end{matrix}\right\}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\psi(x_j,vt)=\left[v^{-2}\partial_t^2-\sum_{j=1}^{n}\partial_j^2\right]\{\ldots\}, \tag{113}$$

$$\{\ldots\}=-\frac{v}{4}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\underbrace{\int\cdots\int}_{n}dv'_n\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{n-1}\int_{t-\frac{r}{v}}^{t+\frac{r}{v}}\psi(x'_j,v\tau)(i\gamma)^{n-1}\,d\tau. \tag{114}$$

On a donc zéro ou -1 suivant la parité de n au premier membre de (113), $\frac{v}{4}$ au lieu de $\frac{v}{2}$, et enfin

$$i\gamma=i\sqrt{v^2(t-\tau)^2-r^2}=\sqrt{r^2-v^2(t-\tau)^2}. \tag{115}$$

Le $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ provient du fait que pour $i\gamma$, dans (106) on a $\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^q$ au lieu de $\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^q$; si l'on continue d'écrire $\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^q$ il faut mettre $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ au dénominateur; en fait ce facteur donne 1, i, -1, $-i$, 1, ... pour $n=1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, mais ceci est sans importance car pour n pair le premier membre est nul. Le signe — devant $\frac{v}{4}$ provient du signe — supplémentaire de (82).

6. Passage de l'opérateur hyperbolique à l'opérateur elliptique par la méthode de descente. — Si ψ ne dépend pas de t et si la limite inférieure de l'intégrale relative à τ est prise égale à $-\infty$, la formule (108) devient

$$(116)\qquad \{\ldots\} = \frac{1}{\Omega_n(n-1)!}\underbrace{\int\cdots\int}_{n}\psi(x'_j)\,dv'_n\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{n-1}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}}\gamma^{n-1}\,v\,d\tau.$$

En comparant (116) à (1) et (2) on en déduit que l'on doit avoir

$$(117)\qquad \frac{1}{r^{n-2}} = \frac{n-2}{(n-1)!}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{n-1}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}}\gamma^{n-1}\,v\,d\tau, \qquad \text{avec} \quad n>2.$$

Nous allons vérifier cette identité et réaliser de ce fait le passage de l'identité concernant l'opérateur hyperbolique à l'identité concernant le laplacien. Commençons par remplacer n par $n+2$ dans (117), ce qui donne une expression un peu plus simple

$$(118)\qquad \frac{1}{r^{n}} = \frac{n}{(n+1)!}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{n+1}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}}\gamma^{n+1}\,v\,d\tau.$$

Il est facile de vérifier que si (117) est valable pour n, elle est encore valable pour $n+2$; en effet appliquons l'opérateur $\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]$ aux deux membres de (117) et remplaçons l'intégrale par

$$\frac{1}{n+1}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}}\gamma^{n+1}\,v\,d\tau,$$

on obtient alors (118).

Il suffit dans ces conditions de vérifier (118) pour $n=1$ et $n=2$. Pour $n=1$ c'est immédiat, car on a successivement

$$(119)\qquad \left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{2}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}}\gamma^{2}\,v\,d\tau = 2\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}}v\,d\tau = \frac{2}{r}.$$

Pour $n=2$ il faut prendre la précaution de remplacer $-\infty$ par $-\theta$, puis de faire $\theta=\infty$, dans le résultat, soit

$$(120)\qquad \begin{aligned}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{3}\int_{-\theta}^{t-\frac{r}{v}}\gamma^{3}\,v\,d\tau &= 3\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{2}\int_{-\theta}^{t-\frac{r}{v}}\gamma\,v\,d\tau \\ &= 3\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]\int_{-\theta}^{t-\frac{r}{v}}\frac{v\,d\tau}{\gamma} = 3\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]\int_{1}^{\frac{v(t+\theta)}{r}}\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} \\ &= \frac{3}{[v^2(t+\theta)^2-r^2]^{\frac{1}{2}}}\,\frac{v(t+\theta)}{r^2}.\end{aligned}$$

Quand $\theta\to\infty$ on a donc bien $\frac{3}{r^2}$.

Au lieu de partir de (108) on pourrait partir de l'expression analogue où l'intégrale sur τ irait de $t+\frac{r}{v}$ à $+\infty$. On arriverait alors à une expression identique à (117) avec une intégration de $t+\frac{r}{v}$ à $+\infty$.

Enfin en appliquant la méthode de descente sur la variable t à l'équation (113) dans les mêmes conditions que pour (108) et comparant le résultat obtenu à (1) et (2) on en déduit que l'on doit avoir

$$\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{r^{n-2}} = -\frac{1}{2}\frac{n-2}{(n-1)!}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{n-1}\int_{t-\frac{r}{v}}^{t-\frac{r}{v}}(i\gamma)^{n-1}v\,d\tau. \tag{121}$$

Pour vérifier directement (121) on montre comme précédemment qu'elle est vraie pour $n+2$ si elle est vraie pour n. Il suffit par conséquent de la vérifier pour $n=3$ et $n=4$. Pour $n=3$, on a

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^2\int_{t-\frac{r}{v}}^{t+\frac{r}{v}}\gamma^2 v\,d\tau = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]\int_{t-\frac{r}{v}}^{t+\frac{r}{v}}v\,d\tau = \frac{1}{r}. \tag{122}$$

Pour $n=4$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{1}{3}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^3\int_{t-\frac{r}{v}}^{t+\frac{r}{v}}(i\gamma)^3 v\,d\tau &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^2\int_{t-\frac{r}{v}}^{t+\frac{r}{v}}(i\gamma)\,d\tau \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]\int_{t-\frac{r}{v}}^{t+\frac{r}{v}}\frac{v\,d\tau}{i\gamma} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]\int_{-1}^{+1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 0.\end{aligned} \tag{123}$$

7. Identité concernant l'opérateur des ondes amorties. — 1° ESPACE AYANT UN NOMBRE PAIR $n=2q$ DE DIMENSIONS. — On part de l'expression (77) qui concerne l'identité des ondes ordinaires dans un espace ayant une dimension de plus et l'on considère une fonction de la forme $\psi(x_j, vt)\exp(\pm k_0 x_{2q+1})$. On a donc, en intégrant sur x'_{2q+1} de $x_{2q+1}-h(x'_j)$ à $x_{2q+1}+h(x'_j)$,

$$\left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x_j, vt)\,e^{\pm k_0 x_{2q+1}} = \left[v^{-2}\partial_t^2-\partial_{2q+1}^2-\sum_{j=1}^{2q}\partial_j^2\right]\left[e^{\pm k_0 x_{2q+1}}\{\ldots\}\right], \tag{124}$$

$$\begin{aligned}\{\ldots\} = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^q}&\underbrace{\int\cdots\int}_{2q}dv'_{2q}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{q-1} \\ &\times\int_{x_{2q+1}-h(x'_j)}^{x_{2q+1}+h(x'_j)}\psi(x'_j, vt-r)\,e^{\pm k_0(x'-x)_{2q+1}}\frac{dx'_{2q+1}}{r}.\end{aligned} \tag{125}$$

Posons

$$r^2=\rho^2+(x'-x)_{2q+1}^2, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}$$

et introduisons la variable τ définie par

$$\tau = t-\frac{r}{v} = t-\frac{1}{v}\sqrt{\rho^2+(x'-x)_{2q+1}}. \tag{126}$$

On a donc

$$(127)\qquad (x'-x)_{2q+1}=\pm\sqrt{v^2(t-\tau)^2-\rho^2}=\pm\gamma,$$

avec le signe $+$ ou $-$ suivant que $(x'-x)_{2q+1}$ est positif ou négatif. On en déduit

$$(128)\qquad \frac{d(x'-x)_{2q+1}}{r}=\pm\frac{v\,d\tau}{\gamma}.$$

En portant ces expressions dans (125) on est donc amené à diviser en deux l'intervalle d'intégration, de $-\infty$ à zéro et de zéro à $+\infty$. Dans la transformation (126) les deux surfaces $(x'-x)_{2q+1}=\pm h(x'_i)$ sont confondues en une surface unique que nous écrirons $\tau=g(x'_j)$; la limite $(x'-x)_{2q+1}=0$ correspond à l'hypercône $\tau=t\pm\frac{\rho}{v}$; τ varie donc pour les deux intervalles de $g(x'_i)$ à $t-\frac{\rho}{v}$.

On peut donc écrire

$$(129)\qquad \{\dots\}=\frac{1}{(2\pi)^q}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q} dv'_{2q}\left[-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right]^{q-1}\int_{g(x'_j)}^{t-\frac{\rho}{v}}\psi(x'_j,\,v\tau)\frac{e^{\pm k_0\gamma}+e^{-(\pm)k_0\gamma}}{2\gamma}\,v\,d\tau.$$

On voit que l'expression obtenue ne dépend plus de x_{2q+1}. Dans (124) l'opérateur ∂^2_{2q+1} n'agit plus que sur l'exponentielle $\exp\pm k_0x_{2q+1}$; il est donc équivalent à k_0^2. L'exponentielle disparaît donc des deux membres de (124) et l'on a, en faisant apparaître le cosinus hyperbolique dans (129)

$$(130)\qquad \psi(x_j,\,vt)=\left[v^{-2}\partial_t^2-k_0^2-\sum_{j=1}^{2q}\partial_j^2\right]\{\dots\},$$

$$(131)\qquad \{\dots\}=\frac{1}{(2\pi)^q}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q} dv'_{2q}\left[-\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right]^{q-1}\int_{g(x'_j)}^{t-\frac{\rho}{v}}\psi(x'_j,\,v\tau)\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)}{\gamma}\,v\,d\tau.$$

On peut écrire (131) d'une manière un peu différente en introduisant l'angle solide Ω_{2q} puisque

$$(132)\qquad (2\pi)^q=2^{q-1}(q-1)!\,\Omega_{2q}.$$

Enfin $\gamma^{-1}\operatorname{ch}(k_0\gamma)$ est relié à la fonction de Bessel modifiée et de seconde espèce $I_{-\frac{1}{2}}(k_0\gamma)$ puisque

$$(133)\qquad \frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)}{\gamma}=k_0\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{I_{-\frac{1}{2}}(k_0\gamma)}{(k_0\gamma)^{\frac{1}{2}}}.$$

Quand $k_0=0$ dans (131) on retrouve (94).

2° Espace ayant un nombre impair $(n=2q+1)$ de dimensions. — Partons de l'identité (94) où l'on remplace q par $q+1$ et comme dans le paragraphe précédent considérons une fonction du type $\psi(x'_j,\,vt)\exp(k_0x_{2q+2})$. De plus intégrons sur la variable x'_{2q+2} de $x_{2q+2}-\gamma_g$ à $x_{2q+2}+\gamma_g$ avec

$$(134)\qquad \gamma_g=\sqrt{v^2[t-g(x_j)]^2-r^2_{2q+1}}.$$

Prenons de plus $g(x'_j)$ indépendant de x'_{2q+2} ; en écrivant alors simplement r^2 au lieu de r^2_{2q+1}, il vient

$$(135)\qquad \left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x_j,\, vt)\, e^{k_0 x_{2q+2}} = \left[v^{-2}\,\partial_t^2 - \partial_{2q+2}^2 - \sum_{j=1}^{2q+1} \partial_j^2 \right] [e^{k_0 x_{2q+2}}\{\ldots\}];$$

$$(136)\qquad \{\ldots\} = \frac{v}{(2\pi)^{q+1}} \underbrace{\int\cdots\int}_{2q+1} dv'_{2q+1}$$

$$\times \int_{-\gamma_g}^{+\gamma_g} d(x'-x)_{2q+2} \left[-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} \right]^q \int_{g(x'_j)}^{t-\frac{\rho}{v}} \frac{\psi(x'_j,\, v\tau)\, e^{\pm k_0(x'-x)_{2q+2}}}{\sqrt{v^2(t-\tau)^2-\rho^2}}\, d\tau.$$

Comme $\rho^2 = r^2 + (x'-x)_{2q+1}$, on a

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

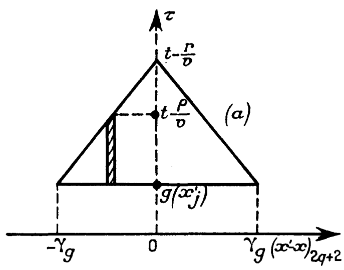

Fig. 6 *a*.

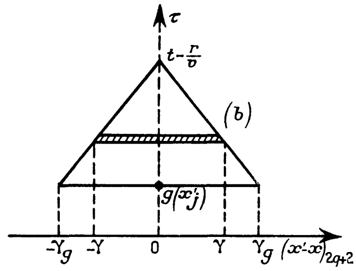

Fig. 6 *b*.

et en posant

$$(137)\qquad \gamma = \sqrt{v^2(t-\tau)^2 - r^2},$$

les deux dernières intégrales s'écrivent

$$(138)\qquad \int_{-\gamma_g}^{+\gamma_g} d(x'-x)_{2q+2} \left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right]^q$$

$$\times \int_{g(x'_j)}^{t-v^{-1}\sqrt{r^2+(x'-x)^2_{2q+2}}} \exp[\pm k_0(x'-x)_{2q+2}] \frac{\psi(x'_j,\, v\tau)}{\sqrt{\gamma^2-(x'-x)^2_{2+q2}}}\, d\tau.$$

Dans (136) on peut faire passer l'opérateur $\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right]^q$ en avant du signe somme; les limites γ_g dépendent de r mais dans les dérivations par rapport à cette limite, la fonction de $(x'-x)_{2q+2}$ à intégrer s'annule, car les limites d'intégration sur la variable τ sont les mêmes; on a en effet d'après (134),

$$g(x'_j) = t \pm v^{-1}\sqrt{r^2+\gamma_g^2}.$$

Les intégrations sur $(x'-x)_{2q+2}$ et τ portent alors sur le domaine triangulaire de la figure 6 *a*. En permutant l'ordre des intégrations sur les variables (*fig.* 6 *b*) on voit que (138) s'écrit

$$(139)\qquad \left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right]^q \int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}} d\tau\, \psi(x'_j,\, v\tau) \int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{e^{\pm k_0(x'-x)_{2q+2}}}{\sqrt{\gamma^2-(x'-x)^2_{2q+2}}}\, d(x'-x)_{2q+2}.$$

En posant $\gamma u = (x' - x)_{2q+2}$ et en tenant compte de

$$\int_{-1}^{+1} \frac{e^{\pm k_0 u \gamma}}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \pi I_0(k_0 \gamma), \tag{140}$$

(139) devient

$$\pi \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right]^q \int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}} \psi(x'_j, v\tau) I_0(k_0\gamma)\, d\tau. \tag{141}$$

On obtient donc une expression qui ne dépend plus de x_{2q+2}; portons-la dans (135) et (136); comme dans ces conditions l'opérateur ∂^2_{2q+2} est équivalent à k_0^2 et que l'exponentielle disparaît de chaque côté du signe $=$, on obtient l'identité cherchée sous la forme

$$\left.\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix}\right\} \psi(x_j, vt) = \left[v^{-2} \partial_t^2 - k_0^2 - \sum_{j=1}^{2q+1} \partial_j^2 \right] \{\ldots\}, \tag{142}$$

$$\{\ldots\} = \frac{v}{2} \frac{1}{(2\pi)^q} \underbrace{\int \cdots \int}_{2q+1} dv'_{2q+1} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right]^q \int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}} \psi(x'_j, v\tau) I_0(k_0\gamma)\, d\tau. \tag{143}$$

On pourrait écrire autrement cette expression en faisant apparaître l'angle solide Ω_{2q+1} puisque l'on a

$$2(2\pi)^q = 1.3.5\ldots(2q-1)\Omega_{2q+1} = \frac{2^q \Gamma\left(q + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \Omega_{2q+1}.$$

Quand $k_0 = 0$, on a $I_0(0) = 1$ et l'expression (143) redonne l'expression (78).

L'identité qui généralise (82) s'écrirait de même

$$\{\ldots\} = -\frac{v}{4} \frac{1}{(2\pi)^q} \underbrace{\int \cdots \int}_{2q+1} dv'_{2q+1} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right]^q \int_{t-\frac{r}{v}}^{t+\frac{r}{v}} \psi(x'_i, v\tau) J_0(ik_0\gamma)\, d\tau, \tag{144}$$

$i\gamma$ est réel dans l'intervalle considéré pour τ.

(144) n'est pas la forme la plus générale que l'on puisse donner à l'identité. Nous verrons dans le cas $q = 0$ que l'on peut remplacer le cylindre de génératrices parallèles à l'axe des τ par une surface quelconque s'appuyant sur l'hypercône caractéristique $\gamma = 0$.

On peut aussi obtenir une expression identique à (143) mais où l'intégrale sur τ va de $t + \frac{r}{v}$ à $g(x'_j)$.

3° Réunion en une formule unique des expressions relatives a n pair ($n = 2q$) et n impair ($n = 2q + 1$). — Pour cela nous utiliserons les relations suivantes entre les fonctions de Bessel de différents ordres

$$\left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^q [x^q I_q(x)] = I_0(x), \tag{145}$$

$$\left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^q \left[x^{q-\frac{1}{2}} I_{q-\frac{1}{2}}(x) \right] = x^{-\frac{1}{2}} I_{-\frac{1}{2}}(x). \tag{146}$$

Ces expressions sont des cas particuliers d'une formule plus générale qui s'écrit

$$(147)\qquad \left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right]^q [x^{p+q}\mathrm{I}_{p+q}(x)] = x^p \mathrm{I}_p(x).$$

Pour ce qui nous intéresse, l'argument à considérer est $x = k_0\gamma$; comme on a $\gamma^2 = v^2(t-\tau)^2 - r^2$ on en tire

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

et (147) devient

$$(148)\qquad \left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^q [\gamma^{q+p}\mathrm{I}_{q+p}(k_0\gamma)] = k_0^q\gamma^p \mathrm{I}_p(k_0\gamma).$$

Faisons $p = 0$ dans (148) et portons cette expression dans (143); il vient

$$(149)\qquad \{\ldots\} = \frac{v}{2}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q+1} dv'_{2q+1}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{2q}\int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}}\left[\frac{\gamma}{2\pi k_0}\right]^q \mathrm{I}_q(k_0\gamma)\psi(x'_j, v\tau)\,d\tau.$$

On notera que la puissance $q^{\text{ième}}$ de l'opérateur $\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]$ commute avec le signe somme de l'intégrale sur τ malgré qu'une des limites contienne r car la dérivation par rapport à cette limite donne zéro; il n'en serait plus de même pour les puissances suivantes de cet opérateur car $\mathrm{I}_0(0)$ n'est pas nul alors que $\mathrm{I}_q(0)$ était nul tant que $q > 0$. Comme $n = 2q+1$, on voit que (142) et (149) peuvent aussi s'écrire

$$(150)\qquad \left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x'_j, vt) = \left[v^{-2}\partial_t^2 - k_0^2 - \sum_{j=1}^{n}\partial_j^2\right]\{\ldots\},$$

$$(151)\qquad \{\ldots\} = \frac{v}{2}\underbrace{\int\cdots\int}_{n} dv'_n\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{n-1}\int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}}\left[\frac{\gamma}{2\pi k_0}\right]^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{I}_{\frac{n-1}{2}}(k_0\gamma)\psi(x'_j, v\tau)\,d\tau.$$

Montrons maintenant que (130) et (131) peuvent s'écrire de la même manière que (150) et (151) et nous aurons ainsi réuni les formules relatives à n pair et n impair. C'est immédiat pour (130) puisque $n = 2q$. Pour transformer (131), on tient d'abord compte de (133), ce qui donne

$$(152)\qquad \{\ldots\} = \frac{vk_0}{2}\frac{1}{(2\pi)^{q-\frac{1}{2}}}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q} dv'_{2q}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{q-1}$$
$$\times\int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}}\psi(x'_j, v\tau)(k_0\gamma)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{I}_{-\frac{1}{2}}(k_0\gamma)\,d\tau,$$

puis on utilise l'expression (148) avec $p = -\frac{1}{2}$, ce qui permet d'écrire, puisque $\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^q$ commute avec le signe somme,

$$(153)\qquad \{\ldots\} = \frac{v}{2}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q} dv'_{2q}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{2q-1}\int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}}\psi(x'_i, v\tau)\left(\frac{\gamma}{2\pi k_0}\right)^{q-\frac{1}{2}}\mathrm{I}_{q-\frac{1}{2}}(k_0\gamma)\,d\tau.$$

Comme dans ce cas $n = 2q$ on voit que (153) est identique à (151) et c'est bien ce que nous voulions démontrer.

On pourrait faire apparaître l'angle solide Ω_n dans (151), soit

$$(154) \qquad \{\ldots\} = \frac{v\sqrt{\pi}}{\Omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \underbrace{\int \cdots \int}_{n} dv'_n \left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{n-1} \times \int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}} \left(\frac{\gamma}{2k_0}\right)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{I}_{\frac{n-1}{2}}(k_0\gamma)\psi(x'_j, v\tau)\, d\tau.$$

Quand on fait $k_0 = 0$ dans (151) on voit que l'on retrouve bien (108) car on a

$$(155) \qquad \mathrm{I}_{\frac{n-1}{2}}(k_0\gamma) \sim \frac{(k_0\gamma)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Enfin les formules qui généraliseraient (113) et (114) s'écriraient

$$(156) \qquad \left.\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix}\right\} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\psi(x_j, vt) = \left[v^{-2}\partial_t^2 - k_0^2 - \sum_{j=1}^{n}\partial_j^2\right]\{\ldots\},$$

$$(157) \qquad \{\ldots\} = -\frac{v}{4}\underbrace{\int \cdots \int}_{n} dv'_n \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]^{n-1} \int_{t-\frac{r}{v}}^{t+\frac{r}{v}} \psi(x'_j, v\tau)\left(\frac{i\gamma}{2\pi k_0}\right)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{J}_{\frac{n-1}{2}}(ik_0\gamma)\, d\tau,$$

avec

$$i\gamma = \sqrt{r^2 - v^2(t-\tau)^2},$$

$i\gamma$ est donc une quantité réelle dans le domaine considéré pour τ.

$\mathrm{J}_{\frac{n-1}{2}}$ est la fonction de Bessel ordinaire d'ordre $\frac{n-1}{2}$.

8. Équivalence entre les opérateurs $\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]$ **et** $\left[\frac{1}{v(t-\tau)}\cdot\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right]$. — Cette équivalence est immédiate tant que le premier opérateur est appliqué à une fonction de γ puisque $\gamma^2 = v^2(t-\tau)^2 - r^2$. Il faut toutefois y regarder de plus près quand $\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]$ est appliqué à l'intégrale relative à la variable τ comme dans (131), (143) et (151), car une des limites dépend de t et de r.

Dans l'expression de (151) les premières dérivations concernant la limite supérieure donnent zéro ; il n'y a donc que les dérivations sous le signe somme et elles concernent des fonctions de γ.

Une fois que les dérivations successives de (151) conduisent à (143), dans le cas de $n = 2q+1$, la dérivation par rapport à la limite ne donne plus zéro, mais on vérifie sans peine que dans ce cas les deux types d'opérateurs sont encore équivalents.

Dans le cas de $n = 2q$, une fois que les dérivations successives de (151) ont conduit à (131) il n'est plus possible de dériver sans précautions particulières par rapport aux limites ou sous le signe somme ; on a une forme indéterminée $(\infty - \infty)$

qui a une vraie valeur. On peut éviter sans difficulté cette forme indéterminée ainsi que nous l'avons déjà indiqué et l'on voit encore que les deux opérateurs sont équivalents.

On peut donc écrire au lieu de (150) et (151) :

$$(158)\qquad \left.\begin{matrix}1\\ 1/2\\ 0\end{matrix}\right\}\psi(x'_j,\, vt) = v^{-2}\,\partial_t^2 - k_0^2 - \sum_{j=1}^{n}\partial_j^2,$$

$$(159)\qquad \{\ldots\} = \frac{v}{2}\underbrace{\int\cdots\int}_{n} dv'_n\left[\frac{1}{v(t-\tau)}\,\frac{1}{v}\,\frac{\partial}{\partial t}\right]^{n-1}$$
$$\times\int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}}\left(\frac{\gamma}{2\pi k_0}\right)^{\frac{n-1}{2}} I_{\frac{n-1}{2}}(k_0\gamma),\ \psi(x'_j),\ v\tau)\,d\tau$$

ou bien

$$(160)\qquad \{\ldots\} = \frac{v\sqrt{\pi}}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\underbrace{\int\cdots\int}_{n} dv'_n\left[\frac{1}{v(t-\tau)}\,\frac{1}{v}\,\frac{\partial}{\partial t}\right]^{n-1}$$
$$\times\int_{g(x'_j)}^{t-\frac{r}{v}}\left[\frac{\gamma}{2k_0}\right]^{\frac{n-1}{2}} I_{\frac{n-1}{2}}(k_0\gamma)\,\psi(x'_j,\, v\tau)\,d\tau.$$

Comme l'opérateur $[\quad]^{n-1}$ peut sortir de l'intégrale, on voit que l'on peu écrire

$$(161)\qquad \{\ldots\} = \frac{v\sqrt{\pi}}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\frac{1}{v(t-\tau)}\,\frac{1}{v}\,\frac{\partial}{\partial t}\right]^{n-1}$$
$$\times\underbrace{\int\cdots\int_{V_{n+1}}}_{n+1}\left(\frac{\gamma}{2k_0}\right)^{\frac{n-1}{2}} I_{\frac{n-1}{2}}(k_0\gamma)\,\psi(x'_j,\, v\tau)\,dV'_{n+1}.$$

L'intégrale $(n+1)$-uple étant étendue au volume de la multiplicité mixte

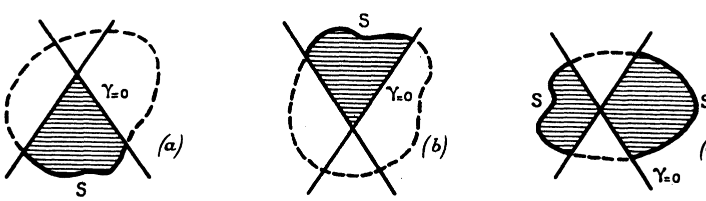

Fig. 7.

(espace et temps) x'_j, τ limité par une hypersurface de cette multiplicité qui s'appuierait sur l'hypercône $\gamma = 0$ (*fig.* 7 *a*). L'expression (161) est plus générale que (160) car elle est valable même si l'hypersurface n'est pas représentable sous la forme $\tau = g(x'_j)$.

Les formules qui généraliseraient (156) et (157) s'écriraient de même

$$
(162)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\psi(x_j,\, vt) = \left[v^{-2}\partial_t^2 - k_0^2 - \sum_{j=1}^{n}\partial_j^2 \right]\{\dots\},\\
&\{\dots\} = -\frac{1}{2}\,\frac{v\sqrt{\pi}}{\Omega_n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\frac{1}{v(t-\tau)}\,\frac{1}{v}\,\frac{\partial}{\partial t}\right]^{n-1}\\
&\quad\times\underbrace{\int\cdots\int_{V_{n+1}}}_{n+1}\left(\frac{i\gamma}{2k_0}\right)^{\frac{n-1}{2}} J_{\frac{n-1}{2}}(ik_0\gamma)\psi(x'_j,\, v\tau)\, dV'_{n+1},
\end{aligned}
\right.
$$

l'intégrale étant étendue au domaine de la figure 7 *c*.

On pourrait aussi établir une formule identique à (161) mais concernant la figure 7 *b*.

Les trois possibilités 1, $\frac{1}{2}$, 0 correspondent respectivement aux cas où le sommet du cône est à l'intérieur de S, sur S, en dehors de S.

9. Une identité intégrale entre les fonctions de Bessel et de Hankel. — Dans (150) et (151) choisissons une fonction ψ du type

$$\psi(x_j,\, vt) = \Phi(x_j)\exp(\pm ikvt).$$

Ces expressions s'écrivent alors

$$
(163)\qquad \left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\Phi(x_j) = \left[\sum_{j=1}^{n}\partial_j^2 + k^2 + k_0^2\right]\{\dots\},
$$

$$
(164)\qquad \{\dots\} = -\frac{v}{2}\underbrace{\int\cdots\int}_{n}\psi(x'_j)\,dv'_n\left[-\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right]^{n-1}
\times\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{v}}\left(\frac{\gamma}{2\pi k_0}\right)^{\frac{n-1}{2}} I_{\frac{n-1}{2}}(k_0\gamma)\, e^{-ikv(t-\tau)}\, d\tau.
$$

Choisissons γ comme variable au lieu de τ. On a

$$v(t-\tau) = \sqrt{\gamma^2 + r^2}, \qquad \gamma\, d\gamma = -v^2(t-\tau)\, d\tau = -v\sqrt{\gamma^2 + r^2}\, d\tau$$

et quand τ varie de $-\infty$ à $t - \frac{r}{v}$, la variable γ varie de $+\infty$ à zéro ; d'où

$$
(165)\qquad \{\dots\} = \underbrace{\int\cdots\int}_{n}\psi(x'_j)\, G_n\, dv'_n.
$$

En posant

$$
(166)\qquad G_n = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{\gamma}{2\pi k_0}\right)^{\frac{n-1}{2}} I_{\frac{n-1}{2}}(k_0\gamma)\left[-\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\right]^{n-1}\left[\frac{e^{\pm ik\sqrt{\gamma^2+r^2}}}{\sqrt{\gamma^2 + r^2}}\right]\gamma\, d\gamma.
$$

En comparant (163) et (166) avec (33) et (34) où $\lambda = \sqrt{k^2 + k_0^2}$ on en conclut que l'on a aussi

$$(167) \qquad G_n = \frac{1}{4i}\left[\frac{\pm\sqrt{k^2+k_0^2}}{2\pi r}\right]^{\frac{n-2}{2}} H^1_{\frac{n-2}{2}}(\pm r\sqrt{k^2+k_0^2}).$$

En égalant les seconds membres de (166) et (167), on obtient l'identité cherchée.

Exemple. — Avec $n = 1$, on a

$$(168) \qquad \int_0^{\infty} I_0(k_0\gamma)\frac{e^{\pm ik\sqrt{\gamma^2+r^2}}}{\sqrt{\gamma^2+r^2}}\gamma\, d\gamma = -\frac{e^{\pm ir\sqrt{k^2+k_0^2}}}{\pm i\sqrt{k^2+k_0^2}}.$$

Quand on remplace k_0 par ik_0 et que l'on tient compte de $I_0(ik_0\gamma) = J_0(k_0\gamma)$, (168) est une identité bien connue (*voir* par exemple [2], p. 384).

10. Forme particulière des identités conduisant au problème de Cauchy. — 1° EXPRESSION GÉNÉRALE RELATIVE AUX ONDES AMORTIES. — On part de (160) et l'on prend comme surface $\tau = g(x'_j)$ l'hyperplan $\tau = 0$ et comme domaine v_n l'hypercercle $r \leqq vt$ dans ce plan. Avec les coordonnées hyperpolaires (9), on a

$$dv'_n = r^{n-1}\, dr\, d\Omega_n;$$

toutes les variables angulaires se trouvent alors dans ψ et $d\Omega_n$ et l'on pose

$$(169) \qquad \bar{\psi} = \frac{1}{\Omega_n}\underbrace{\int\cdots\int}_{n-1}\psi(x_j + rn_j, v\tau)\, d\Omega_n.$$

Dans (160) on peut aussi faire passer l'opérateur $[\quad]^{n-1}$ en avant du signe

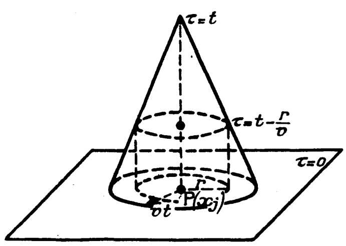

Fig. 8.

d'intégration sur r puisque, pour la limite $r = vt$, l'intégrale sur τ devient nulle. On a donc

$$(170) \qquad \{\ldots\} = \frac{v\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\frac{1}{v(t-\tau)}\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right]^{n-1}\int_0^{vt} r^{n-1}\, dr\int_0^{t-\frac{r}{v}}\left(\frac{\gamma}{2k_0}\right)^{\frac{n-1}{2}} I_{\frac{n-1}{2}}(k_0\gamma)\psi\, d\tau.$$

En permutant l'ordre des intégrations (*voir* par exemple la figure 8 qui se rapporte à $n = 2$), on obtient

$$\{\ldots\} = \frac{v\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}[\quad]^{n-1}\int_0^t d\tau \int_0^{v(t-\tau)} \left(\frac{\gamma}{2k_0}\right)^{\frac{n-1}{2}} I_{\frac{n-1}{2}}(k_0\gamma)\bar{\psi} r^{n-1}\,dr.$$

L'opérateur $[\quad]^{n-1}$ commute avec le premier signe d'intégration, ce qui permet d'écrire d'une manière définitive

$$(171)\quad \{\ldots\} = \frac{v\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^t d\tau\left[\frac{1}{v(t-\tau)}\,\frac{1}{v}\,\frac{\partial}{\partial t}\right]^{n-1}\int_0^{v(t-\tau)}\left(\frac{\gamma}{2k_0}\right)^{\frac{n-1}{2}} I_{\frac{n-1}{2}}(k_0\gamma)\bar{\psi}\, r^{n-1}\,dr.$$

En tenant compte de (148) avec $p = -\frac{1}{2}$ ou $p = 0$ et en séparant les cas pairs et impairs, on obtient des expressions plus simples. Quand $n = 2q$:

$$(172)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi(x_j, vt) = \left[v^{-2}\partial_t^2 - k_0^2 - \sum_{j=1}^{2q}\partial_j^2\right]\{\ldots\},\\ &\{\ldots\} = \frac{v}{2^{q-1}(q-1)!}\int_0^t d\tau\left[\frac{1}{v(t-\tau)}\,\frac{1}{v}\,\frac{\partial}{\partial t}\right]^{q-1}\int_0^{v(t-\tau)}\gamma^{-1}\operatorname{ch}(k_0\gamma)\,\bar{\psi}\, r^{2q-1}\,dr,\\ &\bar{\psi} = \frac{1}{\Omega_{2q}}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q-1}\psi(x_u + rn_u,\ v\tau)\,d\Omega_{2q}; \end{aligned}\right.$$

et quand $n = 2q + 1$:

$$(173)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi(x_j, vt) = \left[v^{-2}\partial_t^2 - k_0^2 - \sum_{j=1}^{2q+1}\partial_j^2\right]\{\ldots\},\\ &\{\ldots\} = \frac{v}{1.3.5\ldots(2q-1)}\int_0^t d\tau\left[\frac{1}{v(t-\tau)}\,\frac{1}{v}\,\frac{\partial}{\partial t}\right]^{q}\int_0^{v(t-\tau)}\bar{\psi}\, I_0(k_0\gamma)\, r^{2q}\,dr,\\ &\bar{\psi} = \frac{1}{\Omega_{2q+1}}\underbrace{\int\cdots\int}_{2q}\psi(x_u + rn_u,\ v\tau)\,d\Omega_{2q+1}. \end{aligned}\right.$$

Quand $k_0 = 0$ dans (171), on a

$$I_{\frac{n-1}{2}}(k_0\gamma) = \frac{(k_0\gamma)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \qquad 2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,(n-1)!$$

d'où l'expression

$$(174)\quad \left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x_j, vt = \left[v^{-2}\partial_t^2 - \sum_{j=1}^{n}\partial_j^2\right] \times\left\{\frac{v}{(n-1)!}\int_0^t d\tau\left[\frac{1}{v(t-\tau)}\,\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right]^{n-1}\int_0^{v(t-\tau)}\gamma^{n-1}\bar{\psi}\, r^{n-1}\,dr\right\}.$$

Dans les identités (172) ou (173) on peut faire directement $k_0 = 0$ puisque $\operatorname{ch}(0) = I_0(0) = 1$. En réalité on a toujours 1 au premier membre de (174) car avec le domaine considéré x_j est toujours au centre, donc à l'intérieur du domaine v_n qui est ici l'hypercercle. Il y a toutefois une exception, pour $n=1$, car dans ce cas on n'a pas un cône mais un demi-triangle et x_j est sur la limite. On a alors avec x, ξ au lieu de x_1, x'_1 :

$$(175)\qquad \psi(x, vt) = [v^{-2}\partial_t^2 - \partial_x^2]\left\{ v\int_0^t d\tau \int_0^{v(t-\tau)} \psi(x+\xi, v\tau)\, d\xi \right\}$$
$$= [v^{-2}\partial_t^2 - \partial_x^2]\left\{ \frac{v}{2}\int_0^t d\tau \int_{-v(t-\tau)}^{+v(t-\tau)} \psi(x+\xi, v\tau)\, d\xi \right\}.$$

2° Autre expression de l'identité relative aux ondes non amorties. — L'identité (174) peut s'écrire sous la forme

$$(176)\qquad \psi(x_j, vt) = \left[v^{-2}\partial_t^2 - \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 \right]\left\{ \frac{v}{(n-2)!}\int_0^t d\tau (v^{-1}\partial_t)^{n-2} \int_0^{v(t-\tau)} \gamma^{n-3}\bar{\psi}\, r\, dr \right\},$$

$\bar{\psi}$ étant toujours donné par (169) et $n \geqq 2$. Pour montrer que (176) n'est pas différente de (174) il suffit de montrer que l'on a

$$(n-1)(v^{-1}\partial_t)^{n-2}\int_0^{v(t-\tau)} \gamma^{n-3}\bar{\psi}\, r\, dr = \left[\frac{1}{v(t-\tau)}\,\frac{1}{v}\,\frac{\partial}{\partial t} \right]^{n-1} \int_0^{v(t-\tau)} \gamma^{n-1}\bar{\psi}\, r^{n-1}\, dr$$

ou encore puisque

$$\frac{1}{v(t-\tau)}\,\frac{1}{v}\,\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \gamma^{-1},$$

que l'on a

$$(177)\qquad (v^{-1}\partial_t)^{n-2}\int_0^{v(t-\tau)} \gamma^{n-3}\bar{\psi}\, r\, dr = \left[\frac{1}{v(t-\tau)}\,\frac{1}{v}\,\frac{\partial}{\partial t} \right]^{n-2} \int_0^{v(t-\tau)} \gamma^{n-3}\bar{\psi}\, r^{n-1}\, dr.$$

Nous allons pour cela établir la relation

$$(178)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n-2}\int_0^u \gamma^{n-3} f(r)\, dr = \left(\frac{1}{u}\,\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n-2}\int_0^u \gamma^{n-3} f(r)\, r^{n-2}\, dr,$$

où $\gamma = \sqrt{u^2 - r^2}$. Notons d'abord que l'on a entre opérateurs les relations

$$(179)\qquad \left(p + u\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(p - 1 + u\frac{\partial}{\partial u}\right),$$

$$(180)\qquad \left(p + u\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(\frac{1}{u}\,\frac{\partial}{\partial u}\right) = \left(\frac{1}{u}\,\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(p - 2 + u\frac{\partial}{\partial u}\right).$$

Dans ces conditions appliquons l'opérateur $\left(n - 1 + u\frac{\partial}{\partial u}\right)$ aux deux membres de (178); en tenant compte de (179) et (180) d'une manière répétée, on obtient

$$(181)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n-2}\left(1 + u\frac{\partial}{\partial u}\right)\int_0^u \gamma^{n-3} f\, dr = \left(\frac{1}{u}\,\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n-2}\left(u\frac{\partial}{\partial u} - (n-3)\right)\int_0^u \gamma^{n-3} f\, r^{n-2}\, dr.$$

On vérifiera aisément que l'on a

$$(182)\qquad \left(1 + u\frac{\partial}{\partial u}\right)\int_0^u \gamma^{n-3} f\, dr = \frac{1}{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^2\int_0^u \gamma^{n-1} f\, dr,$$

$$(183)\qquad \left(u\frac{\partial}{\partial u} - (n-3)\right)\int_0^u \gamma^{n-3} f\, r^{n-2}\, dr = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{u}\,\frac{\partial}{\partial u}\right)^2\int_0^u \gamma^{n-1} f\, r^{n}\, dr.$$

En portant ces expressions dans (181) on obtient une expression analogue à (178) mais où n est remplacé par $n+2$. Donc si la relation (178) est vraie pour n elle l'est aussi pour $n+2$, et il suffit de la vérifier pour $n=2$ et $n=3$, ce qui est immédiat.

Remplaçons maintenant $f(r)$ par $r\overline{\psi}$ et u par $v(t-\tau)$ dans (178); elle devient alors identique à (177) et (176) est ainsi établie.

Exemples. — $n=2$:

$$(184)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi(x, y, vt) = (v^{-2}\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2)\left\{\int_0^t v\, d\tau \int_0^{v(t-\tau)} \gamma^{-1}\overline{\psi}\, r\, dr\right\},\\ &\overline{\psi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi, v\tau)\, d\varphi; \end{aligned}\right.$$

$n=3$:

$$(185)\quad \left\{\begin{aligned} \psi(x, y, z, vt) &= (v^{-2}\partial_t^2 - \Delta)\left\{\int_0^t v\, d\tau \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{v(t-\tau)} \overline{\psi}\, r\, dr\right\}\\ &= (v^{-2}\partial_t^2 - \Delta)\left\{\int_0^t \overline{\psi}_S\, v^2(t-\tau)\, d\tau\right\},\\ \overline{\psi}_S = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} &\psi[x + v(t-\tau)\sin\theta\cos\varphi,\\ &\quad y + v(t-\tau)\sin\theta\sin\varphi, z + v(t-\tau)\cos\theta, v\tau]\, d\varphi. \end{aligned}\right.$$

3° Solution du problème de Cauchy. — En dérivant par rapport aux limites ou sous le signe somme dans (176), on obtient

$$(186)\quad \begin{aligned} \psi(x_j, vt) = {} & \frac{v}{(n-2)!}\int_0^t d\tau (v^{-1}\partial_t)^{n-2}\int_0^{v(t-\tau)} \gamma^{n-3}\left\{\overline{\left(v^{-2}\partial_t^2 - \sum_{j=1}^n \partial_j^2\right)\psi}\right\} r\, dr\\ & + \frac{v^2}{(n-2)!}(v^{-1}\partial_t)^{n-1}\int_0^{vt} \gamma^{n-3}\overline{\psi}(x_j + n_j r, 0)\, r\, dr\\ & + \frac{v}{(n-2)!}(v^{-1}\partial_t)^{n-2}\int_0^{vt} \gamma^{n-3}\overline{\psi}_t(x_j + n_j r, 0)\, r\, dr. \end{aligned}$$

Ceci est une identité valable quelle que soit la fonction ψ, mais si cette dernière obéit à l'équation

$$(187)\quad \left[v^{-2}\partial_t^2 - \sum_{j=1}^n \partial_j^2\right]\psi(x_j, vt) = f(x_j, vt),$$

(184) donne la solution du problème de Cauchy, telle qu'on la trouve par exemple dans Courant et Hilbert [3] (p. 393 et 402) ou dans R. Sauer [5] (p. 184). Rappelons que

$$(188)\quad \overline{f}(x_j, vt) = \frac{1}{\Omega_n}\underbrace{\int\cdots\int}_{n-1} f(x_j + n_j r, v\tau)\, d\Omega_n.$$

11. Solutions des équations aux dérivées partielles qui se rattachent au cas $n=1$. — 1° Forme particulière des identités pour $n=1$. — Au lieu de x_1, x'_1 on prendra x, ξ pour simplifier l'écriture. L'identité (150)-(151) s'écrit alors avec $r = |x - \xi|$,

$$\left.\begin{matrix}1\\ 1/2\\ 0\end{matrix}\right\}\psi(x, vt) = [v^{-2}\partial_t^2 - k_0^2 - \partial_x^2]\left\{\frac{v}{2}\int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{g(\xi)}^{t - v^{-1}|x-\xi|} \psi(\xi, v\tau)\, \mathrm{I}_0(k_0\gamma)\, d\tau\right\}. \tag{189}$$

Les trois facteurs 1, $\frac{1}{2}$, 0 dans le premier membre de (189) correspondent respectivement aux trois cas a, b, c de la figure 9. La courbe C a pour équation

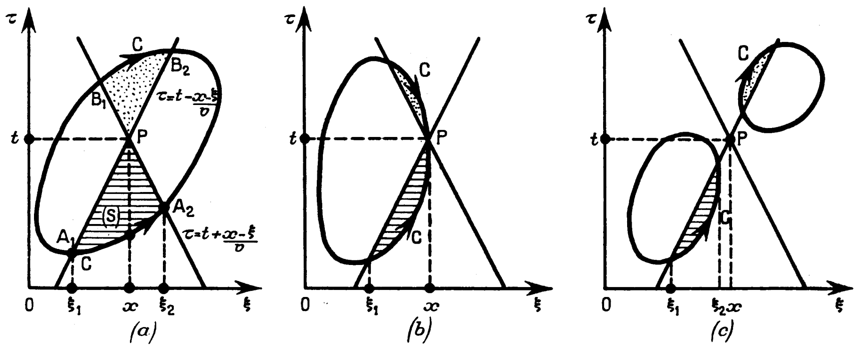

Fig. 9.

$\tau = g(\xi)$, ξ_1 et ξ_2 sont les abscisses des points d'intersection A_1, A_2 de la courbe C avec les deux droites caractéristiques, définies par

$$\tau_1 = g(\xi_1) = t - v^{-1}(x - \xi_1), \qquad \tau_2 = g(\xi_2) = t + v^{-1}(x - \xi_2), \tag{190}$$

ξ_1 et ξ_2 sont donc des fonctions de x et de t, et d'après (190), on a

$$\partial_x \xi_1 = -v^{-1}\partial_t \xi_1 = \frac{1}{1 - v\, g'(\xi_1)}, \qquad \partial_x \xi_2 = v^{-1}\partial_t \xi_2 = \frac{1}{1 + v\, g'(\xi_2)}. \tag{191}$$

Enfin rappelons que

$$\gamma = \sqrt{v^2(t-\tau) - (x-\xi)^2}.$$

La double intégrale sur les variables ξ et τ est en fait étendue à l'aire S hachurée limitée par C et les deux droites caractéristiques. On sait que l'on peut écrire une expression identique à (189) sauf que l'intégration sur τ va de $t + v^{-1}|x - \xi|$ à l'autre courbe C. La double intégrale est alors étendue à l'aire en pointillés.

Il est intéressant de vérifier directement l'identité (189) en dérivant au second membre par rapport aux limites ou sous le signe somme. En tenant compte de

$$(v^{-2}\partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2)\, \mathrm{I}_0(k_0\gamma) = 0, \tag{192}$$

on arrive à l'expression

$$\left.\begin{matrix}1\\ 1/2\\ 0\end{matrix}\right\}\psi(x, vt) = \frac{1}{2}\int_{\xi_1}^{\xi_2} \psi(\xi, vt - |x - \xi|)\, \partial_x^2 |x - \xi|\, d\xi, \tag{193}$$

qui n'est autre que l'identité (15). Si l'on veut ne pas avoir à manipuler des expressions un peu anormales comme $\partial_x^2 | x - \xi |$, on n'a qu'à décomposer l'intervalle ξ_1, ξ_2 en deux intervalles ξ_1, x et x, ξ_2 ; la vérification se fait alors sans difficultés.

Au lieu de considérer l'expression (151) pour $n = 1$, nous aurions pu partir de (161) qui aurait donné

$$(194) \qquad \left.\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix}\right\} \psi(x, vt) = (v^{-2}\partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2)\left\{ \frac{v}{2} \iint_S \psi(\xi, v\tau) I_0(k_0\gamma)\, dS \right\},$$

S étant l'aire hachurée ou l'aire pointillée des figures 9 et $dS = d\xi\, d\tau$. Sous cette dernière forme, (194) est plus générale que (189) car il n'est pas nécessaire que l'équation de la courbe soit du type $\tau = g(\zeta)$; on peut, par exemple, avoir les trois cas types de la figure 10.

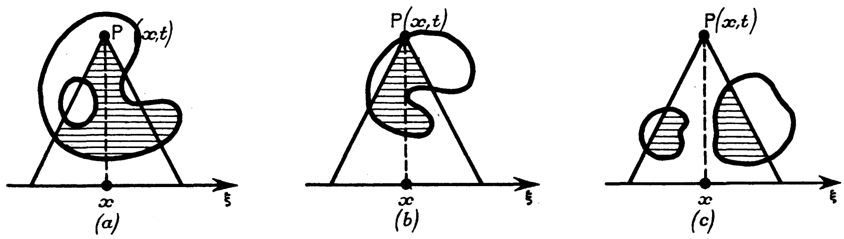

Fig. 10.

Quand $n = 1$ dans (162), on a l'identité

$$(195) \qquad \left.\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix}\right\} \psi(x, vt) = (v^{-2}\partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2)\left\{ -\frac{v}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{h(\tau)}^{x - v | t - \tau |} \psi(\xi, v\tau)\, J_0(ik_0\gamma)\, d\xi \right\}.$$

τ_1 et τ_2 sont les ordonnées des points d'intersection de la courbe C avec les deux droites caractéristiques, définies par

$$(195\,bis) \qquad h(\tau_1) = x - v(t - \tau_1), \qquad h(\tau_2) = x + v(t - \tau_2),$$

τ_1 et τ_2 sont par conséquent des fonctions de x, t et l'on a

$$(195\,ter) \qquad \partial_x \tau_1 = - v^{-1}\partial_t \tau_1 = \frac{1}{h'(\tau_1) - v}, \qquad \partial_x \tau_2 = v^{-1}\partial_t \tau_2 = \frac{1}{h'(\tau_2) + v}.$$

L'intégrale double sur τ et ξ est donc étendue à l'aire hachurée de la figure 11 limitée par la courbe C d'équation $\xi = h(\tau)$ et les deux droites caractéristiques. Dans le domaine considéré l'expression $i\gamma = \sqrt{(x - \xi)^2 - v^2(t - \tau)^2}$ est donc réelle.

On a une identité analogue avec l'aire pointillée de la figure 12, soit

$$(196) \qquad \left.\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{matrix}\right\} \psi(x, v\tau) = (v^{-2}\partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2)\left\{ -\frac{v}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{x + v | t - \tau |}^{h(\tau)} \psi(\xi, v\tau)\, J_0(ik_0\gamma)\, d\xi \right\}.$$

On peut réunir les identités (195) et (196) en une seule, soit

$$(197)\qquad \left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x,\, vt) = (v^{-2}\partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2)\left\{-\frac{v}{2}\iint_S \psi(\xi,\, v\tau)\, J_0(ik_0\gamma)\, d\xi\, d\tau\right\},$$

la surface S étant celle des figures 11 et 12. Sous cette forme (197) est d'ailleurs plus générale et s'applique à des courbes C quelconques, qui peuvent n'être pas représentables sous la forme $\xi = h(\tau)$.

Avec le domaine hachuré de la figure 13 on aurait une identité analogue à (197) sauf qu'il y aurait $\frac{v}{4}$ au lieu de $\frac{v}{2}$ et c'est cette identité qui correspond à (162) où $n = 1$. Quand $n > 1$ on a cône et ces deux domaines ne sont pas distincts ; on

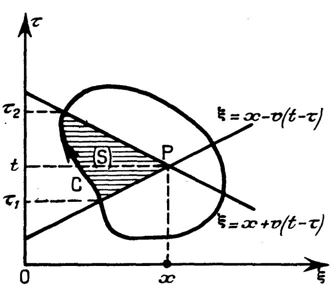

Fig. 11.

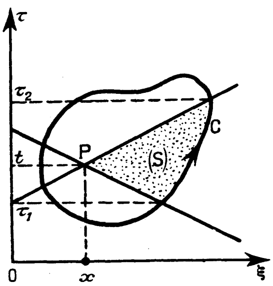

Fig. 12.

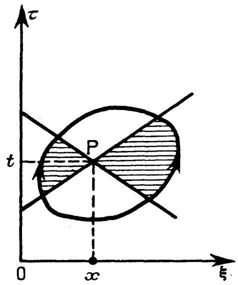

Fig. 13.

doit alors prendre le facteur $\frac{1}{2}$ supplémentaire, au moins quand n est impair, sinon le premier membre est nul, ce qui rend le facteur constant sans importance.

2° Solutions de l'équation du second ordre quand on connait ψ sur une courbe C et ses dérivées suivant la conormale. — On part de l'identité (189) et l'on effectue les dérivations du second membre. Pour les dérivées par rapport à x il ne faut pas oublier que ξ_1 et ξ_2 dépendent de x mais les dérivations par rapport à ces limites donnent zéro à cause de (190) qui rend nul l'intervalle d'intégration sur τ. On remplace ensuite ∂_x par $-\partial_\xi$ et l'on retranche les termes supplémentaires qui s'introduisent ainsi.

Pour les dérivations par rapport à t on opère de même. On transforme les ∂_t en ∂_τ et l'on retranche les termes qui s'introduisent ainsi ; on intègre ensuite par parties sur τ. Après tous ces calculs, un peu longs mais élémentaires, on obtient

$$(198)\qquad \left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x,\, vt) = \frac{v}{2}\int_{\xi_1}^{\xi_2} d\xi \int_{g(\xi)}^{t-v^{-1}|x-|} [v^{-2}\partial_\tau^2 - \partial_\xi^2 - k_0^2]\,\psi(\xi,\, v\tau)\, I_0(k_0\gamma)\, d\tau$$
$$+ \frac{v}{2}\partial_x \int_{\xi_1}^{\xi_2} \psi_C\, I_0(k_0\gamma_C) g'(\xi)\, d\xi + \frac{v}{2}\int_{\xi_1}^{\xi_2} [\partial_\xi\psi(\xi,\, v\tau)]_C\, I_0(k_0\gamma_C) g'(\xi)\, d\xi$$
$$+ \frac{1}{2v}\partial_t \int_{\xi_1}^{\xi_2} \psi_C\, I_0(k_0\gamma_C)\, d\xi + \frac{1}{2v}\int_{\xi_1}^{\xi_2} [\partial_\tau\psi(\xi,\, v\tau)]_C\, I_0(k_0\gamma_C)\, d\xi.$$

Les indices C rappellent que ces grandeurs se rapportent à des points de la courbe C.

Il reste à dériver les deux intégrales simples intéressant la variable τ ; ceci ne présente pas de difficultés et le résultat se simplifie en tenant compte de (191). Les expressions obtenues prennent une forme très simple en posant

$$(199) \qquad dl = \sqrt{d\xi^2 + d\tau^2} = d\xi\,\sqrt{1 + g'^2}, \qquad dS = d\xi\, d\tau\,;$$

$$(200) \qquad n_\xi = \frac{g'(\xi)}{\sqrt{1+g'^2}}, \qquad n_\tau = \frac{-1}{\sqrt{1+g'^2}}\,;$$

$$(201) \qquad \frac{d}{d\nu} = n_\xi \partial_\xi - v^{-2} n_\tau \partial_\tau\,;$$

dl est donc l'élément d'arc de la courbe $\tau = g(\xi)$; n_ξ, n_τ sont les cosinus directeurs de la normale extérieure à la courbe (*fig.* 14) et $\frac{d}{d\nu}$ est la dérivée suivant

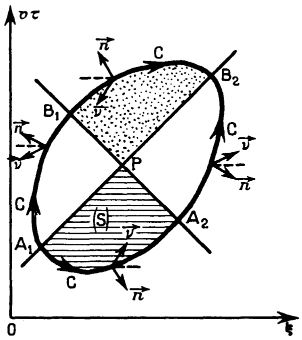

Fig. 14.

une direction que nous appellerons la conormale car elle est associée à la normale. (198) devient alors

$$(202) \qquad \left.\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix}\right\} \psi(x, vt) = \frac{v}{2}\iint_S \left[v^{-2}\partial_\tau^2 - \partial_\xi^2 - k_0^2\right]\psi(\xi, v\tau)\, I_0(k_0\gamma)\, dS$$
$$+ \frac{v}{2}\int_C \left\{ I_0(k_0\gamma)\frac{d\psi}{d\nu} - \psi\,\frac{dI_0(k_0\gamma)}{d\nu}\right\} dl + \frac{1}{2}\left\{\psi_{A_1} + \psi_{A_2}\right\},$$

S est l'aire hachurée (*fig.* 14). Dans le système de coordonnées (ξ, $v\tau$) la conormale est symétrique de la normale par rapport à la direction de l'axe des ξ, comme le montre la figure 14. On obtient une formule identique à (202) avec l'aire en pointillés et la courbe C qui la limite.

Suivant le cas, la direction de la conormale peut être confondue avec celle de la normale extérieure, de la normale intérieure ou de la tangente à la courbe, comme le montrent les figures 15, 16 et 17.

(202) est une identité valable quelle que soit la fonction ψ, mais si ψ obéit à l'équation

$$(203) \qquad (v^{-2}\partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2)\psi(x, vt) = f(x, vt),$$

l'expression (202) donne la solution cherchée, c'est-à-dire qu'elle donne $\psi(x, vt)$ quand on connaît ψ et $\frac{d\psi}{d\nu}$ sur C. Ce qu'il y a de remarquable dans (202) c'est que les valeurs de ψ et de $\frac{d\psi}{d\nu}$ n'apparaissent pas le long des caractéristiques.

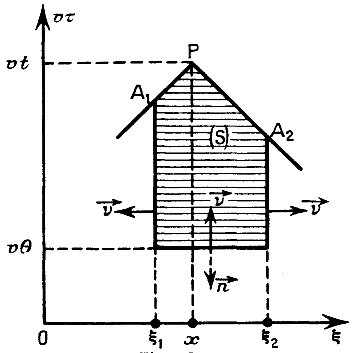

Fig. 15.

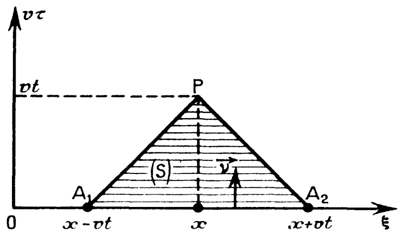

Fig. 16.

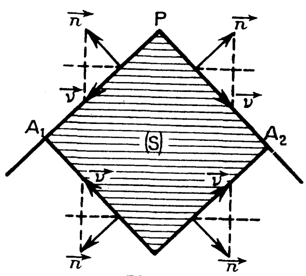

Fig. 17.

Exemple. — *Problème de Cauchy pour l'équation* (203). — On prend comme surface S l'aire hachurée de la figure 16. On a alors $\frac{d}{d\nu} = v^{-2}\frac{d}{d\tau}$ et en posant $\xi = x + \alpha$, (202) devient

$$(204)\qquad \psi(x, vt) = \frac{v}{2}\int_0^t d\tau \int_{-v(t-\tau)}^{v(t-\tau)} f(x+\alpha, v\tau)\, \mathrm{I}_0(k_0\gamma)\, d\alpha$$
$$+ \frac{1}{2v}\int_{-vt}^{vt} \{\mathrm{I}_0(k_0\gamma_0)\,\psi_t(x+\alpha, 0) + \psi(x+\alpha, 0)\,\partial_t \mathrm{I}_0(k_0\gamma_0)\}\, d\alpha$$
$$+ \frac{1}{2}[\psi(x+vt, 0) + \psi(x-vt, 0),$$

avec

$$\gamma = \sqrt{v^2(t-\tau)^2 - \alpha^2}, \qquad \gamma_0 = (\gamma)_{\tau=0} = \sqrt{v^2 t^2 - \alpha^2}.$$

On retrouve la solution bien connue et archi-classique due à Poincaré et Heaviside (équation des télégraphistes). Le signe — devant le terme en $\partial_\tau I_0$ s'est changé en signe + car $\partial_\tau I_0 = -\partial_t I_0$: on a aussi utilisé l'expression

$$[\partial_\tau \psi(x+\alpha, \tau)]_{\tau=0} = \psi_t(x+\alpha, 0);$$

on a toujours 1 au premier membre puisque $\xi_1 < x < \xi_2$.

Au lieu de partir de (189) on aurait pu dériver le second membre de l'identité (196).

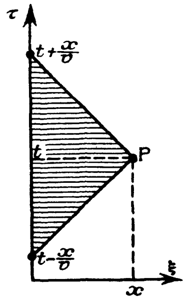

Fig. 18.

En dirigeant le calcul de la même manière que précédemment, on obtient l'identité

$$(205) \qquad \left.\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix}\right\} \psi(x, vt) = -\frac{v}{2} \iint_{(S)} [v^{-2}\partial_\tau^2 - \partial_\xi^2 - k_0^2]\, \psi(\xi, v\tau)\, J_0(ik_0\gamma)\, dS$$
$$- \frac{v}{2} \int_C \left\{ J_0(ik_0\gamma)\frac{d\psi}{d\nu} - \psi \frac{dJ_0(ik_0\gamma)}{d\nu} \right\} dl + \frac{1}{2}\{\psi_{A_1} + \psi_{B_1}\}.$$

Dans cette formule l'aire S est l'une des deux aires en blanc de la figure 14 limitée par les deux caractéristiques et l'une des deux courbes C d'équation $\xi = h(\tau)$. On a

$$(206) \qquad n_\xi = \frac{1}{\sqrt{1+h'^2}}, \qquad n_\tau = \frac{-h'(\tau)}{\sqrt{1+h'^2}}, \qquad dl = d\tau\, \sqrt{1+h'^2},$$

$\frac{d}{d\nu}$ est toujours donné par (201). En fait sous la forme (205) l'identité est aussi valable pour des courbes C qui ne sont pas représentables sous la forme $\xi = h(\tau)$. Si l'on prend l'aire PA_2B_2, il faut changer $\psi_{A_1} + \psi_{B_1}$ dans (205) par $\psi_{A_2} + \psi_{B_2}$.

Exemple d'application de (205). — On prend comme surface S la surface du triangle de la figure 18. On a alors

$$n_\tau = 0, \qquad n_\xi = - ; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d}{d\nu} = -\partial_\xi$$

et en posant $\beta = v(t-\tau)$ (205) devient, si ψ obéit à (203) :

$$(207)\quad \psi(x, vt) = -\frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{-(x-\xi)}^{(x-\xi)} f(\xi, vt+\beta)\, J_0(ik_0\gamma)\, d\beta$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x} \{ \psi_x(o, vt+\beta)\, J_0(ik_0\gamma_0) + \psi(o, vt+\beta)\,\partial_x J_0(ik_0\gamma_0) \}\, d\beta$$
$$+\frac{1}{2}\{ \psi(o, vt+x) + \psi(o, vt-x) \},$$

$i\gamma = \sqrt{\beta^2 - (x-\xi)^2}$ est réel dans le domaine considéré $i\gamma_0 = (i\gamma)_{\xi=0}$. On a toujours 1 au premier membre car $\tau_1 < t < \tau_2$. On retrouve bien dans ce cas particulier de nos formules générales, la formule classique. Quand $k_0 = 0$, $J_0(0) = 1$ et (207) donne la solution de l'équation des ondes non amorties.

3° Solutions des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre et a coefficients constants. — On part des identités (189) ou (195) et l'on décompose l'opérateur $(v^{-2}\partial_t^2 - \partial_x^2 - k_0^2)$ en un produit de deux opérateurs du premier ordre. On peut pour cela utiliser éventuellement les matrices α du type (50) et remplacer l'unique fonction ψ par une matrice à une colonne. On trouvera des exemples de ces solutions dans une publication de l'Auteur [9] pour les équations de Maxwell et les équations de l'électron de Dirac.

12. Solutions des équations aux dérivées partiellles qui se rattachent au cas $n = 2$. — 1° Identité générale. — Au lieu des variables x_1, x_2, x'_1, x'_2, on prendra les variables x, y, ξ, η, ce qui allégera les notations. L'identité (130)-(131), s'écrit alors avec $q = 1$:

$$(208)\qquad \left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x, y, vt) = (v^{-2}\partial_t^2 - k_0^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2)\{\dots\},$$

$$(209)\qquad \{\dots\} = \frac{v}{2\pi}\iint_\Sigma d\xi\, d\eta \int_{g(\xi,\eta)}^{t-\frac{\rho}{v}} \psi(\xi, \eta, v\tau)\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)}{\gamma}\, d\tau$$

$$(210)\qquad \gamma = \sqrt{v^2(t-\tau)^2 - \rho^2}, \qquad \rho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

L'intégrale triple de (209) est étendue au volume v limité par le cône $\gamma = 0$ et la surface S (*fig.* 19) d'équation $\tau = g(\xi, \eta)$. On pourrait donc écrire au lieu de (209) :

$$(211)\qquad \{\dots\} = \frac{v}{2\pi}\iiint_v \psi(\xi, \eta, v\tau)\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)}{\gamma}\, dv, \qquad \text{avec} \qquad dv = d\xi\, d\eta\, d\tau,$$

(211) est d'ailleurs plus générale que (209) car elle garde un sens pour des surfaces S qui ne seraient pas du type $\tau = g(\xi, \eta)$.

Effectuons les dérivations de (208) et (209) ; calculons d'abord $\partial_x\{\dots\}$. La limite Σ dépend de x mais la dérivée de l'intégrale double par rapport aux limites donne zéro car l'intervalle de variation de τ devient nul. En transformant

∂_x en $-\partial_\xi$ on voit que l'on peut écrire

$$\partial_x\{\ldots\} = -\frac{\nu}{2\pi}\iint_\Sigma d\xi\, d\eta\, \partial_\xi \int_{g(\xi,\eta)}^{t-\frac{\rho}{\nu}} \psi(\xi,\eta,\nu\tau)\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)}{\gamma}d\tau \tag{212}$$
$$+\frac{\nu}{2\pi}\iint_\Sigma d\xi\, d\eta \int_{g(\xi,\eta)}^{t-\frac{\rho}{\nu}} \partial_\xi\psi(\xi,\eta,\nu\tau)\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)}{\gamma}d\tau$$
$$-\frac{\nu}{2\pi}\iint_\Sigma [\psi\gamma^{-1}\operatorname{ch}(k_0\gamma)]_S\, g'(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

La première des trois intégrales (212) est nulle car elle se transforme en inté-

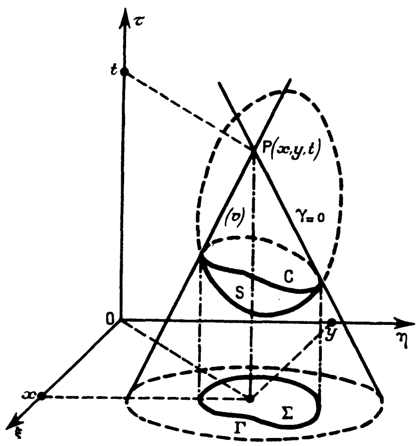

Fig. 19.

grale étendue à la courbe Γ et pour les valeurs de ξ, η sur Γ on a $g(\xi,\eta) = t - \frac{\rho}{\nu}$, c'est-à-dire que l'intervalle d'intégration devient nul. Il y a bien le dénominateur γ qui devient nul aussi, mais comme $\sqrt{\varepsilon}$ alors que l'annulation de l'intervalle d'intervalle fait tendre l'intégrale vers zéro comme ε.

La deuxième dérivation par rapport à x se calcule immédiatement en tenant compte du résultat (212), soit

$$\partial_x^2\{\ldots\} = \frac{\nu}{2\pi}\iint_\Sigma d\xi\, d\eta \int_{g(\xi,\eta)}^{t-\frac{\rho}{\nu}} \partial_\xi^2\psi(\xi,\eta,\nu\sigma)\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)}{\gamma}d\tau \tag{213}$$
$$-\frac{\nu}{2\pi}\iint_\Sigma [\gamma^{-1}\operatorname{ch}(k_0\gamma)\,\partial_\xi\psi]_S\, g'_\xi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$
$$-\frac{\nu}{2\pi}\partial_x\left\{\iint_\Sigma [\psi\gamma^{-1}\operatorname{ch}(k_0\gamma)]_S\, g'_\xi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta\right\}.$$

On a une expression tout à fait analogue pour la dérivée $\partial_y^2\{\ldots\}$.

Pour les dérivées relatives au temps, on rencontre une difficulté car on a une forme indéterminée $(\infty - \infty)$; le premier infini provient de la dérivation de γ^{-1} qui donne γ^{-3} et rend l'intégrale divergente. Il est facile d'éviter cette difficulté en ajoutant et retranchant un terme contenant ψ_0 qui est la valeur de ψ sur le cône $\gamma = 0$, soit $\psi_0 = \psi(\xi, \eta, vt - \rho)$. Ce ψ_0 n'est donc plus une fonction de τ et l'on peut écrire

$$(214)\qquad \partial_t\{\ldots\} = \frac{v}{2\pi}\iint_\Sigma d\xi\, d\eta\, \partial_t \int_{g(\xi,\eta)}^{t-\frac{\rho}{v}} [\psi(\xi, \eta, v\tau)\operatorname{ch}(k_0\gamma) - \psi_0]\,\gamma^{-1}\,d\tau$$
$$+ \frac{v}{2\pi}\iint_\Sigma d\xi\, d\eta\, \partial_t \int_{g(\xi,\eta)}^{t-\frac{\rho}{v}} \frac{\psi_0}{\gamma}\,d\tau.$$

La limite Σ dépend du temps, mais la dérivation par rapport à cette limite donne zéro car l'intervalle d'intégration sur τ devient nul. Nous allons voir que les valeurs ψ_0 de ψ sur le cône $\gamma = 0$, ainsi introduites, disparaissent du résultat final. Pour cela transformons le ∂_t de la première intégrale (214) en ∂_τ ; il vient

$$(215)\qquad \partial_t\{\ldots\} = \frac{v}{2\pi}\iint_\Sigma d\xi\, d\eta \int_{g(\xi,\eta)}^{t-\frac{\rho}{v}} (-\partial_\tau)\{\psi\operatorname{ch}(k_0\gamma) - \psi_0\}\frac{d\tau}{\gamma}$$
$$+ \frac{v}{2\pi}\iint_\Sigma d\xi\, d\eta \int_{g(\xi,\eta)}^{t-\frac{\rho}{v}} \partial_\tau\psi\operatorname{ch}(k_0\gamma)\,d\tau - \frac{v}{2\pi}\iint_\Sigma d\xi\, d\eta(\partial_t\psi_0)\int_{g(\xi,\eta)}^{t-\frac{\rho}{v}}\frac{d\tau}{\gamma}$$
$$+ \frac{v}{2\pi}\iint_\Sigma d\xi\, d\eta\, \partial_t\left\{\psi_0 \int_{g(\xi,\eta)}^{t-\frac{\rho}{v}}\frac{d\tau}{\gamma}\right\}.$$

On voit que le terme en $\partial_t\psi_0$ disparaît et il reste

$$(216)\qquad \partial_t\{\ldots\} = \frac{v}{2\pi}\iint_\Sigma d\xi\, d\eta\,\{\psi_S\operatorname{ch}(k_0\gamma_S) - \psi_0\}\,\gamma_S^{-1}$$
$$+ \frac{v}{2\pi}\iint_\Sigma d\xi\, d\eta \int_{g[\xi,\eta]}^{t-\frac{\rho}{v}} (\partial_\tau\psi)\gamma^{-1}\operatorname{ch}(k_0\gamma)\,d\tau + \frac{v}{2\pi}\iint_\Sigma d\xi\, d\eta\,\psi_0\,\partial_t\int_{g(\xi,\eta)}^{t-\frac{\rho}{v}}\gamma^{-1}\,d\tau,$$

car le terme dû à la limite supérieure dans l'intégrale sur τ est nul ; on a en effet

$$\psi \to \psi_0, \qquad \operatorname{ch}(k_0\gamma) \to 1 \qquad \text{et} \qquad \gamma^{-1}[\psi\operatorname{ch}(k_0\gamma) - \psi_0] \to 0.$$

Nous allons montrer que les deux termes contenant ψ_0 se détruisent dans (216). Pour cela faisons le changement de variable

$$(217)\qquad u = \frac{v}{\rho}(t - \tau), \qquad du = -\frac{v}{\rho}\,d\tau, \qquad \frac{v}{\rho}[t - g(\xi, \eta)] < u < 1\;;$$

$$(218)\qquad \partial_t \int_{g(\xi,\eta)}^{t-\frac{\rho}{v}} \frac{d\tau}{\sqrt{v^2(t-\tau)^2 - \rho^2}} = v^{-1}\partial_t \int_1^{\frac{v}{\rho}[t-g(\xi,\eta)]} \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}$$
$$= v^{-1}\frac{v}{\rho}\,\frac{\rho}{\sqrt{v^2[t - g(\xi, \eta)]^2 - \rho^2}} = \frac{1}{\gamma_S}.$$

En portant cette expression (218) dans (216) on voit que ψ_0 disparaît et il reste

$$(219)\qquad \partial_t\{\ldots\} = -\frac{v}{2\pi}\iint_S n_\tau\psi\gamma^{-1}\operatorname{ch}(k_0\gamma)\,dS + \frac{v}{2\pi}\iint_\Sigma d\xi\, d\eta \int_{g(\xi,\eta)}^{t-\frac{\rho}{v}} (\partial_\tau\psi)\gamma^{-1}\operatorname{ch}(k_0\gamma)\,d\tau.$$

En tenant compte de ce résultat on calcule immédiatement $\partial_t^2\{\ldots\}$, soit

$$(220)\quad \partial_t^2\{\ldots\} = -\frac{v}{2\pi}\iint_S (n_\tau\partial_\tau\psi)\gamma^{-1}\operatorname{ch}(k_0\gamma)\,dS + \frac{v}{2\pi}\iiint_v (\partial_\tau^2\psi)\gamma^{-1}\operatorname{ch}(k_0\gamma)\,dv - \frac{v}{2\pi}\partial_t\left\{\iint_S n_\tau\psi\gamma^{-1}\operatorname{ch}(k_0\gamma)\,dS\right\}.$$

En portant (213) et l'expression analogue pour $\partial_y\{\ldots\}$ dans (209), en faisant de même pour (220) et en introduisant les vecteurs unitaires n_ξ n_η, n_τ, de la normale extérieure à la surface S, soit

$$(221)\quad n_\xi = \frac{g'_\xi}{\sqrt{1+g'^2_\xi+g'^2_\eta}},\qquad n_\eta = \frac{g'_\eta}{\sqrt{1+g'^2_\xi+g'^2_\eta}},\qquad n_\tau = \frac{-1}{\sqrt{1+g'^2_\xi+g'^2_\eta}},$$

$$(222)\quad dS = \sqrt{1+g'^2_\xi+g'^2_\eta}\,d\xi\,d\eta,\qquad dv = d\xi,\ d\eta\,d\tau,,$$

on obtient

$$(223)\quad \left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\} = \frac{v}{2\pi}\iiint_v \left[\left(v^{-2}\partial_\tau^2 - \partial_\xi^2 - \partial_\eta^2 - k_0^2\right)\psi\right]\gamma^{-1}\operatorname{ch}(k_0\gamma)\,dv$$
$$+\frac{v}{2\pi}\iint_S (n_\xi\partial_\xi + n_\eta\partial_\eta - v^{-2}n_\tau\partial_\tau)\psi\,\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)}{\gamma}\,dS$$
$$+\frac{v}{2\pi}\partial_x\iint_S\left\{n_\xi\psi\,\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)}{\gamma}\right\}dS$$
$$+\frac{v}{2\pi}\partial_y\iint_S\left\{n_\eta\psi\,\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma}{\gamma}\right\}dS$$
$$-\frac{v}{2\pi}\partial_t\iint_S\left\{v^{-2}n_\tau\psi\,\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)}{\gamma}\right\}dS.$$

Pour pouvoir dériver les trois dernières intégrales ajoutons et retranchons d'autres intégrales contenant les valeurs de ψ sur la courbe C d'intersection de S et du cône $\gamma = 0$, soit ψ_C, dont l'équation est $\rho = v(t-\tau)$ et $\tau = g(\xi, \eta)$. Par exemple la première intégrale avec l'opérateur ∂_x s'écrira

$$(224)\quad \frac{v}{2\pi}\partial_x\iint_S n_\xi\psi\left\{\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)-1}{\gamma}\right\}dS + \frac{v}{2\pi}\partial_x\iint_S n_\xi\,\frac{\psi-\psi_C}{\gamma}\,dS + \frac{v}{2\pi}\partial_x\iint_S \psi_C\,\frac{n_\xi}{\gamma}\,dS.$$

On peut maintenant dériver les deux premiers termes de (224); il n'apparaît pas de termes dus aux limites car $\operatorname{ch}(k_0\gamma)-1$ et $\psi-\psi_C$ tendent vers zéro quand $\gamma = 0$. On a donc avec $\partial_x = -\partial_\xi$ pour une fonction de ρ :

$$(225)\quad -\frac{v}{2\pi}\iint_S \psi\,n_\xi\partial_\xi\left[\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)-1}{\gamma}\right]dS - \frac{v}{2\pi}\iint_S (\psi-\psi_C)\,n_\xi\partial_\xi(\gamma^{-1})\,dS + \frac{v}{2\pi}\partial_x\iint_S \psi_C n_\zeta\gamma^{-1}\,dS - \frac{v}{2\pi}\iint_S (\partial_x\psi_C)\,n_\zeta\gamma^{-1}\,dS$$

et ces intégrales sont toutes convergentes.

On a des expressions analogues pour les deux autres termes avec ∂_y et ∂_t, d'où la nouvelle expression de (223) avec

$$(226)\qquad (v^{-2}\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - k_0^2)\,\psi(x, y, vt) = f(x, y, vt),$$

$$(227)\qquad \frac{d}{d\nu} = n_\xi \partial_\xi + n_\eta \partial_\eta - v^{-2} n_\tau \partial_\tau,$$

$$(228)\quad \left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x, y, vt) = \frac{v}{2\pi}\iiint_v f(\xi, \eta, v\tau)\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)}{\gamma}\,dv$$
$$+\frac{v}{2\pi}\iint_S\left\{\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)}{\gamma}\frac{d\psi}{d\nu} - \psi\frac{d}{d\nu}\left[\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)-1}{\gamma}\right] - (\psi-\psi_C)\frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right\}dS$$
$$+\frac{v}{2\pi}\left\{\partial_x\iint_S \psi_C - \iint_S(\partial_x\psi_C)\right\}\{n_\xi\gamma^{-1}\,dS\}$$
$$+\frac{v}{2\pi}\left\{\partial_y\iint_S \psi_C - \iint_S(\partial_y\psi_C)\right\}\{n_\eta\gamma^{-1}\,dS\}$$
$$+\frac{v}{2\pi}\left\{\partial_t\int_S \psi^C - \iint_S(\partial_t\psi_C)\right\}\{-v^{-2}n_\tau\gamma^{-1}\,dS\}.$$

Nous allons donner des exemples de simplification des trois derniers termes de (139) pour le problème de Cauchy et le problème de Kirchhoff.

2° Problème de Cauchy. — La surface S est le cercle de rayon vt du plan $\tau = 0$ (*fig.* 8). Avec

$$(\xi - x) = \rho\cos\varphi, \qquad (\eta - y) = \rho\sin\varphi,$$

On alors

$$dS = \rho\,d\rho\,d\varphi, \qquad n_\tau = -1, \qquad n_\xi = n_\eta = 0;$$
$$\psi_C = \psi(x + vt\cos\varphi,\ y + vt\sin\varphi,\ 0),$$

ψ_C ne dépend donc pas de la variable ρ et l'on peut écrire

$$(229)\qquad \frac{v^{-1}}{2\pi}\partial_t\int_0^{2\pi}d\varphi\,\psi_C\int_0^{vt}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{v^2t^2-\rho^2}} - \frac{v^{-1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\,(\partial_t\psi_C)\int_0^{vt}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{v^2t^2-\rho^2}}$$
$$= \frac{v^{-1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\,\psi_C\,\partial_t\int_0^{vt}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{v^2t^2-\rho^2}}$$
$$= \frac{v^{-1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\,\psi_C\,\partial_t\left\{vt\int_0^1\frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi_C\,d\varphi\right\}.$$

On a aussi dans ce cas $\dfrac{d}{d\nu} = v^{-2}\partial_\tau$ et $\partial_\tau = -\partial_t$ d'où, en portant (229) dans (228) :

$$(230)\quad \left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x,y,vt) = \frac{v}{2\pi}\iiint_{\text{cône}} f(\xi, \eta, v\tau)\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)}{\gamma}\,dv$$
$$+\frac{1}{2\pi v}\iint_S\left\{\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)}{\gamma}\psi_t(\xi, \eta, 0)\right.$$
$$\left. + \psi(\xi, \eta, 0)\,\partial_t\left[\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)-1}{\gamma}\right] + (\psi-\psi_C)\,\partial_t\gamma^{-1}\right\}d\xi\,d\eta$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi_C\,d\varphi.$$

Cette équation est bien identique à celle donnée par Hadamard [1], (p. 281). En faisant $k_0 = 0$ dans (230) on a la solution du problème de Cauchy pour les ondes non amorties.

3° Problème de Kichhoff. — La surface S est le cylindre compris entre le plan $\tau = \theta$ et le cône $\gamma = 0$ (*fig.* 20); on fait tendre ensuite θ vers $-\infty$. On a $n_\tau = 0$ et $dS = dl\, d\tau$ en désignant par dl l'élément d'arc de la courbe Γ.

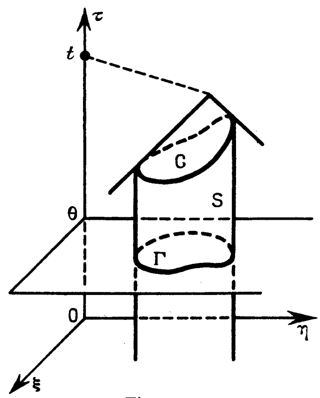

Fig. 20.

Pour le terme de (228) contenant ∂_x, on a

$$(231) \qquad \frac{v}{2\pi}\partial_x \int_\Gamma n_\xi \psi_C\, dl \int_\theta^{t-\frac{\rho}{v}} \gamma^{-1}\, d\tau - \frac{v}{2\pi}\int_\Gamma n_\xi(\partial_x \psi_C)\, dl \int_\theta^{t-\frac{\rho}{v}} \gamma^{-1}\, d\tau$$

$$= \frac{v}{2\pi}\int_\Gamma n_\xi \psi_C\, dl\, \partial_x \int_\theta^{t-\frac{\rho}{v}} \gamma^{-1}\, d\tau.$$

Posons

$$u = \frac{v}{\rho}(t-\tau), \qquad \text{d'où} \qquad du = -\frac{v}{\rho}d\tau, \qquad \frac{v}{\rho}(t-\theta) < u < 1,$$

on a

$$\partial_x \int_\theta^{t-\frac{\rho}{v}} \gamma^{-1}\, d\tau = v^{-1}\partial_x \int_1^{\frac{v}{\rho}(t-\theta)} \frac{du}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$= \frac{\rho}{\sqrt{v^2(t-\theta)^2-\rho^2}}\left[-\frac{v}{\rho^2}(t-\theta)\right] v^{-1}\partial_x \rho = \frac{1}{\rho}\partial_\xi \rho \frac{(t-\theta)}{\sqrt{v^2(t-\theta)^2-\rho^2}};$$

d'où en portant dans (231) :

$$(232) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\psi_C}{\rho}(n_\xi \partial_\xi \rho)\frac{v(t-\theta)}{\sqrt{v^2(t-\theta)^2-\rho^2}} dl.$$

On a une expression analogue à (232) pour le terme en ∂_y; en additionnant et en désignant par $\frac{d}{dn} = n_\xi \partial_\xi + n_\eta \partial_\eta$ la dérivée suivant la normale extérieure à la courbe Γ (ou au cylindre) on voit que l'on a l'expression

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\psi_C}{\rho}\frac{d\rho}{dn}\frac{v(t-\theta)}{\sqrt{v^2(t-\theta)^2-\rho^2}}dl. \tag{233}$$

Dans ce cas on a aussi $\frac{d}{d\nu} = \frac{d}{dn}$ et l'expression (224) devient

$$\left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x,y,vt) = \frac{v}{2\pi}\iiint_v f(\xi,\eta,v\tau)\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)}{\gamma}dv + \frac{v}{2\pi}\iint_S\left\{\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)}{\gamma}\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d}{dn}\left[\frac{\operatorname{ch}(k_0\gamma)-1}{\gamma}\right] - (\psi-\psi_C)\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right\}dS + \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\psi_C}{\rho}\frac{d\rho}{dn}\frac{v(t-\theta)}{\sqrt{v^2(t-\theta)^2-\rho^2}}dl. \tag{234}$$

Quand $\theta \to -\infty$, ceci correspond au problème de kirchhoff et dans la mesure où l'intégrale étendue à la section droite du cylindre, qui complète la surface S, tend alors vers zéro; dans ces conditions le dernier terme de (234) prend la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\psi_C}{\rho}\frac{d\rho}{dn}dl. \tag{235}$$

Il faut bien noter que ψ_C est pris sur la courbe C tandis que dl est l'élément d'arc de Γ. Quand $k_0 = 0$, (234) se réduit bien à la formule donnée par Hadamard [1] (p. 280).

13. Solutions qui se rattachent au cas $n = 3$ dans les identités générales. — Quand on fait $q = 1$ dans (142) et (143) et que l'on remplace $x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3$, par $x, y, z; \xi, \eta, \zeta$, on a l'identité

$$\left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x,y,z,vt) = [v^{-2}\partial_t^2 - k_0^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2]\{\ldots\}, \tag{236}$$

$$\{\ldots\} = \frac{v}{4\pi}\iiint d\xi\, d\eta\, d\zeta\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]\int_{g(\xi,\eta,\zeta)}^{t-\frac{r}{v}}\psi(\xi,\eta,\zeta,v\tau)\, I_0(k_0\gamma)\, d\tau. \tag{237}$$

On trouvera un exemple d'application de cette identité dans un article de l'Auteur [7] sur le problème de Kirchhoff pour les ondes amorties. Phan Van Loc [10] a utilisé cette identité pour donner l'expression du principe de Huygens en Théorie de Dirac.

Quand $k_0 = 0$ et avec $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ on a simplement, au lieu de (236) et (237) :

$$\left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x,y,z,vt) = [v^{-2}\partial_t^2 - \Delta]\left\{\frac{1}{4\pi}\iiint_v r^{-1}\psi(\xi,\eta,\zeta,vt-\bar{r})\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\right\}. \tag{238}$$

L'Auteur a montré [6] que l'on pouvait tirer de cette identité (238) la sotution générale des équations de Maxwell de l'Électromagnétisme. Cette solution constitue l'expression du principe de Huygens en Électromagnétisme.

Quand on fait $n = 3$ dans (186), on obtient la formule de Poisson qui donne la solution du problème de Cauchy, soit

$$(239)\quad \begin{aligned} \psi(x, y, z, vt) = {} & \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{r \leq vt} r^{-1} f(\xi, \eta, \zeta, vt - r)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{t}{4\pi} \iint \psi\,(x + vt \sin\theta \cos\varphi, y + vt \sin\theta \sin\varphi, z + vt \cos\theta, 0)\, d\Omega \right\} \\ & + \left\{ \frac{t}{4\pi} \iint \psi_t(x + vt \sin\theta \cos\varphi, y + vt \sin\theta \sin\varphi, z + vt \cos\theta, 0)\, d\Omega \right\} \end{aligned}$$

On peut d'ailleurs tirer (239) de (238) où le volume v est la sphère de rayon vt et de centre x, y, z; on a alors toujours 1 au premier membre de (238).

III. — Les équations du type parabolique.

1. Identité faisant intervenir l'opérateur de l'équation $\left[\lambda \partial_t - \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2\right] \psi = f$. — On part de l'identité (150)-(151) et l'on a soin de prendre une fonction du type

$$(240)\quad \psi(x_j, t) = e^{k_0 vt} \Phi(x_j, t).$$

Comme on a entre opérateurs la relation

$$(241)\quad e^{-k_0 vt}[v^{-2} \partial_t^2 - k_0^2] = [v^{-2} \partial_t^2 + 2 k_0 v^{-1} \partial_t]\, e^{-k_0 vt},$$

l'identité peut s'écrire

$$(242)\quad \left.\begin{matrix} 1 \\ 1/0 \\ 2 \end{matrix}\right\} \psi(x_j, t) = \left[v^{-2} \partial_t^2 + 2 k_0 v^{-1} \partial_t - \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 \right] \{\ldots\},$$

$$(243)\quad \{\ldots\} = \frac{v}{2} \underbrace{\int \cdots \int}_{n} dv'_n \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right]^{n-1} \int_{g(x'_j)}^{t - \frac{r}{v}} \Phi(x'_j, \tau) e^{-k_0 v(t-\tau)} \left(\frac{\gamma}{2\pi k_0} \right)^{\frac{n-1}{2}} I_{\frac{n-1}{2}}(k_0 \gamma)\, d\tau.$$

Dans (242) et (243) faisons tendre k_0 et v vers l'infini, mais maintenons $\frac{2 k_0}{v}$ constamment égal à λ. Quand v, donc aussi γ, tend vers l'infini, on a

$$(244)\quad I_{\frac{n-1}{2}}(k_0 \gamma) \to \frac{e^{k_0 \gamma}}{\sqrt{2\pi k_0 \gamma}},$$

$$(245)\quad k_0 \gamma = k_0 \sqrt{v^2 (t - \tau)^2 - r^2} = k_0 v (t - \tau) - \frac{k_0 r^2}{2 v (t - \tau)}.$$

La limite supérieure de l'intégrale sur τ tend vers t et ne dépend plus de r et l'on a

$$(246)\quad \begin{aligned} & \frac{v}{2} \left(\frac{v(t - \tau)}{2\pi k_0} \right)^{\frac{n-1}{2}} [2\pi k_0 v (t - \tau)]^{-\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right]^{n-1} e^{-\frac{\lambda r^2}{4(t-\tau)}} \\ & \to \frac{v}{2} \left(\frac{t - \tau}{\pi \lambda} \right)^{\frac{n-1}{2}} v^{-1} [\pi \lambda (t - \tau)]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{\lambda}{2(t - \tau)} \right]^{n-1} \to \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\lambda}{4\pi (t - \tau)} \right]^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

L'identité (242)-(243) devient donc

$$\left.\begin{matrix}1\\1/2\\1\end{matrix}\right\}\psi(x_j,\,t)=\left[\lambda\,\partial_t-\sum_{j=1}^{n}\partial_j^2\right]\{\ldots\},\tag{247}$$

$$\{\ldots\}=\frac{1}{\lambda}\underbrace{\int\cdots\int}_{n}dv'_n\int_{g(x'_j)}^{t}\Phi(x'_j,\,\tau)\left[\frac{\lambda}{4\pi(t-\tau)}\right]^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{\lambda r^2}{4(t-\tau)}}d\tau,\tag{248}$$

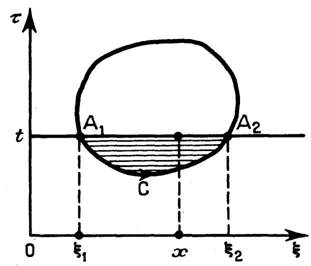

Fig. 21.

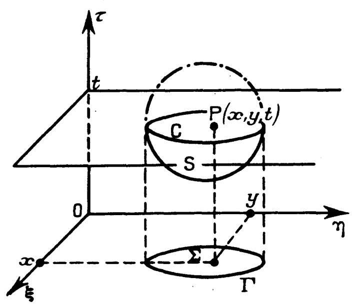

Fig. 22.

ce qui est l'identité cherchée avec

$$r^2=\sum_{j=1}^{n}(x'_j-x_j)^2.\tag{249}$$

L'intégrale (248) est en fait étendue à l'hypervolume limité par l'hypersurface $\tau=g(x'_j)$ et l'hyperplan $\tau=t$; on peut donc écrire

$$\{\ldots\}=\underbrace{\int\cdots\int}_{n+1}\Phi(x'_j,\,\tau)\,G_n(x'_j,\,\tau,\,x_j,\,t)\,dV'_{n+1},\tag{250}$$

avec

$$G_n=\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\lambda}{4\pi(t-\tau)}\right]^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{\lambda r^2}{4(t-\tau)}}.$$

Les figures 21 et 22 correspondent respectivement au cas $n=1$ et $n=2$. Éventuellement la surface S peut être tout l'hyperplan $\tau=0$ (*fig.* 24).

2. Généralisation de l'identité avec un terme d'amortissement μ^2 dans l'opérateur. — On part de l'identité (247)-(248) avec $n+1$ au lieu de n et l'on prend une fonction du type

$$\psi(x_j,\, x_{n+1},\, t) = e^{\mu x_{n+1}}\Phi(x_j,\, t). \tag{252}$$

On intègre sur la variable x'_{n+1} de $-\infty$ à $+\infty$, c'est-à-dire que l'on choisit comme hypervolume V_{n+1} un cylindre dont la base est v_n; de plus on prend $g(x'_j)$ indépendant de x'_{n+1}. En posant toujours

$$r^2 = \sum_{j=1}^{n}(x'_j - x_j)^2,$$

on a alors

$$\left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\psi(x_j,\, t)\,e^{\mu x_{n+1}} = \left[\lambda\partial_t - \partial^2_{n+1} - \sum_{j=1}^{n}\partial_j^2\right] e^{\mu x_{n+1}}\underbrace{\int\cdots\int}_{n} dv'_n \int_{g(x'_j)}^{t}\Phi F\, \mathcal{J}\, d\tau, \tag{253}$$

avec

$$F = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\lambda}{4\pi(t-\tau)}\right]^{\frac{n+1}{2}} e^{-\frac{\lambda r^2}{4(t-\tau)}} \tag{254}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda(x-x')^2_{n+1}}{4(t-\tau)} + \mu(x'-x)_{n+1}}\, dx'_{n+1} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\sqrt{\frac{\lambda}{4(t-\tau)}}(x'-x)_{n+1} - \frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{4(t-\tau)}{\lambda}}\right\}^2 + \frac{\mu^2}{\lambda}(t-\tau)}\, d(x'-x)_{n+1} \\ &= e^{\frac{\mu^2}{\lambda}(t-\tau)}\sqrt{\frac{4(t-\tau)}{\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\frac{4\pi(t-\tau)}{\lambda}}\,e^{\frac{\mu^2}{\lambda}(t-\tau)}\end{aligned} \tag{225}$$

En portant l'expression (255) de $\mathcal{J}$ dans (249), en remplaçant μ par $i\mu$ et en notant que l'opérateur ∂^2_{n+1} est équivalent à μ^2, on obtient l'identité cherchée sous la forme

$$\left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\Phi(x_j,\, t) = \left[\mu^2 + \lambda\partial_t - \sum_{j=1}^{n}\partial_j^2\right]\underbrace{\int\cdots\int}_{n} dv'_n\int_{g(x'_j)}^{t}\Phi(x'_j,\, \tau)\, G_n\, d\tau, \tag{256}$$

avec

$$G_n = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\lambda}{4\pi(t-\tau)}\right]^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\mu^2}{\lambda}(t-\tau) - \frac{\lambda r^2}{4(t-\tau)}\right\}, \tag{257}$$

$$r^2 = \sum_{j=1}^{n}(x_j - x'_j)^2. \tag{258}$$

L'intégrale de (252) est en fait étendue à l'hypervolume V_{n+1} limité par l'hypersurface $\tau = g(x'_j)$ et l'hyperplan $\tau = t$; on peut donc écrire

$$\left.\begin{matrix}1\\1/2\\0\end{matrix}\right\}\Phi(x_j t) = \left[\mu^2 + \lambda\partial_t - \sum_{j=1}^{n}\partial_j^2\right]\underbrace{\int\cdots\int_{V_{n+1}}}_{n+1}\Phi(x'_j,\, \tau)\, G_n\, dV'_{n+1}. \tag{259}$$

Sous cette dernière forme elle est d'ailleurs plus générale et reste valable pour des hypersurfaces S qui ne sont pas du type $\tau = g(x'_j)$, comme par exemple le cas de la figure 23, qui correspond à $n = 1$.

On aurait une identité analogue à (259) avec l'hypervolume V_{n+1} situé au-dessus de l'hyperplan $\tau = t$.

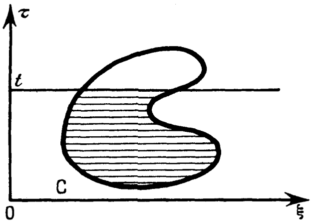

Fig. 23.

3. **Solution de l'équation aux dérivées partielles quand on connaît Φ et ses dérivées partielles sur** S. — Effectuons les dérivations au second membre de (256). Pour ∂_t on n'a pas à considérer la dérivation par rapport à la limite supérieure t car G_n s'annule pour $\tau = t$; comme $\partial_t G_n = -\partial_\tau G_n$ on peut écrire

(260)
$$\partial_t\{\dots\} = -\underbrace{\int\cdots\int}_{n} dv'_n \int_{g(x'_j)}^{t} \Phi(x'_j, \tau)\, \partial_\tau G_n\, d\tau$$
$$= \underbrace{\int\cdots\int}_{n} dv'_n \int_{g(x'_j)}^{t} \partial_\tau \Phi(x'_j, \tau)\, G_n\, d\tau + \underbrace{\int\cdots\int}_{n} (\Phi G_n)_S\, dv'_n.$$

Pour le calcul de $\partial_j\{\dots\}$ on transforme en ∂'_j et l'on intègre par parties. On obtient de même ∂_j^2, soit

(261)
$$\partial_j^2\{\dots\} = \underbrace{\int\cdots\int}_{n} dv'_n \int_{g(x'_j)}^{t} \partial_j'^2 \Phi(x'_j, \tau)\, G_n\, d\tau$$
$$- \underbrace{\int\cdots\int}_{n} [(\partial'_j \Phi)\, G_n]_S\, g'_j(x'_j)\, dv'_n$$
$$+ \underbrace{\int\cdots\int}_{n} [(\partial'_j G_n)\, \Phi]_S\, g'_j(x'_j)\, dv'_n.$$

En introduisant les vecteurs unitaires n_j, n_τ de la normale extérieure à la surface S :

(262)
$$n_j = \frac{g'_j}{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n} g_j'^2}}, \qquad n_\tau = \frac{-1}{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n} g_j'^2}},$$

en tenant compte de

(263)
$$dS = \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n} g_j'^2}\, dv'_n, \qquad dV' = dx'_1\, dx'_2 \dots dx'_n\, d\tau$$

et en portant (260) et (261) dans (256), on obtient

$$(264)\qquad \left.\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix}\right\} \Phi(x_j, t) = \underbrace{\int \cdots \int_{V_{n+1}}}_{n+1} \left\{ \left[\mu^2 + \lambda \partial_\tau - \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 \right] \Phi \right\} dV'$$
$$+ \underbrace{\int \cdots \int}_{n} \left\{ G_n \left[\sum_{j=1}^{n} n_j \partial'_j - n_\tau \lambda \right] \Phi - \Phi \left[\sum_{j=1}^{n} n_j \partial'_j G_n \right] \right\} dS.$$

On notera que seules les dérivées spatiales de Φ sur la surface S interviennent à l'exclusion de $\partial_t \Phi$. (264) est une identité valable quelle que soit la fonction Φ mais si cette dernière obéit à l'équation

$$(265)\qquad \left[\mu^2 + \lambda \partial_t - \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 \right] \Phi(x_j, t) = f(x_j, t),$$

l'identité (264) donne la solution du problème que nous cherchons.

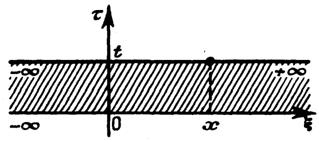

Fig. 24.

Exemple. — $n = 1$ et le domaine mixte spatiotemporel est celui qui est hachuré sur la figure 24; on a alors

$$ds = d\xi, \qquad g' = 0, \qquad n_\xi = 0, \qquad n_\tau = -1;$$
$$G_1 = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{4\pi(t-\tau)}} \exp\left\{ -\frac{\mu^2}{\lambda}(t-\tau) - \frac{\lambda(x-\xi)^2}{4(t-\tau)} \right\}$$

et (264) s'écrit

$$(266)\qquad \Phi(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau)\, G_1\, d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi, 0)\, \lambda\, G_1\, d\xi.$$

Cette expression (226) est la solution bien connue de l'équation de la chaleur

$$[\mu^2 + \lambda \partial_t - \partial_x^2] \Phi = f(x, t).$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Hermann, Paris, 1932.

[2] Whittaker et Watson, *Modern Analysis*, Cambridge, 1946.

[3] Courant et Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik*, Springer, Berlin, 1931 (ou Interscience publischer, New York).

[4] Baker et Copson, *The mathematical Theory of Huygens Principle*, Oxford, Clarendon Press, 1939.

[5] R. SAUER, *Anfangwertprobleme bei partiellen differentialgleichungen*, Springer, Berlin, 1952.

[6] E. DURAND, *Solutions générales des équations de Maxwell* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1407).

[7] E. DURAND, *Une identité conduisant à la solution du problème de Kirchhoff pour les ondes amorties* (*C. R., Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1337).

[8] E. DURAND, *Le principe de Huygens et la diffraction de l'électron en théorie de Dirac* (*C. R. Acad.*, *Sc.*, t. 237, 1953, p. 647).

[9] E. DURAND, *Solutions des équations de Maxwell et des équations de Dirac pour des conditions initiales données* (*J. Phys. Rad.*, t. 15, 1954, p. 281.

[10] PHAN VAN LOC, *Sur le principe de Huygens en théorie de l'électron de Dirac* (*C. R.*, t. 237, 1953, p. 649).