BULLETIN DE LA S. M. F.

ANDRÉ NÉRON

Problèmes arithmétique et géométriques rattachés à la notion de rang d'une courbe algébrique dans un corps

Bulletin de la S. M. F., tome 80 (1952), p. 101-166
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1952__80__101_0>

PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES RATTACHÉS A LA NOTION DE RANG D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE DANS UN CORPS;

PAR M. ANDRÉ NÉRON.

Introduction. — Soit une courbe algébrique C sans point multiple; soit G le groupe additif abélien des diviseurs de C, c'est-à-dire des combinaisons linéaires formelles $\sum_i \lambda_i A_i$ à coefficients entiers de points arbitraires de C. Soient G_0 le groupe des éléments de degré zéro de G (tels que $\sum_i \lambda_i = 0$) et G_l le groupe des éléments de G qui sont linéairement équivalents à zéro sur C. Le groupe G_l est un sous-groupe de G_0 et le groupe-quotient $\gamma = G_0/G_l$ est isomorphe au groupe des points de la jacobienne J de C.

Soit maintenant K un corps de définition de C, que nous prenons pour domaine de rationalité. Un élément de G est dit rationnel s'il est invariant par tout automorphisme de la fermeture algébrique $\overline{K}$ de K qui conserve les éléments de K, L'ensemble des éléments rationnels de G est un sous-groupe G(K) de G. Soient $G_0(K)$ et $G_l(K)$ les intersections respectives de G(K) avec les groupes G_0 et G, et posons $\gamma(K) = G_l(K)/G_0(K)$. Si g désigne le genre de C, et s'il existe sur C un diviseur rationnel positif A_0 de degré g, tout élément de $\gamma(K)$ peut être représenté par une différence $A - A_0$, où A est aussi un diviseur positif de degré g de C. Le rang r du groupe $\gamma(K)$ [c'est-à-dire le nombre minimum de générateurs de $\gamma(K)$] sur l'anneau des entiers est le *rang de la courbe* C *dans le corps* K(¹). Cette notion du rang a été introduite par Poincaré (²). Mordell a démontré que $\gamma(K)$ est de type fini (c'est-à-dire que r est fini) pour $g = 1$ et lorsque K est le corps des nombres rationnels (³). Weil a étendu ce résultat pour toute valeur de g, et lorsque K est un corps algébrique fini quelconque (⁴).

(¹) Si la courbe C a des points multiples, on peut encore définir le rang de C dans K en partant du groupe G des diviseurs de C composés de points simples de C. Dans ces conditions, le rang n'est pas, en général, invariant par une transformation birationnelle arbitraire à coefficients dans K; on peut affirmer cependant qu'il en est ainsi pour le rang réduit r_0 de C, ou rang des sous-groupes libres maximaux de $\gamma(K)$.

(²) H. POINCARÉ, *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques* (*Journal de Liouville*, 5ᵉ série, t. 7, 1901, p. 161).

(³) L. J. MORDELL, *On the rational solutions of the indeterminate equations of the third and fourth degrees* (*Proc. Cambridge*, t. 21, 1922, p. 179).

(⁴) *Cf.* Note (¹) de la page 4, premier des Ouvrages cités.

Nous allons étudier le cas plus général où, g étant quelconque, K est de caractéristique p quelconque et engendré sur son corps premier par un nombre fini d'éléments. Nous montrerons que, dans ces conditions, le problème se rattache aux propriétés des diviseurs d'une certaine variété algébrique $\mathcal{C}$. Plus précisément, le groupe $\gamma(K)$ attaché à C est isomorphe à un sous-groupe du produit direct des deux groupes suivants : le groupe $\mathcal{G}/\mathcal{G}_a$ (1) des classes de diviseurs algébriquement équivalents sur $\mathcal{C}$, et le groupe des points d'une variété abélienne Ω (voisine de la variété de Picard de $\mathcal{C}$) qui sont rationnels sur un certain corps de définition algébrique de Ω.

D'après le théorème Weil, le second de ces deux groupes est de type fini. Lorsque la caractéristique est nulle, on sait qu'il en est de même du premier, d'aprés un théorème de Severi (2); dans ce cas, l'application de ce théorème entraîne donc l'extension annoncée.

Mais il était naturel de chercher à retrouver ce résultat au moyen de la méthode de « descente infinie », classique en Arithmétique et utilisée en particulier par Mordell et par Weil dans la démonstration des théorèmes cités plus haut. Le prolongement de cette méthode au cas actuel est possible et conduit en fait à une démonstration du théorème de Severi par voie algébrique et à une extension de ce théorème au cas où la caractéristique est quelconque (chap. II).

La démonstration de Weil, qui repose en partie sur l'Analyse peut aussi être mise sous une forme purement algébrique (chap. III). De certaines inégalités intervenant dans cette démonstration, on peut déduire une approximation du nombre des points de la jacobienne d'un courbe dont la « complexité » admet une borne supérieure donnée. On peut tirer de là certains résultats arithmétiques et, en particulier, retrouver un théorème connu de Hilbert sur l'irréductibilité des fonctions entières (3), qui sera utilisé au chapitre IV.

Ce dernier établit une relation entre le rang d'une courbe dans un corps K transcendant et le rang de ses spécialisations dans les corps spécialisés correspondants, permettant de démontrer l'existence de courbes de genre g et de rang $\geq r$ dans un corps k donné pour diverses valeurs de g, r et k. Par exemple, si k est le corps des nombres rationnels, l'existence de telles courbes est démontrée pour $g = 1$ et $r = 10$, pour g quelconque et $r = 3g + 6$ (4).

Dans l'ensemble, ce travail a été surtout inspiré par l'œuvre de A. Weil puisque nous utilisons notamment outre les résultats et méthodes de sa thèse [A] ceux de

---

(1) *Voir* les définitions du paragraphe 2 du chapitre II.

(2) F. Severi, *Sulla totalita delle curve algebriche tracciata sopra una superficie algebrica* (*Math. Ann.*, Bd., 62, 1906, p. 194; *Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caracteristiche* (*Atti del R. Inst. Veneto*, vol., 75, 1916).

Voir aussi H. Poincaré, *Sur les courbes tracées sur les surfaces algébriques* (*Ann. Ec. Norm.*, t. 27, 1910, p. 55); S. Lefschetz, *On certain numerical invariants of algebraic variete with applications to Abelian varieties* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t., 22, 1921, p. 327) et la communication F. Severi au *Colloque de Géométrie Algébrique* de Liége, décembre 1949.

(3) D. Hilbert, *Über die Irreduzibilität ganzen rationaler Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten* (*J. reine angew. Math.*, Bd. 110, 1892, p. 104-129).

(4) *Voir* A. Neron, *C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1781 et t. 228, 1949, p. 1087 et communication au *Colloque d'Algèbre et théorie des nombres* (Paris, septembre 1949).

ses récents Ouvrages de Géométrie algébrique [F, VA]. Il est à souligner d'autre part que de nombreux résultats ont été empruntés à la thèse de P. Samuel [M].

Je ne saurais trop remercier A. Weil et P. Samuel de l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée dans la mise au point de ce travail. Plusieurs démonstrations, surtout parmi celles du chapitre I ont été rédigées avec leur collaboration.

Je dois entièrement à Samuel plusieurs des résultats du chapitre I (Corollaire du lemme 2, lemmes 14 et 15) ainsi qu'une importante simplification dans la démonstration du Théorème 1 du chapitre II. Les recherches que nous avons poursuivies ensemble sur ce dernier point ne sont pas ici entièrement exploitées et ouvrent en fait la voie à une démonstration de l'existence de la variété de Picard d'une variété normale quelconque définie sur un corps quelconque. Nous préparons à ce sujet un Mémoire commun.

Je tiens aussi à exprimer toute ma reconnaissance à M. A. Châtelet pour la haute compétence avec laquelle il n'a cessé de suivre et de guider mes recherches et dont les conseils m'ont valu d'éviter bien des erreurs.

CHAPITRE I.

NOTIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES.

1. Notations et terminologie. — Les termes employés seront pour la plupart empruntés aux *Foundations of Algebraic Geometry* [F] de Weil : domaine universel, corps, corps linéairement disjoints, extensions régulières, spécialisations, extensions des spécialisations, variétés, cycles, diviseurs, produits de variétés, projections, transformations birationnelles.

Certaines des conventions de cet Ouvrage ont toutefois été modifiées, ou nécessitent dès maintenant quelques précisions. Les variétés considérées seront toujours des variétés projectives, ou équivalentes birationnellement et birégulièrement à des variétés projectives. Nous dirons parfois qu'un point P est générique sur une variété U sans mentionner le corps de référence; cela signifiera qu'il existe un corps de définition de U et de toutes les variétés déjà introduites par rapport auquel P est générique sur U.

Il importe de bien distinguer entre les notions de *variété*; de *cycle*, ou combinaison linéaire formelle de variétés; d'*ensemble algébrique* (bunch of varieties) ou réunion finie de variétés considérées comme ensembles de points. Sur une variété U de dimension n, un cycle est *homogène* et de dimension p (resp. est un diviseur) si toutes ses composantes sont de dimension p (resp. $n-1$). Mais nous ne supposons pas que toutes les composantes d'un cycle quelconque soient nécessairement de même dimension. L'ensemble algébrique réunion des composantes d'un cycle A est le *support* de ce cycle, noté $|A|$. La notation $A \succ B$ signifie que le cycle $A - B$ est positif, c'est-à-dire que toutes les composantes de ce cycle ont un coefficient $\geqq 0$.

Il y a lieu de distinguer de même : si A et B sont deux cycles sur une variété, entre le *produit d'intersection* $A.B$ et l'ensemble algébrique $A \cap B$; si A est un cycle homogène de dimension p sur le produit $U \times V$ de deux variétés, entre la *projection algébrique* de A sur U, notée $pr_U(A)$ et l'ensemble algébrique projection de $|A|$ sur U, noté $proj_U|A|$. Rappelons que, pour définir le symbole $pr_U(A)$, on peut commencer par supposer que A est une variété. On pose alors $pr_U(A) = qA'$ lorsque la projection A′ de A sur U est de même dimension que A et en désignant par q l'*indice de projection* [A:A′] de A suivant A′[F, chap. VII, § 5], et $pr_U(A) = 0$ si dim (A′) < dim(A). On passe au cas où A est un cycle homogène quelconque par linéarité.

Nous adopterons pour les multiplicités d'intersection les définitions et notations de Samuel [M, chap. V] qui sont valables pour les composantes excédentaires et dans le cas de cycles quelconques. Étant donné une composante C de l'intersection de deux cycles A et B, la *multiplicité de* C *dans cette intersection* est donc notée $i(C; A.B)$. Si A est un cycle et B une variété contenue dans $|A|$, la *multiplicité de* B *sur* A, égale à $i(B; A.B)$ est notée $m(A; B)$.

Le produit d'intersection de deux cycles A et B au sens de [M, chap. V], noté par Samuel A.B, sera représenté par $A \perp B$. Ce symbole a toujours un sens quels que soient A et B et ne dépend pas de la variété ambiante. Le cycle $A \perp B$ est distinct en général du produit d'intersection A.B des cycles A et B *sur une variété donnée* U au sens de [F, chap. VI] que nous noterons comme Weil A.B, dont toutes les composantes simples sur U sont supposées de plus propres sur U (c'est-à-dire de dimension $u - a - b$, en désignant par u, a, b les dimensions respectives de U, A, B). Le symbole A.B n'est pas toujours défini et peut dépendre de la variété U considérée. Lorsqu'il est défini, l'ensemble algébrique $|A \perp B - A.B|$ est contenu dans l'ensemble des points multiples de U.

La notion de *spécialisation des cycles de dimension arbitraire* sera également considérée du point de vue de Samuel [M, chap. IV] qui l'a définie de manière à répondre aux conditions posées par Weil dans [F, chap. IX, § 6] en utilisant la méthode des « projections génériques », voisine de celle de la « forme associée » de Van der Waerden et Chow.

Les notions se rattachant aux variétés abéliennes et aux jacobiennes des courbes seront empruntées aux *variétés abéliennes et courbes algébriques* [VA] de Weil. Si A est une variété abélienne, l'ensemble des points de A est, par définition, un groupe abélien, que nous noterons [A].

Les quelques résultats contenus dans ce chapitre ont pour but essentiel de compléter les bases nécessaires à la rédaction des chapitres suivants, et surtout à celle du chapitre II, plus spécialement consacré à la Géométrie algébrique.

2. Quelques propriétés des intersections. — Les lemmes démontrés dans ce paragraphe sont indépendants entre eux. Dans chaque cas les variétés considérées sont supposées plongées dans un même espace projectif S^n. Les dimensions respectives u et v de deux variétés U et V seront dites complémentaires si $u + v = n$. Si U est une variété, nous désignerons pas *cylindre générique* passant par U un cylindres de base U ayant pour direction une variété linéaire générique Δ (sous-entendu sur un corps de définition, non précisé, de toutes les variétés déjà introduites), l'hyperplan à l'infini de S^n étant supposé ne contenir aucune de ces variétés.

LEMME 1. — *Soient* A *et* B *deux cycles, et* P *un point de multiplicité* 1 *dans* $A \perp B$, *c'est-à-dire un point simple d'une composante* C *de multiplicité* 1 *de* $A \perp B$ *qui n'est contenu dans aucune autre composante de* $A \perp B$. *Supposons de plus que* C *soit une composante propre de* $A \perp B$ *dans l'espace* S. *Alors* P *est simple sur* A (*et sur* B).

Soit en effet L une variété linéaire générique de S passant par P et de dimension complémentaire à celle de C. Le point P est une composante propre de l'intersection $A \cap B \cap L$ dans S. Appliquons le théorème d'associativité des intersections [F, chap. VI, th. 5]. On a

$$i[P;\ A.(B.L)] = i[P;\ (A.B).L] = i(P;\ C.L) = 1,$$

ce qui montre que P est simple sur A.

LEMME 2. — *Soient* U et V *deux variétés,* Z *une composante de multiplicité* 1 *de leur intersection,* Y *une sous-variété de* U *contenant* Z. *Alors on a*

$$i(Z;\ V.Y) = m(Z;\ Y).$$

On peut, en coupant par une variété linéaire générique de dimension complémentaire à celle de Z, se ramener au cas où Z est un point.

D'après Samuel [M, chap. V, th. 3] on a

$$i(Z;\ V.Y) = i(Z;\ \tilde{V}.Y)$$

en désignant par $\tilde{V}$ un cylindre générique de dimension telle que son intersection avec Y soit propre dans l'espace S.

Soient L_V, $L_{\tilde{V}}$, L_U les variétés linéaires tangentes en Z à V, $\tilde{V}$ et U respectivement. L'intersection $L_{\tilde{V}}.L_U$ étant nécessairement propre, les variétés $\tilde{V}$ et U sont transversales en Z [F, chap. VI, § 2] donc d'après [F, chap. VI, § 2. th. 6] on a une composante X et une seule de leur intersection passant par Z. De plus, Z est simple sur X et la variété linéaire à X en Z est

$$L_X = L_{\tilde{V}}.L_U.$$

La direction de cette variété étant générique dans L_U, on a

$$i(Z;\ X.Y) = m(Z;\ Y).$$

Or, d'après [F chap. VII, § 6, th. 18, ii] puisque Z est simple sur X et sur $\tilde{V}$:

$$i(Z;\ X.Y) = i(Z;\ \tilde{V}.Y).$$

On a donc bien

$$i(Z;\ V.Y) = m(Z;\ Y).$$

COROLLAIRE. — *Soient* U *et* V *deux variétés,* Z *une composante de multiplicité* 1 *de leur intersection,* X *et* Y *des sous-variétés de* U *et* V *respectivement qui contiennent* C. *Alors on a*

$$i(Z;\ X.Y) = m(Z;\ X).m(Z;\ Y).$$

Si Δ désigne la diagonale du produit $S \times S$ et Z^Δ celle de $Z \times Z$ on a en effet, d'après la définition des multiplicités

$$i(Z; X.Y) = i[Z^\Delta; (X \times Y).\Delta].$$

Or d'après le lemme 2

$$i[Z^\Delta; (X \times Y)\Delta] = m(Z^\Delta; X \times Y).$$

Soit P un point générique de Z. D'après [M, chap. V, prop. 6],

$$m(Z^\Delta; X \times Y) = m(P \times P; X \times Y)$$

et d'après [M, chap. V, th. 4, coroll. 1]

$$m(P \times P; X \times Y) = m(P; X).m(P; Y).$$

Enfin, d'après [M, chap. V, prop. 6]

$$m(P; X) = m(Z; X) \qquad \text{et} \qquad m(P; Y) = m(Z; Y)$$

et le corollaire s'en déduit.

Lemme 3. — *Soient* U *une variété,* V *une sous-variété, de* U, P *un point de* V *simple sur* U, $\tilde{V}$ *un cylindre générique passant par* V *de dimension au plus telle que l'intersection* $U \cap \tilde{V}$ *soit propre. Alors* V *et la seule composante de cette intersection contenant* P.

Soit une variété linéaire L de direction générique par rapport à un corps de définition de U, V, P et $\tilde{V}$, passant par P et de dimension complémentaire à celle de V. Le point P est une composante propre de $U \cap \tilde{V} \cap L$. Appliquons le théorème d'associativité

$$i[P; \tilde{V}.(U.L)] = i[P; (\tilde{U}.V).L].$$

D'après [F, chap. VI, th. 6], il existe une seule composante W de U.L passant par P. Or, d'après [M, chap. V, th. 3] :

$$i[P; \tilde{V}.(U.L)] = i[P; V.(U.L)]$$

et d'après [F, chap. VII, th. 18, ii], puisque P est simple sur U,

$$i[P; V.(U.L)] = i(P; V.L).$$

Donc

$$i(P; V.L) = i[P; (U.\tilde{V}).L]$$

ou d'après [M, chap. V, th. 3] :

$$m(P; V) = m[P; (U.\tilde{V})]$$

et le lemme s'ensuit (1) :

---

(1) *Remarque* : on peut sans inconvénient remplacer le cylindre générique $\tilde{V}$ par un cylindre de direction $\tilde{P}$ (qu'on suppose passer par P) telle que P soit une composante propre de multiplicité 1 de $X.\tilde{P}''$.

LEMME 4. — *Soient* U *une variété*, A_1 *et* A_2 *des* U-*diviseurs positifs. Soient* X *une sous-variété de* U *simple sur* U *et contenue dans* $A_1 \cap A_2$ *et* Y *une sous-variété de* U *contenant* X, *telles que les conditions suivantes soient réalisées* :

(A) X *est simple sur* Y;
(B) X *est une composante propre des intersections* $Y.A_j$ *sur* U ($j = 1, 2$).

Alors on a, en posant $C = A_1 \perp A_2$, $\delta = i(X; Y.C)$, $\delta_j = i(X; Y.A_j)$ $(j = 1, 2)$:

$$\inf(\delta_1, \delta_2) \leq \delta. \tag{1}$$

On peut se borner au cas où A_1 et A_2 sont des variétés, le cas général s'en déduisant par linéarité, et supposer de plus ces variétés distinctes. On a alors $A_1 \perp A_2 = A_1 . A_2$.

D'autre part, on peut supposer fixée la dimension d de X et, en coupant par une variété linéaire générique de dimension complémentaire à d, se ramener au cas où X est un point. D'après la condition (B), Y est alors une courbe. Par une projection, on se ramène ensuite au cas où U coïncide avec l'espace S.

Soit u la dimension de U; nous allons réduire le problème au cas plus particulier où $u = 2$. Pour cela, si $u > 2$, faisons passer par Y un cylindre générique $\tilde{Y}$ ayant pour direction une droite. On a, d'après [F, chap. VII, th. 18, ii], en remarquant que X est simple sur $\tilde{Y}$:

$$\delta_j = i(X; Y.A_j) = i[X; Y.(\tilde{Y}.A_j)] \qquad (j = 1, 2).$$

Appliquons le théorème d'associativité à la composante propre X de l'intersection $\tilde{Y} \cap A_1 \cap A_2$:

$$i[X; \tilde{Y}.(A_1.A_2)] = i[X; (\tilde{Y}.A_1).A_2].$$

En appliquant une nouvelle fois [F, chap. VII, th. 18 ii] on a aussi

$$i[X; (\tilde{Y}.A_1).A_2] = i]X; (\tilde{Y}.A_1).(\tilde{Y}.A_2)].$$

Or, d'après [M, chap. V. th. 3].

$$i[X; \tilde{Y}.(A_1.A_2)] = i[X; Y.(A_1.A_2)].$$

Donc

$$i[X; Y.(A_1.A_2)] = i[X; (\tilde{Y}.A_1).(\tilde{Y}.A_2)].$$

On est ainsi ramené à démontrer, au lieu de la relation (1), celle qui s'en déduit en remplaçant A_1 et A_2 par $\tilde{Y}.A_1$ et $\tilde{Y}.A_2$ respectivement. Le problème est bien réduit au cas $n = 2$. On peut supposer que $U = S$ est un plan et que A_1 et A_2 sont deux courbes de ce plan se coupant proprement au point X. Par une transformation analytique, on se ramène au cas où Y est une droite. Prenons pour origine O le point X, et cette droite pour axe Ox, l'axe Oy étant quelconque. Soit $f(x, y) = 0$ l'équation de A_1 (f désignant un polynome en x et y). On peut écrire

$$f(x, y) = y f_0(x, y) + x^{\delta_1} f_1(x, y),$$

f_0 et f_1 désignant des polynomes en x et y. Si maintenant on considère une branche analytique $A_2^{(j)}$ de A_2 passant par O ayant une représentation analytique de la forme

$$x^{(j)}(t) = a_0^{(j)} t^{\gamma_2^{(j)}} + \ldots, \qquad y^{(j)}(t) = b_0^{(j)} t^{\delta_2^{(j)}} + \ldots,$$

la multiplicité d'intersection de cette branche avec Ox est $\delta_2^{(j)}$ et la multiplicité de son intersection avec A_1 est le degré du terme de plus bas degré de l'équation en t

$$f[x^{(j)}(t), y^{(j)}(t)] = 0.$$

On constate que ce degré $\delta^{(j)}$ satisfait à

$$\inf\left[\delta_1, \delta_2^{(j)}\right] \leqq \delta^{(j)}.$$

D'où, puisque $\delta_2 = \sum_j \delta_2^{(j)}$ et $\delta = \sum_j \delta^{(j)}$:

$$\inf(\delta_1, \delta_2) \leqq \delta.$$

Corollaire. — *Soient* U *une variété*, α *un entier positif donné et* A_j $(j = 1, \ldots, m)$ *des* U-*diviseurs positifs en nombre fini* m. *Soient* X *une sous-variété simple de* U *contenue dans l'intersection* $\bigcap_j |A_j|$ *et* Y *une sous-variété de* U *contenant* X, *telles que les conditions suivantes soient satisfaites* :

(A) X *est simple sur* Y;

(B) X *est une composante propre de chacune des intersections* $Y.A_j$ *sur* U;

(C) *Pour toute composante* C_k *de* $A_1 \perp (A_2 \perp (\ldots \perp A_m))$ (1) *contenant* X, *on a* $i(X; Y.C_k) \leqq \alpha$.

Alors, si l'on pose $i(X; Y.A_j = \delta_j$. *on a* $\inf_j(\delta_j) \leqq \delta$, *où* δ *est un nombre positif qui ne dépend que des* A_j *et de* α, *mais non de* X *ni de* Y.

Comme précédemment, on peut supposer que les A_j sont des variétés et que ces variétés sont distinctes, puis se ramener au cas où X est point, donc Y une courbe, et où U coïncide avec l'espace S.

Soit encore $\tilde{Y}$ un cylindre générique passant par Y ayant pour direction une droite. On a encore

$$\delta_j = i(X; Y.A_j) = i[X; Y.(\tilde{Y}.A_j)] \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

D'après le lemme 4, on saura que $\inf_j(\delta_j)$ est borné supérieurement si l'on montre qu'il en est de même de $\inf_j(\varepsilon_j)$ avec

$$\varepsilon_j = i[X; (\tilde{Y}.A_1).(\tilde{Y}.A_j)] \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

(1) L'ensemble de ces composantes est en général distinct de celui des composantes de $\bigcap_j |A_j|$. Les deux ensembles coïncident si l'intersection des A_j est propre sur U.

Puisque les intersections $A_1 \cap A_j$ sont propres, on a, comme plus haut

$$\begin{aligned}\varepsilon_j &= i[X ; (\tilde{Y}.A_1).A_j] \\ &= i[X ; \tilde{Y}.(A_1.A_j)] \\ &= i[X ; Y.(A_1.A_j)].\end{aligned}$$

Par une projection générique (*cf.* M, chap. IV, §3]) on est ramené au problème analogue, où m est remplacé par $m - 1$ et les $A_j (j = 1, \ldots, m)$ par les projections des $A_1.A_j (j = 2, \ldots, m)$. Donc par récurrence le colloraire est démontré.

3. Composantes excédentaires dans la spécialisation d'une intersection. — Lemme 5. — *Soient* X *et* Y *deux cycles homogènes positifs dans un espace projectif* L. *Posons* $X \perp Y = Z + Z_e$, *toutes les composantes du cycle* X *étant propres et toutes celles du cycle* Z_e *excédentaires dans l'intersection* $X \cap Y$ *sur* S. *Soient* $X \rightarrow X'$ *et* $Y \rightarrow Y'$ *deux spécialisations compatibles entre elles sur un corps* k, *et posons encore* $X' \perp Y' = Z' + Z'_e$, *toutes les composantes du cycle* Z *étant propres et toutes celles de* Z'_e *exédentaires dans l'intersection* $X' \cap Y'$ *sur* S. *Soit de plus* $Z \rightarrow Z''$ *une spécialisation compatible avec les précédentes sur* k. *Alors on a* $Z' \prec Z''$ *et* $|Z'' - Z'| \prec |Z'_e|$.

En coupant par une variété linéaire générique de dimension complémentaire à celle de Z, on se ramène au cas où Z et Z' sont de dimension zéro; en utilisant les cycles produits et la diagonale, on se ramène au cas où $Y = Y'$ est une variété linéaire Δ définie sur le corps premier. Enfin, par une projection parallèlement à un hyperplan générique de Δ, on se ramène au cas où $\Delta = Y = Y'$ est une droite et où, par suite, X est un S-diviseur.

On peut supposer que X est une variété. Posons $X' = X'_1 + X'_2$, les diviseurs X'_1 et X'_2 de S étant choisis de telle manière que l'intersection $X'_1 \cap \Delta$ soit propre (c'est-à-dire composée de points) et que toutes les composantes de X'_2 contiennent Δ.

Soient maintenant $\overline{X}$, $\overline{X}'_1$, $\overline{X}'_2$ des S-diviseurs ayant mêmes degrés que X, X'_1 et X'_2 respectivement et tels que l'équation de chacun d'eux ait tous ses coefficients génériques indépendant sur k.

Posons

$$\overline{X}.\Delta = \overline{Z}, \qquad \overline{X}'_2.\Delta = \overline{Z}'_1, \qquad \overline{X}'_2.\Delta = \overline{Z}'_2,$$
$$\overline{X}' = \overline{X}'_1 + \overline{X}'_2 \qquad \text{et} \qquad \overline{Z}' = \overline{X}'.\Delta = \overline{Z}'_1 + \overline{Z}'_2.$$

Alors, par transitivité $\overline{Z} \rightarrow Z''$ est une spécialisation compatible avec $\overline{X} \rightarrow X'$ sur k. Comme $\overline{Z}'$ est l'unique spécialisation de $\overline{Z}$ compatible avec $\overline{X} \rightarrow \overline{X}'$ sur k, $\overline{Z}' \rightarrow Z''$ est compatible avec $\overline{X}' \rightarrow X'$ sur k. Or, d'après le choix de X'_1, $\overline{Z}'_1 \rightarrow Z'$ est l'unique spécialisation de $\overline{Z}'_1$ compatible avec $\overline{X}' \rightarrow X'$ sur k. Comme $\overline{Z}'_1 \prec \overline{Z}'$, on a aussi $Z' \prec Z''$ et comme $Z'' \subset X' \perp Y'$, $|Z'' - Z'| \prec |Z'_e|$.

Lemme 6. — *Soient* U *une variété*, X *et* Y *deux* U-*cycles positifs homogènes*, $X \rightarrow X'$ *et* $Y \rightarrow Y'$ *des spécialisations compatibles entre elles sur un corps* k, *et* *supposons que les symboles* $Z = X.Y$ *et* $Z' = X'.Y'$ *soient définis sur* U. *Soit de plus* $Z \rightarrow Z''$ *une spécialisation compatible avec les précédentes sur* k. *Alors tout point de* $|Z' - Z''|$ *est multiple sur* U.

Désignons par U_0 l'ensemble algébrique des points multiples de U.

Soient Δ une direction générique de S de dimension complémentaire à celle de U, $\tilde{Y}$ et $\tilde{Y}'$ les cylindres de direction Δ passant respectivement par Y et Y', K un corps de définition de Δ contenant k. Posons

$$\tilde{Y}.U = \tilde{Y} \perp U = Y + \overline{Y}, \qquad \tilde{Y}'.U = \tilde{Y}' \perp U = Y' + \overline{Y}'.$$

D'après [M, chap. IV. prop. 2], $\tilde{Y}'.U$ est l'unique spécialisation de $\tilde{Y}.U$, donc $\overline{Y}'$ l'unique spécialisation de $\overline{Y}$ compatible avec $Y \rightarrow Y'$ sur K.

D'après le lemme 3, aucune composante de Y simple sur U n'est contenue dans $\overline{Y}'$. Posons

$$X \perp \tilde{Y} = Z + \overline{Z} + Z_e, \qquad X' \perp \tilde{Y}' = Z' + \overline{Z}' + Z'_e,$$

toute composante de $Z + \overline{Z}$ (resp. $Z' + \overline{Z}'$) étant propre et toute composante de Z_e (resp. Z'_e) étant excédentaire dans S.

Soit $\overline{Z} \rightarrow \overline{Z}'$ une spécialisation compatible avec $X \rightarrow X'$, $Y \rightarrow Y'$ et $Z \rightarrow Z''$ sur k. D'après le lemme 5, on a

$$Z' + \overline{Z}' \prec Z'' + \overline{Z}'.$$

Toute composante de Z a même coefficient dans $X \perp Y$ et dans $X \perp \tilde{Y}$, d'après [M, Chap. V, th. 3]. Donc aucune composante de $\overline{Z}$ ne peut être en même temps composante de Z. Donc, d'après le lemme 3, aucune composante de $\overline{Z}$ simple sur U n'appartient à Y. Donc $|\overline{Z}| \subset |\overline{Y}| + U_0$ et l'on en déduit, par spécialisation $|\overline{Z}''| \subset |\overline{Y}'| + U_0$. On montrerait de même que $|\overline{Z}'| \subset |\overline{Y}'| + U_0$.

Si Z'_i est une composante arbitraire de Z', on a $Z'_i \subset |Y'|$ et $Z'_i \not\subset U_0$, donc $Z'_i \not\subset |\overline{Y}'|$ d'après le lemme 3, donc $Z'_i \not\subset |Y'| + U_0$ et $Z'_i \not\subset |\overline{Z}''|$.

Si Z''_j est une composante arbitraire de Z'' simple sur U, on a de même $Z''_j \not\subset |Y'|$, donc $Z''_j \not\subset |\overline{Y}'| + U_0$ et $Z''_j \not\subset |\overline{Z}'|$. On en déduit bien $|Z' - Z''| \subset U_0$.

4. Correspondances. — Soient U et V deux variétés. Une correspondance entre U et V est définie par son *graphe*, c'est-à-dire par un cycle X sur le produit $U \times V$, celui-ci étant considéré dans un ordre déterminé. Le cycle X peut être quelconque; toutefois, pour simplifier la rédaction, nous donnerons dans la suite au mot « correspondance » un sens plus restrictif : nous supposerons que X est une *variété ayant pour projection* U *sur* U. Si A est un U-cycle tel que le symbole $X.(A \times V)$ soit défini sur $U \times Y$, on pose

$$X(A) = \mathrm{prv}[X.(A \times V)].$$

Ce symbole est toujours défini lorsque A est un U-diviseur puisque, dans ce cas, aucune composante de $X.(A \times V)$ ne peut être excédentaire.

La correspondance déduite de X en échangeant U et V, définie lorsque X a pour projection V sur V, est notée $\overset{-1}{X}$.

Cas particuliers. — Si la projection de X sur U est d'indice 1, X est le graphe d'une *fonction sur* U *à valeurs dans* V (*cf.* [VA, § I, n° 3]).

Une fonction à valeurs dans la droite projective est une *fonction numérique*.

Si X et $\overset{-1}{X}$ sont les graphes des fonctions, c'est-à-dire si les projections de X sur U et V sont d'indice 1, X est une *transformation birationnelle*.

Dans la suite, nous conviendrons pour simplifier d'employer la même lettre pour désigner une fonction et son graphe.

D'autre part, nous allons introduire un symbole défini dans des conditions moins restrictives que X(A), et que nous noterons X[A].

Auparavant, rappelons la propriété suivante [F, Chap. VII, th. 12, iii] : si U et V sont deux variétés ayant un corps de définition commun k, si P désigne un point générique de U sur k et X(P) un V-cycle rationnel sur $K = k(P)$, il existe un cycle X et un seul sur $U \times V$ tel qu'on ait $X.(P \times V) = P \times X(P)$ et dont toutes les composantes aient pour projection U sur U.

Le cycle ainsi défini sera dit *lieu du cycle* $P \times X(P)$ *sur* k, et sera noté

$$X = \mathcal{L}_k[P \times X(P)].$$

Si l'on intervertit l'ordre de U et V, cette notation est naturellement à remplacer par $\mathcal{L}_k[X(P) \times P]$. Cette notion généralise celle de lieu au sens ordinaire d'un point M sur un corps k, pour laquelle nous emploierons parfois la notation $\mathcal{L}_k(M)$.

Soient encore U et V deux variétés, X le graphe d'une correspondance entre U et V, A une sous-variété de U, k un corps de définition pour U, V, X, A et supposons que le symbole X(P) soit défini pour un point P générique de A sur k. On posera

$$X[A] = \mathrm{pr}_V(C), \qquad \text{avec} \quad C = \mathcal{L}_k[P \times X(P)]$$

et, l'on étendra cette définition, par linéarité, au cas où A est un cycle homogène quelconque. Il revient au même de poser, dans ce dernier cas

$$X[A] = \mathrm{pr}_V(C), \qquad \text{avec} \quad X \perp (A \times V) = C + C_0,$$

de telle manière que les composantes du cycle C soient toutes celles de l'intersection $X \cap (A \times V)$ qui se projettent sur U suivant une variété de même dimension (nécessairement composante de A), le symbole étant défini à la condition que ces composantes soient propres.

Dans la suite, l'emploi du symbole X(A) sera suffisant dans la plupart des cas. Cependant, au paragraphe 11 du chapitre II, il sera nécessaire d'introduire le symbole X[A] et d'appliquer le lemme suivant :

Lemme 7. — *Soient* U *et* V *deux variétés,* F *une fonction définie sur* U, *à valeurs dans* V, A *et* B *deux* U-*cycles tels que les* V-*cycles* $A' = F[A]$, $B' = F[B]$ *soient définis,* C′ *une composante propre de* $A' \cap B'$ *telle que le* U-*cycle* $\overset{-1}{F}[C']$

soit défini. Soit de plus C *une composante propre de* $A \cap B$ *ayant pour coefficient* 1 *dans* $\overset{-1}{F}[C']$. *Alors on a*

$$i(C;\ A.B) = i(C',\ A'.B').$$

Il existe une composante $\overline{C}$ de multiplicité 1 de $F \cap (U \times C')$ telle que $\mathrm{pr}_U(\overline{C}) = C$.

Appliquons le théorème d'associativité à la composante propre $\overline{C}$ de

$$F \cap (U \times A') \cap (U \times B').$$

On a

$$i(C';\ A'.B') = i[\overline{C};\ \overline{A}.(U \times B')],$$

avec

$$\overline{A} = F.(U \times A').$$

D'après [F, chap. VII, th. 18, ii], puisque $\overline{C}$ est nécessairement simple sur $U \times V$ et sur F :

$$i[\overline{C};\ \overline{A}.(U \times B')] = i(\overline{C};\ \overline{A}.\overline{B}),$$

en posant

$$\overline{B} = F.(U \times B').$$

Enfin, d'après [F, chap. VI, th. 10], puisque les projections de $\overline{C}$, $\overline{A}$, $\overline{B}$ suivant C, A, B respectivement sont d''indice 1 :

$$i(\overline{C};\ \overline{A}.\overline{B}) = i(C;\ A.B),$$

d'où le lemme :

Lemme 8. — *Soient* U *et* V *deux variétés,* F *une fonction sur* U, *à valeurs dans* V, *telle que* $[F : V] = q$ *(q entier positif). Alors si* B *est un diviseur sur* V, *on a*

$$F\big(\overset{-1}{F}(B)\big) = qB + B_0,$$

où B_0 *est un diviseur sur* V *dont le support appartient à un sous-ensemble algébrique de* V *qui dépend de* F, *mais non de* B.

On peut se borner au cas où B est une variété. On a

$$A = \overset{-1}{F}(B) = \mathrm{pr}_U(D), \qquad \text{avec} \quad D = F.(U \times B).$$

Or, si Q est un point générique de B, le symbole $\overset{-1}{F}(Q)$ est défini, de dimension zéro et de degré q. On a donc

$$\mathrm{pr}_V(D) = qB.$$

De plus, on a

$$A = \mathrm{pr}_U(C), \qquad \text{avec} \quad C = F.(A \times V).$$

Donc

$$\mathrm{pr}_U(C - D) = 0,$$

et il en résulte, puisque la projection de F sur U est d'indice 1, que toutes les composantes de $\mathrm{proj}_U(C - D)$ sont de dimension inférieure à la dimension n de A.

Soit $\overline{P} \times \overline{Q}$ un point générique d'une composante E de $C - D$. La dimension de $k(\overline{P} \times \overline{Q})$ sur k est $\geqq n$. Comme la dimension de $k(\overline{P})$ sur k est $< n$, celle de $k(\overline{P} \times \overline{Q})$ sur $k(\overline{P})$ est $\geqq 1$, et l'intersection $X \cap (P_0 \times V)$ est excédentaire. D'après [M, Chap. IV, th. 2], $\overline{P}$ appartient à un sous-ensemble algébrique U_0 de U qui ne dépend pas de B. On en déduit

$$|C - D| \subset X_0, \qquad \text{où} \quad X_0 = X \cap (U_0 \times V)$$

et

$$\mathrm{pr}_V(C - D)| = |F.(\overset{-1}{F}(B)) - qB \subset V_0, \qquad \text{avec} \quad V_0 = \mathrm{proj}_V |X_0|.$$

Lemme 9. — *Soient* U *et* V *deux variétés,* X *le graphe d'une correspondance entre* U *et* V, *de projections* U *sur* U *et* V *sur* V. *Soit* A *un* U*-cycle positif tel que le* V*-cycle* $B = X(A)$ *soit défini. Soit* k *un corps de définition commun à* U, V *et* X, *et soit* $A \to A'$ *une spécialisation sur* k, *telle que le* V*-cycle* $B' = X(A')$ *soit défini. Soit d'autre part* $B \to B''$ *une spécialisation compatible avec* $A \to A'$ *sur* k. *Alors on a* $|B' - B''| \subset V_0$ *où* V_0 *désigne un sous-ensemble algébrique de* V *qui dépend de* X, *mais non de* A *ni de* A′.

On a en effet

$$B = \mathrm{pr}_V(C) \qquad \text{et} \qquad B' = \mathrm{pr}_V(C'),$$

en posant

$$C = X.(A \times V) \qquad \text{et} \qquad C' = X.(A' \times V).$$

Soit $C \to C''$ une spécialisation compatible avec $A \to A'$ et $B \to B''$ sur k. D'après le lemme 6, on a $|C' - C''| \subset X_0$, en désignant par X_0 l'ensemble algébrique des points multiples de X.

Comme d'autre part la spécialisation des cycles est compatible avec la projection algébrique, on en déduit

$$|B' - B''| \subset \mathrm{proj}_V |X_0| = V_0.$$

Corollaire. — *Soient* U, V *et* k *définis comme dans le lemme* 9, *et soit* A *un* U*-diviseur quelconque. Soit* $A \to A'$ *une spécialisation sur* k, *et posons*

$$B = X(A), \qquad B' = X(A').$$

Soit $B \to B''$ *une spécialisation compatible avec* $A \to A'$ *sur* k. *Alors on a*

$$|B' - B''| \subset V_0,$$

où V_0 *désigne un sous-ensemble algébrique de* V *qui dépend de* X, *mais non de* A *ni de* A′.

Lorsque A est un diviseur positif, il suffit d'appliquer le lemme 9. On passe de là au cas général par linéarité [ce qu'il n'est pas possible de faire dans le cas de cycles quelconques : si A est un cycle, il se peut que $X(A')$ soit défini et qu'il n'en soit pas de même [d'un $X(A'_i)$, en désignant par A'_i la spécialisation d'une composante de A].

5. **Les théories d'équivalence sur une variété.** — Soit U une variété. Nous nous bornons à considérer les équivalences linéaire et algébrique pour les U-diviseurs (les résultats seraient analogues pour les U-cycles de dimension quelconque donnée). L'ensemble de tous les U-diviseurs dont toutes les composantes sont simples sur U est un groupe abélien au sens de l'addition des cycles. Nous désignerons ce groupe par $\mathcal{G}(U)$. Soient les sous-groupes suivants de $\mathcal{G}(U)$:

$\mathcal{G}_l(U)$, *groupe des U-diviseurs linéairement équivalents à zéro sur* U, tel qu'on ait $A \in \mathcal{G}_l(U)$ si et si seulement, en désignant par D une droite arbitraire donnée, on peut trouver un diviseur X de $U \times D$ et un diviseur a de degré zéro de D tels que

$$A = \mathrm{pr}_U[X.(U \times a)],$$

avec la condition que toutes les composantes de $X \cap (U \times a)$ soient simples sur $U \times V$. En fait, on peut toujours prendre pour X le graphe d'une fonction numérique φ sur U (c'est-à-dire supposer $[X:U]=1$), avec $a=(0)-(\infty)$ (notations de [F, Chap. VIII, § 2]), de telle manière que A coïncide avec le diviseur (φ) de φ. L'équivalence linéaire sera parfois notée par le signe $\sim$.

$\mathcal{G}_a(U)$, *groupe des U-diviseurs algébriquement équivalents à zéro sur* U, tel qu'on ait $A \in \mathcal{G}_a(U)$ si et si seulement on peut trouver une variété V, un diviseur X du produit $U \times V$ et un diviseur a de degré et de dimension zéro de V tels qu'on ait

$$A = \mathrm{pr}_U[X.(U \times a)]$$

avec la condition que toutes les composantes de $X \cap (U \times a)$ soient simples sur $U \times V$. En fait, on peut supposer que V est une courbe sans point multiple et que $a = M_1 - M_2$ où M_1 et M_2 sont deux points de V.

Le groupe $\mathcal{G}_l$ satisfait aux conditions suivantes [*cf.* [F, chap. IX, § 7]) :

(A) Si U et V sont deux variétés et si $A \in \mathcal{G}_l(U)$, on a

$$A \times V \in \mathcal{G}_l(U \times V).$$

(B) Si V est une sous-variété simple de U, si $A \in \mathcal{G}_l(U)$ et si l'intersection A.V est définie sur U, on a

$$A.V \in \mathcal{G}_l(V).$$

(C) Si U et V sont des variétés, si $A \in \mathcal{G}_l(U \times V)$, si X est une sous-variété de $U \times V$ dont la projection sur U est d'indice 1, ($[X:U]=1$) si de plus l'intersection X.A est définie et a toutes ses composantes simples sur X, on a

$$\mathrm{pr}_U(A.X) \in \mathcal{G}_l(U).$$

Le groupe $\mathcal{G}_a(U)$ satisfait aux propriétés (A′) et (B′) analogues à (A) et (B), ainsi qu'à la propriété (C′) analogue à (C), mais où la condition $[X:U]=1$ peut être remplacée par les deux suivantes : X a même dimension que U et sa projection sur U est U.

On a de plus les relations évidentes

$$\mathcal{G}_l(\mathrm{U}) \subset \mathcal{G}_a(\mathrm{U}) \subset \mathcal{G}(\mathrm{U}).$$

Nous allons rattacher les théories d'équivalence à la notion de spécialisation des cycles.

Lemme 10. — *Soit* U *une variété de dimension* n, *sans sous-variété multiple de dimension* $n-1$, *et soit* V *une courbe* (*resp. une droite*). *Soient* k *un corps de définition pour* U *et* V, M *un point générique de* V *sur* k, A *un* U-*diviseur rationnel sur* $\mathrm{K}=k(\mathrm{M})$. *Alors, si* M′ *est un point simple de* V, *la spécialisation* $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ *compatible avec* $\mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ *sur* k *est unique, et de plus* A *et* A′ *sont algébriquement* (*resp. linéairement*) *équivalents sur* U.

En effet, soit $\mathrm{X}=\mathcal{L}_k(\mathrm{A}\times\mathrm{M})$. L'intersection $\mathrm{X}\cap(\mathrm{U}\times\mathrm{M}')$ est propre sur $\mathrm{U}\times\mathrm{V}$, puisque $\mathrm{U}\times\mathrm{M}'$ n'est pas contenue dans X. D'après les propriétés des spécialisations, le cycle $\mathrm{A}'=\mathrm{X}.(\mathrm{U}\times\mathrm{M}')$ est l'unique spécialisation de $\mathrm{A}=\mathrm{X}.(\mathrm{U}\times\mathrm{M})$ compatible avec $\mathrm{M}\to\mathrm{M}'$ sur k. Il suffit ensuite d'appliquer les définitions données plus haut des équivalences.

Lemme 11. — *Soient* U *une variété quelconque et* V *une courbe* (*resp. une droite*), k *un corps de définition pour* U *et* V, M *un point générique de* V *par rapport à* k, A *un* U-*diviseur simple sur* U *rationnel par rapport à* $\mathrm{K}=k(\mathrm{M})$. *Alors, si* M′ *est un point simple de* V *et si* $\mathrm{A}\to\mathrm{A}'$ *est une spécialisation compatible avec* $\mathrm{M}\to\mathrm{M}'$ *sur* k, $\mathrm{A}-\mathrm{A}'$ *est algébriquement* (*resp. linéairement*) *équivalent sur* U *à un* U-*diviseur de la forme* $\sum_i \lambda_i \mathrm{A}_i$, *les* λ_i *étant des entiers et les* A_i *des sous-variétés de* U *qui ne dépendent que de* U *et non de* V, *de* M *ni de* M′.

Soit $\overline{\mathrm{U}}$ un modèle normal de U, construit comme il est indiqué dans [F, App. II], et soit T la transformation birationnelle qui fait correspondre $\overline{\mathrm{U}}$ à U.

On peut supposer que A est une variété. Soit $\overline{\mathrm{A}}=\mathrm{T}(\mathrm{A})$ et soit $\overline{\mathrm{A}}\to\overline{\mathrm{A}}''$ une spécialisation compatible avec $\mathrm{A}\to\mathrm{A}'$, donc aussi avec $\mathrm{M}\to\mathrm{M}'$ sur k. En posant $\overline{\mathrm{A}}'=\mathrm{T}(\mathrm{A})$, on a d'après le lemme 9 :

$$\overline{\mathrm{A}}''-\overline{\mathrm{A}}'=\sum \lambda_j' \overline{\mathrm{A}}_j'.$$

Donc, d'après le lemme 10, puisque $\overline{\mathrm{U}}$ est sans singularités de dimension $n-1$, $\overline{\mathrm{A}}''-\overline{\mathrm{A}}'$ est algébriquement (resp. linéairement) équivalent sur U a $\sum \lambda_j' \overline{\mathrm{A}}_j'$. Soit $\bar{g}$ le groupe des classes de diviseurs de $\overline{\mathrm{U}}$ algébriquement (resp. linéairement) équivalents sur $\overline{\mathrm{U}}$. Soient $\{\overline{\mathrm{A}}'\}$, $\{\overline{\mathrm{A}}''\}$, $\{\overline{\mathrm{A}}_j'\}$ les éléments de $\bar{g}$ représentés par $\overline{\mathrm{A}}'$, $\overline{\mathrm{A}}''$, $\overline{\mathrm{A}}_j'$ respectivement et soit γ le sous-groupe de $\bar{g}$ engendré par les $\overline{\mathrm{A}}_j'$.

Désignons par $\overline{\mathrm{U}}_0$ le sous-ensemble algébrique de $\overline{\mathrm{U}}$ formé des points dont la projection sur U est un point multiple de U. Soit $\bar{g}'$ le sous-groupe des éléments de $\bar{g}$ représentables par des $\bar{U}$-diviseurs sans composantes dans $\bar{U}_0$. On a

$$\{\bar{A}''\} - \{\bar{A}'\} \in \bar{\gamma} \cap \bar{g}'.$$

Or, puisque $\bar{\gamma}$ est de type fini, il en est de même de $\bar{\gamma} \cap \bar{g}'$. En d'autres termes, $\bar{A}' - \bar{A}''$ est algébriquement (resp. linéairement) équivalent sur $\bar{U}$ à un $\bar{U}$-diviseur de la forme $\sum \lambda_i \bar{A}_i$ les $\bar{A}_i$ désignant des sous-variétés de $\bar{U}$ ne dépendant que de U, T et $\bar{U}$ non contenues dans $\bar{U}_0$. Or d'après la construction de $\bar{U}$, l'opération $\overset{-1}{T}$ se réduit à une projection d'indice 1. Donc, d'après la propriété (C′) de l'équivalence algébrique [resp. d'après la propriété (C) de l'équivalence linéaire], $A - A'$ est algébriquement (resp. linéairement) équivalent à $\sum \lambda_i A_i$ sur U, en posant $A_i = \overset{-1}{T}(\bar{A}_i)$.

Lemme 12. — *Soient* U *et* V *deux variétés,* X *une correspondance entre* U *et* V, A *un* U-*diviseur* [*ou un* U-*cycle positif tel que le symbole* $B = X(A)$ *ait un sens et représente un* V-*diviseur*]. *Alors, si* A *est algébriquement* (*resp. linéairement*) *équivalent à zéro sur* U, $B = X(A)$ *est algébriquement* (*resp. linéairement*) *équivalent sur* V *à un* V-*diviseur de la forme* $\sum \lambda_i B_i$ *où les* B_i *sont des sous-variétés de* V *qui ne dépendent que de* X, *et non de* A.

En effet il existe une courbe (resp. une droite) W, et un diviseur Y du produit $U \times W$ tels que $A = A_1 - A_2$, avec

$$A_i = \mathrm{pr}_U[Y.(U \times M_i)] \qquad (i = 1, 2)$$

M_1 et M_2 étant deux points simples de W. Soit $\bar{M}$ un point générique de W et posons

$$\bar{A} = \mathrm{pr}_U[Y.(U \times \bar{M})].$$

Soit d'autre part $\bar{B} = X(\bar{A})$. Soit B'_i une spécialisation de $\bar{B}$ compatible avec $\bar{M} \to M_i (i = 1, 2)$. D'après le lemme 9, on a, en posant

$$B_i = X(A_i), \qquad |B'_i - B_i| \subset V_0,$$

où V_0 est un sous-ensemble algébrique de V qui ne dépend que de X. Or, d'après le lemme 11, $\bar{B} - B'_i$ est algébriquement (resp. linéairement) équivalent à un V-diviseur de la forme $\sum \mu_j B_{0j}$, les B_{0j} ne dépendant que de X. Le lemme s'en déduit, compte tenu de $B = B_1 - B_2$.

6. Propriétés vraies en dehors d'ensembles algébriques exceptionnels. — Il arrive souvent qu'une propriété satisfaisaite par un point générique $\bar{M}$ d'une variété V le reste quand on remplace $\bar{M}$ par une spécialisation M. Lorsqu'il suffit pour cela que M ne soit pas contenu dans un certain sous-ensemble algébrique de U, nous dirons que la propriété a lieu *pour presque tout* $M \in V$.

Lemme 13. — *Soient* U *et* V *des variétés*, X *une correspondance entre* V *et* U. *Alors on a les propriétés suivantes :*

a. Pour presque tout $M \in V$, *le cycle* $X(M) = X.(U \times M)$ *est défini;*

b. Si pour $\overline{M}$ *générique sur* V, $X(\overline{M})$ *est une variété*, $X(M)$ *est aussi une variété pour presque tout* $M \in V$;

c. Si de plus la variété $X(\overline{M})$ *est sans point multiple*, $X(M)$ *est aussi sans point multiple pour presque tout* $M \in V$.

La propriété *a* est une conséquence de [M, Chap. IV, th. 2] puisqu'il suffit, pour que le cycle $X(M)$ soit défini, que $X \cap U \times M$ n'ait pas de composante excédentaire.

Voici d'autre part une démonstration de la propriété *b* due à Samuel : soit $(\overline{x})$ un système de coordonnées de Chow [1] de $X(\overline{M})$, et soit V′ la variété de point générique $(\overline{x})$ sur le corps de base *k*. Les points de V′ qui correspondent à des cycles décomposés forment un sous-ensemble algébrique V'_0 de V′. Or il existe une correspondance entre V′ et V, celle de point générique $(\overline{x}, \overline{M})$. Il suffit de prendre M satisfaisant à la condition *a* et en dehors de $\mathrm{proj}_V[(V'_0 \times V) \cap C]$.

Pour démontrer *c*, remarquons qu'il est nécessaire, pour que $X(M)$ ait un point multiple P, que $P \times M$ soit multiple sur X ou que les variétés linéaires tangentes à X et à $P \times M$ en ce point soient confondues. Soient (u_i) et (v_j) des systèmes de coordonnées homogènes pour les espaces respectifs auxquels sont rapportées U et V, et soit $F_k(u, v) = 0$ un système d'équations définissant X. La seconde des conditions précédentes entraîne $\frac{\partial F_k}{\partial v_j}(u, v) = 0$ pour tous les indices j et k et ne peut être vérifiée que si $P \times M$ appartient à un sous-ensemble algébrique fixe de X, donc M à un sous-ensemble algébrique fixe V_1 de V. Si X_0 est l'ensemble des points singuliers de X et si $V_0 = \mathrm{proj}_V(X_0)$, il suffit de prendre $M \notin V_0 + V_1$.

Lemme 14. — *Soient* U *une variété sans point mutiple*, V *et* $\mathfrak{M}$ *deux variétés*, k *un corps de définition pour* U, V *et* $\mathfrak{M}$, M *un point générique de* $\mathfrak{M}$ *sur* k, A *et* B *des sous-variétés de* U *et* V *respectivement rationnelles sur* $K = k(M)$ *et telles qu'il existe une fonction* F *définie par rapport à* K *et partout définie sur* A, *à valeurs dans* B. *Posons*

$$\mathcal{A} = \mathcal{L}^k(A \times M), \qquad \mathcal{B} = \mathcal{L}_k(B \times M), \qquad \mathcal{F} = \mathcal{L}_k(F \times M).$$

---

[1] Van der Waerden et Chow, *Zur algebraischen Geometrie*, IX, (*Math. Ann.*, t. 113, 1937).

Alors, pour presque tout $M' \in \mathcal{M}$, *les cycles*

$$\begin{aligned} A' &= pr_U[\mathcal{A}.(U \times M')], \\ B' &= pr_V[\mathcal{B}.(V \times M')], \\ F' &= pr_{U\times V}[\mathcal{F}.(U \times V \times M')] \end{aligned}$$

sont définis et F' *est une fonction partout définie sur* A', *à valeurs dans* B'.

Le fait que les cycles A', B', F' sont définis pour presque tout $M' \in \mathcal{M}$ est une conséquence du lemme 13 *a*.

Montrons qu'il faut et il suffit, pour que F' soit définie au point $P' \times M'$, que le symbole $\mathcal{F}.(P' \times V \times M')$ soit défini sur $U \times V \times \mathcal{M}$, et qu'on a alors

$$\mathcal{F}.(P' \times V \times M') = P' \times F'(P') \times M'.$$

En effet, on a nécessairement

$$\mathcal{F} \cap (P' \times V \times M') = P' \times [F' \cap (P' \times M')] \times M',$$

donc si l'une de ces intersections est un point, l'autre est également ce point; si ce point est simple sur $U \times V \times \mathcal{M}$, il l'est également sur $U \times V \times M'$ et inversement; enfin, s'il a pour multiplicité 1 dans l'une des intersections, il a aussi pour multiplicité 1 dans l'autre, d'après [F, chap. VII, th. 18, ii].

Or $\mathcal{F}.(P' \times V \times M')$ est définie pour presque tout $P' \times M' \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire sauf si $P' \times M' \in \mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_0$ étant un sous-ensemble algébrique de $\mathcal{A}$. De plus, F étant partout définie sur A, on a d'après ce qui précède $\mathcal{A}_0 \cap (U \times M) = 0$, donc la projection $\mathcal{M}_0$ de $\mathcal{A}_0$ sur $\mathcal{M}$ est un ensemble algébrique distinct de $\mathcal{M}$. Il suffira de prendre $M' \notin \mathcal{M}_0$ pour que F' soit partout définie sur A'.

7. Caractérisation de la jacobienne d'une courbe. — Weil énonce dans [VA] des conditions permettant de caractériser la jacobienne J d'une courbe C [n° 36 (th. 18) et n° 37]. Toutefois, il n'est pas nécessaire de supposer que la dimension de J est égale au genre de C; ce fait résulte des autres hypothèses. En d'autres termes :

Lemme 15. — *Soient* C *une courbe complète sans point multiple et* J *une variété abélienne de dimension* g, *et supposons qu'il existe une fonction* φ *définie sur* C, *à valeurs dans* J, *et possédant la propriété suivante : k étant un corps de définition pour* C, J *et* φ, *si* $M_1, \ldots, M_g$ *sont g points génériques indépendants de* C *sur* k, *le point* $z = \sum_i \varphi(M_i)$ *est générique de* J *sur* k *et satisfait à la relation* $k(z) = k(M_1, \ldots M_g)_s$ (¹).

Alors C *est de genre* g, J *est la jacobienne de* C *et* φ *la fonction canonique correspondante.*

Soient $\bar{g}$ le genre de C, $\bar{J}$ sa jacobienne, $\bar{\varphi}$ la fonction canonique correspon-

(¹) Rappelons que la notation $K(M_1, \ldots, M_r)_s$ représente l'ensemble des éléments de $K(M_1, \ldots, M_r)$ invariants par tout automorphisme de ce corps conservant les éléments de K.

dante. D'après [VA, § VI, th. 21], il existe un homomorphisme λ de $\bar{J}$ sur J tel que $\varphi = \lambda\bar{\varphi} + a$, où a est une constante. Cet homomorphisme peut être défini de la façon suivante : si $M_1, \ldots, M_{\bar{g}}$ sont $\bar{g}$ points génériques indépendants de C, et si l'on pose

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{\bar{g}} \bar{\varphi}(M_i) \qquad \text{et} \qquad z = \sum_{i=1}^{\bar{g}} \varphi(M_i),$$

λ est tel que $z = \lambda(\bar{z})$. Dans le cas particulier considéré, on a de plus $a = 0$.

Nous allons montrer que λ est un homomorphisme *sur* J. En effet, soient $M'_1, \ldots, M_1^{(g-1)}$ des spécialisations génériques indépendantes de M_1, sur $k_1 = k(M_2, \ldots, M_{\bar{g}})$, et soient $z', \ldots, z^{(g-1)}$ les points qu'on obtient, au lieu de z, lorsqu'on remplace le point M_1 par $M'_1, \ldots, M_1^{(g-1)}$ respectivement. Le point $y = z + z' + \ldots + z^{(g-1)}$ appartient à l'image I de $\bar{J}$ sur J par λ. D'autre part, on a $y = y_1 + y_0$ avec

$$y_1 = \sum_{j=0}^{g-1} \varphi(M_1^{(j)}), \qquad y_0 = (g\sum_{i=2}^{g} \varphi(M_i).$$

Comme y_0 est rationnel sur k_1 et y_1 générique de J sur k_1, y est aussi générique sur J sur k_1. Donc $I = J$ et λ est bien un homomorphisme sur J.

Inversement, si $M_1, \ldots, M_g$ sont g points génériques indépendants de C sur k, et si l'on pose

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{g} \bar{\varphi}(M_i), \qquad z = \sum_{i=1}^{g} \varphi(M_i)$$

l'application $\bar{\lambda}$ de J dans $\bar{J}$ telle que $\bar{z} = \bar{\lambda}(z)$ est un homomorphisme de J dans $\bar{J}$ et le raisonnement symétrique du précédent (qui s'en déduit en échangeant les rôles de J, φ, g et $\bar{J}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{g}$ respectivement). montre que c'est un homomorphisme sur $\bar{J}$. Les variétés J et $\bar{J}$ ont même dimension et l'on a bien $g = \bar{g}$. Il suffit ensuite d'appliquer [VA, § V, th. 18].

8. Homomorphisme du groupe $\mathcal{G}_a(U)/\mathcal{G}_l(U)$ sur le groupe des points d'une variété abélienne. — Soit U une variété et posons $\mathcal{G}_a = \mathcal{G}_a(U)$, $\mathcal{G}_l = \mathcal{G}_l(U)$ et $g_a = \mathcal{G}_a/\mathcal{G}_l$. Nous dirons qu'*un sous-ensemble* $\mathcal{G}'_a$ *de* $\mathcal{G}_a$ *est paramétré par une variété* V *sur un corps* k de définition pour U et V si l'on peut trouver un point générique M de V sur k et un U-diviseur A rationnel sur $k(M)$ tel que $\mathcal{G}'_a$ soit composé de toutes les spécialisations de A sur k. Nous dirons qu'*un sous-ensemble* g'_a *de* g_a *est paramétré par* V *sur* k s'il existe un sous-ensemble $\mathcal{G}'_a$ de $\mathcal{G}_a$ paramétré par V sur k tel que g'_a soit l'ensemble de toutes les classes de g_a ayant un représentant dans $\mathcal{G}'_a$.

Lemme 16. — *Soit* U *une variété; soient* C_i $(i = 1, \ldots, m)$ *des courbes sur* U *sans point multiple, ne contenant aucun point multiple de* U *et, pour tout* i, *soient* J_i *la jacobienne de* C_i *et* φ_i *la fonction canonique correspondante. Soit* k

un corps de définition pour U *et, pour tout* i, *pour* C_i, J_i *et* φ_i. *A tout* U*-diviseur* A, *associons les points* $Z_i = S[\varphi_i(A.C_i)]$ (1) *lorsque les symboles* A.C *sont tous définis. Soit le point* $Z = Z_1 \times \ldots \times Z_m$ *sur la variété abélienne* $J = J_1 \times \ldots \times J_m$.

Le point Z *obtenu ne dépend pas de la classe de* A (mod $\mathcal{G}_l(U)$ *et, pour* $A \in \mathcal{G}_a(U)$ *l'application* $(A \to Z)$ *définit un homomorphisme de* $\mathcal{G}_a(U)/\mathcal{G}_l(U)$ *sur le groupe* $[\Omega]$ *des points d'une sous-variété abélienne* Ω *de* J.

De plus, on peut trouver un sous groupe de g_a *paramétré par une variété ablienne* II *et dont l'image sur* J *par cet homomorphisme soit* $[\Omega]$.

Montrons d'abord que dans toute classe de $\mathcal{G}(U)/\mathcal{G}_l(U)$ on peut trouver un représentant A′ tel que le cycle $A'.C_i$ soit défini sur U pour tout i. En effet, soit A un représentant de la classe considérée, et soit $\tilde{A}$ un cylindre générique passant par A, de dimension complémentaire à celle de U.

Posons $\tilde{A}.U = A + \overline{A}$ et montrons que l'intersection $\overline{A}.C_i$ est définie sur U pour tout i. Distinguons deux cas : si $C_i \not\subset |A|$, on a aussi $C_i \not\subset |\tilde{A}|$, donc $C_i \not\subset |\overline{A}|$; si $C_i \subset |A|$, et si P_i est un point générique de C_i, P_i n'est pas contenu dans $\overline{A}$ d'après le lemme 3, donc on a encore $C_i \not\subset |\tilde{A}|$.

L'intersection $\overline{A}.C_i$ est donc définie sur U (et, d'après les hypothèses, tous ses composants sont simples sur U).

Il suffit alors de prendre $A' = B - \overline{A}$ avec, par exemple, $B = dH$, en désignant par d le degré de $\tilde{A}$ (c'est-à-dire celui de A) et par H un hyperplan générique de S.

Si de plus A est défini sur un corps $k' \supset k$, on peut supposer qu'il en est de même de A′. En effet, la direction de $\tilde{A}$, supposée générique peut être remplacée par une direction Δ rationnelle sur k : il suffit de la choisir telle que, pour tout i. A_i soit composante propre de $\tilde{A}_i \cap U$, où A_i désigne le cylindre de base $\tilde{A}_i$ et de direction Δ. Ceci nécessite peut-être, lorsque k est un corps fini, le remplacement de k par une extension algébrique finie convenable.

Le fait que toute classe de $\mathcal{G}/\mathcal{G}_l$ ait une image bien déterminée résulte des propriétés de l'équivalence linéaire. Soit I l'image de $\mathcal{G}_a/\mathcal{G}_l$. Cette image I est un sous-groupe de J, et l'application considérée est bien un homomorphisme.

Démontrons la propriété suivante :

(A) *Désignons par* Z *un point de* J *et par* Z_0 *le point origine sur* J. *Alors on peut trouver un sous-groupe* g'_a *de* g_a *paramétré par une variété abélienne et dont l'image sur* J *soit une variété abélienne contenant* Z *et* Z_0.

Soit en effet A un représentant d'une des classes de g_a ayant Z pour image. Il

---

(1) Si C désigne une courbe, J sa jacobienne, φ la fonctiocanonique et $a = \sum_j \lambda_j a_j$ un C-diviseur, la notation $S[\varphi(a)]$ représente le point $Z = \sum_j \lambda_j \varphi_1(a_j)$ de J, cette dernière somme étant entendue au sens de la loi de composition sur J.

existe (*voir* § 5) une courbe V (qu'on peut supposer sans point multiple) et un diviseur X sur $U \times V$ tels qu'on ait

$$A = \mathrm{pr}_U[X.(U \times (M_1 - M_2))]$$

Soient J_V la jacobienne de V, g_V son genre, φ_V la fonction canonique correspondante, k_V un corps de définition pour V, J_V et φ_V contenant k. A tout point générique Z_V de J_V sur k_V on peut faire correspondre un V-diviseur positif a_V de degré g_V tel que $Z_V = S[\varphi_V(a_V)]$. Désignons par $a_V \to a_V^{(0)}$ une spécialisation sur k_V telle que $M_2 \in |a_V^{(0)}|$. Posons

$$a_V - a_V^{(0)} = \bar{a}_V \quad \text{et} \quad \bar{A} = \mathrm{pr}_U[X.(U \times \bar{a}_V)].$$

Alors A et le diviseur nul sont des spécialisations de $\bar{A}$ sur k_V, et l'ensemble de toutes les spécialisations de $\bar{A}$ sur k_V définit un sous-groupe g'_a de g_a paramétré par J_V (car à toute spécialisation $\bar{A} \to A'$ sur k_V on peut faire correspondre une spécialisation $\bar{a}_V \to a'_V$ compatible avec elle sur k_V; d'après le lemme 10 du chapitre I, on a bien $A' \in \mathcal{G}_a$). L'image ζ de g'_a sur J est la variété $\zeta = \mathcal{L}_{k_A}(\bar{Z})$, en désignant par $\bar{Z}$ l'image de $\bar{A}$. Or d'après [VA, § III, th. 9 et VA, § IV, th. 11] la correspondance entre J_V et J est un homomorphisme de J_V dans J dont l'image ζ est une variété abélienne, d'où la propriété (A) annoncée.

Soit Ω l'une des sous-variétés abéliennes de J telles que $[\Omega] \subset I$ dont la dimension d est maximum. Montrons que $[\Omega] = I$. Si en effet Y était un point de I n'appartenant pas à Ω on pourrait d'après (A) faire passer par Y et Z_0 une variété η distincte de Ω et telle que $[\eta] \subset I$. La variété abélienne Ω' obtenue en composant Ω et η au sens de [VA, § IV, th. 11, coroll. 1] serait de dimension supérieure à d et d'autre part telle que $[\Omega'] \subset I$, ce qui est impossible.

On a donc bien $[\Omega] = I$. Le fait que I est l'image d'un sous-groupe de g_a paramétré par une variété abélienne II s'obtient en appliquant (A), le point Z étant pris générique de J sur k.

9. Une propriété des translations sur une variété abélienne. — Une translation sur une variété abélienne A est entendue au sens de la loi de composition sur cette variété. Si une translation sur A est définie par un point Z de A et si X est un cycle (ou un ensemble algébrique) sur A, l'élément transformé de X par la translation considérée est noté X_Z (*Cf.* [VA § II, N° 11]).

LEMME 17. — *Soit* A *une variété abélienne, et soient* E *et* E' *deux ensembles algébriques sur* A *distincts de* A. *Supposons que toutes les composantes de* E *soient de dimension* $\leq q$. *Alors on peut trouver un point* Z *de* A *tel que* $E' \cap E_Z$ *ait toutes ses composantes de dimension* $\leq q - 1$.

En effet, supposons d'abord E' de dimension zéro. Soit $E' = \sum_j Y_j$, où les Y_j sont des points de A, et montrons que Z peut être choisi pour que $E' \cap E_Z = 0$. Il suffit en effet que le point $-Z$ n'appartienne pas à l'ensemble algébrique $\sum_j E_{-Y_j}$.

Le cas où E' est de dimension quelconque q se ramène immédiatement au cas précédent : il suffit de remplacer E' par un nombre fini de points tels que toute composante de E' contienne l'un d'eux au moins.

Corollaire. — *Soit* A *une variété abélienne*, $E = E_0$ *un ensemble algébrique sur* A *distinct de* A. *Alors on peut trouver des translations sur* A *définies par les points* Z_i *de* A $(i = 0, 1, \ldots, n)$ *telles que les ensembles algébriques* $E_i = E_{Z_i}$ *soient sans point commun* (*on suppose que* Z_0 *est l'origine sur* A).

En effet appliquons le lemme 17 en prenant $E' = E$. Supposons que toute composante de E soit de dimension $\leqq q$, et soit Z_1 un point de A tel que $E'_1 = E \cap E_{Z_1}$ ait toutes ses composantes de dimension $\leqq q - 1$. Prenons ensuite $E' = E'_1$ et soit $Z_2 \in A$ tel que $E_2 = E_1 \cap E'_1$ ait toutes ses composantes de dimension $\leqq p - 2$, et ainsi de suite. On aura bien

$$E_0 \cap E_1 \cap \ldots \cap E_q = 0.$$

Remarque. — Si k est un corps de définition de A, on peut supposer dans les énoncés précédents que les points Z, Z_i sont algébriques sur k.

CHAPITRE II.

LES THÉORIES D'ÉQUIVALENCE ET LEUR RATTACHEMENT A L'ARITHMÉTIQUE SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES.

1. Le domaine universel est supposé de caractéristique quelconque p. Soient k un corps et $\mathfrak{M}$ une variété de dimension n dans un espace projectif U, ayant k pour corps de définition. Dans la suite, on pourra sans inconvénient remplacer k par un surcorps arbitraire k^*, à condition toutefois de supposer que ce surcorps k^* est une extension algébrique finie de k lorsque k est lui-même une extension algébrique finie du corps premier. D'autre part, la variété $\mathfrak{M}$ étant considérée à une transformation birationnelle (définie sur k) près, nous la supposerons normale (*cf.* [F, App. II]). Soit M un point générique de $\mathfrak{M}$ sur k, et posons $K = k(M)$. Soit $C = C(M)$ une courbe ayant K pour corps de définition, que nous supposons sans point multiple, de genre g et plongée dans un espace projectif R.

Soit $\mathcal{R} = R \times \mathfrak{M}$, et considérons la sous-variété $\mathcal{C} = \mathcal{L}_k[C(M) \times M]$ de $\mathcal{R}$, lieu de la courbe $C(M) \times M$ sur k (*voir* chap. I, § 5). La variété $\mathcal{C}$ est de dimension $n + 1$ et plongée dans le produit d'espaces projectifs $\overline{R} = R \times U$. On a, d'après la définition du symbole $\mathcal{L}_k$:

$$C(M) \times M = \mathcal{C} . (R \times M).$$

Pour tout point M' de $\mathfrak{M}$ simple sur $\mathfrak{M}$, de même

$$C(M') \times M' = \mathcal{C} . (R \times M'),$$

lorsque le symbole $\mathcal{C} . (R \times M')$ est défini sur $\mathcal{R}$, c'est-à-dire lorsque toutes les composantes de $\mathcal{C} \cap (R \times M')$ sont de dimension 1.

$C(M')$ est un cycle de dimension 1 sur $\mathcal{C}$ et c'est l'unique spécialisation de $C(M)$ compatible avec $M \to M'$ sur k.

La courbe C peut être remplacée par toute courbe qui s'en déduit par une transformation birationnelle et birégulière définie sur K. De là il résulte que la variété $\mathcal{C}$ peut être supposée normale. Soit en effet, $\mathcal{C}$ un modèle normal de $\mathcal{C}$ construit comme dans [F, App. II] le corps k étant remplacé, s'il y a lieu par une extension qui soit un corps parfait. Soit P un point générique de $\mathcal{C}$ sur K, et soit $\overline{P}$ l'image sur $\overline{\mathcal{C}}$ du point $P \times M$ de $\mathcal{C}$. Tout point de $C \times M$ est simple sur $\mathcal{C}$ d'après le lemme 1 du chapitre I ; on en déduit que $\mathcal{C}$ est birationnellement et birégulièrement équivalente à $\overline{C} = \mathcal{L}_K(\overline{P})$. Posons d'autre part

$$\overline{\mathcal{C}}'= \mathcal{L}_k(\overline{P} \times M).$$

La transformation birationnelle entre $\overline{\mathcal{C}}$ et $\overline{\mathcal{C}}'$ qui associe les points $\overline{P}$ et $\overline{P} \times M$ étant birégulière, $\overline{\mathcal{C}}'$ est un modèle normal de $\mathcal{C}$ et il suffit de remplacer C et $\mathcal{C}$ par $\overline{C}$ et $\overline{\mathcal{C}}'$ respectivement.

2. Comme au paragraphe 5 du chapitre I, associons à toute variété U *le groupe* $\mathcal{G}(U)$ *de tous les* U-*diviseurs sans composante multiple sur* U ainsi que les groupes $\mathcal{G}_a(U)$ *des éléments de* $\mathcal{G}(U)$ *algébriquement équivalents à zéro sur* U et $\mathcal{G}_l(U)$ *des éléments de* $\mathcal{G}(U)$ *linéairement équivalents à zéro sur* (U).

Posons pour la courbe C :

$$G = \mathcal{G}(C), \qquad G_a = \mathcal{G}_a(C), \qquad G_l = \mathcal{G}_l(C).$$

et pour la variété $\mathcal{C} = \mathcal{L}_k(C \times M)$:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{C}), \qquad \mathcal{G}_a = \mathcal{G}_a(\mathcal{C}), \qquad \mathcal{G}_l = \mathcal{G}_l(\mathcal{C}).$$

Remarquons que puisque C est sans point multiple et $\mathcal{C}$ sans sous-variété multiple de dimension n, le groupe G (resp. $\mathcal{G}$) est le groupe de tous les diviseurs de C (resp. $\mathcal{C}$).

Nous allons définir plusieurs autres sous-groupes de $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{C})$. Nous emploierons les signes suivants pour les relations entre groupes additifs, $\approx$ pour l'isomorphisme, $+$ pour la somme. Les isomorphismes $G/G' \approx (G/G'')/(G'/G'')$ $(G \supset G' \supset G'')$ et $(G + G')/G \approx G'/(G \cap G')$ seront dits *premier et second théorème d'isomorphie.* Si G est un groupe, nous nommerons *groupe-quotient* de G tout groupe de la forme G/G' $(G \supset G')$. Par groupe de *type fini*, nous entendrons un groupe ayant un nombre fini de générateurs sur l'anneau des entiers.

Soient les sous-groupes suivants de $\mathcal{G}$:

$\mathcal{H}_0$, *groupe des* $\mathcal{C}$-*diviseurs* $\mathfrak{A}$ *tels que* $\mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{A}) = 0$;

$\mathcal{H}$, *groupe des* $\mathcal{C}$-*diviseurs* $\mathfrak{A}$ *tels que toutes les composantes de* $\mathrm{proj}_{\mathfrak{M}} |\mathfrak{A}|$ *soient de dimension* $\leq n - 1$;

$\mathcal{H}_a = \mathcal{H} + \mathcal{G}_a$;

$\mathcal{H}_l = \mathcal{H} + \mathcal{G}_l$.

Désignons de plus par F *la fonction sur* $\mathcal{C}$, *à valeurs dans* $\mathfrak{M}$, *définie par la projection sur* $\mathfrak{M}$, *c'est-à-dire telle que* $F(P \times M) = M$ *pour tout point* $P \in C(M)$.

Les énoncés des propositions et théorèmes contenus dans ce chapitre pourront être lus en se reférant uniquement aux notations et définitions qui précèdent. Afin de simplifier la rédaction, celles-ci ne seront pas explicitées à nouveau dans chacun de ces énoncés.

Les groupes $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}$ peuvent encore être caractérisés de la manière suivante : soit $\mathfrak{A}$ un $\mathcal{C}$-diviseur; soit M' un point générique de $\mathfrak{M}$ sur un corps de définition de $\mathfrak{A}$, et posons

$$A' \times M' = \mathfrak{A}.[C(M') \times M'],$$

en remarquant qu'on a aussi, d'après [F, chap. VII, th. 18, ii]

$$A' \times M' = \mathfrak{A}.(R \times M');$$

dans ces conditions :

a. pour que $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_0$, il faut et il suffit que A' soit de degré zéro. C'est une conséquence immédiate de la définition du symbole $\mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}$;

b. pour que $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}$, il faut et il suffit que $A' = 0$. Cette condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, remarquons, en désignant par $\mathfrak{A}_i (i = 1, \ldots, q)$ les composantes de $\mathfrak{A}$, que les cycles de degré zéro $\mathfrak{A}_i.(R \times M')$ sont deux à deux sans composant commun. Cela entraîne

$$\mathfrak{A}_i.(R \times M') = 0$$

pout tout i, c'est-à-dire $|\mathfrak{A}| \cap (R \times M') = 0$. Donc $\mathrm{proj}_{\mathfrak{M}} |\mathfrak{A}|$ ne contient pas M', d'où le résultat annoncé.

Proposition 1. — *On a* $\mathcal{H}_a \subset \mathcal{H}_0$.

En effet, comme on a $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_0$, il suffit de montrer que $\mathcal{G}_a \subset \mathcal{H}_0$. Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{G}_a$ et si l'on pose encore, pour M' générique de $\mathfrak{M}$ sur un corps de définition de $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}.(R \times M') = \mathfrak{A}.[C(M') \times M')] = A' \times M',$$

A' est algébriquement équivalent à zéro sur C(M'), d'après la propriété (C') de l'équivalence algébrique. Donc A' est de degré zéro, et l'on a bien $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_0$.

3. On a, entre les groupes qui viennent d'être définis, les inclusions suivantes :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathcal{G}_a & \supset & \mathcal{G}_l & & \\ & & & & \cap & & \cap & & \\ \mathcal{G} & \supset & \mathcal{H}_0 & \supset & \mathcal{H}_a & \supset & \mathcal{H}_l & \supset & \mathcal{H}. \end{array}$$

Nous allons étudier les différents groupes et groupes-quotients qui apparaissent dans ce tableau. Remarquons que $\mathcal{G}/\mathcal{H}_0$ est isomorphe au groupe additif des entiers et démontrons la proposition suivante :

Proposition 2. — *Soit* $\mathcal{H}'$ *le groupe de tous les* $\mathcal{C}$ *diviseurs de la forme* $\mathfrak{A} = \overset{-1}{F}(a)$, *où a est un* $\mathfrak{M}$ *diviseur. Alors on a* $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$, *et le groupe* $\mathcal{H}/\mathcal{H}'$ *est de type fini.*

D'autre pvrt, si l'on pose $\mathcal{H}' \cap \mathcal{G}_a = \mathcal{H}'_a$, $\mathcal{H}' \cap \mathcal{G}'_l = \mathcal{H}'_l$, *les groupes* $\mathcal{H}'/\mathcal{H}'_a$ *et* $\mathcal{H}'/\mathcal{H}'_l$ *sont isomorphes à des groupes-quotients de* $\mathcal{G}(\mathcal{M})/\mathcal{G}_a(\mathcal{M})$ *et* $\mathcal{G}(\mathcal{M})/\mathcal{G}_l(\mathcal{M})$ *respectivement.*

La relation $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ est une conséquence du fait que $\mathrm{proj}_{\mathcal{M}} |\mathcal{A}|$ coïncide avec $|a|$ pour $\mathcal{A} = \overset{-1}{\mathrm{F}}(a)$.

Inversement, soit $\mathcal{A} \in \mathcal{H}$. Soient, pour toute composante $\mathcal{A}_i$ de $\mathcal{A}$, k_i un corps de définition de $\mathcal{A}_i$ et $\mathrm{M}_i \times \mathrm{P}_i$ un point générique de $\mathcal{A}_i$ sur k_i. Soit a_i le lieu de M_i sur k_i et, si $\mathcal{A} = \sum_i \lambda_i \mathcal{A}_i$, posons $a = \sum_i \lambda_i a_i$, cette somme étant étendue à tous les i tels que a_i soit de dimension $n - 1$. L'application $(\mathcal{A} \to a)$ définit un homomorphisme de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}(\mathcal{M})$. Puisqu'à $\overset{-1}{\mathrm{F}}(a)$ correspond a dans l'application considérée, cet homomorphisme est un homomorphisme sur.

Étudions le noyau $\mathcal{K}$ de cet homomorphisme. Soit $\mathcal{A}_i$ une composante d'un élément $\mathcal{A}$ de $\mathcal{K}$, de projection a_i sur $\mathcal{M}$, et soit M_i un point générique de a_i.

Si a_i est de dimension $< n - 1$, l'intersection $\mathcal{C} \cap (\mathrm{R} \times \mathrm{M}_i)$ est de dimension > 1, donc d'après [M, chap. IV, th. 2], M_i appartient à un sous-ensemble algébrique de $\mathcal{M}$ qui ne dépend pas de $\mathcal{A}$.

Si a_i est de dimension $n - 1$, il existe des composantes de $\mathcal{A}$, distinctes de $\mathcal{A}_i$, ayant également pour projection a_i sur $\mathcal{M}$. L'intersection $\mathcal{C} \cap (\mathrm{R} \times \mathrm{M}_i)$ est décomposée et, d'après le lemme 13(b) du chapitre I, M_i appartient encore à un sous-ensemble algébrique de $\mathcal{M}$ qui ne dépend pas de $\mathcal{A}$.

On en déduit que pour $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, $\mathrm{proj}_{\mathcal{M}} |\mathcal{A}|$ appartient à un sous-ensemble algébrique de $\mathcal{M}$ qui ne dépend pas de $\mathcal{A}$. Donc $|\mathcal{A}|$ appartient à un sous-ensemble algébrique fixe de $\mathcal{C}$. Il en résulte que $\mathcal{K}$ *est un sous-groupe de type fini de* $\mathcal{H}$.

Or on a

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}' + \mathcal{K}.$$

Donc d'après le second théorème d'isomorphie

$$\mathcal{H}/\mathcal{H}' \approx \mathcal{K}/\mathcal{K} \cap \mathcal{H}'$$

et le groupe $\mathcal{H}/\mathcal{H}'$ est également de type fini.

Enfin, pour démontrer la dernière partie de la proposition, remarquons que l'isomorphisme de $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ sur $\mathcal{H}'$ défini par l'application $(a \to \overset{-1}{\mathrm{F}}(a))$ possède la propriété suivante : si $a \in \mathcal{G}_a(\mathcal{M})$, on a $\mathcal{A} \in \mathcal{H}'_a$. C'est en effet une conséquence des propriétés de l'équivalence algébrique. De même si $a \in \mathcal{G}_l(\mathcal{M})$, on a $\mathcal{A} \in \mathcal{H}'_l$. Si l'on désigne par $\mathcal{G}'_a(\mathcal{M})$ et $\mathcal{G}'_l(\mathcal{M})$ les images inverses respectives de $\mathcal{H}'_a$ et $\mathcal{H}'_l$ dans l'isomorphisme précédent, on a

$$\mathcal{H}'/\mathcal{H}_a \approx \mathcal{G}(\mathcal{M})/\mathcal{G}'_a(\mathcal{M}) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}'/\mathcal{H}'_l \approx \mathcal{G}(\mathcal{M})/\mathcal{G}'_l(\mathcal{M}).$$

La proposition est donc démontrée.

De la relation $\mathcal{H} = \mathcal{H}' + \mathcal{K}$, on peut encore tirer d'autres conséquences. On a

$$\mathcal{H}_a = \mathcal{G}_a + \mathcal{H} = \mathcal{G}_a + \mathcal{H}' + \mathcal{K}.$$

Si l'on considère la suite

$$\mathcal{G} \supset \mathcal{H}_a \supset \mathcal{G}_a + \mathcal{H}' \supset \mathcal{G}_a$$

les deux groupes-quotients successifs $\mathcal{H}_a/(\mathcal{G}_a + \mathcal{H}')$ et $(\mathcal{G}_a + \mathcal{H}')/\mathcal{G}_a$ sont respectivement isomorphes, d'après le second théorème d'isomorphie, à $\mathcal{K}/\mathcal{K}_a$ et $\mathcal{H}'/\mathcal{H}'_a$, en posant

$$\mathcal{K}_a = \mathcal{K} \cap \mathcal{G}_a + \mathcal{H}'.$$

De même, si l'on considère la suite

$$\mathcal{H}_l \supset \mathcal{G}_l + \mathcal{H}' \supset \mathcal{G}_l,$$

les deux groupes-quotients successifs $\mathcal{H}_l/(\mathcal{G}_l + \mathcal{H})$ et $(\mathcal{G}_l + \mathcal{H}')/\mathcal{G}_l$ sont respectivement isomorphes à $\mathcal{K}/\mathcal{K}_l$ et $\mathcal{H}'/\mathcal{H}'_l$, en posant

$$\mathcal{K}_l = \mathcal{K} \cap \mathcal{G}_l + \mathcal{H}' \quad (^1).$$

3. Montrons que le groupe $\mathcal{H}_l$ peut être caractérisé par la proposition suivante :

Proposition 3. — *Soient $\mathcal{A}$ un élément de $\mathcal{G}$ et* M′ *un point générique de $\mathcal{M}$ sur un corps de définition k' de $\mathcal{A}$, et posons* $A' \times M' = \mathcal{A}.(R \times M')$. *Alors, pour qu'on ait $\mathcal{A} \in \mathcal{H}_l$, il faut et il suffit que* $A' \sim o$ *sur* $C' = C(M')$.

Soit d'abord $\mathcal{A} \in \mathcal{H}_l$, c'est-à-dire $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} + \mathcal{B}$ avec $\overline{\mathcal{A}} \in \mathcal{G}_l$ et $\mathcal{B} \in \mathcal{H}$. On a

$$\mathcal{B}.(R \times M) = o,$$

donc

$$A' \times M' = \mathcal{A}.(C' \times M') = \overline{\mathcal{A}}.(R \times M'),$$

et la relation $A' \sim o$ sur C' est une conséquence des propriétés de l'équivalence linéaire.

Supposons inversement $A' \sim o$ sur C'. D'après [F, chap. VIII, th. 10, coroll. 1], on peut trouver une fonction θ sur C' définie sur $K' = k'(M')$ et telle que $(\theta) = A'$. Soit P' un point générique de C' sur K' et soit ω la fonction sur $\mathcal{C}$, définie sur k', obtenue par l'extension de θ, c'est-à-dire telle que $\omega(P' \times M') = \theta(P')$. On a, d'après [F, chap. VIII, th. 1, coroll. 3] :

$$(\omega).(C' \times M') = A' \times M',$$

d'où

$$[(\omega) - \mathcal{A}].(C' \times M') = o \qquad \text{et} \qquad (\omega) - \mathcal{A} \in \mathcal{H}.$$

Comme $(\omega) \in \mathcal{G}_l$, cela entraîne bien $\mathcal{A} \in \mathcal{H}_l$.

4. Pour étudier le groupe $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_l$, il est commode d'introduire la jacobienne $J = J(M)$ de $C = C(M)$. On peut supposer, d'après W.-L. Chow (^{2}) que J est

---

(^{1}) Remarquons qu'on peut intercaler entre $\mathcal{G}_a$ et $\mathcal{G}_l$ deux groupes $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$: $\mathcal{G}_a \supset \mathcal{G}_1 \supset \mathcal{G}_2 \supset \mathcal{G}_l$ de telle manière que les groupes-quotients successifs $\mathcal{G}_a/\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_1/\mathcal{G}_2$ et $\mathcal{G}_2/\mathcal{G}_l$ soient respectivement isomorphes à $\mathcal{H}_a/\mathcal{H}_l$, $\mathcal{K}_a/\mathcal{K}_l$ $\mathcal{H}'_a/\mathcal{H}'_l$. Il suffit de prendre

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_a \cap \mathcal{H}_l \qquad \text{et} \qquad \mathcal{G}_2 = \mathcal{H}'_a + \mathcal{G}_l.$$

(^{2}) Mémoire à paraître dans les *Ann. of Maths.*

définie sur K et plongée dans un espace projectif S. Si φ désigne la fonction canonique correspondante, on peut supposer φ définie sur une extension algébrique finie K^* de $K = k(M)$. Supposons pour l'instant $K^* = K$.

Introduisons le produit $\mathfrak{S} = S \times \mathfrak{M}$ et la sous-variété $\mathfrak{J} = \mathcal{L}_k(J \times M)$ de $\mathfrak{S}$. Cette variété est de dimension $n+g$ et plongée dans le produit d'espaces projectifs $\overline{\mathfrak{S}} = S \times U$, et l'on a

$$J \times M = \mathfrak{J}.(S \times M).$$

Posons, pour tout point M' de $\mathfrak{M}$,

$$J' \times M' = J(M') \times M' = \mathfrak{J}.(S \times M'),$$

lorsque le symbole $\mathfrak{J}.(S \times M')$ est défini sur $\mathfrak{S}$. (*Cf.* § 1).

On peut normaliser la variété $\mathfrak{J}$ et la supposer sans sous-variété multiple de dimension $n+g-1$, par le procédé déjà utilisé au paragraphe 1 pour la normalisation de $\mathfrak{C}$.

D'autre part, d'après le paragraphe 6 du chapitre I, on a, pour presque tout point $M' \in \mathfrak{M}$, c'est-à-dire si M' n'appartient pas à un sous-ensemble algébrique $\mathfrak{M}_0$ de $\mathfrak{M}$, les propriétés suivantes :

a. Les cycles $C' = C(M')$ et $J' = J(M')$ sont définis et sont des vaiétés sans singularités [chap. I, lemme 13].

b. Il existe une fonction φ', partout définie sur C', à valeurs dans J', qui est l'unique spécialisation de φ compatible avec $M \to M'$ sur k [chap. I, lemme 14].

c. Soit ψ la fonction définie sur $J \times J$, à valeurs dans J, qui définit la loi de composition sur J. Cette fonction a pour spécialisation compatible avec $M \to M'$ sur k une fonction ψ' partout définie sur $J' \times J$, à valeurs dans J'. Si l'on désigne par Z_0 le point origine sur J, sa spécialisation Z'_0 est définie et comme on a $\psi(Z_0, Z) = Z$ pour tout point Z de J, on a aussi $\psi(Z'_0, Z') = Z'$ pour tout point Z de J'. Si α désigne la fonction définie sur J, à valeurs dans J, qui, au point Z, associe le point $\overline{Z} = -Z$ (tel que $\psi(\overline{Z}, Z) = Z_0$, la spécialisation α' de α est une fonction partout définie sur J' et telle qu'on ait $\psi'(Z', \overline{Z}') = Z'_0$ toutes les fois que $Z' = \alpha'(Z')$.

Enfin, puisque les relations

$$\varphi(Z_1, Z_2) = \varphi(Z_2)\, Z_1) \qquad \text{et} \qquad \varphi[Z_1, \varphi(Z_2, Z_3)] = \varphi[\varphi(Z_1, Z_2), Z_3]$$

sont vérifiées quels que soient les points Z_1, Z_2, Z_3 de J, les relations analogues sont vérifiées par trois points quelconques Z'_1, Z'_2, Z'_3 de J', et l'on en déduit que la loi de composition définie par ψ' est associative et commutative. Donc J' est une variété abélienne [F, § III, n° 16]. De plus, Z'_0 est le point origine sur J'.

d. Soit λ la fonction définie sur le produit g fois par elle-même C^g de la courbe C, à valeurs dans J qui, au point $P_1 \times .., \times P_g$, fait correspoudre $Z = \sum_{i=1}^{g} \varphi(P_i)$. Cette fonction est partout définie sur C^g, invariante par toute permutation des P_i, de telle sorte que $\lambda(C^g) = g\,!\,J$. Cette fonction a pour spécialisation compatible avec $M \to M'$ sur k une fonction partout définie sur C'^g, à valeurs dans J', telle que

$$\theta(P'_1 \times \ldots \times P'_g) = Z' = \sum_{i=1} \varphi'(P'_i)$$

(donc invariante par toute permutation des P'_i) et, d'après les propriétés des spécialisations des cycles, telle que $\theta(C'^g) = g\,!\,J'$. Si les points $P'_1, \ldots, P'_g$ sont génériques indépendants de C' sur K', on a donc

$$K'(P'_1, \ldots, P'_g)_s = K'(Z'),$$

D'après le lemme 15 du Chapitre I et d'après [VA, § V, th. 18], la courbe C' est de genre g et J' est la jacobienne de C', avec φ' pour fonction canonique.

5. Soient à nouveau $\mathfrak{A}$ un $\mathcal{C}$-diviseur, k' un corps de définition de $\mathfrak{A}$, et M' un point générique de $\mathfrak{M}$ sur k'. Le cycle A' sur C' défini par $A' \times M' = \mathfrak{A}.(R \times M')$ est rationnel sur $K' = k'(M')$. Soit $J' = J(M')$ et soit φ' la spécialisation de φ compatible avec $M \to M'$ sur k. Considérons le point $Z' = S[\varphi'(A')]$, en posant

$$S[\varphi'(A')] = \sum_i \lambda_i \varphi'(A'_i), \qquad A' = \sum \lambda_i A'_i,$$

les A'_i désignant les composants de A' [*cf.* la notation de VA, § III, n° 16]. Ce point est rationnel sur K' et, comme K' est une extension régulière de k', la sous-variété

$$\mathfrak{Z} = \mathcal{L}_{k'}(Z' \times M')$$

est définie. Cette variété a pour dimension n et sa projection sur $\mathfrak{M}$ est d'indice 1. Aux éléments d'une même classe de $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_l$ correspond une même variété $\mathfrak{Z}$, d'après la proposition 3.

Inversement, soit $\mathfrak{Z}$ une sous-variété de dimension n de $\mathfrak{J}$ dont la projection sur $\mathfrak{M}$ est d'indice 1. En d'autres termes, supposons, pour M' générique sur $\mathfrak{M}$ sur un corps de définition k' de $\mathfrak{Z}$, que l'intersection $\mathfrak{Z}.[J(M') \times M']$ soit un point Z'. Alors on peut trouver sur $C' = C(M')$ un diviseur $\bar{A}'$ de degré zéro, rationnel par rapport à $K' = k'(M')$ et tel que $Z' = S[\varphi'(A')]$: on peut, par exemple, en appliquant [VA, § V, prop. 16], prendre pour A' la différence de deux diviseurs positifs de degré g de C'. Si l'on pose $\mathfrak{A} = \mathcal{L}_{k'}(A' \times M')$, on a $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_0$ et $\mathfrak{Z}$ est la variété associée à $\mathfrak{A}$ par l'application précédente.

Il s'ensuit que la correspondance entre les éléments de $h = \mathcal{H}_0/\mathcal{H}_l$ et les variétés $\mathfrak{Z}$ est biunivoque. Il sera commode, dans la suite, d'employer la même lettre pour désigner un élément de h et la variété $\mathfrak{Z}$ associée.

Si l'on considère la variété $\mathfrak{J}$ comme une *variété fibrée* de base $\mathfrak{M}$ dont les fibres sont les variétés abéliennes J', les variétés $\mathfrak{Z}$ sont les *sections* de cette variété fibrée.

6. Soit à nouveau M un point générique de $\mathfrak{M}$ sur k, et considérons la

courbe $C = C(M)$, sa jacobienne $J = J(M)$ et la fonction canonique φ correspondante.

Nous avons vu au paragraphe 8 du Chapitre I (lemme 16) que l'application $\mathfrak{A} \to Z = S[\varphi(A)]$, avec $A \times M = \mathfrak{A}.(C \times M)$, définit un homomorphisme de $\mathcal{G}_a/\mathcal{G}_l$ sur le groupe $[\Omega]$ attaché à une sous-variété abélienne Ω de $J = J(M)$. D'après la proposition 3, l'image Z de $\mathfrak{A}$ ne dépend en fait que de la classe de $\mathfrak{A}$ $(\bmod \mathcal{H}_l)$ et comme toute classe de $\mathcal{H}_a/\mathcal{H}_l$ admet un représentant dans $\mathcal{G}_a$, cette application définit aussi un homomorphisme de $h_a = \mathcal{H}_a/\mathcal{H}_l$ sur $[\Omega]$. Remarquons que l'image Z d'un élément de h_a peut encore être définie par $Z \times M = \mathfrak{Z}.(J \times M)$, en désignant par $\mathfrak{Z}$ la section de $\mathcal{J}$ correspondante.

Nous allons montrer que l'homomorphisme ainsi défini de h_a sur $[\Omega]$ est un *isomorphisme* ou, ce qui revient au même, qu'il existe une et une seule section $\mathfrak{Z} \in h_a$ de $\mathcal{J}$ passant par $Z \times M$, où Z est un point donné arbitraire de Ω (¹).

Pour cela, considérons un second point M' de $\mathfrak{M}$ tel que M et M' soient génériques indépendants de $\mathfrak{M}$ sur k. A tout élément $\mathfrak{Z}$ de h_a associons ses images Z, Z' et $Z \times Z'$ sur J, J' et $J \times J'$ respectivement. D'après le lemme 16 du Chapitre I, l'image de h_a sur $J \times J'$ est une variété abélienne Λ, et il existe un sous-groupe h'_a de h_a paramétré par une variété abélienne Π ayant également pour image Λ sur $J \times J'$. Ce paramétrage définit un homomorphisme π de Π sur Λ. D'autre part, la projection sur J définit un homomorphisme λ de Λ sur Ω. Soient Λ_0 et Π_0 les noyaux respectifs des homomorphismes λ de Λ sur Ω et $\lambda \circ \pi$ de Π sur Ω.

D'après [VA, § IV, th. 11], le groupe Λ_0 (resp. Π_0) se compose d'un nombre fini de variétés déduites d'une sous-variété abélienne de Λ (resp. Π) par des translations. Si Λ_0 n'est pas réduit à un point, il contient au moins un point d'ordre fini s distinct de l'origine $Z_0 \times Z'_0$. Désignons ce point par $Z_0 \times \overline{Z}'_0$. Ce point est lui-même l'image par π d'un point au moins de Π_0 distinct de l'origine et d'ordre s sur Π. En effet, $\overset{-1}{\pi}(Z_0 \times \overline{Z}'_0)$ est une réunion finie de sous-variétés de Π déduites d'une variété abélienne par des translations d'ordre s sur Π. Il suffit de considérer sur Π l'image de l'origine par l'une de ces translations. La section $\overline{\mathfrak{Z}}$ correspondante de $\mathcal{J}$ est un élément d'ordre s de h_a passant par $Z_0 \times M$ et par $\overline{Z}'_0 \times M'$.

Or l'ensemble des éléments d'ordre s de h_a est fini. En effet, considérons l'ensemble des points Z_k d'ordre s de J. On peut trouver un entier f tel que le J.diviseur $p^f \sum_k Z_k$ soit rationnel sur $k(M)$. Toute section $\mathfrak{Z}^k$ de $\mathcal{J}$ d'ordre fini est contenue dans l'ensemble algébrique $\left| \mathcal{L}_k \left[p^f \left(\sum_k Z_k \right) \right] \right|$. Il ne peut donc exister qu'un nombre fini de telles sections.

(¹) A. Weil a récemment démontré différents critères [*Criteria for linear equivalence*, à paraître dans les *Proc. Nat. Acad. U. S. A.*] dont l'un (E) pourrait également être utilisé dans la démonstration de ce résultat. D'après ce critère, si V est une variété sans sous-variété multiple de dimension $n-1$ dans un espace projectif, et si L désigne une variété linéaire telle que l'intersection V.L soit une courbe C sans point multiple, tout V-diviseur X appartenant à $\mathcal{G}_a(V)$ tel qu'on ait $X.C \sim O$ sur C appartient à $\mathcal{G}_l(V)$.

Puisque M a été supposé générique sur k, la seule section d'ordre s de $\mathcal{J}$ contenant le point $Z_0 \times M$ est la section origine $\mathfrak{Z}_0$. Donc $\overline{\mathfrak{Z}}_0$ coïncide avec $\mathfrak{Z}_0$ et $\overline{Z}'_0$ avec Z'_0, ce qui contredit l'hypothèse faite plus haut. Le noyau Λ_0 de λ est réduit au point $Z_0 \times Z'_0$, et Λ définit une correspondance birationnelle entre Ω et Ω'.

La seule section de $\mathcal{J}$ appartenant à h'_a et passant par $Z_0 \times M$ est $\mathfrak{Z}_0$. Comme on peut supposer (*cf.* la démonstration du lemme 16) que h'_a contient tout élément donné à l'avance de h_a, $\mathfrak{Z}_0$ est bien la seule section de $\mathcal{J}$ appartenant à h_a et passant par $Z_0 \times M$, et $h_a = \mathcal{H}_a/\mathcal{H}_e$ est bien isomorphe à $[\Omega]$ (ce qui entraîne d'ailleurs $\bar{h}_a = h_a$).

Il reste, pour la généralité de ce résultat, à considérer le cas où le corps K^* (de définition de φ) est distinct de K. Soit k^* la fermeture algébrique de k dans k^*; alors K^* est une extension régulière de k^*, et l'on a $K^* = k^*(M^*)$, M^* désignant un point générique par rapport à k^* d'une variété $\mathcal{M}^*$ définie sur ce corps. Soit la variété $\mathcal{C}^* = \mathcal{L}_{k^*}(C \times M^*)$ et soient les groupes $\mathcal{G}^*$, $\mathcal{G}^*_a$, $\mathcal{G}^*_l$, $\mathcal{H}^*_a$, $\mathcal{H}^*_l$ attachés à C^* analogues à ceux définis au paragraphe 2. A tout diviseur $\mathfrak{A}^*$ sur $\mathcal{C}^*$ associons le diviseur A^* sur C défini par $A^* \times M^* = \mathfrak{A}^*.(C \times M^*)$ et le point $Z^* = S[\varphi(A^*)]$ de J. D'après ce qui précède, cette correspondance définit un isomorphisme de $h^*_a = \mathcal{H}^*_a/\mathcal{H}^*_l$ sur le groupe $[\Omega^*]$ d'une sous-variété abélienne Ω^* de J. Si d'autre part, pour tout $\mathcal{C}$-diviseur $\mathfrak{A}$, on pose $A \times M = \mathfrak{A}.(C \times M)$, puis $Z = S.[\varphi(A)]$, l'application $(\mathfrak{A} \to Z)$ définit un homomorphisme de $h_a = \mathcal{H}_a/\mathcal{H}_l$ sur le groupe $[\Omega]$ d'une sous-variété abélienne $\Omega = \Omega(M^*)$ de J. Soit β la fonction sur $\mathcal{C}^*$, à valeurs dans $\mathcal{C}$, définie par $\beta(P \times M^*) = P \times M$, P désignant un point générique de C sur K. Toute classe de $\mathcal{H}_a/\mathcal{H}_l$ admet un représentant $\mathfrak{A}$ au moins dont aucune composante n'appartient à $\mathcal{H}$, donc tel que l'élément $\mathfrak{A}^* = \beta^{-1}(\mathfrak{A})'$ de $\mathcal{G}^*$ soit défini. Il résulte du corollaire du lemme 12 du chapitre I que $\mathfrak{A}^* \in \mathcal{H}^*_a$; d'autre part, les images respectives Z et Z^* de $\mathfrak{A}$ sur Ω et de $\mathfrak{A}^*$ sur Ω^* sont confondues. On a donc $\Omega \subset \Omega^*$. Si, de plus, $Z = Z^* = Z_0$, on a $\mathfrak{A}^* \in \mathcal{H}^*_l$, et par suite $\mathfrak{A} \in \mathcal{H}_l$, d'après la proposition 4. On a bien encore $h_a \approx [\Omega]$. D'où :

Théorème 1. — *Le groupe $\mathcal{H}_a/\mathcal{H}_l$ est isomorphe au groupe des points d'une sous-variété abélienne Ω de* J.

Remarques. — *a.* Supposons-nous placés dans le cas général où $K^* \neq K$ et montrons qu'il existe un surcorps algébrique fini k' de k^* (donc aussi de k) tel que la variété Ω admette $k'(M^*)$ pour corps de définition. En effet, soit encore un sous-groupe de h_a paramétré par une variété Π (l'hypothèse que cette variété est abélienne n'intervient pas ici) et ayant pour image Ω sur J. On peut supposer qu'il existe pour Π et pour ce paramétrage un corps de définition K' de dimension finie sur k^*. La variété Ω est définie sur $K'(M^*)$. Soit Z un point générique de Ω sur ce corps. On peut trouver un point générique P de Π sur K' ayant pour image Z sur J. Soit $\mathfrak{A}$ le $\mathcal{C}$-diviseur correspondant. Soit d'autre part k' la fermeture algébrique de k^* dans K' et considérons la variété $W = \mathcal{L}_{k'}(P)$. Désignons par $\bar{P}$ un point générique de W sur $k'(M^*)$ et soit $\mathfrak{A} \to \overline{\mathfrak{A}}$ une spécialisation compatible avec $P \to \bar{P}$ sur k'. Soit enfin $\bar{Z} = S[\varphi(\bar{A})]$ avec $\bar{A} \times M = \mathcal{C}.(\bar{\mathfrak{A}} \times M)$. On a $\bar{\mathfrak{A}} \in \mathcal{G}_a$, donc $\bar{Z} \in \Omega$. Or puisque Z est une spécialisation de $\bar{Z}$ sur $k'(M^*)$, la sous-variété $\zeta = \mathcal{L}_{k'(M^*)}(\bar{Z})$ contient Ω. Cette variété coïncide donc avec Ω, d'où le résultat annoncé. Nous supposerons dans la suite $k' = k$.

De la même manière, la variété Δ introduite dans la démonstration du théorème 1 peut être supposée rationnelle sur $k(M^*, M'^*)$. Soit encore $\mathfrak{Z} \in h_a$, d'images respectives Z et Z' sur J et J', et supposons Z générique de Ω sur $k(M^*)$. Alors Z' est défini sur $k(M^*, M'^*, Z) = K^*(M'^*, Z)$, en posant $K^* = k(M^*)$. Donc $K^*(Z' \times M'^*) = K(Z, M'^*)$. On en déduit que la variété $\mathcal{O}$ lieu de $Z' \times M'^*$ sur K (ou de $Z \times M^*$ sur k, ou encore de $\Omega \times M^*$ sur à k) est birationnellement équivalente au produit $\Omega \times \mathfrak{M}^*$.

En d'autres termes, $\mathcal{O}$ *est une sous-variété fibrée triviale de la variété fibrée* $\mathcal{J}^*$.

b. Avec les mêmes notations, Λ définit une correspondance birationnelle et birégulière entre Ω et Ω'. Remplaçons M'^* par un point arbitraire M_1^* de $\mathfrak{M}^*$. Alors, pour presque tout $M_1^* \in \mathfrak{M}^*$, les spécialisations $\Omega' \to \Omega_1$ compatible avec $M'^* \to M_1^*$ sur k et $\Lambda' \to \Lambda_1$ compatible avec $M'^* \to M_1^*$ sur K^* sont bien déterminées; d'après le lemme 14 du chapitre I, Λ_1 définit une correspondance birationnelle et birégulière entre Ω et Ω_1. De plus, le point Z_1 de Ω_1 qui correspond à $\mathfrak{Z}^*$ est défini par $Z_1 \times M_1^* = \mathfrak{Z}^*.(J \times M_1^*)$.

En particulier, si l'on prend M_1 algébrique sur k, Ω_1 *est un modèle de* Ω *ayant pour corps de définition l'extension algébrique* $k_1 = k(M_1^*)$ (*qu'on peut supposer finie*) *de* k.

Nous dirons qu'un élément de $h_a = \mathcal{H}_a/\mathcal{H}_b$, est *rationnel sur un corps* $k' \supset k$ s'il existe un représentant $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{H}_a/\mathcal{H}_l$ rationnel sur k'. Si $\mathcal{G}(k')$ désigne le groupe des éléments de $\mathcal{G}$ rationnels sur k', et si l'on pose

$$\mathcal{H}_a(k') = \mathcal{G}(k') \cap \mathcal{H}_a, \qquad \mathcal{H}_l(k') = \mathcal{G}(k') \cap \mathcal{H}_l,$$

le groupe des éléments rationnels sur k' de h_a est isomorphe à $\mathcal{H}_a(k')/\mathcal{H}_l(k')$. Il résulte de la démonstration du lemme 16 que l'isomorphisme de h_a sur Ω est *rationnel* au sens suivant : il existe un corps K_0 contenant k tel qu'à tout élément de h_a rationnel sur un corps $K \supset K_0$ corresponde un point de Ω rationnel sur K. De plus, on peut supposer que K_0 est une extension algébrique finie de k.

7. Proposition 4. — *Soient* s *un entier positif arbitraire et* U *une variété. Alors les groupes des éléments d'ordre* s *de* $\mathcal{G}(U)/\mathcal{G}_l(U)$ *et de* $\mathcal{G}(U)/\mathcal{G}_a(U)$ *sont finis.*

G désignant un groupe abélien arbitraire, nous noterons $|G|_s$ le groupe des éléments d'ordre s de G et sG le groupe des éléments de G de la forme sx, avec $x \in G$. Commençons par démontrer les lemmes suivants :

Lemme 18. — *Soient* G *un groupe abélien,* H *un sous-groupe de* G. *Alors si* $|H|_s$ *et* $|G/H|_s$ *sont finis,* $|G|_s$ *est fini.*

Remarquons en effet qu'on a $|G/H|_s = H'/H$, en désignant par H' l'ensemble des éléments x de G tels que $sx \in \mathrm{H}$. Or on a $\mathrm{H}' \supset |\mathrm{G}|_s + \mathrm{H} \supset \mathrm{H}$. Puisqu'on suppose H'/H fini, il en est de même de $(|\mathrm{G}|_s + \mathrm{H})/\mathrm{H} \approx |\mathrm{G}|_s/|\mathrm{H}|_s$. Comme $|\mathrm{H}|_s$ est fini, il en est de même de $|\mathrm{G}|_s$.

Lemme 19. — *Soient* G *un groupe abélien,* H *un sous-groupe de* G. *Alors si* $|\mathrm{G}|_s$ *et* $\mathrm{H}/s\mathrm{H}$ *sont finis,* $|\mathrm{G}/\mathrm{H}|_s$ *est fini.*

En effet, soit σ l'endomorphisme de G qui à x fait correspondre sx. Le groupe H' étant défini comme plus haut, σ définit un homomorphisme de H' dans H. On en déduit canoniquement un homomorphisme de H' dans $\mathrm{H}/s\mathrm{H}$, dont le noyau est $\mathrm{H} + |\mathrm{G}|_s$. Le groupe $\mathrm{H}'/(\mathrm{H} + |\mathrm{G}|_s)$ est donc isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{H}/s\mathrm{H}$, donc c'est un groupe fini. D'autre part $(\mathrm{H} + |\mathrm{G}|_s)/\mathrm{H} \approx |\mathrm{G}|_s/|\mathrm{H}|_s$ est aussi un groupe fini. Il en est donc de même de $\mathrm{H}'/\mathrm{H} \approx |\mathrm{G}/\mathrm{H}|_s$.

Il importe de remarquer que toutes les fois qu'un groupe G est de type fini, les groupes $|\mathrm{G}|_s$ et $\mathrm{G}/s\mathrm{G}$ sont finis.

Nous allons maintenant démontrer la proposition 4 en raisonnant, par exemple, sur le groupe $\mathcal{G}(\mathrm{U})/\mathcal{G}_l(\mathrm{U})$. Montrons d'abord que si le résultat est vrai pour une variété U, il l'est aussi pour toute variété $\overline{\mathrm{U}}$ déduite de U par une transformation birationnelle T.

Posons en effet $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathrm{U})$, $\mathcal{G}_l = \mathcal{G}_l(\mathrm{U})$, et de même $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(\overline{\mathrm{U}})$, $\overline{\mathcal{G}}_l = \mathcal{G}_l(\overline{\mathrm{U}})$, et supposons $|\mathcal{G}/\mathcal{G}_l|_s$ fini. Soient $\overline{\mathcal{G}}_0$ le sous-groupe des éléments $\overline{\mathrm{A}}$ de $\overline{\mathcal{G}}$ tels que $\overset{-1}{\mathrm{T}}(\overline{\mathrm{A}}) = 0$ et $\overline{\mathcal{G}}'$ le sous-groupe des éléments de $\overline{\mathcal{G}}$ sans composantes dans $\overline{\mathcal{G}}_0$. On a $\overline{\mathcal{G}} = \overline{\mathcal{G}}' + \overline{\mathcal{G}}_0$ et l'application $\left(\overline{\mathrm{A}} \to \mathrm{A} = \overset{-1}{\mathrm{T}}(\overline{\mathrm{A}})\right)$ définit un isomorphisme de $\overline{\mathcal{G}}'$ sur un sous-groupe $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$. Posons $\mathcal{G}'_l = \mathcal{G}' \cap \mathcal{G}_l$ et soit $\overline{\mathcal{G}}_l$ l'image inverse de $\mathcal{G}'$ dans cet isomorphisme. Pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{G}'_l$ on a, d'après le lemme 12 du chapitre I, en remplaçant, s'il y a lieu, $\mathcal{G}_0$ par un groupe de type fini le contenant, $\mathrm{T}(\mathrm{A}) \in \overline{\mathcal{G}}_l + \overline{\mathcal{G}}_0$. D'autre part, on a un élément $\overline{\mathrm{A}}$ de $\overline{\mathcal{G}}$ tel que $\mathrm{A} = \overset{-1}{\mathrm{T}}(\overline{\mathrm{A}})$.

Or, d'après le lemme 8 du chapitre I, on a

$$\mathrm{T}(\mathrm{A}) = \mathrm{T}\left(\overset{-1}{\mathrm{T}}(\mathrm{A})\right) = \overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}}, \qquad \text{avec} \quad \overline{\mathrm{B}} \in \overline{\mathcal{G}}_0.$$

Donc $\mathrm{A} \in \overline{\mathcal{G}}_0 + \overline{\mathcal{G}}_l$, donc $\overline{\mathcal{G}}'_l \in \overline{\mathcal{G}}_0 + \overline{\mathcal{G}}_l$. Or le second théorème d'isomorphie entraîne

$$\mathcal{G}'/\mathcal{G}'_l \approx (\mathcal{G}' + \mathcal{G}_l)/\mathcal{G}_l.$$

Comme $|\mathcal{G}/\mathcal{G}_l|_s$ est fini, il en est de même de $|(\mathcal{G}' + \mathcal{G}_l)/\mathcal{G}_l|_s$, donc de $|\mathcal{G}'/\mathcal{G}'_l|_s$. Il en est de même par isomorphie de $|\overline{\mathcal{G}}'/\overline{\mathcal{G}}'_l|_s$. Donc d'après le lemme 18, il en est de même de $|\overline{\mathcal{G}}/\overline{\mathcal{G}}'_l|_s$, $\overline{\mathcal{G}}/\overline{\mathcal{G}}'$ étant de type fini. Or $(\overline{\mathcal{G}}_0 + \overline{\mathcal{G}}_l)/\overline{\mathcal{G}}'_l$ est de type fini. Donc d'après le lemme 19, $|\overline{\mathcal{G}}/(\overline{\mathcal{G}}_0 + \overline{\mathcal{G}}_l)|_s$ est fini. Enfin, puisque $(\overline{\mathcal{G}}_0 + \overline{\mathcal{G}}_l)/\overline{\mathcal{G}}_l$ est de type fini et d'après le lemme 18, $|\overline{\mathcal{G}}/\overline{\mathcal{G}}_l|_s$ est fini.

On peut par conséquent remplacer U par un modèle « fibré » du type $\mathcal{C}$ précédent, en supposant de plus que $\mathcal{M}$ est une variété linéaire. On a

$$\mathcal{G} \supset \mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_l \supset \mathcal{H}' + \mathcal{G}_l \supset \mathcal{G}_l.$$

Or on a vu que les groupes $\mathcal{G}/\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_l/\mathcal{H}'+\mathcal{G}_l \approx \mathcal{K}_0/\mathcal{K}_l$ sont de type fini. De plus, on a

$$(\mathcal{H}'+\mathcal{G}_l)/\mathcal{G}_l \approx \mathcal{H}'/\mathcal{H}'_l = \mathcal{H}'/\mathcal{H}' \cap \mathcal{G}_l$$

et $\mathcal{H}'/\mathcal{H}'_l$ est isomorphe à un groupe-quotient de $\mathcal{G}(\mathcal{M})/\mathcal{G}_l(\mathcal{M})$. Puisque $\mathcal{M}$ est une variété linéaire, ce dernier groupe est isomorphe au groupe additif des entiers. Donc les groupes $|\mathcal{G}/\mathcal{H}_0|_s$, $|\mathcal{H}_l/(\mathcal{H}'+\mathcal{G}_l)|_s$ et $|\mathcal{H}'+\mathcal{G}_l/\mathcal{G}_l|_s$ sont finis.

D'autre part, nous avons déjà montré (voir la démonstration du théorème 1) que le groupe $|\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_l|_s$ est fini. Il en est donc de même de $|\mathcal{G}/\mathcal{G}_l|_s$.

Lorsqu'on remplace l'équivalence linéaire par l'équivalence algébrique, la seule difficulté supplémentaire consiste à montrer que $|\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_a|_s$ est fini. Or $\mathcal{H}_a/\mathcal{H}_l$ est un groupe infiniment divisible (pour tout $x \in \mathcal{H}_a/\mathcal{H}_l$ et pour tout entier s, il existe un $y \in \mathcal{H}_a/\mathcal{H}_l$ tel que $x = sy$). Ce groupe est donc, d'après la théorie des groupes abéliens, un *facteur direct* de $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_l$, et $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_a$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_l$. Il en résulte bien que $|\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_a|_s$ est fini.

8. Nous allons maintenant étudier le groupe $\mathcal{G}(U)/\mathcal{G}_a(U)$ attaché à une variété projective U quelconque et montrer que ce groupe est de type fini.

Commençons par montrer que si le théorème est vrai pour une variété U, il l'est aussi pour toute variété $\overline{U}$ de la forme F(U), où F est une fonction telle que la fonction inversait un nombre fini q de déterminations (ou telle que $[F:U]=q$.

Posons $\mathcal{G} = \mathcal{G}(U)$, $\mathcal{G}_a = \mathcal{G}_a(U)$, et de même $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(\overline{U})$, $\overline{\mathcal{G}}_a = \mathcal{G}_a(\overline{U})$ et supposons que le groupe $\mathcal{G}/\mathcal{G}_a$ soit de type fini.

Soient $\overline{\mathcal{G}}_0$ le sous-groupe des éléments $\overline{A}$ de $\overline{\mathcal{G}}$ tels que $\overset{-1}{F}(\overline{A}) = 0$, et $\overline{\mathcal{G}}'$ le sous-groupe des éléments de $\overline{\mathcal{G}}$ sans composante dans $\overline{\mathcal{G}}_0$. On a $\overline{\mathcal{G}} = \overline{\mathcal{G}}' + \overline{\mathcal{G}}_0$ et l'application $\left(\overline{A} \to A = \overset{-1}{F}(\overline{A})\right)$ définit un isomorphisme de $\overline{\mathcal{G}}'$ sur un sous-groupe $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$. Posons $\mathcal{G}'_a = \mathcal{G}' \cap \mathcal{G}_a$ et soit $\overline{\mathcal{G}}'_a$ l'image inverse de $\mathcal{G}'_a$ par cet isomorphisme. Pour tout $\overline{A} \in \overline{\mathcal{G}}'_a$, on a un $A \in \mathcal{G}$ tel que $A = \overset{-1}{F}(\overline{A})$. De plus, d'après le lemme 12 du chapitre I, on a en remplaçant, s'il y a lieu, $\mathcal{G}_0$ par un sous-groupe de type fini convenable de $\mathcal{G}$ qui le contient, $F(A) \in \overline{\mathcal{G}}_a + \overline{\mathcal{G}}_0$. D'autre part on a, d'après le lemme 7 du chapitre I

$$F(A) = F\left(\overset{-1}{F}(\overline{A})\right) \doteq q\overline{A} + B \qquad \text{avec } \overline{B} \in \overline{\mathcal{G}}_0.$$

Donc

$$q^{\overline{A}} \in \overline{\mathcal{G}}_0 + \overline{\mathcal{G}}_a. \tag{1}$$

Soit $\overline{\mathcal{G}}''_a$ le groupe de tous les éléments $\overline{A}$ de $\overline{\mathcal{G}}'$ satisfaisant à la relation (1). Nous venons de montrer que $\overline{\mathcal{G}}'_a \subset \overline{\mathcal{G}}''_a$.

Comme on a supposé $\mathcal{G}/\mathcal{G}_a$ de type fini, il en est de même de $\mathcal{G}'/\mathcal{G}'_a = (\mathcal{G}'/\mathcal{G}' \cap \mathcal{G}_a)$ d'après le second théorème d'isomorphisme, donc aussi de $\overline{\mathcal{G}}'/\overline{\mathcal{G}}'_a$ et de $\overline{\mathcal{G}}'/\overline{\mathcal{G}}''_a$. Or d'après la relation (1), le groupe $\overline{\mathcal{G}}''_a/[\overline{\mathcal{G}}' \cap (\overline{\mathcal{G}}_a + \overline{\mathcal{G}}_0)]$ est un sous-groupe de $|\overline{\mathcal{G}}'/[\overline{\mathcal{G}}' \cap (\overline{\mathcal{G}}_a + \overline{\mathcal{G}}_0)]|_q$, donc est isomorphe à un sous-groupe de $|\overline{\mathcal{G}}/(\overline{\mathcal{G}}_a + \overline{\mathcal{G}}_0)|_q$, et comme $(\overline{\mathcal{G}}_a + \overline{\mathcal{G}}_0)/\overline{\mathcal{G}}_a \approx \overline{\mathcal{G}}_0/(\overline{\mathcal{G}}_0 \cap \overline{\mathcal{G}}_a)$ est de type fini, on déduit du lemme 19 et de la proposition 4 que ce groupe est fini. Le groupe $\overline{\mathcal{G}}'/[\overline{\mathcal{G}}' \cap (\overline{\mathcal{G}}_a + \overline{\mathcal{G}}_0)]$ est donc de type fini. Il en est donc de même de $\overline{\mathcal{G}}/(\overline{\mathcal{G}}_a + \overline{\mathcal{G}}_0)$, ainsi que de $\overline{\mathcal{G}}/\overline{\mathcal{G}}_a$.

Applications. — *a.* On peut réduire le problème en remplaçant U par un modèle s'en déduisant par une transformation birationnelle quelconque. En particulier on peut prendre pour U un modèle du type $\mathcal{C}$ considéré au paragraphe 1.

b. Si K^* est une extension algébrique finie quelconque de K, remplaçons encore k par sa fermeture algébrique k^* dans K^*. Soient $K^* = k^*(M^*)$, M^* désignant un point générique sur k^* d'une variété $\mathcal{M}^*$, et $\mathcal{C}^* = \mathcal{L}_{k^*}(C \times M^*)$. Alors on peut remplacer $\mathcal{C}$ par $\mathcal{C}^*$. La fonction β sur $\mathcal{C}^*$, à valeurs dans $\mathcal{C}$, définie par $\beta(P \times M^*) = P \times M$ (P désignant un point générique de C sur à K) est bien telle que $\overset{-1}{\beta}$ ait un nombre fini de déterminations.

9. Reprenons les notations des paragraphes 1 à 6 et soit s un entier arbitraire > 1, non multiple de p, que nous supposons fixé une fois pour toutes dans la suite de ce chapitre.

Nous supposerons, en remplaçant, s'il y a lieu, K par une extension algébrique finie K^*, que la fonction φ est définie sur à K et que toutes les solutions Z_i $(i = 0, 1, \ldots, s^{2g} - 1)$ de l'équation $sZ_i = 0$ sont rationnelles sur K.

La méthode de « descente infinie » que nous allons utiliser va consister à démontrer successivement les deux propositions suivantes :

Proposition 5. — *Soit sh le groupe des éléments $\mathfrak{Z}$ de $h = \mathcal{H}_0/\mathcal{H}_l$ qui sont de la forme $s\mathfrak{Z}'$, avec $\mathfrak{Z}' \in h$. Alors le groupe h/sh est fini.*

Proposition 6. — *Soient $\mathfrak{Z}_k^{(0)}$ des éléments de h en nombre fini et $\mathfrak{Z}$ un élément quelconque de h, et supposons qu'il existe une suite $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}', \ldots, \mathfrak{Z}^{(\nu)} \ldots$ d'éléments de h tels qu'on ait, pour tout ν :*

$$s\mathfrak{Z}^{(\nu)} = \mathfrak{Z}^{(\nu-1)} - \mathfrak{Z}_{k_\nu}^{(0)}$$

pour un indice k_ν convenable. Alors, pour ν assez grand, $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$ ne peut représenter qu'un nombre fini de classes de $h/h_a \approx \mathcal{H}_0/\mathcal{H}_a$ qui ne dépendent pas de l'élément $\mathfrak{Z}$ initial.

Montrons que les propositions 5 et 6 entraînent bien le résultat annoncé. En effet, on peut prendre pour éléments $\mathfrak{Z}_{k_\nu}^{(0)}$ des représentants de chacune des classes de h/sh. Puisque, pour ν assez grand, $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$ est congru $(\mathrm{mod}\, h_a)$ à un élément d'un sous-ensemble fini h_f de h, $\mathfrak{Z}$ est congru à une combinaison linéaire des $\mathfrak{Z}_{k_\nu}^{(0)}$ et des éléments de h_f. Le groupe $h/h_a \approx \mathcal{H}_0/\mathcal{H}_a$ est donc de type fini.

Montrons que la même propriété en résulte pour $\mathcal{G}/\mathcal{G}_a$. Le résultat étant évident pour $n = 0$, raisonnons par récurrence sur n. On a, d'après le paragraphe 3, les relations

$$\mathcal{G} \supset \mathcal{H}_a \supset \mathcal{G}_a + \mathcal{H}' \supset \mathcal{G}_a,$$

les groupes-quotients $\mathcal{H}_a/\mathcal{G}_a + \mathcal{H}'$ et $(\mathcal{G}_a + \mathcal{H}')/\mathcal{G}_a$ étant isomorphes respectivement à $\mathcal{H}'/\mathcal{H}'_a$ et $\mathcal{K}/\mathcal{K}_a$.

Or les groupes $\mathcal{G}/\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{K}/\mathcal{K}_a$ sont de type fini. Par récurrence, il en est de même de $\mathcal{H}'/\mathcal{H}'_a$ puisque, d'après la proposition 2, ce groupe est isomorphe à un groupe-quotient de $\mathcal{G}(\mathcal{M})/\mathcal{G}_a(\mathcal{M})$. S'il en est de même enfin de $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_a$, il en est bien de même de $\mathcal{G}/\mathcal{G}_a$.

Montrons d'autre part qu'on peut introduire, dans les hypothèses des énoncés des propositions 5 et 6, les restrictions suivantes : soit $\mathcal{E}$ un sous-ensemble algébrique de $\mathcal{H}$ supposé donné à l'avance indépendamment des $\mathfrak{Z}_k^{(0)}$; alors :

a. pour démontrer la proposition 5, il suffira de montrer que, pour $\mathfrak{Z} \not\subset \mathcal{E}$, l'élément $\mathfrak{Z}$ de h ne peut représenter qu'un nombre fini de classes de h/sh;

b. il suffira de démontrer la proposition 6 dans le cas particulier où aucune des variétés $\mathfrak{Z}_\nu$ n'est contenue dans $\mathcal{E}$.

Posons en effet $E \times M = \mathcal{E} \cap (J \times M)$. On peut, d'après le lemme 17 du chapitre I, trouver des translations Y_l sur J, en nombre fini, telles que les ensembles algébriques $E_l = E_{Y_l}$ soient sans point commun. On peut de plus supposer les points Y_l rationnels par rapport à une extension algébrique finie K^* de K. Soient alors k^*, M^*, $\mathcal{M}^*$ définis comme au paragraphe précédent. Posons $\mathcal{J}^* = \mathcal{L}_{k^*}(J \times M^*)$, et, pour tout indice l, $\mathcal{Y}_l^* = \mathcal{L}_{k^*}(Y_l \times M^*)$. Soit d'autre part $\mathcal{E}^*$ un sous-ensemble algébrique de $\mathcal{J}^*$ tel que $E \times M^* = \mathcal{E}^* \cap (J \times M^*)$. A tout élément $\mathfrak{Z} = \mathcal{L}_k\ (Z \times M)$ de h, faisons correspondre l'élément $\mathfrak{Z}^* = \mathcal{L}_{k^*}(Z \times M^*)$ de $h^* = \mathcal{H}_0^*/\mathcal{G}_l^*$. L'application $\mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}^*$ est un isomorphisme λ de h dans h^* et, d'après ce que nous avons vu, de h_a dans h_a^*.

a. Supposons que, pour tout $\mathfrak{Z}^* \not\subset \mathcal{E}^*$, l'élément $\mathfrak{Z}^*$ de h^* ne puisse représenter qu'un nombre fini de classes de h^*/sh^*, et soit $\mathfrak{Z} = \mathcal{L}(Z \times M)$ un élément quelconque de h. On a un indice l au moins tel que

$$Z_l = Z - Y_l \not\subset E.$$

Posons

$$\mathfrak{Z}_l = \mathcal{L}_k(Z_l \times M), \qquad \mathfrak{Z}^* = \lambda(\mathfrak{Z}) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Z}_l^* = \lambda(Z_l).$$

On a $\mathfrak{Z}_l^* \not\subset \mathcal{E}^*$, donc $\mathfrak{Z}_l^*$ ne peut représenter qu'un nombre fini de classes de h^*/sh^* et, puisque $\mathfrak{Z}^* = \mathfrak{Z}_l^* + \mathcal{Y}_l^*$, il en est de même de $\mathfrak{Z}^*$. Le résultat analogue s'en déduit aussitôt pour $\mathfrak{Z}$.

b. Posons, pour tout ν, $\mathfrak{Z}^{*(\nu)} = \lambda(\mathfrak{Z}^{(\nu)})$. A chaque $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$, on peut faire correspondre un Y_{l_ν} au moins tel que $\mathfrak{Z}_\nu^* = \mathfrak{Z}^{*(\nu)} - \mathcal{Y}_{l_\nu} \not\subset \mathcal{E}^*$. La suite $\mathfrak{Z}_\nu^*$ est du même type que la suite $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$, l'ensemble des $\mathfrak{Z}_k^{(0)}$ étant à remplacer par celui des éléments de h^* de la forme $\lambda(\mathfrak{Z}_k^{(0)}) + \mathcal{Y}_l^* - s\mathcal{Y}_j^*$ pour tous les indices j et l. On peut donc supposer que $\mathfrak{Z}_\nu^*$ représente, pour ν assez grand, un nombre fini de classes de h^*/h_a^*; il en est donc de même de $\mathfrak{Z}^{*(\nu)}$, et le résultat analogue s'en déduit pour $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$.

10. La démonstration que nous allons donner de la proposition 5 suit de très près celle que donne Weil, dans sa thèse [A, § 11 à 14]. Nous avons employé ici exclusivement le langage géométrique des *Foundations*, conformément au point de vue déjà adopté dans ce chapitre. Mais il serait peut-être possible de faire

entrer les deux démonstrations dans une seule en utilisant la théorie des corps de fonctions algébriques.

Soit $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{J}$-diviseur, rationnel sur k, choisi de telle manière que le J-diviseur X défini par la formule $X \times M = \mathfrak{X}.(J \times M)$ soit différent de zéro. Soient encore Z_i ($i = 0, 1, \ldots, s^{2g}-1$) les solutions de $sZ_i = 0$, qu'on suppose rationnelles sur K, et posons, pour tout i, $X_i = X_{Z_i}$.

Chacun des X_i est un J-diviseur rationnel sur K. D'après [VA, § VIII, th. 30, coroll. 2 et § XI, prop. 32] on peut trouver, pour chaque indice i, une fonction numérique ξ_i sur J ayant K pour corps de définition, et telle que

$$(\xi_i) = s(X_i - X).$$

Cette fonction ξ_i est définie à une constante multiplicative près de K dont le choix sera précisé plus loin. On peut l'étendre à une fonction η_i sur $\mathcal{J}$, définie sur k, telle que

$$\eta_i(Q \times M) = \xi_i(Q)$$

en désignant par Q un point générique de J par rapport à K. Soit

$$\mathfrak{X}_i = \mathcal{L}_k(X_i \times M) \qquad (i = 0, 1, \ldots, s^{2g}-1).$$

On a

$$(\eta_i) = s(\mathfrak{X}_i - \mathfrak{X}_0) + \mathcal{Y}_i,$$

où $\mathcal{Y}_i$ est un $\mathcal{J}$-diviseur tel que $\mathcal{Y}_i.(J \times M) = 0$, donc tel que $\mathrm{proj}_{\mathfrak{M}} |\mathcal{Y}_i|$ ait toutes ses composantes de dimension $\leq n-1$.

Soit maintenant un élément arbitraire $\mathfrak{Z}$ de h. On peut supposer que $\mathfrak{Z}$ n'est jamais contenue dans aucun des supports $|\mathfrak{X}_i|$ des $\mathfrak{X}_i$, en faisant entrer ceux-ci dans l'ensemble algébrique $\mathcal{E}$ introduit plus haut. La fonction ζ_i induite par η_i sur $\mathfrak{Z}$ est alors définie pour tout i. Soit d'autre part θ_i la fonction déduite de ζ_i par la projection sur $\mathfrak{M}$, c'est-à-dire telle que

$$\xi_i(Z) = \eta_i(Z \times M) = \zeta_i(Z \times M) = \theta_i(M)$$

en supposant Z défini par $Z \times M = \mathfrak{Z}.(J \times M)$.

Soit z une sous-variété de dimension $n-1$ de $\mathfrak{Z}$ n'appartenant pas à $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J} \cap (S \times \mathfrak{M}_0)$. Alors on a $\mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}(z) \neq 0$, et $a = \mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}(z)$ est une sous-variété de dimension $n-1$ de $\mathfrak{M}$, nécessairement simple sur $\mathfrak{M}$. Donc, d'après [F, chap. VII, th. 7], z est simple sur $\mathfrak{Z}$; d'autre part, z est aussi simple sur $\mathcal{J}$ (d'après le lemme 1 du chapitre I) et sur $\mathcal{R} = R \times \mathfrak{M}$. Par suite, z a même coefficient dans (ζ_i) et dans $(\eta_i).\mathfrak{Z}$ [F, chap. VIII, th. 4]. Enfin, d'après [F, chap. VII, th. 17, coroll. 2], ce coefficient est aussi égal à celui de a dans (θ_i). On en déduit

$$(\theta_i) = \mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}[(\eta_i).\mathfrak{Z}] + a'_i$$

en désignant par a'_i un $\mathfrak{M}$-diviseur dont le support est contenu dans $\mathfrak{M}_0$. D'où

$$(\theta_i) = s[\mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}((\mathfrak{X}_i - \mathfrak{X}_0).\mathfrak{Z})] + a_i,$$

où a_i désigne un $\mathfrak{M}$-diviseur tel que

$$|a_i| \subset \mathrm{proj}_{\mathfrak{M}} |\mathcal{Y}_i| + \mathfrak{M}_0.$$

Pour tout indice i, les composantes a_{ij} de a_i appartiennent à un ensemble fini qui ne dépend pas de $\mathfrak{Z}$.

Soit $a_i = \sum_j \lambda_{ij} a_{ij}$. Cette relation peut s'écrire sous la forme

$$a_i = sb_i + \sum \varepsilon_{ij} a_{ij},$$

les ε_{ij} étant des entiers tels que $0 \leqq \varepsilon_{ij} \leqq s - 1$.

On en déduit

$$(\theta_i) = sc_i + c'_i,$$

où c_i et c'_i sont des $\mathfrak{M}$-diviseurs, c'_i appartenant à un ensemble fini qui ne dépend pas de $\mathfrak{Z}$.

D'après cette relation, sc_i ne peut appartenir qu'à un nombre fini de classes $(\bmod\, \mathcal{G}_l(\mathfrak{M}))$. D'après la proposition **4**, il en est de même de c_i. D'où

$$(\theta_i) = s(\alpha_i) + (\alpha'_i),$$

où α_i et α'_i sont des fonctions numériques sur $\mathfrak{M}$, le diviseur (α'_i) de α'_i appartenant à un ensemble fini qui ne dépend pas de $\mathfrak{Z}$. Chacune de ces fonctions est définie à une constante multiplicative près. Pour un choix convenable de ces constantes, on a

(2) $$\theta_i = \alpha_i^s \alpha'_i.$$

Soient maintenant Q_1 et Q_2 deux points génériques indépendants de J sur K et considérons la fonction numérique ω_i sur J, définie à $K(Q_2)$ sur telle que

$$\omega_i(Q_1) = \xi_i(Q_1 + Q_2).$$

On a

$$(\omega_i/\xi_i) = s(\beta_i),$$

β_i désignant une fonction numérique sur J telle que

$$(\beta_i) = (X_{Z_i - Q_2} - X_{-Q_2}) - (X_{Z_i} - X),$$

d'où

$$\frac{\omega_i(Q_1)\,\xi_i(Z_0)}{\omega_i(Z_0)\,\xi_i(Q_1)} = \left[\frac{\beta_i(Q_1)}{\beta_i(Z_0)}\right]^s.$$

On peut supposer que la constante multiplicative dont dépend ξ_i a été choisie telle que $\xi_i(Z_0) = 1$. Il vient alors

(3) $$\frac{\xi_i(Q_1 + Q_2)}{\xi_i(Q_1)\,\xi_i(Q_2)} = [\gamma_i(Q_1, Q_2)]^s,$$

où $\gamma_i(Q_1, Q_2)$ est une fonction numérique sur $J \times J$, qu'on peut supposer définie sur K.

Considérons deux éléments $\mathfrak{Z}_1$ et $\mathfrak{Z}_2$ de h, et posons $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_2$. Soient pour tout i, les fonctions θ_i, θ_{1i} et θ_{2i} correspondantes. Soit de plus M' un point générique de $\mathfrak{M}$ sur un corps de définition k' commun à $\mathfrak{Z}_1$ et $\mathfrak{Z}_2$ et soient Z'_1,

Z'_2 et Z les images respectives de $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$ et $\mathfrak{Z}$ sur $J' = J(M')$. Soit de plus, pour tout i, ξ'_i la fonction sur J' déduite de ξ_i en remplaçant M par M'. On a

$$\xi'_i(Z'_j) = \eta_i(Z'_j \times M') = \theta_{ji}(M') \qquad (j = 1, 2)$$

et

$$\xi'_i(Z') = \eta_i(Z' \times M') = \theta_i(M').$$

On déduit de la formule (3)

$$\frac{\theta_i(M')}{\theta_{1i}(M')\,\theta_{2i}(M')} = [\delta(M')]^s, \tag{4}$$

où δ est une fonction numérique sur $\mathfrak{M}$ définie sur à k'.

Soit maintenant l'ensemble $\overline{h}_s$ des éléments $\mathfrak{Z}$ de h pour lesquels on peut prendre, dans la formule (2), $\alpha'_i = 1$ quel que soit i. La formule (4) montre que $\overline{h}_s$ est un groupe. Puisque dans la formule (2), le nombre des déterminations possibles des α'_i est fini pour tout i, le groupe $h/\overline{h}_s$ est fini.

Nons allons maintenant montrer que $\overline{h}_s = sh$, c'est-à-dire que la condition $\mathfrak{Z} \in \overline{h}_s$ est nécessaire et suffisante pour qu'il existe un élément $\overline{\mathfrak{Z}}$ de h tel que $s\overline{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z}$. Le fait que la condition est nécessaire se déduit de la relation (4).

Montrons que la condition est suffisante. Soit $\mathfrak{Z} \in \overline{h}_s$, et soit M' un point générique de $\mathfrak{M}$ sur un corps de définition k' de $\mathfrak{Z}$. Soit Z' l'image de $\mathfrak{Z}$ sur $J' = J(M')$. Soient Z'_i, X'_i, ξ'_i les éléments déduits de Z_i, X_i, ξ_i respectivement par la substitution de M' à M. On a encore

$$(\xi'_i) = s(X'_i - X').$$

Il existe, d'après [VA, § XI, prop. 32] une fonction ψ'_i définie sur $K' = k(M')$, telle qu'on ait

$$\xi'_i(sQ') = [\psi'_i(Q')]^s \tag{5}$$

pour tout point Q' de J'. De plus, la constante multiplicative arbitraire dont dépend ψ'_i peut être choisie telle que $\psi'_i(Z'_0) = 1$, puisqu'on a déjà supposé $\xi'_i(Z'_0) = 1$.

On a d'autre part

$$\psi'_i(Q' + Z'_j) = e_{X',s}(Z'_j, Z'_i)\,\psi'_i(Q') \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, s^{2g} - 1), \tag{6}$$

où les $e_{X',s}(Z'_j, Z'_i)$ désignent les racines $s^{\text{ièmes}}$ de l'unité introduites par Weil dans [VA, § XI, n° 75].

En faisant $\overline{Z}' = 0$ dans la formule (6), on constate que les $e_{X',s}(Z'_j, Z'_i)$ appartiennent à K', (donc aussi à k).

Puisqu'on suppose $\mathfrak{Z} \in h_s$, la fonction θ_i sur $\mathfrak{M}$ définie par $\theta_i(M') = \xi'_i(Z')$ est la puissance $s^{\text{ième}}$ exacte d'une fonction numérique sur $\mathfrak{M}$, nécessairement définie sur la fermeture algébrique $\overline{k}'$ de k'. En d'autres termes $\xi'_i(Z')$ est la puissance $s^{\text{ième}}$ exacte d'un élément de $\overline{k}'(M')$.

Soit $\overline{Z}'$ l'une des solutions de $s\overline{Z}' = Z'$. Les autres solutions sont $\overline{Z}' + Z'_i$

($i = 1, \ldots, s^{2g} - 1$) En faisant $Q' = \overline{Z}'$ dans les formules (5) et (6), on constate que l'expression $\psi'_i(\overline{Z}' + Z'_i)$ appartient à $\overline{k}'(M')$ pour tous les indices i et j.

Or on peut choisir $\mathfrak{X}$ de telle manière que la relation $e_{X',s}(Z'_j, Z'_i) = 1$ n'ait lieu quel que soit j que pour $i = 0$. Il en est ainsi, par exemple, d'après [VA, § XI, n° 75], lorsqu'on prend $\mathfrak{X}$ tel que $X = \Theta$, où $\Theta = \mathcal{L}_K \{ S[\varphi(A)] \}$, A désignant un système de $g - 1$ points génériques indépendants de C sur K.

Dans ces conditions, j étant fixé arbitrairement, on pourra trouver un i tel que $e_{X',s}(Z'_j, Z'_i) \neq 1$ et que, par suite, on ait

$$\psi'_i(\overline{Z}' + Z_j) \neq \psi_i(\overline{Z}').$$

Or si le point $\overline{Z}'$ est irrationnel sur $\overline{k}'(M')$, et si l'on a choisi j de telle manière que $\overline{Z}' + Z'_j$ soit l'un de ses conjugués par rapport à ce corps, une telle relation ne peut avoir lieu, d'après la théorie de Galois, puisque $\psi'_i(\overline{Z}' + Z'_j)$ est rationnel sur $\overline{k}'(M')$ et que $\overline{Z}'$ est séparable sur $\overline{k}'(M')$ (s étant premier avec p).

Le point $\overline{Z}'$ est donc rationnel sur $\overline{k}'(M')$; si l'on pose $\overline{\mathfrak{Z}} = \mathcal{L}_{k'}(\overline{Z}' \times M')$, on a bien $s\overline{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z}$. D'où $h_s = sh$ et la proposition 5 est démontrée.

11. Il sera commode à plusieurs reprises de remplacer $\mathfrak{J}$ par le modèle projectif $\mathfrak{J}_p$ birationnellement et birégulièrement équivalent à $\mathfrak{J}$ défini de la manière habituelle : si $x_0, \ldots, x_\alpha$ sont les coordonnées dans S et $y_0, \ldots, y_\beta$ les coordonnées dans U, considérons la transformation birationnelle T_p qui, au point $(x_0, \ldots, x_\alpha) \times (y_0, \ldots, y_\beta)$ de $S \times U$, fait correspondre le point d'une sous-variété S_p de l'espace projectif E_p à $(\alpha + 1)(\beta + 1) - 1$ dimensions ayant pour coordonnées les $x_i y_j$. Nous poserons $\mathfrak{J}_p = T_p(\mathfrak{J})$.

Nous introduirons d'autre part la notation suivante : si A désigne une variété et k un corps, nous désignerons par sous-ensemble algébrique fixe de A par rapport à k, et nous noterons $|A|_k$ l'intersection de toutes les spécialisations de A sur k. D'après le « Teilerkettensatz » (condition maximale pour les idéaux de polynomes), $|A|_k$ est l'intersection d'un nombre fini de spécialisations de A sur k. Cette définition peut être étendue, par linéarité, au cas où A est remplacé par un ensemble algébrique quelconque.

La méthode employée pour la démonstration de la proposition 6 va consister à montrer que le degré de l'image $\mathfrak{Z}_p^{(\nu)}$ de $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$ dans S_p admet pour ν assez grand, une borne supérieure indépendante de l'élément $\mathfrak{Z}$ initial. On pourra pour cela supposer que cet élément est rationnel sur la fermeture algébrique $\overline{k}$ de k en remplaçant, s'il y a lieu, $\mathfrak{Z}$ par une spécialisation convenable sur ce corps. Les degrés des $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$ ne sont pas modifiés par ce remplacement et il résulte du raisonnement du paragraphe précédent que tous les $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$ sont rationnels sur $\overline{k}$.

Nous désignerons par k' un corps de définition, algébriquement fermé et contenant k, pour toutes les composantes de l'ensemble algébrique $\mathfrak{M}_0$ introduit au paragraphe 4 ainsi que pour celles de l'ensemble algébrique $\mathfrak{J}_0 = \mathfrak{J} \cap S \times \mathfrak{M}_0$. Nous supposerons que M est générique sur $\mathfrak{M}$ sur k' et nous poserons $K' = k'(M)$.

Soit $\mathfrak{Z}^{(0)}$ un élément donné de h rationnel sur k' et soit $Z^{(0)}$ son image sur J. Soieut α et β les fonctions sur J, à valeurs dans J, définies sur K', telles que $\alpha(Q) = sQ$ et $\beta(Q) = sQ + Z^{(0)}$ pour tout point Q de J. Soit d'autre part d_0 un entier, et désignons par $\mathcal{L}$ la série linéaire sur $\mathcal{J}$ dont l'image sur $\mathcal{J}_p$ est la série obtenue en coupant $\mathcal{J}_p$ par tous les E_p-diviseurs positifs de degré d_0. Nous désignerons par $\mathfrak{X}$ un élément générique de $\mathcal{L}$ sur K' et par L la série linéaire induite par $\mathcal{L}$ sur J ; cette série a pour élément générique sur K' le J-diviseur X défini par $X \times M = \mathfrak{X}.(J \times M)$. On a, d'après [VA, § XI, prop. 31 et § VIII, th. 32, coroll. 2] :

$$\begin{aligned} \overset{-1}{\beta}(X) &= \overset{-1}{\alpha}(X_{-Z^{(0)}}) \\ &\sim \overset{-1}{\alpha}(X) + s(X_{-Z^{(0)}} - X) \\ &\sim s^2 X + \Theta_{Y^{(0)}} - \Theta, \end{aligned}$$

où $Y^{(0)}$ désigne un point de J rationnel sur K'.

Considérons la série linéaire de tous les C-diviseurs positifs A d'un degré q donné tels que $S[\varphi(A)] = Y^{(0)}$. Cette série admet K' pour corps de définition. Si q est assez grand on peut la supposer, d'après le théorème de Riemann-Roch, de dimension > 1 et sans point fixe. On peut trouver un élément A de cette série rationnel sur un corps de la forme $K'(u)$ et tel que les corps K', et $k'(u)$, soient linéairement disjoints sur k' et qu'on ait $|A|_{K'} = 0$. Considérons alors le J-diviseur $U = \sum_i \Theta_{\varphi(M_i)}$, en posant $A = \sum_i M_i$. Tout point $Z \in |U|_{K'}$ est tel que $\Theta_{c+Z} \supset W$, en désignant par c l'image sur J d'un C-diviseur canonique et par $W = \varphi(C)$ l'image de C par φ (d'après [VA, § V, prop. 19]). Il en résulte, d'après [VA, § V, th. 20] que $|U|_{K'} \subset W'$, en désignant par W' une sous-variété de J de dimension $g - 2$, définie sur K' et ne dépendant que de C, J et φ. On a, d'après [VA, § VIII, th. 30, coroll. 2],

$$U \sim (q-1)\Theta + \Theta_{Y^{(0)}}.$$

Si d_0 a été pris assez grand, il existe un J-diviseur positif $\overline{U}$ tel que $q\Theta + \overline{U} \in L$, et l'on peut supposer $|\overline{U}|_{K'} \subset \Theta$. On a alors, en posant $\overline{X} = \overset{-1}{\beta}(X)$,

$$\overline{X} \sim (s^2 - 1)X + \overline{X}_0, \tag{7}$$

où $\overline{X}_0 = U + \overline{U}$ est un J-diviseur positif tel que $|\overline{X}_0|_{K'} \subset |W' + \Theta|$. On aurait de même, en désignant par U' un J-diviseur, construit de la même manière que U, tel que $U' \sim (q-1)\Theta + \Theta_{-Y^{(0)}}$,

$$\overline{X} \sim (s^2 + 1)X - \overline{X'_0}, \tag{8}$$

où $\overline{X'_0} = U' + \overline{U}$ est un J-diviseur positif tel que $|\overline{X'_0}|_{K'} \subset |W' + \Theta|$.

Étendons maintenant la fonction β à une fonction γ sur $\mathcal{J}$, à valeurs dans $\mathcal{J}$, définie par rapport à k', telle que

$$\gamma(Q \times M) = \beta(Q)$$

pour tout point Q de J.

Soit $\overline{\mathfrak{X}}$ le $\mathfrak{J}$-diviseur rationnel par rapport à k, défini par

$$\overline{\mathfrak{X}} = \overset{-1}{\gamma}(\mathfrak{X}).$$

On a

$$\overline{\mathrm{X}} \times \mathrm{M} = \overset{-1}{\beta}(\mathrm{X}) \times \mathrm{M} = \mathfrak{X}.(\mathrm{J} \times \mathrm{M}).$$

La fonction $\overset{-1}{\gamma}$ est définie en tout point de $\mathfrak{J}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{J}_0$. Donc, puisque la partie fixe $|\mathfrak{X}|_{k'}$ de $|\mathfrak{X}|$ par rapport à k' est vide, celle $|\overline{\mathfrak{X}}|_{k'}$ de $|\overline{\mathfrak{X}}|$ est un sous-ensemble algébrique de $\mathfrak{J}_0$.

D'après la relation (7) et d'après [F, chap. VIII, th. 10, coroll. 1], on peut trouver une fonction ρ sur J, rationnelle par rapport à K' telle que

$$(\rho) = \overline{\mathrm{X}} - (s^2 - 1)\mathrm{X} - \overline{\mathrm{X}}_0.$$

Soit σ l'extension de ρ à $\mathfrak{J}$, définie sur k', et telle que

$$\sigma(\mathrm{Q} \times \mathrm{M}) = \rho(\mathrm{Q})$$

pour tout point Q de J. On a

$$(\sigma) = \overline{\mathfrak{X}} - (s^2 - 1)\mathfrak{X} - \overline{\mathfrak{X}}_0 + \mathfrak{Y},$$

en posant $\overline{\mathrm{X}}_0 = \mathcal{L}_{k'(u)}(\overline{\mathfrak{X}}_0 \times \mathrm{M})$ et en désignant par $\mathfrak{Y}$ un diviseur sur $\mathfrak{J}$ tel que $\mathrm{proj}_{\mathfrak{M}} |\mathfrak{Y}|$ ait toutes ses composantes de dimension $\leqq n - 1$.

Soient maintenant deux éléments $\mathfrak{Z}$ et $\overline{\mathfrak{Z}}$ de h rationnels sur k', non contenus dans $|\mathrm{W}' + \Theta|$ et tels qu'on ait

$$s\overline{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}^{(0)}$$

en posant

$$\mathfrak{Z}^{(0)} = \mathcal{L}_k(\mathrm{Z}^{(0)} \times \mathrm{M}).$$

Le cycle $\mathfrak{X}.\,\mathfrak{Z}$ est défini sur $\mathfrak{J}$ et, d'après le choix de $\mathfrak{X}$, toutes ses composantes ont pour multiplicité 1. Posons en effet $\mathfrak{X}_p = \mathrm{T}_p(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{Z}_p = \mathrm{T}_p(\mathfrak{Z})$. Rappelons qu'on a supposé $\mathfrak{X}_p = \mathcal{D}_p.\mathfrak{J}_p$, $\mathcal{D}_p$ étant un diviseur de S_p dont tous les coefficients sont génériques indépendants sur k'. Tout système $\mathcal{D}'_p$ de d_0 hyperplans génériques indépendants de S_p sur k est une spécialisation de $\mathcal{D}_p$ sur k. Comme toutes les composantes de $\mathcal{D}'_p.\mathfrak{J}_p$ ont pour multiplicité 1, il en est de même de celles de $\mathcal{D}_p.\mathfrak{Z}_p = \mathfrak{X}_p.\mathfrak{Z}_p$ et de celles de $\mathfrak{X}.\mathfrak{Z}$.

Comme on ne peut avoir $\overline{\mathfrak{Z}} \subset \overline{\mathfrak{X}}$, le cycle $\overline{\mathfrak{X}}.\overline{\mathfrak{Z}}$ est défini. Soit z une composante de ce cycle. Puisqu'on a $\mathfrak{X} = \gamma(\overline{\mathfrak{X}})$ et $\mathfrak{Z} = \gamma[\overline{\mathfrak{Z}}]$, $z = \gamma[\bar{z}]$ est une composante de $\mathfrak{X}.\mathfrak{Z}$. Inversement, soit z une composante de $\mathfrak{X}.\mathfrak{Z}$ et désignons par $\mathrm{Q}' \times \mathrm{M}'$ un point générique de z par rapport à un corps de définition k de z. Posons $\overline{\mathrm{Q}}' \times \mathrm{M}' = \overline{\mathfrak{Z}}.(\mathrm{S} \times \mathrm{M}'$; on a $\gamma(\overline{\mathrm{Q}}' \times \mathrm{M}') = \mathrm{Q}' \times \mathrm{M}'$ et la variété $\bar{z} = \mathcal{L}_{k'}(\overline{\mathrm{Q}}' \times \mathrm{M}')$ est une composante de $\overline{\mathfrak{X}}.\overline{\mathfrak{Z}}$ telle que $z = \gamma[\bar{z}]$, ayant pour coefficient 1 dans $\overset{-1}{\gamma}[z]$ [car $\mathrm{J}(\mathrm{M}')$ est une variété abélienne de dimension g, et puisque s est premier avec p, les composantes de $\gamma^{-1}(\mathrm{Q}' \times \mathrm{M}')$ sont en nombre s^{2g}, donc ont pour multiplicité 1]. D'après le lemme 7 du chapitre I, et puisque $i(z;\, \mathfrak{X}.\mathfrak{Z}) = 1$, on a aussi $i(\bar{z};\, \overline{\mathfrak{X}}.\overline{\mathfrak{Z}}) = 1$. Les composantes z de $\mathfrak{X}.\mathfrak{Z}$ et celles

$\bar{z}$ de $\mathfrak{X}.\bar{\mathfrak{Z}}$ n'appartenant pas à $\mathcal{J}_0$ sont ainsi biunivoquement associées, et de telle manière que $\mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}(z) = \mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}(\bar{z})$. On en déduit, puisque ces composantes ont pour multiplicité 1,

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}(\bar{\mathrm{X}}.\bar{\mathfrak{Z}}) = \mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{X}.\mathfrak{Z}) + a_1,$$

où a_1 est un $\mathfrak{M}$-diviseur dont les composantes sont contenues dans $\mathfrak{M}_0$.

On ne peut avoir $\bar{\mathfrak{Z}} \subset |\mathfrak{Y}|$, puisque $\mathfrak{Y}.(\mathrm{S} \times \mathrm{M}) = 0$, ni $\bar{\mathfrak{Z}} \subset \mathfrak{X}_0$, puisqu'on a supposé $\bar{\mathfrak{Z}} \not\subset |\mathrm{W}' + \Theta|$. Donc la fonction τ induite par σ sur $\bar{\mathfrak{Z}}$ est définie. Soit de plus χ la fonction déduite de τ par la projection sur $\mathfrak{M}$, c'est-à-dire telle que

$$\rho(\bar{\mathrm{Z}}) = \sigma(\bar{\mathrm{Z}} \times \mathrm{M}) = \tau(\bar{\mathrm{Z}} \times \mathrm{M}) = \chi(\mathrm{M})$$

en désignant par $\bar{\mathfrak{Z}}$ l'image de $\bar{\mathfrak{Z}}$ sur J. Par le raisonnement analogue à celui déjà utilisé au paragraphe **10**, on obtient

$$(\chi) = \mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}[(\tau)] = \mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}\left[(\sigma).\bar{\mathfrak{Z}}\right] + a_2,$$

où a_2 est un $\mathfrak{M}$-diviseur dont toutes les composantes sont contenues dans $\mathfrak{M}_0$. D'où

$$\begin{aligned}(\chi) &= \mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}\{[\bar{\mathfrak{X}} - (s^2-1)\mathfrak{X} - \bar{\mathfrak{X}}_0 + \mathfrak{Y}].\bar{\mathfrak{Z}}\} + a_2 \\ &= \mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}\{[\mathfrak{Z} - (s^2-1)\bar{\mathfrak{Z}}].\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}.\bar{\mathfrak{Z}}\} + a - a_0,\end{aligned}$$

a désignant un $\mathfrak{M}$-diviseur tel que $|a| \subset \mathfrak{M}_0$ et a_0 le $\mathfrak{M}$-diviseur *positif* $\mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{X}_0.\mathfrak{Z})$.

Nous allons montrer que le coefficient de chacune des composantes de a admet une borne supérieure qui ne dépend pas de $\mathfrak{Z}$. Il suffira, pour cela de démontrer qu'il en est de même de chacune des composantes z de (τ) contenues dans $\mathcal{J}_0$.

Certaines des composantes de (τ) peuvent être multiples sur $\mathcal{J}$ et, par suite, ne pas figurer dans $\left[(\sigma).\bar{\mathfrak{Z}}\right]$. Pour remédier à cet inconvénient, procédons de la manière suivante. Soit σ_p la fonction sur $\mathcal{J}_p$ déduite de σ par T_p et posons $(\sigma_p) = (\sigma_p)_0 = (\sigma_p)_\infty$, les composantes de $(\sigma_p)_0$ étant les variétés des zéros et celles de $(\sigma_p)_\infty$ les variétés des infinis de σ_p.

Posons

$$(\sigma_p)_0 = \mathcal{V}_p = \sum_j \lambda_j(\mathcal{V}_p)_j.$$

Soit Δ une direction générique de E_p, de dimension complémentaire à celle de $\mathcal{J}_p$ dans E_p et soit, pour tout j, $(\tilde{\mathcal{V}}_p)_j$ le cylindre passant par $(\mathcal{V}_p)_j$ et de direction Δ. Soit de plus

$$\tilde{\mathcal{V}}_p = \sum_j \lambda_j(\tilde{\mathcal{V}}_p)_j.$$

Puisque la variété $\mathcal{J}$ est normale, il en est de même de $\mathcal{J}_p$. On peut donc appliquer le théorème du reste à cette variété et trouver un diviseur positif $\tilde{\mathcal{V}}'_p$ de E_p tel que

$$(\sigma_p) = (\tilde{\mathcal{V}}_p - \tilde{\mathcal{V}}'_p).\mathcal{J}_p$$

D'autre part, $\tilde{\mathcal{V}}_p$ et $\tilde{\mathcal{V}}'_p$ ayant nécessairement même degré, il existe une fonction numérique ε_p sur E_p telle que

$$(\varepsilon_p) = \tilde{\mathcal{V}}_p - \tilde{\mathcal{V}}'_p.$$

On peut choisir la constante multiplicative dont dépend cette fonction de telle manière que σ_p soit la fonction induite par ε_k sur $\mathcal{J}_p$. Soient $\bar{\sigma}_p$ la fonction induite par ε_p sur S_p et $\bar{\sigma}$ la fonction déduite de $\bar{\sigma}_p$ par $\overset{-1}{T}_p$. On a

$$(\bar{\sigma}) = \tilde{\mathcal{V}} - \tilde{\mathcal{V}}',$$

en posant

$$\tilde{\mathcal{V}} = \overset{-1}{T}_q(\tilde{\mathcal{V}}_p . S_p), \qquad \tilde{\mathcal{V}}' = \overset{-1}{T}_q(\tilde{\mathcal{V}}'_p . S_p)$$

et σ est la fonction induite par $\bar{\sigma}$ sur $\mathcal{J}$. On a de plus

$$(\tau) = (\bar{\sigma}).\overline{\mathcal{Z}} \prec \tilde{\mathcal{V}}.\overline{\mathcal{Z}}.$$

La partie fixe $|\tilde{\mathcal{V}}_p|_{k'}$ de $|\tilde{\mathcal{V}}_p|$ par rapport à k' est confondue avec celle $|(\sigma_p)_0|_k$ de $|(\sigma_p)_0|$. Donc la partie fixe $|\tilde{\mathcal{V}}|_{k'}$ de $|\tilde{\mathcal{V}}|$ coïncide avec celle $|(\sigma)_0|_{k'}$ de $|(\sigma)_0|$.

Soit maintenant z une composante arbitraire de (τ) telle que $\mathrm{pr}_{\mathcal{M}}(z) \neq 0$, de coefficient positif et contenue dans $\mathcal{M}_0$. Cette variété z est définie sur k' puisque $\overline{\mathcal{Z}}$ et toutes les composantes de $\mathcal{J}_0$ le sont. Donc on a $z \in |(\sigma)_0|_{k'}$.

Soient des spécialisations génériques indépendantes $\tilde{\mathcal{V}}_1, \ldots, \tilde{\mathcal{V}}_m$ de $\tilde{\mathcal{V}}$ en nombre tel que leurs supports aient pour intersection $|\tilde{\mathcal{V}}|_{k'} = |(\sigma)_0|_{k'}$. Appliquons alors le corollaire du lemme 4 du chapitre I en prenant pour $A_1, \ldots, A_m$ les $\bar{S}$-diviseurs $\tilde{\mathcal{V}}_1, \ldots, \tilde{\mathcal{V}}_m$, avec $X = z$ et $Y = \overline{\mathcal{Z}}$. Les conditions (A), (B) et (C) du lemme sont vérifiées. En effet :

(A) z est bien simple sur $\overline{\mathcal{Z}}$, puisque la projection de $\overline{\mathcal{Z}}$ sur $\mathcal{M}$ est d'indice 1 et puisque $\mathcal{M}$ est supposée normale.

(B) z est une composante propre de chacune des intersections $\overline{\mathcal{Z}} \cap \tilde{\mathcal{V}}_i$. On a déjà vu en effet que la fonction τ induite par $\bar{\sigma}$ sur $\overline{\mathcal{Z}}$ est définie.

(C) Les projections sur $\mathcal{M}$ des composantes de $|\tilde{\mathcal{V}}|_{k'} = |(\sigma)_0|_{k'}$ sont toutes de dimension $\leq n-1$; en effet, il en est ainsi pour les composantes de $\mathcal{Y}$ et l'on a

$$|\mathcal{X}|_{k'} = 0, \qquad |\overline{\mathcal{X}}|_{k'} \subset \mathcal{J}_0 \qquad \text{et} \qquad |\overline{\mathcal{X}}_0|_{k'} \not\subset (\sigma)_0.$$

Soit $\mathcal{W}$ une composante quelconque de $\tilde{\mathcal{V}}_1 \perp (\tilde{\mathcal{V}}_2 \perp (\ldots \tilde{\mathcal{V}}_m))$ contenant z. On a $\mathcal{W} \subset |\tilde{\mathcal{V}}|_{k'}$.

Comme on a supposé $e = \mathrm{pr}_{\mathcal{M}}(z) \neq 0$, la projection de $\mathcal{W}$ sur $\mathcal{M}$ coïncide nécessairement avec e. On a, puisque e est simple sur $\mathcal{M}$ et d'après [F, chap. VII, th. 17], $i[z; \overline{\mathcal{Z}}.(S \times e)] = 1$. Donc, d'après le lemme 2 du chapitre I, on a

$$i[z; \mathcal{W}.\overline{\mathcal{Z}}] = m(z; \mathcal{W}).$$

Cette dernière expression admet bien une borne supérieure qui ne dépend pas de z ni de $\overline{\mathcal{Z}}$.

Il en est donc de même de $i(z;\ \overline{\mathfrak{Z}}.\mathfrak{V})$ ainsi que du coefficient de z dans (τ) et de celui de e dans a.

Remarquons d'autre part que, pour toute composante y de $\mathfrak{Y}.\overline{\mathfrak{Z}}$ telle que $\mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}(y) \neq 0$, on a

$$i[y;\ \mathfrak{Y}.\overline{\mathfrak{Z}}] = m(y;\ \mathfrak{Y})$$

d'après le lemme 2 du chapitre I et que par suite tous les coefficients du cycle $\mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{Y}.\overline{\mathfrak{Z}})$ sont bornés supérieurement.

On a finalement la relation

$$(\chi) \prec \mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}\{[\mathfrak{Z} - (s^2-1)\overline{\mathfrak{Z}}]\,\mathfrak{X}\} + b,$$

où b désigne un $\mathfrak{M}$-diviseur qui ne dépend pas de $\mathfrak{Z}$, mais seulement de $\mathfrak{Z}^{(0)}$.

Faisons maintenant, pour tout indice ν,

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^{(\nu-1)}, \qquad \overline{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z}^{(\nu)} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Z}^{(0)} = \mathfrak{Z}^{(0)}_{k_\nu}$$

C'est possible si l'on suppose les variétés Θ et W' précédentes contenues dans l'ensemble $\mathcal{E}$ introduit au paragraphe 10. Si l'on désigne par b_k la valeur de b obtenue pour $\mathfrak{Z}^{(0)} = \mathfrak{Z}^{(0)}_k$ et si l'on pose $b_0 = \max\limits_k(b_k)$, on a, pour tout indice ν, en posant $\mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{Z}^{(\nu)}.\mathfrak{X}) = a^{(\nu)}$:

$$(\chi) \prec a^{(\nu-1)} - (s^2-1)a^{(\nu)} + b_0,$$

d'où, en désignant par $d^{(\nu)}$ et e_0 les degrés respectifs de $a^{(\nu)}$ et b_0,

$$(s^2-1)\,d^{(\nu)} \leqq d^{(\nu-1)} + e_0.$$

D'après cette relation, $d^{(\nu)}$ ne peut prendre, si ν est assez grand, qu'un nombre fini de valeurs ne dépendant pas du degré d de l'élément $\mathfrak{Z}$ initial. On a en effet

$$d^{(\nu)} \leqq \frac{d}{(s^2-1)^\nu} + e_0\left[1 + \frac{1}{s^2-1} + \ldots + \frac{1}{(s^2-1)^\nu}\right],$$

d'où, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$d^{(\nu)} < e_0\,\frac{s^2-1}{s^2-2} + \varepsilon$$

pour ν assez grand.

Soit, pour tout ν, $\mathfrak{Z}^{(\nu)}_p = \mathrm{T}_p(\mathfrak{Z}^{(\nu)})$ et montrons que les degrés $e^{(\nu)}$ des $\mathfrak{Z}^{(\nu)}_p$ possèdent la même propriété.

Rappelons que le J-diviseur $\mathfrak{X}$ a été défini par $\mathfrak{X}_p = \mathcal{D}_p.\mathcal{J}_p$, $\mathcal{D}_p$ désignant un diviseur de degré d_0 de E_p dont tous les coefficients sont génériques indépendants sur k. On a $\mathfrak{X}_p.\mathfrak{Z}^{(\nu)}_p = \mathcal{D}_p.\mathfrak{Z}^{(\nu)}_p$. Le degré $e^{(\nu)}$ de $\mathfrak{Z}^{(\nu)}_p$ est majoré par le nombre des composants du cycle $\mathfrak{Z}^{(\nu)}_p.\Delta_p$, en désignant par Δ_p l'intersection de n spécialisations génériques indépendantes $(\mathcal{D}_i)_p$ de $\mathcal{D}_p$ sur k. Or si l'on pose $(\mathfrak{X}_i)_p = (\mathcal{D}_i)_p.\mathcal{J}_p$ et $\mathfrak{X}_i = \mathrm{T}_p^{-1}(\mathfrak{X}_i)_p$ (pour tout i), ce nombre est au plus égal à celui des points communs aux supports $|a^{(\nu)}_i|$ des $\mathfrak{M}$-diviseurs $a^{(\nu)}_i = \mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{X}.\mathfrak{Z}^{(\nu)})$. Comme les $a^{(\nu)}_i$ sont des spécialisations de $a^{(\nu)}$, ce nombre est lui-même inférieur à $(\mathrm{\grave{a}}^{(\nu)})^n$. Le nombre $e^{(\nu)}$ ne peut prendre, pour ν assez grand, qu'un nombre fini de valeurs.

Or on sait, d'après un théorème démontré par Bertini dans le cas classique et étendu par Choer au cas général, que les diviseurs positifs de degré donné sur une variété donnée se répartissent suivant un nombre fini de systèmes algébriques sur cette variété.

Donc $\mathfrak{Z}_p^{(\nu)}$ appartient, pour ν assez grand à un nombre fini de systèmes algébriques sur $\mathcal{J}_p$ et la propriété analogue s'en déduit pour $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$.

Soit θ la fonction sur le produit, g fois par elle-même, C^g de la courbe C à valeurs dans J, définie au paragraphe 5 de ce chapitre, et soit ω la fonction sur $\mathcal{C}^g$, à valeurs dans $\mathcal{J}$, obtenue par l'extension de θ à $\mathcal{C}^g$, c'est-à-dire définie par

$$\omega(P_1 \times \ldots \times P_g \times M) = \theta(P_1 \times \ldots \times P_g) \times M,$$

où $P_1, \ldots, P_g$ désignent des points génériques indépendants de C sur K. Posons

$$\mathcal{A}^{(\nu)} = \mathrm{pr}_{\mathcal{C}}[\omega^{-1}(\mathfrak{Z}^{(\nu)} - \mathfrak{Z}_0)].$$

Ce symbole a bien un sens, puisqu'on a supposé $\mathfrak{Z}^{(\nu)} \not\subset W'$ et d'après [VA, § V, th. 16]. De plus, $\mathcal{A}^{(\nu)}$ est un représentant de la classe de $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_l$ associée à $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$. D'après le lemme 12 du chapitre I, $\mathcal{A}^{(\nu)}$ ne peut représenter qu'un nombre fini de classes $(\mathrm{mod}\,\mathcal{G}_a)$ donc *a fortiori* $(\mathrm{mod}\,\mathcal{H}_a)$. Donc $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$ ne peut représenter qu'un nombre fini de classes $\mathrm{mod}\,h_a$, donc la proposition 6 est démontrée, ainsi que l'extension du théorème de Severi (valable pour toute valeur de la caractéristique) :

Théorème 2. — *Le groupe* $\mathcal{G}(\mathrm{U})/\mathcal{G}_a(\mathrm{U})$ *attaché à toute variété algébrique projective* U *est de type fini* (¹).

12. Soit K un corps engendré par un nombre fini d'éléments sur le corps premier k_0. Alors on peut trouver un surcorps algébrique k de k_0 tel que K soit une extension régulière de k (il suffit que k contienne la fermeture algébrique de k_0 dans K). On a ainsi $K = k(M)$, où M désigne le point générique sur k d'une variété $\mathcal{M}$. Soit C une courbe définie sur K, sans point multiple. Nous pouvons reprendre les notations et appliquer les résultats des paragraphes précédents.

Soient encore $\mathcal{G}(k)$ le sous-groupe des éléments de $\mathcal{G}$ qui sont rationnels par rapport à k et $\mathcal{G}_a(k)$, $\mathcal{G}_l(k)$, $\ldots$, $\mathcal{H}_l(k)$ les intersections respectives de $\mathcal{G}_a$, $\mathcal{G}_l$, $\ldots$, $\mathcal{H}_l$ avec $\mathcal{G}(k)$.

Soient de même G(K), $G_0(K)$, $G_l(K)$ les sous-groupes des éléments de G, G_0, G_l respectivement qui sont rationnels sur K.

Il résulte de la proposition 3 que les groupes $\gamma(K) = G_0(K)/G_l(K)$ et $\mathcal{H}_0(k)/\mathcal{H}_l(k)$ sont isomorphes.

D'autre part, puisque $h_a = \mathcal{H}_0/\mathcal{H}_a$ est de type fini, il en est de même de $\mathcal{H}_0(k)/\mathcal{H}_a(k)$.

(¹) Dans un récent mémoire [Legami, *fra arte propriet à aritmetiche delle superficie e la teoria della base, Rediconti di Mat e sui appl.* Roma, 1950]. Servi a obtenu dans un cas particulier (surface fibrée par une série linéaire de courbes) la caractérisation de la structure des groupes que nous avons appelés $\mathcal{H}_0/\mathcal{H}_a$ et $\mathcal{H}_a/\mathcal{H}_l$, et prévu la possibilité d'une démonstration de son théorème basée sur l'étude directe de ces groupes.

Or nous avons montré (th. 1) que $\mathcal{H}_a/\mathcal{H}_l$ est isomorphe au groupe des points d'une sous-variété abélienne $\Omega = \Omega(M)$ de $J = J(M)$ et qu'on pouvait (§ 6, remarque *b*) en remplaçant M par un point M′ rationnel sur une extension algébrique finie k' de k, remplacer Ω par un modèle $\Omega' = \Omega(M')$ rationnel sur k'.

De plus, à tout élément de $\mathcal{H}_a(k)/\mathcal{H}_l(k)$ correspond une variété $\mathfrak{Z}$ rationnelle sur k (§ 6, remarque *c*). L'image Z′ de cet élément sur Ω', définie par $Z' \times M' = \mathfrak{Z}.(J \times M')$ est rationnelle k'.

Si $p \neq 0$, le nombre des points Z′ correspondants est fini, puisque k' ne possède qu'un nombre fini d'éléments.

Si $p = 0$, on sait que le groupe des points de $J' = J(M')$ qui sont rationnels sur k' est de type fini, d'après le théorème de Weil.

Le groupe $\mathcal{H}_a(k)/\mathcal{H}_l(k)$ est donc de type fini, et il en est de même de $\mathcal{H}_0(k)/\mathcal{H}_l(k)$ ainsi que de $\gamma(K) = G_0(K)/G_l(K)$. En d'autres termes C est de rang fini dans K, d'où :

Théorème 3. — *Soit* K *un corps engendré par un nombre fini d'éléments sur le corps premier. Alors toute courbe algébrique définie sur* K *est de rang fini dans* K.

CHAPITRE III.

Inégalités relatives au nombre des points rationnels d'une courbe algébrique dont la complexité admet une borne supérieure donnée.

1. Les corps introduits dans la suite seront toujours de caractéristique nulle. Dans la première partie de ce chapitre (§ 1 à 5), nous considérons une courbe algébrique C (qui peut être supposée sans point multiple) définie sur un corps algébrique fini k. Certains des résultats démontrés dans le cas plus général envisagé au chapitre précédent seront encore utilisés ici; les mêmes notations seront employées, compte tenu de diverses simplifications (provenant du fait que l'on a $K = k$ ou que la variété $\mathfrak{M}$ des paramètres est réduite à un point).

Commençons par exposer sous une forme algébrique la dernière partie (A, § 15 à 19) de la démonstration du théorème de Weil. Nous désignons encore par $G_0(k)$ le groupe des C-diviseurs de degré o rationnels sur k, par $G_l(k)$ le sous-groupe des éléments de $G_0(k)$ linéairement équivalents à o et nous posons

$$\gamma = \gamma(k) = G_0(k)/G_l(k).$$

Le corps k peut encore sans inconvénient être remplacé par une extension algébrique finie. On peut donc supposer que la jacobienne J de C et la fonction canonique φ correspondante sont définies sur k. A toute classe de G_0/G_l, représentée par le C-diviseur A, nous associons son image $Z = S[\varphi(A)]$ sur J. Nous pouvons convenir d'identifier chaque élément de γ au point Z correspondant.

Désignant par s un entier arbitraire, nous supposons démontré que le groupe $\gamma/s\gamma$ est fini [1].

---

(1) La méthode employée par Weil pour parvenir à ce stade de la démonstration (A, § 11 à 14), analogue à celle que nous avons utilisée au chapitre II pour démontrer la proposition 5, peut aussi être mise sous une forme exclusivement algébrique.

Partant d'un point $Z \in \gamma$, nous définissons une suite $Z, Z', \ldots, Z^{(\nu)}, \ldots$ satisfaisant à $sZ^{(\nu)} = Z^{(\nu-1)} - Z_{k_\nu}^{(0)}$, où les $Z_k^{(0)}$ sont des représentants de chacune des classes de $\gamma/s\gamma$. Nous allons montrer que, pour Z donné et pour ν assez grand, le point $Z^{(\nu)}$ ne peut occuper qu'un nombre fini de positions qui ne dépendent pas de Z. Cela entraînera bien que γ est de type fini, c'est-à-dire que C est de rang fini dans k.

2. Nous allons utiliser certains résultats de la théorie des nombres algébriques récemment établis par Northcott [I_1, I_2], approfondis et complétés par Weil [AV].

Étant donné un système de $n+1$ nombres $(x) = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ d'un corps k, que l'on peut aussi considérer comme les coordonnées homogènes d'un point P d'un espace projectif S^n, la *complexité* au sens de Northcott du système (x) ou du point P est le nombre réel positif $C(x) = C(P)$ défini par

$$[C(x)]^d = (N\mathfrak{m})^{-1}\prod_\sigma\Bigl(\sum_i |x_i^\sigma|\Bigr),$$

où l'on désigne par d le degré de k, par $\mathfrak{m}$ l'idéal PGCD des x_i et par $N\mathfrak{m}$ sa norme relativement à k, et où le produit $\prod$ est étendu à tous les isomorphismes σ de k dans le corps des nombres complexes.

Avec les mêmes notations, la *hauteur* au sens de Weil du système (x), ou du point P, est le nombre réel positif $h(x) = h(P)$ défini par

$$[h(x)]^d = (N\mathfrak{m})^{-1}\prod_\sigma\bigl(\sup_i |x_i^\sigma|\bigr).$$

Les nombres $h(x)$ et $C(x)$ ne dépendent que de P (c'est-à-dire des rapports des x_i entre eux). Ils sont indépendants de k. De plus, ils sont liés par une relation de la forme

$$C(x) = \lambda h(x),$$

où λ est un nombre réel tel que $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$, λ_0 et λ_1 désignant deux bornes positives fixes. D'après cette relation, on pourra utiliser indifféremment, dans les énoncés et les démonstrations qui suivent, la complexité $C(x)$ ou la hauteur $h(x)$. Pour fixer les idées, nous écrirons partout le symbole $h(x)$.

Si h_0 désigne un nombre réel, le nombre des points P d'un espace projectif qui sont rationnels sur un corps donné (ou plus généralement de degré inférieur à une valeur donnée d_0) et tels que

$$h(x) < h_0$$

est fini (Northcott [I_1, th. 1]; Weil [AV, II, § 13]).

3. Soient maintenant, comme au paragraphe 10 du chapitre II, L une série linéaire sans point fixe de J-diviseurs positifs, obtenue par exemple, si J est plongée dans un espace projectif E, en coupant J par tous les E-diviseurs positifs d'un degré donné assez grand d_0.

Soit $Z^{(0)}$ un point de J rationnel sur k et soit β la fonction sur J, à valeurs dans J, telle que $\beta(Q) = sQ + Z^{(0)}$ pour tout point Q de J. Pour tout élément X de L, on a encore, en posant $\overline{X} = \overset{-1}{\beta}(X)$, la formule obtenue au chapitre II

$$\overline{X} \sim (s^2 - 1)X + \overline{X}_0, \tag{7}$$

où $\overline{X}_0$ désigne un J-diviseur positif.

Soient W_0 un élément de L rationnel sur k, et $W_i (i = 1, \ldots, m)$ des éléments de L sans point commun, rationnels sur k. Pour tout i, il existe une fonction φ_i, définie our k, telle que

$$(\varphi_i) = W_i - W_0.$$

Soit, pour tout i, $\overline{\varphi}_i$ la fonction transposée de φ par β. Comme β et $\overset{-1}{\beta}$ sont partout définies, on a

$$(\overline{\varphi}_i) = \overline{W}_i - W_0,$$

avec

$$\overline{W}_i = \overset{-1}{\beta}(W_i), \qquad W_0 = \overset{-1}{\beta}(W_0)$$

et les $|\overline{W}_i| (i = 0, 1, \ldots, m)$ sont sans point commun. Il existe, d'après (7), une fonction ρ, définie sur k, telle que

$$(\rho) = \overline{W}_0 - (s^2 - 1)W_0 - \overline{X}_0.$$

On en déduit, pour tout couple d'indices i et j, les relations

$$(\overline{\varphi}_j/\varphi_i^{s^2-1}\rho) = \overline{W}_j - (s^2 - 1)W_i - \overline{X}_0.$$

Puisque les $|\overline{W}_j|$ sont sans point commun, la « fonction de valuations » $[\overline{\varphi}_j/\varphi_i^{s^2-1}\rho]$ au sens introduit par Weil dans [AV, I, § 7] satisfait, quel que soit i, d'après [AV, th. 3], à

$$\inf_j[\overline{\varphi}_j/\varphi_i^{s^2-1}\rho] \prec 0.$$

Donc, pour tout i, on a

$$\inf_j[\overline{\varphi}_j] \prec [\varphi_i^{s^2-1}\rho].$$

Donc

$$\inf_j[\overline{\varphi}_j] \prec \inf_i[\varphi_i^{s^2-1}\rho].$$

Soit Q un point algébrique arbitraire de J, et posons $\overline{Q} = sQ + Z^{(0)}$. Les systèmes des fonctions $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $(\overline{\varphi}_1, \ldots, \overline{\varphi}_m)$ définissent des applications de J sur un espace projectif S^m, définies sur k, que nous noterons respectivement φ et $\overline{\varphi}$.

D'après [AV, th. 7] (¹), on a

$$h[\overline{\varphi}(\overline{Q})] = h[\varphi(sQ + Z^{(0)})] > A_0\{h[\varphi(Q)]\}^{s^2-1},$$

(¹) Ce théorème étant applicable à tous les points Q de J sans exception, on ne retrouve pas ici les difficultés rencontrées au chapitre II pour éliminer le cas où $\mathfrak{Z}_0 \subset \overline{\mathfrak{X}}_0$.
On pourrait aussi appliquer, sous une forme légèrement modifiée, le corollaire de [AV th. 8].

où A_0 désigne une constante positive indépendante de Q. Or, compte tenu de [AV, th. 8'] et de l'équivalence linéaire $W_0 \sim d_0(H.J)$, où H désigne un hyperplan de E, on a

$$h[\varphi(Q)] = C[h(Q)]^{d_0},$$

où C désigne un entier compris entre deux bornes positives fixes. On en déduit

$$h(sQ + Z^{(0)}) > A[h(Q)]^{s^2-1},$$

où A désigne une constante positive indépendante de Q. Cette constante peut dépendre de $Z^{(0)}$. A chacun des $Z_k^{(0)}$, associons une valeur A_k de A, et posons $B = \inf_k(A_k)$. Alors, si l'on pose, pour tout ν, $h(Z^{(\nu)}) = h_\nu$, la suite $Z^{(\nu)}$ définie au paragraphe 1 satisfait à

$$(9) \qquad h_{\nu-1} > B h_\nu^{s^2-1}.$$

Il résulte de là que, pour ν assez grand, les h_ν admettent une borne supérieure qui ne dépend pas de l'élément Z initial. Donc les $Z^{(\nu)}$ ne peuvent occuper qu'un nombre fini de positions et nous retrouvons bien le théorème de Weil.

4. On peut faire un raisonnement analogue au précédent en partant de la formule (8) [au lieu de la formule (7)] du paragraphe 10 du chapitre II

$$(8) \qquad \overline{X}' \sim (s^2+1)X - \overline{X}'_0.$$

On obtient, en désignant par ρ' une fonction définie par rapport à k telle que

$$(\rho') = -\overline{W}_0 + (s^2+1)W_0 - \overline{X}'_0,$$

la relation

$$\varphi\binom{s^2+1}{i}\rho'/\overline{\varphi}_j = -\overline{W}_j + (s^2+1)W_i - \overline{X}'_0,$$

d'où, pour tout j, puisque les $|W_i|$ sont sans point commun,

$$\inf_i[\overline{\varphi}_i^{s^2+1}\rho'/\overline{\varphi}_j] \prec 0.$$

D'où

$$\inf_j[\varphi_j] \succ \inf_i[\varphi_i^{s^2+1}\rho']$$

et l'on en déduit

$$h[\overline{\varphi}(\overline{Q})] < A'_0\{h[\varphi(Q)]\}^{s^2+1},$$

puis

$$h(sQ + Z^{(0)}) < A'[h(Q)]^{s^2+1}$$

et, pour tout ν,

$$(10) \qquad h_\nu < B' h_{\nu-1}^{s^2+1},$$

A_0, A' et B' désignant des constantes positives.

Distinguons maintenant entre le corps k donné sur lequel est définie C et l'extension algébrique k' sur laquelle sont définies J et φ. En partant des éléments d'une base $Y_1, \ldots, Y_r$ de γ, nous allons former des suites opposées aux suites $Z^{(\nu)}$ précédentes. On peut prendre, pour représenter les classes de $\gamma/s\gamma$, les éléments (non nécessairement distincts) $U_h = \sum_i \varepsilon_i Y_i$, où chaque coefficient ε_i satisfait à $0 \leqq \varepsilon_i \leqq s - 1$. Tout point $Z \in \gamma$ peut être obtenu au moyen d'une suite

$$\begin{aligned} Z_1 &= U_{h_1}, \\ Z_2 &= s Z_1 + U_{h_2}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ Z = Z_n &= s Z_{n-1} + U_{h_n}. \end{aligned}$$

Les points Z que l'on peut ainsi obtenir au bout de n opérations pour toutes les suites possibles d'entiers $(h_1, \ldots, h_r)$ sont tous les points $\sum_i \lambda_i Y_i$ tels que l'on ait, pour tout i, les inégalités $0 \leqq \lambda_i \leqq s^n - 1$. Si l'on suppose n assez grand, le nombre de points distincts ainsi obtenus est exactement égal à

$$N = s^{r_0 n} N_0, \tag{11}$$

où r_0 désigne le *rang réduit* de C dans k (c'est-à-dire le rang des sous-groupes libres maximaux de γ ou le nombre maximum d'éléments linéairement indépendants de γ) et N_0 le nombre des éléments du sous-groupe « exceptionnel » (ou du sous-groupe de torsion) de γ.

Appliquons les formules (9) et (10), en tenant compte du fait que les indices n et ν varient en sens opposés

$$B^{-1} h_{n-1}^{s^2-1} < h_n < B' h_{n-1}^{s^2+1}.$$

Si l'on suppose $r_0 \neq 0$, le groupe γ est infini, donc ∞ est une valeur limite de la suite h_n. On peut donc trouver un entier n_0 tel que

$$h_{n_0} > B^{\frac{1}{s^2-2}} = B_0 \qquad \text{et} \qquad h_{n_0} > B'^{\frac{1}{s^2}} = B'_0.$$

En posant

$$\frac{h_{n_0}}{B_0} = l_0, \qquad \frac{h_{n_0}}{B'_0} = l'_0,$$

on obtient, pour $n > n_0$,

$$B_0 \, l_0^{(s^2-1)^{n-n_0}} < h_n < B'_0 \, l_0'^{(s^2+1)^{n-n_0}}.$$

Soit h_0 une constante et considérons l'ensemble E_0 des points $Z \in \gamma$ pour lesquels on a $Z_{n-1} \in E_0$ et $Z_n \in E_0$ pour un choix convenable de la suite $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$.

Pour les entiers n correspondants, on a

$$B_0 \, l_0^{(s^2-1)^{n-n_0-1}} < h_0 < B'_0 \, l_0'^{(s^2+1)^{n-n_0}}.$$

On en déduit

$$n'_1 < n < n_1,$$

avec

$$\begin{aligned} n'_1 &= n_0 + \frac{1}{\operatorname{Log}(s^2+1)} \operatorname{Log} \frac{\operatorname{Log} h_0 - \operatorname{Log} B'_0}{\operatorname{Log} l'_0}, \\ n_1 &= n_0 + 1 + \frac{1}{\operatorname{Log}(s^2-1)} \operatorname{Log} \frac{\operatorname{Log} h_0 - \operatorname{Log} B_0}{\operatorname{Log} l_0}. \end{aligned}$$

Il résulte de (11) que le nombre N des éléments de E satisfait à

$$N_0 s^{r_0 n'_1} < N < N_0 s^{r_0 n_1}.$$

En remplaçant n'_1 et n_1 par les valeurs obtenues plus haut, on obtient

$$N = (\mathrm{Log}\, h_0)^{\rho},$$

où ρ est un nombre réel qui satisfait à

$$\rho'_1(h_0, s) < \rho < \rho_1(h_0, s),$$

les nombres réels positifs $\rho'_1(h_0, s)$ et $\rho_1(h_0, s)$ ayant pour limites respectives

$$\rho'_1(s) = r_0 \frac{\mathrm{Log}\, s}{\mathrm{Log}(s^2+1)},$$
$$\rho_1(s) = r_0 \frac{\mathrm{Log}\, s}{\mathrm{Log}(s^2-1)}$$

quand $h_0 \to \infty$.

Or $\rho'_1(s)$ et $\rho_1(s)$ tendent vers $\frac{r_0}{2}$ quand $s \to \infty$. On en déduit

$$N = (\mathrm{Log}\, h_0)^{\frac{r_0}{2}+\varepsilon},$$

ε désignant un nombre réel qui tend vers zéro quand $h_0 \to \infty$. D'où

Théorème 4. — *Soient k un corps algébrique fini, C une courbe algébrique de genre ≥ 1 définie sur k, J la jacobienne de C et φ la fonction canonique correspondante. On peut supposer que J et φ admettent pour corps de définition une extension algébrique finie de k. Soit, de plus, h_0 un nombre réel positif. Alors le nombre N des éléments du groupe $\gamma = \gamma(k)$ attaché à C dont l'image Z sur J satisfait à $h(Z) < h_0$ est de la forme*

$$N = (\mathrm{Log}\, h_0)^{\frac{r_0}{2}+\varepsilon},$$

où r_0 désigne le rang réduit de C dans k et où $\varepsilon \to 0$, quand $h_0 \to \infty$.

5. De ce théorème, nous allons tirer diverses conséquences. Démontrons au préalable le lemme suivant :

Lemme 20. — *Soient C et C′ deux courbes projectives définies sur un corps algébrique fini k et φ une fonction sur C, à valeurs dans C′, non constante et définie sur k. Alors, pour tout point algébrique P de C, on a*

$$A'[h(P)]^{-\alpha'} < h[\varphi(P)] < A[h(P)]^{\alpha},$$

où A, A′, α et α' désignent des constantes positives.

En effet, supposons d'abord C sans point multiple. Les coordonnées de P sont les valeurs en P de fonctions $x_i (i = 0, 1, \ldots, n)$ et celles de $\varphi(P)$ les valeurs en P de fonctions $y_j (j = 0, 1, \ldots, p)$ sur C. Désignons par $(x_i)_0$ et $(y_j)_0$ les diviseurs des zéros de x_i et y_j respectivement. Il existe, d'après le théorème de

Riemann-Roch, des entiers α et α' et des C-diviseurs positifs X et X' tels que l'on ait, pour tous les indices i et j

$$(y_j)_0 + X \sim \alpha\,(x_i)_0,$$
$$(x_i)_0 + X' \sim \alpha'(y_j)_0.$$

Il suffit alors d'appliquer deux fois [AV, th. 8] (1).

Pour étendre le résultat, au cas où C est quelconque, on passe par l'intermédiaire d'un modèle de C sans point multiple.

Soit maintenant C une courbe définie sur un corps algébrique fini k. Soit $A = (A_1, \ldots, A_g)$ un système de g points de C, où $A_1 = P$ désigne un point algébrique variable et $A_2, \ldots, A_g$ des points algébriques fixes de C. A tout point P de C, associons l'image $Z = S[\varphi(A)]$ de A sur J. Alors il existe, d'après le lemme 20, des nombres réels positifs A et α tels que

$$h(Z) < A[h(P)]^{\alpha},$$

quel que soit P. On en déduit aussitôt le corollaire suivant du théorème 4 :

Corollaire 1. — *Soit* C *une courbe projective de genre* $\geqq 1$ *définie sur un corps algébrique fini* k. *Alors, le nombre* N *des points* P *de* C *rationnels sur* k *et tels que* $h(P) < h_0$ *satisfait pour* h_0 *assez grand à une inégalité de la forme*

$$N < \operatorname{Log} h_0^{\frac{r_0}{2}+\mu}$$

quel que soit le nombre réel positif μ (2).

Remarquons qu'il est possible, d'après le lemme 20, de remplacer la condition $h(H) < h_0$ par $h[f(P), 1] < h_0$, où f désigne une fonction numérique arbitraire sur C définie sur k. Dans le cas particulier où $k = \rho$ est le corps des nombres rationnels, cette dernière condition peut encore être remplacée, en posant $f(P) = \frac{x_1}{x_0}$ (x_0 et x_1 entiers de ρ) par $|x_0| < h_0$ et $|x_1| < h_0$.

D'autre part, si C est de genre 1, la fonction canonique φ est une application de C sur J et, compte tenu du lemme 20, N satisfait à une relation du type

$$N = \operatorname{Log} h_0^{\frac{r_0}{2}+\varepsilon}$$

Ainsi :

Corollaire 2. — *Soient* C *une courbe algébrique de genre* 1 *définie sur le corps des nombres rationnels* ρ, f *une fonction numérique sur* C *définie sur* ρ

(1) *Cf.* aussi AV, chapitre IV, § 20.

(2) Dans ma Communication au Colloque d'Algèbre et Théorie des Nombres de Paris sept. 1949, il y a lieu de remplacer, à la dernière ligne du paragraphe 4 *a* (p. 67), les conditions $N(\xi) < N$ et $N(\eta) < N$, avec $u = \frac{\xi}{\eta}$, où ξ et η sont des idéaux entiers de k par $h(u, 1) < N$.

et h_0 un entier positif. Pour tout point P *de* C *rationnel sur* ρ, *posons* $f(\mathrm{P}) = x_1/x_0$, x_0 *et* x_1 *désignant des entiers de* ρ. *Alors le nombre de ces points pour lesquels on peut prendre* $|x_0| < h_0$, $|x_1| < h_0$ est de la forme $\mathrm{N} = (\mathrm{Log\,H_0})^{\frac{r_0}{2}+\varepsilon}$, *où* $\varepsilon \to 0$ *quand* $h_0 \to \infty$, r_0 *désignant le rang réduit de* C*d ans* ρ.

6. On peut utiliser ces résultats pour retrouver le théorème de Hilbert cité plus haut et qui peut être énoncé sous la forme suivante légèrement plus générale. Nous entendons par *corps de type fini* un corps engendré par un nombre fini d'éléments sur le corps ρ des nombres rationnels.

Théorème 5. — *Soient* $\mathfrak{M}$ *une variété de dimension* n, *de laquelle on peut éventuellement retrancher un nombre fini de frontières, définie sur un corps* k, M *un point générique de* $\mathfrak{M}$ *sur* k, *et posons* $\mathrm{K} = k(\mathrm{M})$. *Soient* Q_i *des points en nombre fini tels que, pour tout indice* i, $\mathrm{K}_i = \mathrm{K}(\mathrm{Q}_i)$ *soit une extension algébrique de* K *de degré* $[\mathrm{K}_i : \mathrm{K}] = \delta_i$. *Soient de plus* S^n *un espace projectif et* f *une application de* $\mathfrak{M}$ *sur* S^n, *définie sur* k. *Alors il existe une infinité de points* M′ *de* $\mathfrak{M}$ *pour lesquels les deux conditions suivantes sont remplies :*

a. Le point $\mathrm{P}' = f(\mathrm{M}')$ *est rationnel sur* k;

b. Pour tout i, *toute spécialisation* $\mathrm{P}_i \to \mathrm{P}'_i$ *compatible avec* $\mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ *sur* k *est propre et, en posant* $\mathrm{K}' = k(\mathrm{M}')$, $\mathrm{K}'_i = k(\mathrm{Q}'_i)$, *telle que* $[\mathrm{K}'_i : \mathrm{K}'] = \delta_i$.

a. On se ramène immédiatement au cas où $\mathfrak{M} = \mathrm{S}^n$ et où f est la correspondance identique. Supposons, en effet, le théorème démontré dans ce cas et soit, dans le cas général, $[\mathrm{K} : k(\mathrm{P})] = \delta$, en posant $\mathrm{P} = f(\mathrm{M})$. On a, pour tout i, $[\mathrm{K}_i : k(\mathrm{P})] = \delta . \delta_i$. Donc pour une infinité de points P′ de S rationnels sur k, tout système de spécialisations $\mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ et $\mathrm{Q}_i \to \mathrm{Q}'_i$ compatible avec $\mathrm{P} \to \mathrm{P}'$ sur k est propre et tel que $[\mathrm{K}' : k] = \delta$ et $[\mathrm{K}'_i : k] = \delta . \delta_i$, d'où $[\mathrm{K}'_i : \mathrm{K}] = \delta_i$ pour tout i.

b. Montrons que l'on peut, en modifiant convenablement l'ensemble des corps K_i, remplacer dans l'énoncé du théorème la condition $[\mathrm{K}'_i : \mathrm{K}'] = \delta_i$ par $[\mathrm{K}'_i : \mathrm{K}'] > 1$ pour tous les i tels que $[\mathrm{K}_i : \mathrm{K}] > 1$. En effet, soient $\mathrm{Q}_i^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, \delta_i)$ les conjugués de Q_i par rapport à K. Considérons l'ensemble E_i des entiers $1, \ldots, \delta_i$ et, pour tout sous-ensemble E_{ij} de E_i, le corps K_{ij} des fonctions symétriques des coordonnées des points $\mathrm{Q}_i^{(\nu)}$ tels que $\nu \in \mathrm{E}_{ij}$. Il suffit de remplacer l'ensemble des corps K_i par l'ensemble des K_{ij} (associés à tous les indices i et j possibles).

c. On peut, d'autre part, éliminer les Q_i pour lesquels l'extension K_i/k n'est pas régulière. En effet, soit alors k_i^* la fermeture algébrique de k dans K_i, et posons $\mathfrak{D}_i = \mathcal{L}_{k_i^*}(\mathrm{Q}_i \times \mathrm{M})$. Les variétés conjuguées de $\mathfrak{D}_i$ par rapport à k_i sont distinctes et l'on ne peut avoir $\mathrm{K}'_i = \mathrm{K}_i$ que si $\mathfrak{D}'_i \times \mathrm{M}'$ appartient à leur intersection, donc si M′ appartient à un sous-ensemble algébrique $\mathfrak{M}_0$ de $\mathfrak{M}$.

d. Supposons d'abord $n = 1$, k algébrique fini, et réduisons le problème en tenant compte de *a*, *b* et *c*. Posons, pour tout i, $\mathfrak{D}_i = \mathcal{L}_k(\mathrm{Q} \times \mathrm{M})$. On peut toujours, en désignant par x l'abscisse de M sur S^1, se ramener, s'il y a lieu, par un changement de variable de la forme $x = \varphi(y)$, où φ est un polynome à coefficients dans k, au cas où $\mathfrak{D}_i$ est de genre $\geqq 1$ pour tout i. Le nombre N_i des points $Q'_i \times M'$ de $\mathfrak{D}_i$ rationnels sur k tels que $h(M') < h_0$ satisfait, pour h_0 assez grand, d'après le corollaire 1 du théorème 4, à

$$(12) \qquad N_i < (\operatorname{Log} h_0)^{\frac{r_{i0}}{2} + \mu_i},$$

où r_{i0} désigne le rang réduit de $\mathfrak{D}_i$ dans k et μ_i une constante positive.

Or, le nombre N' des points M' de $\mathfrak{M} = S^1$ rationnels sur k tels que $h(M') < h_0$ est au moins égal à h_0. Parmi ces spécialisations, celles pour lesquelles on a $K'_i = K' = k$ pour un certain i sont en nombre $N \leqq \sum_i N_i$. On a donc, pour h_0 assez grand, compte tenu de (12),

$$N < h_0 < N'$$

et il existe bien une infinité de points M' répondant aux conditions du problème.

e. Le corps k étant toujours algébrique fini, supposons $n > 1$ quelconque. Le problème étant encore réduit compte tenu de a, b et c, raisonnons par récurrence sur n, en désignant par $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées (non homogènes) de M.

Soit I l'ensemble des indices i tels que l'extension $K_i/k(x_1)$ soit régulière et, pour tout $i \in I$, posons

$$\mathfrak{D}_i = \mathcal{L}_{k(x_1)}(Q_i \times M).$$

Soit J l'ensemble des indices i tels que l'extension $K_i/k(x_1)$ soit non régulière et, pour tout $i \in J$, désignons par $k_{1i} = k(R_i)$ la fermeture algébrique de $k(x_1)$ dans K_i.

Alors, d'après le lemme 14 du chapitre I et d'après d, il existe une infinité de spécialisations x'_1 de x_1 rationnelles sur k satisfaisant aux conditions suivantes :

Pour tout $i \in I$, la spécialisation correspondante $\mathfrak{D}'_i$ de $\mathfrak{D}_i$ est définie et est une variété ;

Pour tout $i \in J$, toute spécialisation $R_i \to R'_i$ correspondante est propre et telle que

$$[k(R'_i):k] > 1.$$

x'_1 étant ainsi choisi, pour tout indice i et pour toute spécialisation $Q_i \to Q_{1i}$ compatible avec $x_1 \to x'_1$ sur $K_1 = k(x_2, \ldots, x_n)$, on a $[K_{1i}:K_1] > 1$, en posant $K_{1i} = k(Q_{1i})$. On est alors ramené, pour choisir $x'_2, \ldots, x'_n$, au cas où $\mathfrak{M}$ est de dimension $n - 1$.

f. Passons au cas où k est un corps de type fini quelconque. Soit ρ^* la fermeture algébrique de ρ dans k et posons $k = \rho^*(R)$. On peut trouver, d'après ce qui précède, une infinité de spécialisations $(R, M) \to (R', M')$ sur ρ^* telles que M' soit rationnel sur ρ^* et que, pour tout i, toute spécialisation $Q_i \to Q'_i$ correspondante soit propre et satisfasse à $[\rho^*(Q'_i):\rho(R', M')] > 1$. Les positions correspondantes de M' satisfont aux conditions du problème.

CHAPITRE IV,

Détermination de valeurs atteintes par le rang de certaines courbes de genre donné dans un corps donné.

1. Nous nous proposons dans ce chapitre de démontrer le théorème suivant et d'en donner quelques applications :

Théorème 6. — *Soient* $\mathfrak{M}$ *une variété de dimension n définie sur un corps k de type fini,* M *un point générique de* $\mathfrak{M}$ *sur k et* C *une courbe définie sur* $K = k(M)$. *Soit f une application, définie sur k, de* $\mathfrak{M}$ *sur un espace projectif* S^n. *Considérons le groupe* $\gamma = \gamma(K)$ *attaché à* C *et à* K. *Pour toute spécialisation* $M \to M'$ *sur k telle que la spécialisation correspondante* $C' = C(M')$ *de* C *soit définie, posons* $K' = k(M')$ *et considérons le groupe* $\gamma' = \gamma(K')$ *attaché à* C' *et à* K'.

Alors, il existe une infinité de positions de M' *telles que :*

a. Le point $P' = f(M')$ *de* S^n *soit rationnel sur k;*

b. Le groupe γ' *admette un sous-groupe isomorphe à* γ, [*ce qui entraîne, en particulier,* $r' \geqq r$, $r'_0 \geqq r_0$ *en désignant par r* (resp. r') *le rang et par* r_0 (resp. r'_0) *le rang réduit de* C *dans* K (resp. *de* C' *dans* K')].

On peut supposer que la jacobienne J de C et (si $\gamma \neq 0$) la fonction canonique φ sont définies sur $K = k(M)$.

Soient $Y_i (i = 1, \ldots, r)$ les images sur J d'une base du groupe γ, et pour tout M', considérons les spécialisations Y'_i des Y_i compatibles avec $M \to M'$ sur k. Nous allons montrer qu'il existe une infinité de positions de M' telles que $P' = f(M')$ soit rationnel sur k et que les Y'_i engendrent un sous-groupe de γ' isomorphe à γ.

Introduisons encore le groupe $s\gamma$ des éléments de γ multiples de s et prenons, pour représenter les classes de $\gamma/s\gamma$, les éléments

$$U_h = \sum_i \varepsilon_i Y_i \qquad (0 \leqq \varepsilon_i \leqq s - 1).$$

Soit une spécialisation $M \to M'$ telle qu'on ait, pour un système convenable d'entiers λ_i, les relations

$$(13) \qquad \sum_i \lambda_i Y_i \neq 0, \qquad \sum_i \lambda_i Y'_i = 0.$$

On peut trouver un indice h tel que

$$\sum_i \lambda_i Y_i = U_h \qquad (\bmod s\gamma).$$

a. Supposons qu'on ne puisse pas prendre $U_h = 0$.

Il résulte des relations (13) qu'aucune des solutions de

$$sZ = U_h$$

n'est rationnelle sur K et qu'une certaine spécialisation $\overline{U}'_h$ de l'une d'elles U_h compatible avec $M \to M'$ sur k, est rationnelle sur K'

On a ainsi

$$[K(\overline{U}_h):K] > 1, \qquad [K'(\overline{U}'_h):K'] = 1 \tag{14}$$

b. Si l'on peut prendre $U'_h = 0$, les relations (13) peuvent s'écrire sous la forme

$$s\sum_i \mu_i Y_i \neq 0, \qquad s\sum_i \mu'_i Y'_i = 0'_j,$$

De la seconde relation, on déduit $\sum_i \mu'_i Y'_i = Z'_j$, où Z'_j est une solution (que l'on peut supposer distincte de l'origine) de $sZ' = 0$ sur J'. Or Z'_j est une spécialisation sur k de l'une des solutions Z_j de $sZ = 0$ sur J. Si Z_j est irrationnelle sur K', on a

$$[K(Z_j):K] > 1, \qquad [K'(Z'_i):K] = 1. \tag{15}$$

Sinon on a une relation de la forme $Z_j = \sum_i \nu_i Y_i$, et le système (13) peut être réduit à

$$\sum_i (\mu_i - \nu_i) Y_i \neq 0, \qquad \sum_i (\mu_i - \nu_i) Y'_i = 0,$$

D'autre part, on a pour tout i,

$$|\mu_i| < \frac{|\lambda_i|}{s} + c,$$

où c est une constante. Donc après un nombre assez grand de réductions, on aboutit à un système (14) ou (15), ou à l'un d'un nombre fini de systèmes (13). Or ces derniers sont impossibles si l'on choisit M' en dehors d'un certain sous-ensemble algébrique $\mathcal{M}_1$ de $\mathcal{M}$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 5 du chapitre III à la variété $\mathcal{M} - \mathcal{M}_1$ et à l'ensemble des extensions algébriques $K(\overline{U}_h)$ et $K(Z_j)$ de K.

2. Le théorème 6 va nous permettre de démontrer, pour divers choix du corps k et des entiers r et g, l'existence de courbes de genre g et de rang $\geqq r$ dans k.

Certains résultats peuvent déjà être obtenus au moyen de la proposition suivante :

Proposition 7. — *Soient* C *une courbe de genre* $g \geqq 1$ *définie sur un corps* k *et* $A = (A_1, \ldots, A_m)$ *un système de* m *points génériques indépendants sur* C. *Alors* C *est de rang réduit* $\geqq m$ *dans* $k(A) = k(A_1, \ldots, A_m)$.

En effet, soit n le degré de C et considérons le C-diviseur S obtenu en coupant C par une droite arbitraire. Les C-diviseurs $A_i - A_1$ ($i = 2, 3, \ldots, m$) et $S - nA_1$ appartiennent à G_0 (groupe des C-diviseurs de degré zéro) et sont linéairement indépendants sur C d'après [CA, 1re partie, prop. 8] (1); donc ils engendrent un sous-groupe libre de rang m de γ, d'où la proposition.

Conservons les mêmes notations et soit f une application définie sur k de C sur une droite S^1. Posons, pour tout i, $f(A_i) = x_i$. D'après le théorème 6 il existe une infinité de spécialisations $A \rightarrow A'$ telles que :

a. Les spécialisations correspondantes x'_i des x_i soient rationnelles sur k;

b. C soit de rang réduit $\geqq m$ dans $k(A')$.

Si l'on désigne par δ le nombre des déterminations de $\overset{-1}{f}$, on peut de plus supposer $[k(A'_i):k] = \delta$ pour tout i et $[k(A):k] = \delta^{m}$.

Pour k et g données arbitraires, il existe des courbes C pour lesquelles on peut prendre $\delta = 2$: ce sont les courbes hyperelliptiques de genre g rationnelles sur k. D'où :

Corollaire. — *Toute courbe hyperelliptique définie sur un corps k est de rang réduit $\geqq m$ dans une infinité de corps de degré 2^m sur k.*

Pour $g = 1$, Billing avait déjà obtenu ce résultat et donné l'exemple suivant : ρ désignant le corps des nombres rationnels, la cubique C d'équation $x^3 - x = y^2$ est de rang $\geqq m$ dans le corps $\rho\left(\sqrt{p_1^3 - p_1}, \ldots, \sqrt{p_m^3 - p_m}\right)$, où les p_i sont des nombres premiers distincts (2).

3. Nous nous intéresserons maintenant de façon plus particulière aux valeurs que peut prendre le rang *dans un corps donné* des courbes de certains systèmes linéaires donnés.

Un corps k et un entier $m > 0$ étant donnés, considérons, par exemple, la courbe C de degré m qui passe par un système $A = (A_1, \ldots, A_{m'})$ de $m' = \dfrac{m(m+3)}{2}$ points génériques indépendants *d'un plan* P sur k. Alors on peut spécialiser sur k la courbe C en une courbe C' et le système A en un système A' dont les composants A'_i soient des points génériques indépendants de C' sur $k(C')$. Donc C est de rang réduit $\geqq m$ dans $K = k(C) = k(A)$. On en déduit, en appliquant le théorème 6 qu'il existe une infinité de spécialisations de C de rang réduit $\geqq m'$ dans k. Ainsi il existe pour tout corps k donné, une infinité de cubiques de rang $\geqq 9$ dans k.

Il est possible d'améliorer ce résultat. Soient, en effet, $g > 0$ et $q \geqq 0$ des entiers, k un corps, et considérons dans un plan P, des points $O, D_1, \ldots, D_q$, $A_1, \ldots, A_{3g+5}$ génériques indépendants sur k. Il existe dans ce plan une courbe C et une seule, de degré $g + q + 2$ dont O soit point multiple d'ordre

(1) Ce théorème est énoncé dans le cas d'une courbe sans point multiple. On l'étend au cas d'une courbe quelconque en utilisant une transformation birationnelle.

(2) G. Billing, *Vom Range kubischer Kurven vom Geschlecht Eins in algebraischen Rationalitäts bereichen* (IXe Congrès des Mathématiciens scandinaves, Helsingfors, 1938).

$g+q$, les D_i points doubles et les A_j points simples. Cette courbe est hyperelliptique, de genre g, et admet pour corps de définition

$$K = k(O, D, A) = k(O, D_1, \ldots, D_q, A_1, \ldots, A_{3g+5}).$$

Soit S le C-diviseur obtenu en coupant C par une droite arbitraire. Le C-diviseur S et les points A_j engendrent un sous-groupe de rang $3g+5$ du groupe $\gamma = \gamma(k)$ attaché à C : on peut, en effet, spécialiser C sur $k(O, D)$ en une courbe C et le système A en un système A′ composé de points génériques indépendants de C sur $k(C')$.

Si on leur adjoint le diviseur $A' = A'_1 + A'_2$ obtenu en coupant C par une droite passant par O, on obtient un sous-groupe de rang $3g+6$ de γ (nous le justifierons plus loin). D'où l'existence de courbes de genre g et de rang $\geqq 3g+6$ dans k.

4. Nous allons montrer qu'il existe une catégorie étendue de faisceaux linéaires contenant une infinité de telles courbes.

Théorème 7. — *Soient* P *un plan projectif*, $g > 0$ *et* $q \geqq 0$ *des entiers, et considérons des points distincts* $O, D_1, \ldots, D_q, A_1, \ldots, A_{3g+4}$ *de* P. *Alors, pour presque toute position de ces points :*

A. *Il existe un faisceau linéaire* F *bien déterminé de* P*-diviseurs positifs ayant pour élément générique une courbe* C *de degré* $g+q+2$, *qui admette aux points* O, D_i (*pour tout* i) *et* A_j (*pour tout* j) *les multiplicités respectives* $g+q$, 2 *et* 1. *La courbe* C *est, de plus, hyperelliptique et de genre* g.

B. *Le faisceau* F *admet* g *autres points de base, distincts* $A_{3g+5}, \ldots, A_{4g+4}$.

C. *Tout élément* C′ *de* F *est une courbe ou se compose d'une courbe* C″ *et d'un ensemble de droites* $\Delta_i = OD_i$.

Supposons la condition A *remplie. Soit* k *un corps de définition pour tous les points de base de* F, *et désignons par* r *le rang et par* r_0 *le rang réduit de* C *dans* $K - k(C)$. *Alors on a* $r \leqq 4g+4$, *et pour qu'on ait* $r = r_0 = 4g+4$, *il faut et il suffit que les conditions* B *et* C *soient remplies.*

La première partie de cet énoncé, aisément vérifiable dans le cas de points de base génériques indépendants dans P, s'obtient en appliquant les propriétés des spécialisations.

Pour démontrer la seconde partie, supposons la condition A remplie, et soient les éléments $E_0, E_1, \ldots, E_{4g+4}$ d'une base du sous-groupe G'_0 du groupe G_0 attaché à C engendré par les points A_i et les diviseurs S et A′ de C introduits au paragraphe précédent. Ces éléments ne sont pas linéairement indépendants, car on a l'équivalence linéaire sur C

$$2S + (g-q)A' - \sum_j A_j \sim 0. \tag{16}$$

Le sous-groupe correspondant de γ est de rang $\leqq 4g+4$.

a. Nous allons montrer que tout élément E de $G_0(K)$ est linéairement équivalent à un élément de G'_0. Il en résultera bien $r \leq 4g + 4$ (et $r < 4g + 4$ si la condition B n'est pas vérifiée).

Soit, en effet, B_0 un C-diviseur positif de degré g rationnel sur k composé par exemple de points A_j. On peut trouver un C-diviseur positif de degré g rationnel sur K, et tel que

$$E \sim B - B_0.$$

Soit $\mathcal{B}$ le « lieu » de B sur k qu'on peut définir, avec les notations du chapitre I, par $\mathcal{B} = \mathrm{pr}_P[\mathcal{L}_k(B \times U)]$; U désignant un point générique d'une droite donnée arbitraire, tel que $k(U) = K$ et considérons l'intersection $\mathcal{B} \cap C$. Cette intersection comprend $|E|$; la partie résiduelle ne peut être composée que des points de base O, D_i ou A_j. D'où une relation de la forme

$$\mathcal{B}.C = \lambda(g+q)O + 2\sum_i \mu_i D_i + \sum_j \nu_j A_j + B,$$

où λ, μ_i, ν_j désignent les multiplicités respectives de $\mathcal{B}$ aux points O, D_i, A_j. Donc, si m désigne le degré de $\mathcal{B}$,

$$(m - \lambda)S \sim \left(\sum_i \mu_i - \lambda\right)A' + \sum_j \nu_j A_j + B$$

et on en déduit

$$E \in G'_0 + G_l, \qquad \text{d'où} \qquad G_0(K) = G'_0 + G_l,$$

c'est le résultat annoncé.

b. Supposons maintenant les conditions A, B et C, vérifiées et montrons que l'on a $r = 4g + 4$. Si, en effet, on a $r < 4g + 4$, il existe une relation d'équivalence linéaire entre les E_h de la forme

$$E = \sum_h \lambda_h E_h \sim 0,$$

Introduisons des points $\overline{O}, \overline{D}_1, \ldots, \overline{D}_q, \overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_{3g+4}$ génériques indépendants de P et le faisceau linéaire des courbes de degré $g + q + 2$ ayant en $\overline{O}$, $\overline{D}_i$, $\overline{A}_j$ les multiplicités respectives $g + q$, 2 et 1. Le faisceau $\overline{F}$ admet g autres points de base $\overline{A}_{3g+5}, \ldots, \overline{A}_{4g+4}$ tels que $3g + 4$ quelconques des points A_j $(j = 1, \ldots, 4g + 4)$ forment avec les points $\overline{O}$ et $\overline{D}_i$ un système de points génériques indépendants de P sur k. Soit $\overline{C}$ une courbe générique de $\overline{F}$ et considérons les éléments $\overline{E}_h$ du groupe $\overline{G}_0$ attaché à $\overline{C}$ déduits des E_h en remplaçant les points O, D_i, A_j par $\overline{O}$, $\overline{D}_i$ et $\overline{A}_j$ respectivement pour toutes les valeurs de i et j. Posons

$$\overline{E} = \sum \lambda_h \overline{E}_h.$$

Soit encore le C-diviseur positif fixe B_0 de degré g et soit le $\overline{C}$-diviseur $\overline{B}_0$ correspondant. On peut trouver un $\overline{C}$-diviseur positif $\overline{B}$ de degré g tel que

$$\overline{E} \sim \overline{B} - \overline{B}_0.$$

Soit $\mathcal{B}$ le « lieu » de $\overline{B}$ sur $k(\overline{O}, \overline{D}, \overline{A})$ au même sens que plus haut et considérons l'intersection $\overline{\mathcal{B}}.\overline{C}$. Cette intersection est de la forme

$$\overline{\mathcal{B}}.\overline{C} = \overline{\lambda}(g+q)\overline{O} + 2\sum \overline{\mu}_i \overline{D}_i + \sum \overline{\nu}_j \overline{A}_j + \overline{B}$$

en désignant par $\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}_i$, $\overline{\nu}_j$ les multiplicités respectives de $\overline{\mathcal{B}}$ en $\overline{O}$, $\overline{D}_i$, $\overline{A}_j$.

Désignant par $\overline{D}$ l'ensemble des points $\overline{D}_i$ et par $\overline{A}$ celui des points $\overline{A}_j$, considérons les spécialisations $\overline{O} \to O$, $\overline{D} \to D$, $\overline{A} \to A$ et soit $\overline{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}'$ une spécialisation compatible avec celles-ci sur k. $\mathcal{B}'$ a même degré que $\overline{\mathcal{B}}$ et ses multiplicités en O, D_i, A_j sont au moins égales à $\overline{\lambda}$, $\overline{\mu}_i$, $\overline{\nu}$ respectivement. D'où

$$(17) \qquad \mathcal{B}'.C = \overline{\lambda}(g+q)O + 2\sum_i \overline{\mu}_i D_i + \sum_j \overline{\nu}_j A_j + B',$$

où B' désigne un C-diviseur positif. Ce diviseur est nécessairement, d'après [M, chap. IV, prop. 2], la spécialisation de $\overline{B}$ compatible avec $\overline{C} \to C$ et $\overline{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}'$. Comme $\overline{E} \sim \overline{B} - \overline{B}_0$ sur $\overline{C}$ on a $B' \sim B_0$ sur C.

Montrons qu'il en résulte $B' = B_0$. En effet, la série canonique sur C (qui est l'unique série linéaire sur C de degré $2g-2$ et de dimension $g-1$) est découpée par les systèmes de $g-1$ droites passant par O. D'après le théorème de Riemann-Roch, on ne peut avoir $B' \not\sim B_0$ que si l'on a une relation de la forme $B_0 \succ A'_0$, où A'_0 désigne le C-diviseur de degré 2 obtenu en coupant C par une certaine droite D passant par O; d'après le choix de B_0, A'_0 est nécessairement de la forme $A_j + A_{j'}$; mais alors la courbe de F qui passe par un point de D distinct de O, de A_j et de $A_{j'}$ contient D, ce qui contredit l'hypothèse C.

Si maintenant on désigne par C' une spécialisation de C qui passe par un point de $|\mathcal{B}|$ distinct des points de base de F, $\mathcal{B}$ et C' ont une courbe commune $\mathcal{B}_1$. Celle-ci, d'après l'hypothèse C, ne peut être que C', C'' ou une droite Δ_i. On peut recommencer le raisonnement en remplaçant $\mathcal{B}$ par la partie résiduelle, $\mathcal{B} - n_1\mathcal{B}_1$, où n_1 désigne le coefficient de $\mathcal{B}_1$ dans $\mathcal{B}$, et ainsi de suite jusqu'à épuisement des composantes de $\mathcal{B}$. On voit ainsi que $\mathcal{B}$ est composée exclusivement d'un nombre fini de courbes C' et C'' et de droites Δ_i. On peut donc remplacer $\mathcal{B}$ dans la relation (17), par un P-diviseur de la forme

$$\mathcal{B}' = \rho C' + \sum_i \mu'_i \Delta_i,$$

où C' désigne une spécialisation générique de C et ρ et les μ'_i des entiers. On en déduit, en désignant par $\overline{C}'$ une spécialisation générique arbitraire de $\overline{C}$,

$$\overline{C}.\left(\rho \overline{C}' + \sum_i \mu'_i \overline{\Delta}_i\right) = \overline{\lambda}(g+q)\overline{O} + 2\sum_i \overline{\mu}_i + \overline{D}_i + \sum_j \overline{\nu}_j \overline{A}_j + \overline{B}_0.$$

D'où

$$\overline{C}.\left(\mathcal{B} - \rho\,\overline{C}' - \sum_l \mu'_l\,\overline{\Delta}\right) = \overline{B} - B_0$$

et l'on en déduit sur $\overline{C}$ l'équivalence linéaire $\overline{B} \sim \overline{B}_0$ ou

$$\overline{E} = \sum \lambda_h\,\overline{E}_h \sim 0. \tag{18}$$

Or d'après le choix des points de base de $\overline{F}$, la relation (18) n'est pas modifiée par une permutation arbitraire des $\overline{A}_j$: Si la relation $E \sim 0$ est indépendante de (16), elle entraîne une relation de la forme

$$\alpha\,\overline{S} \sim \beta\,A'' \tag{19}$$

où α et β désignent des entiers positifs.

c. Montrons que la relation (19) est incompatible avec les hypothèses. Considérons pour cela la série linéaire de degré $g+q+2\alpha+2$ et de dimension $q+2\alpha+2$ découpée sur $\overline{C}$ par toutes les adjointes de degré $q+\alpha+1$ admettant O comme point multiple d'ordre $q+\alpha$ et passant simplement par les points D_i. D'après le théorème de Riemann-Roch, cette série est complète. Le $\overline{C}$-diviseur $\alpha\overline{A}'+\overline{S}$ est un élément de cette série. D'après (19), il en est de même du $\overline{C}$-diviseur $\overline{H}.\overline{C}$, où $\overline{H}$ désigne un P-diviseur positif arbitraire de degré $\beta+1$; on peut supposer $k'=k(H)$ linéairement disjoint de K sur k. L'adjointe correspondante $\overline{F}$ est telle que

$$\overline{\Gamma}.\overline{C} = \overline{H}.\overline{C} + (q+\alpha)(g+q)\,\overline{O} + 2\sum_i \overline{D}_i.$$

Soit maintenant une spécialisation sur k de la forme

$$(\overline{O}, \overline{D}, \overline{C}) \to (O', D', C'),$$

avec $C' = C'_0 + \sum_l \Delta'_l$, où l'on désigne par C'_0 une cubique de P générique sur k', par (O', D') un système de $q+1$ points génériques indépendants de C'_0, par Δ'_l $(l=1, \ldots, q')$ un système de q' droites $(q'>q$ passant pas O' dont les q premières sont les droites $O'D'_l$, les autres étant de directions génériques indépendantes.

Soit $\overline{\Gamma} \to \Gamma'$ une spécialisation compatible avec les précédentes sur k'. Si m' et m'_0 désignent le degré et la multiplicité en O' de Γ', on a $m'-m'_0 = 0$ ou 1. Donc l'intersection $\Gamma.C'_0$ est propre. On a

$$\Gamma' \perp C' = \Gamma'.C'_0 + X',$$

où X' désigne un P-diviseur positif tel que $|X'| \subset |\Delta'|$, en posant $\Delta' = \sum_l \Delta'_l$.

D'autre part, l'unique spécialisation de $\overline{\Gamma}.\overline{C}$ compatible avec les précédentes est

$$\Sigma' = \overline{H}.C' + (q+\alpha)(g+q)O' + 2\sum_i D'_i.$$

Donc, d'après le lemme 5 du chapitre I, le C-diviseur $\Sigma' - (\Gamma'.C'_0)$ est positif et tel que

$$|\Sigma' - (\Gamma'.C'_0)| \subset |X'| \subset |\Delta'|.$$

Comme on a aussi $O' \in |\Delta'|$ et $D'_i \in |\Delta'|$ pour tout i, on peut écrire

$$\Gamma'.C'_0 = \overline{H}.C'_0 + Y'.$$

avec $|Y'| \subset |\Delta'|$. Posons

$$\Gamma' = \Gamma'' + \Gamma'_0,$$

avec $|\Gamma'_0| \subset |\Delta'|$ et $|\Gamma''|$ ne contenant aucune des composantes de Δ'. On a

$$\Gamma''.C'_0 = \overline{H}.C'_0 + \lambda'' O' + \sum_k \mu''_k D''_k,$$

où λ'' et les μ''_k désignent des entiers, et les D''_k des points appartenant à $|\Delta'|$ tels que chaque droite Δ'_i en contienne un au plus. Par hypothèse O' et les D''_k forment un système de points génériques indépendants de C'_0. D'après la proposition 7, on a nécessairement $\lambda'' = 0$ et $\mu''_k = 0$ pour tout k. En particulier, Γ'' ne passe pas par O'. Or, si m'' et m''_0 désignent le degré et la multiplicité de Γ'' en O', on a

$$m'' \equiv m''_0 = 0 \quad \text{ou} \quad 1.$$

Il faut donc que Γ'' soit une droite ne passant pas par O', ce qui entraîne $\beta = 0$, contrairement à l'hypothèse.

Finalement, on a bien $r = 4g + 4$ lorsque les conditions A, B et C sont remplies.

d. Réciproquement, la condition A étant encore supposée remplie, soit $r_0 = 4g + 4$; d'après *a* la condition B est remplie également. Supposons que l'une des spécialisations C' de C contienne une courbe Γ distincte de C'. On a

$$\Gamma.C = \lambda(g+q)O + 2\sum \mu_i D_i + \sum \nu_j A_j.$$

D'où, en désignant par m le degré de Γ,

$$(m - \lambda)S \sim \left(\sum \mu_i - \lambda\right) A' + \sum \nu_j A_j,$$

Cette relation étant nécessairement une conséquence de la relation (16), on a un entier ρ tel que

$$m - \lambda = 2\rho, \qquad \sum \mu_i - \lambda = (q - g)\rho, \qquad \nu_j = \rho \quad \text{pour tout } i \text{ et tout } j.$$

Or on a, pour tout j, $\nu_j = 0$ ou 1. En remplaçant, s'il y a lieu, Γ par $C' - \Gamma$, on peut supposer $\rho = 0$, d'où $\lambda = m$, et Γ est composée de droites passant par O. Les points d'intersection de ces droites avec C sont des points de base de F et, comme $\nu_j = 0$, ce sont nécessairement des points D_i. Ces droites sont des droites Δ_i. On retrouve bien la condition C et le théorème 7 est complètement démontré.

En conservant les mêmes hypothèses, et en désignant par k' un corps de définition pour n des points $A_j (n < 4g + 4)$ supposés distincts, on peut affirmer que C est de rang réduit $\geqq n+1$ dans K lorsque les conditions A et C sont vérifiées. On en déduit, en particulier, le corollaire suivant :

Corollaire. — *Les notations étant celles du théorème* 7, *supposons les conditions* A *et* C *vérifiées et les points* O, D_i, A_j $(i=1, \ldots, q)$ $(j=1, \ldots, 3g+5)$ *rationnels sur un corps k donné. Alors, la courbe générique* C *de* F *est de rang réduit* $\geqq 3g+5$ *dans* K. *De plus,* F *contient une infinité de courbes de genre g et de rang réduit* $\geqq 3g+6$ *dans k.*

La première partie de cet énoncé résulte immédiatement de ce qui précède. La seconde s'obtient en remarquant que la courbe de F passant par un point A générique de P est de rang réduit $\geqq 3g+6$ dans $k(A)$ et en appliquant le théorème 6.

Ainsi, pour $g=1$, $q=0$, on obtient l'énoncé suivant :

Par huit points du plan rationnel sur un corps k donné tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas en ligne droite, ni six sur une même conique, il passe une infinité de cubiques de rang réduit $\geqq 9$ *dans k.*

5. Théorème 8. — *Les notations et les hypothèses étant celles du corollaire du théorème* 7, *soit* Δ *une droite du plan définie sur k et coupant* C *en deux points au moins distincts des points de base (si* $g+q>2$, *il faut et il suffit pour cela que* Δ *ne coïncide pas avec l'une des droites* OD_i *ou* OA_j*). Soit* B *l'un de ces points. Alors* C *est de rang* $\geqq 3g+6$ *dans* $k(B)$ [1].

Si l'on suppose $r<3g+6$, on a en effet une relation de la forme

$$\rho B \sim \lambda S + \lambda' A' + \sum \mu_j A_j = R, \tag{20}$$

où ρ, λ, λ', $\mu_j (j=1, \ldots, 4g+4)$ désignent des entiers. On a une relation de la forme

$$S_0 = C.\Delta_0 = E + \sum_\nu B^{(\nu)}$$

en désignant par $B^{(\nu)} (\nu = 0, 1, \ldots, t)$ les conjugués de B par rapport à $K=k(C)$ et par E un C-diviseur positif composé uniquement de points du système O, D, A.

La jacobienne J de C et la fonction canonique φ peuvent, être supposées définies sur k. L'image sur J du C-diviseur ρB est, d'après (20), rationnelle sur k et coïncide, pour tout ν, avec celle de $\rho B^{(\nu)}$. Donc on a

$$\rho B^{(\nu)} \sim R$$

pour tout ν, et l'on en déduit

$$\rho \sum_\nu B^{(\nu)} \sim t R$$

---

[1] Il semble probable que l'énoncé reste valable lorsqu'on y remplace le mot « rang » par « rang réduit ». Nous n'avons pu obtenir une démonstration de ce fait.

ou encore

$$\rho(S_0 - E) \sim t R.$$

D'après le théorème 7, ceci n'est possible que si l'on peut prendre $R = \rho'(S_0 - E)$, ou ρ' désigne un entier, nécessairement tel que $\rho = \rho' t$. Donc

$$\rho B^{(\nu)} = \rho' t B^{(\nu)} \sim \rho'(S_0 - E)$$

pour tout ν. Si l'on ne peut pas prendre $\rho' = 1$, le sous-groupe de torsion du groupe $\gamma[k(B)]$ attaché à C n'est pas nul, d'où $\bar{r} > \bar{r}_0$ en désignant par $\bar{r}$ le rang et par $\bar{r}_0$ le rang réduit de C dans $k(B)$. Comme on a, d'après le théorème 7, $\bar{r}_0 \geqq 3g + S$, on a bien $\bar{r} \geqq 3g + 6$.

Supposons donc $\rho' = 1$, d'où

$$t B^{(\nu)} = S_0 - E$$

et considérons les adjointes d'ordre $q + 1$ de C ayant en O l'ordre de multiplicité q et passant simplement par les points D_i. Ces adjointes découpent sur C la série linéaire complète de dimension $q + 2$ et de degré $g + q + 2$ de tous les diviseurs positifs linéairement équivalents à S.

Pour tout indice ν, il existe une telle adjointe Γ pour laquelle

$$\Gamma . C = E + t B^{(\nu)}.$$

Soit maintenant un point de base de F n'appartenant pas à E, par exemple A_1. On peut trouver une spécialisation C′ de C sur k telle que l'adjointe (ou l'une des adjointes) Γ' correspondantes passe par A_1.

Alors l'intersection $\Gamma \cap C'$ contient une courbe passant par A_1 et de degré $\leqq q + 1$, Cette courbe ne peut être, ni C′, ni l'une des courbes C″ (dont le degré est $\geqq q + 2$), ni l'une des droites Δ_i, contrairement à l'hypothèse C.

6. Théorème 9. — *Par six points arbitraires du plan rationnel sur un corps k donné, non situés sur une même conique et tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas en ligne droite, il passe une infinité de cubiques de rang réduit* $r_0 \geqq 10$ *dans k.*

En effet, soient $A_3, \ldots, A_8$ les points donnés. D'après le théorème 7, on peut faire passer par ces points une cubique C_0, rationnelle sur une extension transcendante pure k' de k, telle que le groupe $\gamma_0(k')$ attaché à C_0 soit sans torsion, et que le sous-groupe de $\gamma_0(k')$ engendré par les points A_i et par la section de C par une droite arbitraire soit de rang $\geqq 6$. Soient A'_1 et A'_2 deux autres points de C_0 rationnels sur k', A_1 et A_2 leurs tangentiels (ou points de rencontre de C_0 avec les tangentes T_1 et T_2 en A'_1 et A'_2 respectivement) et supposons A'_1 et A'_2 choisis de telle manière que trois quelconques des $A_i (i = 1, \ldots, 8)$ ne soient pas en ligne droite, ni six sur une même conique. Soient F le faisceau linéaire de cubiques ayant pour points de base les $A_i (i = 1, \ldots, 8)$, C une courbe générique de F sur k' et B_1 (resp. B_2) l'un des points communs de C et T_1 (resp. B_2) distinct des A_i.

Considérons des représentations paramétriques propres de T_1 et T_2 et soient u_1 et u_2 les paramètres respectifs de B_1 et B_2. Ces paramètres sont liés par une relation $\varphi(u_1, u_2) = 0$ représentant une quartique à trois points doubles, donc de genre zéro. Cette courbe est définie sur k et possède un point rationnel non multiple (associé à la courbe C qui passe par le point de rencontre de T_1 et T_2), donc admet une représentation rationnelle à coefficients dans k. Si u désigne le paramètre correspondant, on a $k(B_1, B_2) = k(u)$.

Soit $\gamma(K)$ le groupe attaché à C et à $K = k(u)$. Comme $C_0 \in F$ et comme le groupe $\gamma_0(k)$ attaché à C_0 est sans torsion, il en est de même *a fortiori* de $\gamma(K)$.

Si l'on suppose $r_0 < 10$, on a une relation de la forme

$$\rho_1 B_1 + \rho_2 B_2 \sim \lambda S + \sum \mu_i' A_i. \tag{22}$$

Soient B_1' et B_2' les images respectives de $\rho_1 B_1$ et $\rho_2 B_2$ sur la jacobienne J de C (que l'on peut supposer confondue avec C). Les points B_1' et B_2' admettent respectivement pour corps de définition respectifs les corps $k(B_1)$ et $k(B_2)$, qui sont linéairement disjoints sur $K = k(C)$. Or la relation (22) entraîne $k(B_1') = k(B_2')$. Par suite, ces deux corps coïncident avec K. Donc, d'après le théorème 7, chacun des points B_1' et B_2' forme avec les points de base un système de rang réduit < 9. Ceci est en contradiction avec le théorème 8 et le fait que $\gamma(K)$ est sans torsion.

La courbe C est donc de rang $\geqq 10$ dans K et le résultat annoncé s'obtient en appliquant le théorème 6.

Remarque. — En utilisant les points d'intersection de C avec des droites rationnelles passant par O (dans le cas du théorème 8) ou par l'un des points A_i (dans le cas du théorème 9), on obtient, quel que soit l'entier m, par une méthode analogue à celle utilisée ci-dessus, des courbes de genre g et de rang $\geqq 3g + 6 + m$, une infinité de cubiques de rang réduit $\geqq 10 + m$ dans une infinité de corps de degré 2^m.

7. On peut rattacher les résultats qui précèdent à ceux du chapitre II en introduisant dans chaque cas la variéte $\mathcal{C}$ correspondante.

Considérons, en particulier, le cas du théorème 7. Si $f(x, y) + u\,g(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe C générique de F, on peut aussi considérer cette équation comme celle de la surface $\mathcal{C}$ rapportée à un espace à trois dimensions. Le groupe $\gamma(K)$ n'étant pas modifié quand on remplace k par un surcorps, la variété Ω correspondante (ainsi que la variété de Picard Π de $\mathcal{C}$) est un point. Ce résultat est bien conforme à ceux de la théorique classsique de la théorie des surfaces : la variété $\mathcal{C}$ étant rationnelle, son irrégularité, égale à la dimension de Π, est nulle. Dans ces conditions, et d'après les résultats du chapitre II, le groupe $\gamma(K)$ est isomorphe au groupe de Severi $\mathcal{G}/\mathcal{G}_a$ de $\mathcal{C}$. Avec ces notations le théorème 7 est donc équivalent au suivant :

Le groupe de Severi de $\mathcal{C}$ est de rang $\leqq 4g + 4$. Pour que ce groupe soit sans torsion et de rang $4g + 4$, il faut et il suffit que la condition A *soit vérifiée.*

Il y aurait lieu de chercher à obtenir des résultats analogues dans des cas plus généraux. Dans le cas du théorème 8, la variété Ω est bien encore réduite à un point, mais nous n'avons obtenu qu'une borne inférieure du rang de C dans $k(u)$ et nous pouvons seulement affirmer que le rang du groupe de Severi de C est au moins égal à $3g+6$.

Les difficultés qui se présentent lorqu'on cherche à obtenir, par application du théorème 6, des valeurs plus élevées du rang r de C dans k pour g et k donnés semblent en accord avec l'hypothèse généralement admise que r admet dans ces conditions et lorsque k est un corps algébrique fini une borne supérieure absolue ρ_0.

Si cette hypothèse est exacte, elle le reste, d'après le théorème 6, lorsqu'on remplace k par une extension transcendante pure arbitraire; de plus, la borne supérieure est la même dans les deux cas.

BIBLIOGRAPHIE.

CHAPITRES I ET II.

P. SAMUEL :

[M] *La notion de multiplicité en Algèbre et en Géométrie algébrique* (Thèse, Paris, 1949)

A. WEIL :

[A] *L'arithmétique sur les courbes algébriques* (*Acta mathematica*, t. 52, 1929).

[F] *Foundations of Algebraic Geometry* (*Amer. Math. Soc. Colloquium*, New-York, 1946)

[VA] *Variétés abéliennes et courbes algébriques* (*Act. Sc. et Ind.*, n° 1064, Paris, 1948).

CHAPITRES III ET IV.

D. G. NORTHCOTT :

[I₁] *An inequality in the theory of arithmetic on algebraic varieties* (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 45, 1949, p. 502-509).

[I₂] *A further inequality in the theory of arithmetic on algebraic varieties* (*Ibid.*, p. 510-518)

A. WEIL :

[CA] *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent* (*Publ. Inst. Math.* Strasbourg, 1945; *Act. Sc. et Ind.*, n° 1041, Hermann, Paris, 1948).

[AV] *Arithmetic on algebraic varieties* (*Ann. of Math.*, vol. 53, n° 3, May, 1951.).