Bulletin de la S. M. F.

V.-S. Krishnan

Les algèbres partiellement ordonnées et leurs extensions

Bulletin de la S. M. F., tome 78 (1950), p. 235-263
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1950__78__235_0>

LES ALGÈBRES PARTIELLEMENT ORDONNÉES ET LEURS EXTENSIONS;

PAR M. V.-S. KRISHNAN.

Introduction. — Dans ce premier article, nous considérons un problème d'extension.

Pour les algèbres qui ont une structure complètement déterminée par une relation d'ordre partiel, M. H. M. Mac Neille a donné une théorie des extensions canoniques [7] (¹). Mais il y a lieu de considérer aussi les algèbres partiellement ordonnées où existent une ou plusieurs opérations définies indépendamment de l'ordre, mais vérifiant une relation d'homogénéité

$$(a \prec b \succ\!\!\!\rightarrow a.c \prec b.c \text{ et } c.a \prec c.b) \quad (^2),$$

l'exemple le plus typique étant celui des groupes réticulés. Parmi ces algèbres, il y a aussi celles qui possèdent une somme $\sum\limits_{a_i \in A} a_i$, pour chaque sous-ensemble non vide A, ces sommes étant distribuées des deux côtés par une opération (.). Dans ces cas-là, les *résiduels* ou *compléments relatifs* à gauche et à droite existent et jouent souvent un rôle important.

Donc nous cherchons à immerger une algèbre partiellement ordonnée, K[6], définie comme un ensemble partiellement ordonné avec *une* multiplication (.) binaire, associative et homogène par rapport à l'ordre, dans une *algèbre complètement additive* L[6], système complétement additif par rapport à une relation d'ordre partiel, fermé pour une multiplication (.) binaire, associative qui distribue les sommes des deux côtés. Il est facile de trouver les extensions (L) de cette sorte pour une algèbre (K) donnée. Mais contrairement à ce qui avait lieu dans le cas traité par M. Mac Neille, il n'est plus possible de trouver une extension qui soit minimale et unique (en un sens convenable). Nous introduisons une équivalence « $\equiv$ » très naturelle pour les extension L_i d'une algèbre ordonnée K, et nous considérons trois relations d'ordre partiel R, R*, $\subset$ entre ces extensions,

(¹) Les nombres entre crochets se rapportent aux Ouvrages cités dans la bibliographie (p. 263).

(²) Le signe $\succ\!\!\!\rightarrow$ représente une relation d'implication.

dont la dernière est celle qui se rapproche le plus de celle de M. Mac Neille. On a les implications :

$$\equiv \rightarrowtail R^{\star}; \qquad \equiv \rightarrowtail R^{\star -1}; \qquad R^{\star} \rightarrowtail R; \qquad R^{\star} \rightarrowtail \subset;$$

et l'on voit sur des exemples (exemple 1 et 2 § 7) que ces implications ne sont pas inversibles et que R et $\subset$ sont indépendantes.

Les exemples (exemple 1, § 7) montrent aussi qu'on ne peut pas trouver, en général, une extension de K par rapport à $R^{\star}$ [3]. Seules les extensions minimales par rapport à R existent; et il y en a souvent plusieurs (exemple 2, § 7). Mais parmi ces extensions R-minimales, nous montrons qu'il y en a une seule (à l'équivalence $\equiv$ près) qui est minimale par rapport à $R^{\star}$. Cette extension, définie d'une façon unique comme $R^{\star}$-minimale parmi les extensions R-minimales, est l'*extension basique* que nous construisons (§ 4). En réalité, nous avons un résultat plus fort : l'extension basique est $R^{\star}$-minimale dans la famille des *extensions normales* (th. 3, 2°) qui contient, en général, strictement la famille des extensions R-minimales (exemple 3, § 7). Il y a une autre relation entre les extensions R-minimales et les extensions normales : chaque extension normale contient une sous-algèbre, son noyau, qui est une extension R-minimale (th. 3, 1°).

L'extension basique ainsi construite s'identifie dans plusieurs cas particuliers, à des algèbres bien connues. Par exemple, quand K est un système multiplicatif (avec la multiplication $\frown$ définie par l'ordre remplaçant la multiplication.) l'extension basique de K s'identifie à l'extension canonique de M. Mac Neille, treillis complètement additif avec toutes les sommes distribuées (§ 6.1). Pour la chaîne des nombres rationnels dans l'intervalle fermé (0, 1) avec la multiplication usuelle, l'extension basique s'identifie à la chaîne des nombres réels dans le même intervalle; plus généralement, pour une chaîne quelconque avec une multiplication (.) continue par rapport à la topologie intrinsèque de la chaîne et homogène par rapport à l'ordre, l'extension basique peut être obtenue par l'adjonction des limites supérieures (§ 6.3).

Les algèbres partiellement ordonnées, les algèbres additives et les algèbres complètement additives admettent aussi des représentations au moyen d'algèbres d'endomorphismes respectivement d'un ensemble partiellement ordonné, d'un système (ou demi-treillis) additif, et d'un système (ou demi-treillis) complètement additif (§ 2). De plus la famille des applications d'un ensemble quelconque A, *dans* une algèbre partiellement ordonnée C avec 0, forment une algèbre partiellement ordonnée C^{A}, et son extension basique est isomorphe à l'algèbre $(EC)^{A}$, des applications de A *dans* l'extension basique (E C) de C (th. 5). Et l'on peut prendre ici pour C et (E C) la chaîne des nombres rationnels et celle des nombres réels dans (0, 1).

Enfin, la famille des S-idéaux d'un anneau de quotients R d'un anneau commutatif S (les dominateurs étant pris dans un sous-ensemble T de S multipli-

---

[3] Le problème de savoir si l'on peut trouver pour toute ($\prec$, .)-algèbre des extensions $\subset$-minimales, reste encore à résoudre; il semble d'ailleurs que la réponse soit probablement négative.

cativement fermé et ne contenant pas o) [8] constitue l'extension basique de la famille des S-idéaux fractionnaires de R (§ 6.4).

Cet article se termine par la considération des congruences définies sur une algèbre additive avec o et sur son extension basique; en particulier, les congruences définies par la classe d'éléments congrus à o sont comparés pour l'algèbre additive et pour son extension.

1. Définitions et préliminaires. — Un ensemble partiellement ordonné K (l'ordre partiel $\prec$ étant réflexif, transitif et satisfaisant : $a \prec b,\ b \prec a \succ\!\!\!\rightarrow a = b$) est appelé *algèbre partiellement ordonnée* ou $(\prec, .)$-*algèbre*, si K est aussi fermé pour une multiplication associative (.) qui vérifie la condition d'homogénéité

$$a \prec b \succ\!\!\!\rightarrow a.c \prec b.c \qquad \text{et} \qquad c.a \prec c.b.$$

Une *algèbre complétement additive*, ou $\left(\sum^{*}.\ .\right)$-algèbre, L, est une algèbre partiellement ordonnée dans laquelle chaque sous-ensemble non vide A possède une somme $a = \sum_{a_i \in A} a_i$, définie par les conditions $a \succ$ chaque a_i (4), et $a \prec x$ quand x est un élément de L qui est $\succ$ chaque a_i; de plus, chaque somme $a = \sum_{a_i \in A} a_i$ est distribuée par (.) (des deux côtés) (5), c'est-à-dire

$$a.b = \sum_{a_i \in A} (a_i.b) \qquad \text{et} \qquad b.a = \sum_{a_i \in A} (b.a_i),$$

pour chaque b de L. Nous écrirons $a = \sum^{*}_{a_i \in A} a_i$ quand la somme de A existe et est distribuée par (.).

Une *algèbre additive*, est, de même, une algèbre partiellement ordonnée dans laquelle les sommes existent pour les sous-ensembles *finis* et sont distribuées par (.); nous écrirons $a +^{*} b$ pour $\sum^{*}(A)$ quand $A = (a, b)$ et $a + b$ pour $\sum A$, et l'algèbre additive est aussi appelée une $(+^{*}, .)$- *algèbre*.

Remarquons que les sommes (et par dualité, les produits) des éléments sont définies aussi dans un ensemble partiellement ordonné comme ci-dessus. Un ensemble partiellement ordonné contenant les sommes (les produits) de chaque sous-ensemble fini est appelé un *demi-treillis additif* (un demi-*treillis multiplicatif*). De plus, si les sommes (les produits) existent pour chaque sous-ensemble non vide, nous avons un *demi-treillis complètement additif* (complètement multiplicatif).

C'est facile à voir qu'un demi-treillis additif peut être défini aussi comme un ensemble fermé par rapport à une opération binaire (+) qui est commutative, asso-

---

(4) $a \succ b$ est équivalent à $b \prec a$.

(5) Nous ne considérons que la distributivité des deux côtés; donc la mention « des deux côtés » est supprimée dorénavant.

ciative et tautologique (l'ordre partiel étant défini en suite par $a \prec b$ si $a + b = b$); pareillement un demi-treillis complètement additif est un ensemble fermé pour une opération $\left(\sum\right)$ définie pour chaque sous-ensembles non vide, commutative associative sans restriction et tautologique. On peut donc définir les structures d'algèbre additive ou complètement additive entièrement par les opérations $+$ et ., ou $\sum$ et ., en ajoutant les lois des distributivités; c'est la raison de la notation $(+^{\cdot}, .)$-algèbre ou $\left(\sum^{*}, .\right)$-algèbre.

2. **Les représentations par endomorphismes.** — Si E est un ensemble partiellement ordonné, en particulier, un demi-treillis additif ou complètement additif, on peut définir une multiplication (.) pour les *endomorphismes* de E (homomorphismes de E *dans* lui-même conservant l'ordre, et les opérations $+$ ou $\sum$ quand E est fermé pour elles) par $(f.g)(x) = f[g(x)]$ pour chaque x de E. On voit que cette multiplication est homogène par rapport à l'ordre partiel $\prec$ défini par $f \prec g \rightleftharpoons f(x) \prec g(x)$ pour chaque x de E; donc les endomorphismes d'un ensemble partiellement ordonné E, forment une $(\prec, \ )$-algèbre $\mathcal{F}(E)$; $\mathcal{F}(E)$ possède un élément-unité 1, la transformation identique de E sur lui-même. Inversement, nous voyons qu'une $(\prec, .)$-algèbre K avec élément-unité 1 est isomorphe (par rapport à $\prec$ et .) à une sous-algèbre (pour $\prec$, .) d'une telle algèbre des endomorphismes $\mathcal{F}(E)$; nous prenons K lui-même pour E; et l'association $a \in K \rightarrow a(x) \in \mathcal{F}(K)$, où $a(x)$ est définie par $a(x) = a.x$ dans K, est un isomorphisme de K avec une sous-algèbre de $\mathcal{F}(K)$ $[a(x).b(x)$ dans $\mathcal{F}(K) = (a.b)(x)$; et $a(x) \prec b(x)$ dans $\mathcal{F}(K) \rightarrow a(1) \prec b(1)$ ou $a \prec b$ dans K, donc $a(x) = b(x) \rightarrow a = b]$.

Nous avons donc la caractérisation suivante des algèbres ordonnées avec élément-unité :

2.1. *Une algèbre partiellement ordonnée avec élément-unité* est isomorphe à une sous-algèbre d'une algèbre partiellement ordonnée des endomorphismes d'un ensemble *partiellement ordonné.*

De la même façon, en considérant les endomorphismes d'un demi-treillis additif ou complètement additif qui conservent $+$ ou $\sum$, nous pouvons déduire que :

2.2 Une *algèbre additive avec élément-unité* est isomorphe à une sous-algèbre d'une algèbre additive des endomorphismes d'un *demi-treillis additif*; et

2.3. Une *algèbre complètement additive avec élément-unité* est isomorphe à une sous-algèbre d'une algèbre complètement additive des endomorphismes d'un *demi-treillis complètement additif.*

3. **Les extensions et les relations entre elles.** — Après ces préliminaires sur les algèbres ordonnées, revenons au problème posé dans l'Introduction; chercher

une algèbre complètement additive dans laquelle on peut immerger une algèbre partiellement ordonnée K, donnée. Définissons ces *extensions* d'une façon plus précise et quelques relations d'ordre partiel entre elles, destinées à la classification des extensions. D'abord nous considérons les définitions des *homomorphismes* et *isomorphismes*.

3.1. K, K′ sont des algèbres partiellement ordonnées, et φ une transformation univoque de K *dans* K′ : $\varphi(a) \in K'$ pour chaque $a \in K$. Alors :

1° φ est un *isomorphisme de* K *sur* K′ si φ est biunivoque, si chaque élément de K′ est l'image d'au moins un élément de K, et si φ, φ^{-1} conservent $\prec$ et $(.)$; c'est-à-dire

$$a \prec b \text{ dans } K \rightleftharpoons \varphi(a) \prec \varphi(b) \text{ dans } K'$$

et

$$a = b.c \text{ dans } K \rightleftharpoons \varphi(a) = \varphi(b).\varphi(c) \text{ dans } K',$$

2° φ est un *homomorphisme de* K *dans* K′, si φ conserve $\sum^*$ et . ; c'est-à-dire

$$a = \sum_i{}^* a_i \text{ dans } K \rightarrowtail \varphi(a) = \sum_i{}^* \varphi(a_i) \text{ dans } K',$$

et

$$a = b.c \text{ dans } K \rightarrowtail \varphi(a) = \varphi(b).\varphi(c) \text{ dans } K'.$$

3° φ est un *homomorphisme biunivoque de* K *dans* K′ si φ est un homomorphisme de K dans K′ et aussi une transformation biunivoque [c'est-à-dire $\varphi(a) = \varphi(b)$ dans $K' \rightarrowtail a = b$ dans K].

Étant donné une algèbre partiellement ordonnée K, une algèbre complètement additive L_1 est appelée *extension de* K avec K_1 pour image de K, s'il y a un homomorphisme biunivoque φ_1 de K dans L_1 qui est de plus un isomorphisme de K sur K_1 [$= \varphi_1(K)$] : K_1 est bien une sous-algèbre de L_1 pour $(.)$, donc peut avec l'ordre partiel de L_1 être considérée comme $(\prec, .)$-algèbre.

Introduisons différentes relations d'ordre entre deux extensions L_1, L_2 de K, dans lesquelles K_1, K_2 sont les images de K :

3.2. Une transformation φ de L_1 dans L_2 est appelée une transformation *sur* K si φ est aussi un isomorphisme de K_1 sur K_2;

1° $L_1 R L_2$ s'il y a un homomorphisme φ de L_1 dans L_2, sur K;

2° $L_1 R^* L_2$ s'il y a un homomorphisme biunivoque φ de L_1 dans L_2, sur K;

3° $L_1 \subset L_2$ s'il y a une sous-algèbre L'_1 de L_2 pour $(., \prec)$ contenant K_2 et un isomorphisme de L_1 sur L'_1 sur K;

4° $L_1 \equiv L_2$ s'il y a un isomorphisme de L_1 sur L_2, sur K.

La dernière est une relation d'équivalence et L_1, L_2 sont dites « équivalentes » quand $L_1 \equiv L_2$. On a évidemment

$$L_1 \equiv L_2 \rightarrowtail L_1 R^* L_2 \rightarrowtail L_1 R L_2.$$

D'autre part, $L_1 R^* L_2 \rightarrow L_1 \subset L_2$, car l'homomorphisme biunivoque φ de L_1 dans L_2 sur K, est un isomorphisme de L_1 sur $L'_1 = \varphi(L_1)$, et L'_1 est une sous-algèbre de L_2 pour $(\prec, .)$. En effet, $\varphi(a).\varphi(b)$ dans L_2 n'est pas autre que $\varphi(a.b) \in L'_1$, donc L'_1 est une sous-algèbre de L_2 pour $(.)$, et l'ordre partiel de L_2 induit un ordre partiel de L'_1; donc L'_1 est une sous-algèbre de L_2 pour $(\prec, .)$ et φ est un homomorphisme *biunivoque* de L_1 sur L'_1, sur K; mais il s'ensuit que φ, φ^{-1} conservent $(\prec, .)$ [car $a \prec b \rightleftharpoons a +^* b = b$ dans $L_1 \rightleftharpoons \varphi(a +^* b) = \varphi(a) +^* \varphi(b) = \varphi(b)$ dans $L_2 \rightleftharpoons \varphi(a) \prec \varphi(b)$ dans L_2 et L'_1, et $a = b.c$ dans $L \rightleftharpoons \varphi(a) = \varphi(b).\varphi(c)$ dans L_2 et dans L'_1].

3.3. Une extension L_1 est déterminée à une équivalence près par l'assignation de l'image K_1 de K dans L_1; on note que plusieurs homomorphismes biunivoques de K dans L_1 qui sont aussi isomorphismes de K sur K_1 peuvent exister; mais ils diffèrent seulement par l'effet des automorphismes de K [c'est-à-dire si $\mathbf{A} = (\alpha)$ est la famille des automorphismes de K sur lui-même et φ_1 un des homomorphismes de K dans L_1 qui est de plus un isomorphisme de K sur K_1, tous les holomorphismes d'une telle sorte sont donnés par la famille $(\varphi_1 . \alpha)$, $\alpha \in \mathbf{A}$].

4. *L'extension basique*. — Soient K une algèbre ordonnée, $\mathcal{B}(K)$ l'algèbre de Boole formée par les sous-ensembles de K et partiellement ordonnée par la relation d'inclusion $\subset$ [6]. Pour X, Y de $\mathcal{B}(K)$ désignons par :

$\bigwedge(X)$ l'ensemble des $y \in K$, inférieur à au moins un $x \in X$;
$\bigvee(X)$ l'ensemble des $z \in K$, supérieur à au moins un $x \in X$;
$\sum^*(X)$ l'ensemble des $x \in K$, vérifiant $x = \sum^* x_i$ pour quelques $x_i \in X$

et XY l'ensemble des $(x.y)$ pour $x \in X$ et $y \in Y$.

Visiblement X est contenu dans chacun des ensembles $\bigwedge(X)$, $\bigvee(X)$ et $\sum^*(X)$.

Lemme 1. — *Les sous-ensembles* A *de* K *pour lesquels* $\bigwedge(A) \subset A$ et $\sum^*(A) \subset A$, *forment une sous-famille* M *de* $\mathcal{B}(K)$ *contenant* o *(l'ensemble vide)*, K, *et l'intersection de chaque sous-famille de* M; *la correspondance* $A \rightarrow \bar{A} =$ *le plus petit élément de* M *contenant* A, *est une opération de fermeture*

$$A \subset \bar{A}, \qquad \bar{\bar{A}} = \bar{A}, \qquad A \subset B \rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}.$$

Démonstration. — Les conditions $\bigwedge(A) \subset A$ et $\sum^*(A) \subset A$ peuvent évidemment être remplacées par $\bigwedge(A) = A$ et $\sum^*(A) = A$. Aussi la vérification que o, K et l'intersection $(\cap A_\lambda)$, des ensembles A_λ satisfaisant aux conditions $\bigwedge(A) \subset A$ et $\sum^*(A) \subset A$, satisfont aussi les mêmes conditions est immé-

(6) $\subset$: inclusion au sens faible, c'est-à-dire réflexive.

diate. Il en résulte que M est un treillis complet; et pour chaque A de $\mathcal{B}(K)$ il existe des éléments de $M \supset A$ (K en est toujours un); l'intersection de ces éléments nous donne le plus petit élément de M contenant A. Donc $\overline{A}$ existe; et, d'après la définition même $A \subset \overline{A}$, $A \subset B \rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ et $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Lemme 2. — *Entre* $A(\subset K)$ *et* $\overline{A}$ *il existe une suite non décroissante bien ordonnée de sous-ensembles de* K

$$A = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_\sigma \subset \ldots \subset A_\lambda = \overline{A},$$

tels que

$$A_{\sigma+1} = \sum{}^{*} [\wedge (A_\sigma)] \qquad \text{et} \qquad A_\rho = \left(\bigcup_{\sigma<\rho} A_\sigma\right),$$

pour un nombre ordinal-limite ρ; *et l'on a*

$$\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B} \text{ pour } A,\ B \in \mathcal{B}(K).$$

Démonstration. — Construisons par induction la suite bien ordonnée de sous-ensembles de K

$$A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_\sigma \subset \ldots,$$

en posant

$$A_0 = A; \qquad A_{\sigma+1} = \sum{}^{*} [\wedge (A_\sigma)] \qquad \text{et} \qquad A_\rho = \bigcap_{\sigma<\rho} A_\sigma,$$

pour un nombre ordinal-limite ρ. Cette famille ordonnée totalement par $\subset$ vérifie la condition que chaque sous-famille possède une borne supérieure (la réunion); il résulte donc du lemme de Zorn que cette famille possède un élément maximal A_λ. Alors $A_{\lambda+1} \supset A_\lambda$ entraîne $A_{\lambda+1} = A_\lambda$, d'où $\overline{A_\lambda} = A_\lambda$

$$\left[\text{car } A_{\lambda+1} = \sum{}^{*} (\wedge A_\lambda) \supset \sum{}^{*} A_\lambda \text{ et } \supset \wedge A_\lambda\right].$$

Évidemment $A_0 = A \subset \overline{A}$ et $\sum{}^{*}\left[\wedge\left(\overline{A}\right)\right] = \overline{A}$ entraînent par induction $A_\sigma \subset \overline{A}$ pour chaque σ; donc $A_\lambda \subset \overline{A}$ et $\overline{A_\lambda} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A}$; d'autre part $A = A_0 \subset A_\lambda$; et donc $\overline{A} = \overline{A_\lambda}$; d'où nous avons $\overline{A} = \overline{A_\lambda} = A_\lambda$.

En utilisant ce mode de construction transfini de $\overline{A}$ à partir de A, nous allons voir que

$$AB \subset \overline{C} \rightarrow \overline{A}B \subset \overline{C};$$

il en résultera par symétrie

$$AB \subset \overline{C} \rightarrow A\overline{B} \subset \overline{C},$$

donc aussi

$$AB \subset \overline{C} \rightarrow \overline{A}B \subset \overline{C} \rightarrow \overline{A}\,\overline{B} \subset \overline{C} \rightarrow \overline{\overline{A}\,\overline{B}} \subset \overline{\overline{C}} = C.$$

en remplaçant C par AB, $AB \subset \overline{AB}$ nous donne $\overline{\overline{A}\,\overline{B}} \subset \overline{AB}$; mais $AB \subset \overline{A}\,\overline{B}$ entraîne $\overline{AB} \subset \overline{\overline{A}\,\overline{B}}$; donc $\overline{AB} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}}$, et le lemme sera établi.

Il reste donc à montrer que $AB \subset \overline{C} \rightarrow \overline{A}B \subset \overline{C}$. Nous utilisons l'induction transfinie :

1° $A_0 B = AB \subset \overline{C}$ par l'hypothèse;

2° si $A_\sigma B \subset \overline{C}$ alors $A_{\sigma+1} B \subset \overline{C}$, car $A_{\sigma+1} B = \{x . b\}$, où $b \in B$ et $x = \sum_i^* x_i$ dans K pour $x_i \prec a_i$ de A_σ; c'est-à-dire

$$A_{\sigma+1} B = \left\{ \sum_i^* (x_i . b) \right\}, \qquad \text{où} \quad x_i . b \prec a_i . b \in A_\sigma B \subset \overline{C},$$

donc

$$\sum_i^* (x_i . b) \in \sum^* \wedge (A_\sigma B) \subset \sum^* \wedge (\overline{C}) = \overline{C}, \qquad \text{d'où} \qquad A_{\sigma+1} B \subset \overline{C},$$

3° si $A_\sigma B \subset \overline{C}$ pour chaque $\sigma < \rho$ un nombre ordinal-limite,.

$$A_\rho B = \left[\bigcup_{\sigma < \rho} A_\sigma \right] B = \bigcup_{\sigma < \rho} [A_\sigma B] \subset \overline{C}.$$

La propriété est vraie pour chaque A_σ, en particulier pour $A_\lambda = \overline{A}$, donc $\overline{A}B \subset \overline{C}$.

Nous pouvons maintenant introduire l'extension basique.

Théorème 1. — *La famille* L_0 *des sous-ensembles non vides* A *de* K *pour lesquels* $\wedge (A) = A = \sum^* (A)$, *forment une extension de* K *avec la sous-famille* $K_0 = \{ \wedge (A) \}$ *(pour* $a \in K$*) comme image de* K, *quand on prend comme relation d'ordre partiel la relation d'inclusion, la multiplication* (.) *étant définie par*

$$A . B = (\overline{AB}) \text{ pour } A, B \in L_0.$$

Démonstration. — L'associativité de (.) dans K entraîne celle de (.) dans L_0; en effet si A, B, C sont dans L_0,

$$(A . B) . C = \overline{\overline{AB}\, C} = \overline{\overline{AB}\, \overline{C}} = \overline{(AB) C};$$

on a de même $A . (B . C) = \overline{A (BC)}$: or dans K, $(AB) C = A (BC)$. D'autre part, pour A, B, C de L_0,

$$\begin{aligned} A \subset B &\rightarrow (AC) \subset (BC) \quad &\text{et} \quad &(CA) \subset (CB), \\ &\rightarrow (\overline{AC}) \subset (\overline{BC}) \quad &\text{et} \quad &(\overline{CA}) \subset (\overline{CB}), \\ &\rightarrow A . C \subset B . C \quad &\text{et} \quad &C . A \subset C . B. \end{aligned}$$

L_0 est donc une $(\prec, \, . \,)$-*algèbre*.

Si $\{A_i\}$ est une famille (non-vide) d'éléments de L_0, $\left(\overline{\bigcup_i A_i} \right)$ est évidemment leur somme $\left(\sum_i A_i \right)$ dans L_0. Et cette somme est distribuée par (.) : car, si $B \in L_0$, on a

$$B . \left(\sum_i A_i \right) = \overline{\overline{B \bigcup_i A_i}} = \overline{\overline{B} \bigcup_i A_i} = \overline{B \left(\bigcup_i A_i \right)} = \overline{\bigcup_i (BA_i)} = \overline{\bigcup_i (\overline{BA_i})}$$

$\Big[$car $\left(\overline{\bigcup BA_i}\right) \subset \bigcup (\overline{BA_i})$ donc $\left(\overline{\bigcup BA_i}\right) \subset \left(\overline{\bigcup \overline{BA_i}}\right)$; et chaque $\overline{BA_i} \subset \left(\overline{\bigcup_i BA_i}\right)$ donc $\bigcup_i \overline{BA_i} \subset \left(\overline{\bigcup_i BA_i}\right)$, d'où $\left(\overline{\bigcup_i \overline{BA_i}}\right) \subset \left(\overline{\bigcup_i BA_i}\right)\Big]$.

De plus

$$\left(\overline{\bigcup_i \overline{BA_i}}\right) = \sum_i (\overline{BA_i}) = \sum_i (B.A_i);$$

même démonstration pour la distributivité à droite.

L_0 est donc une $\left(\sum^*, .\right)$-*algèbre.*

Il est clair que $K_0 = \{\bigwedge(a)\}$, $a \in K$ est une sous-famille de L_0 et que l'application $\varphi_0 : a \to \bigwedge(a)$ est une transformation biunivoque de K sur K_0.

De plus

$$a \subset b \rightleftharpoons \bigwedge(a) \subset \bigwedge(b) \text{ dans } L_0$$

et

$$a = \sum_i^* a_i \text{ dans K entraîne } \bigwedge(a) = \sum_i^* \{\bigwedge(a_i)\} \text{ dans } L_0,$$

car

$$a = \sum_i^* a_i, \quad a_i \in \bigwedge(a_i) \rightarrowtail a \in \sum^* \bigwedge\left[\bigcup_i \{\bigwedge(a_i)\}\right] \subset \overline{\bigcup [\bigwedge(a_i)]} = \sum_i \{\bigwedge(a_i)\} \text{ dans } L_0$$

$$\rightarrowtail \bigwedge(a) \subset \sum_i \{\bigwedge(a_i)\} \text{ dans } L_0;$$

d'autre part, chaque $\bigwedge(a_i)$ étant $\subset \bigwedge(a)$, $\sum_i \{\bigwedge(a_i)\}$ dans L_0 doit être $\subset \bigwedge(a)$ aussi. Il s'ensuit que $\bigwedge(a) = \sum_i \{\bigwedge(a_i)\}$ dans L_0, et comme toutes les sommes dans L_0, $\sum_i \{\bigwedge(a_i)\}$ est distribuée par $(.)$. Enfin $a = b.c$ dans K entraîne $\bigwedge(a) = \bigwedge(b).\bigwedge(c)$ dans L_0, car

$$(\bigwedge b).(\bigwedge c) = \overline{(\bigwedge b)(\bigwedge c)} \supset (\bigwedge b)(\bigwedge c) \ni b.c = a, \qquad \text{d'où} \qquad (\bigwedge b).(\bigwedge c) \supset \bigwedge(a);$$

et d'autre part $(\bigwedge b)(\bigwedge c) \subset (\bigwedge a)$ entraîne que

$$(\bigwedge b).(\bigwedge c) = \overline{(\bigwedge b)(\bigwedge c)} \subset \overline{(\bigwedge a)} = (\bigwedge a)$$

Il en résulte que φ_0 est un homomorphisme de K dans L_0 avec $K_0 = \varphi_0(K)$, et que φ_0 est aussi un isomorphisme de K sur K_0.

L_0 est bien une extension de K avec K_0 pour l'image de K, que nous appelons l'*extension basique de* K.

5. **L'extension basique parmi toutes les extensions, et les extensions normales.** — Une extension L_1 de K avec K_1 pour l'image de K, est appelée *normale* s'il y a un isomorphisme α de K_1 sur K vérifiant la condition (de normalité) (N) : $a \notin \{\overline{a_i}\}_i$

pour a, $a_i \in \mathrm{K}$ entraîne que

$$\alpha(a) \not\prec \sum_i{}^{*} \alpha(a_i) \text{ dans } \mathrm{L}_1 ;$$

autrement dit

$$\varphi_0(a) \not\subset \sum_i{}^{*} \varphi_0(a_i) \text{ dans } \mathrm{L}_0 \Rightarrow \alpha(a) \not\prec \sum_i{}^{*} \alpha(a_i) \text{ dans } \mathrm{L}_1.$$

Observons d'abord que l'extension basique est normale ($\alpha =$ l'identité); de plus :

3.1. Si L_1 est normale avec l'isomorphisme α vérifiant N, et si β est un isomorphisme *quelconque* de K sur K_1, β vérifie aussi (N).

En effet, soit γ l'automorphisme $\alpha^{-1}\beta$ de K sur lui-même; et soit $\mathrm{A} = \{ a_i \} \subset \mathrm{K}$, et $a \in \mathrm{K}$. Considérons la suite $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_\lambda = \overline{\mathrm{A}}$ conduisant à $\overline{\mathrm{A}}$. Si $\gamma(\mathrm{A}_\sigma) = \mathrm{B}_\sigma$ pour chaque σ, alors on voit par induction que

$$\gamma(\mathrm{A}_\lambda) = \gamma(\overline{\mathrm{A}}) = \overline{\mathrm{B}} = \overline{\gamma(\mathrm{A})};$$

donc

$$a \notin \{ \overline{a_i} \} = \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}_\lambda \Rightarrow \gamma(a) \notin \gamma(\mathrm{A}_\lambda) = \overline{\gamma(\mathrm{A})} = \{ \overline{\gamma(a_i)} \};$$

d'où, en vertu de la condition N vérifiée par α,

$$\alpha[\gamma(a)] \not\prec \sum_i{}^{*} \alpha[\gamma(a_i)] \text{ dans } \mathrm{L}_1,$$

c'est-à-dire $\beta(a) \not\prec \sum_i{}^{*} \beta(a_i)$ dans L_1.

Donc l'isomorphisme particulier α ou β de K sur K_1 qui satisfait la condition (N) n'a pas d'importance. S'il en existe un, tous les isomorphismes de K sur K_1 vérifient (N); en particulier, donc, l'homomorphisme φ_1 de K dans l'extension L_1.

Théorème 2. — 1° *L'extension basique est* R-*minimale parmi toutes les extensions;*

2° *Une extension* R-*minimale parmi toutes les extensions est aussi une extension normale.*

Démonstration. — 1° Soient L_0 l'extension basique avec $\mathrm{K}_0 = \{ \bigwedge(a_i) \}$, $a_i \in \mathrm{K}$, pour l'image de K, et L_1 une extension quelconque avec $\varphi_1(\mathrm{K}) = \mathrm{K}_1$ pour l'image de K et φ_1 un homomorphisme biunivoque de K dans L_1 (et un isomorphisme de K sur K_1).

Considérons d'abord une correspondance φ entre les sous-ensembles A de K et les éléments L_1, définie par

$$\varphi(\mathrm{A}) = \sum_{a_i \in \mathrm{A}}{}^{*} \varphi_1(a_i)$$

la somme étant prise dans L_1. On a

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow \varphi(\mathrm{A}) \prec \varphi(\mathrm{B}) \qquad \text{donc} \quad \varphi(\mathrm{A}) \prec \varphi(\overline{\mathrm{A}});$$

mais, d'autre part, si $A = A_0, \ldots, A_\lambda = \overline{A}$ est la suite entre A et $\overline{A}$, nous voyons que :

a. $\varphi(A_0) \prec \varphi(A)$;

b. si $\varphi(A_\sigma) \prec \varphi(A)$, $\varphi(A_{\sigma+1}) \prec \varphi(A)$ $\Big[$ car $\varphi(A_{\sigma+1}) = \sum_t^* \varphi_1(c_t)$, ou $c_t = \sum_i^* c_{t_i}$ et $c_{t_i} \prec a_{t_i} \in A_\sigma$, c'est-à-dire $\varphi(A_{\sigma+1}) = \sum_t^* \sum_i^* \varphi_1(c_{t_i})$ (puisque φ_1 est un homomorphisme), où $\varphi_1(c_{t_i}) \prec \varphi_1(a_{t_i}) \prec \varphi(A_\sigma) \prec \varphi(A)$ d'où $\varphi(A_{\sigma+1}) \prec \varphi(A)\Big]$;

c. si $\varphi(A_\sigma) \prec \varphi(A)$ pour chaque $\sigma < \rho$, un nombre ordinal-limite, alors

$$\varphi(A_\rho) = \varphi\left(\bigcup_{\sigma<\rho} A_\sigma\right) = \sum_{\sigma,i}^* \varphi_1(a_{\sigma_i});$$

où $a_{\sigma_i} \in A_\sigma$, c'est-à-dire $\varphi_1(a_{\sigma_i}) \prec \varphi(A_\sigma) \prec \varphi(A)$ donc $\varphi(A_\rho) \prec \varphi(A)$.

Il en résulte, par induction transfinie, que $\varphi(\overline{A}) = \varphi(A_\lambda) \prec \varphi(A)$. Donc

$$\underline{\varphi(A) = \varphi(\overline{A}) \text{ pour chaque } A \subset K.}$$

Les éléments de L_0 étant aussi sous-ensembles de K, φ définit aussi une correspondance de L_0 dans L_1.

Si A, A_i sont éléments de L_0 avec $A = \sum_i^* A_i$ dans L_0 nous avons

$$\varphi(A) = \sum_i^* \varphi(A_i) \text{ dans } L_1.$$

En effet

$$\varphi(A) = \varphi\left[\overline{\bigcup_i A_i}\right] = \varphi\left[\bigcup_i A_i\right] = \sum_{i,j(i)}^* \varphi_1(a_{ij}) = \sum_i^* \sum_{j(i)}^* \varphi_1(a_{ij}) = \sum_i \varphi(A_i),$$

en posant

$$A_i = \{a_{i_j}\}.$$

De plus $A = B.C$ dans L (pour A, B, C, de L_0) entraîne

$$\varphi(A) = \varphi(B).\varphi(C) \text{ dans } L_1;$$

en effet

$$\varphi(A) = \varphi(B.C) = \varphi(\overline{BC}) = \varphi(BC) = \sum_{i,j}^* \varphi_1(b_i.c_j)$$

$$= \left[\sum_i^* \varphi_1(b_i)\right]\left[\sum_j^* \varphi_1(c_j)\right] = \varphi(B).\varphi(C),$$

en posant

$$B = \{b_i\} \quad \text{et} \quad C = \{c_j\}.$$

Donc φ est un homomorphisme de L_0 dans L_1; de plus $\varphi(K_0) = K_1$, car

$$\varphi(\wedge a) = \sum_{a_i \prec a}^* \varphi_1(a_i) = \varphi_1(a) \in K_1.$$

Aussi, φ_1 étant un isomorphisme de K sur K_1,

$$\wedge(a) \prec \wedge(b) \rightleftharpoons a \prec b \rightleftharpoons \varphi_1(a) \prec \varphi_1(b)$$

et

$$\varphi[(\wedge a).(\wedge b)] = \varphi[\wedge(a.b)] = \varphi_1(a.b) = \varphi_1(a).\varphi_1(b).$$

Il en résulte que φ est biunivoque entre K_0, K_1 et φ et φ^{-1} conservent $\prec$ et . Donc φ est un homomorphisme de L_0 dans L_1 *sur* K, c'est-à-dire la relation $\underline{L_0 R L_1}$ est vraie.

2° Supposons L_1R-minimale parmi toutes les extensions. Il en résulte que $L_1 R L_0$ doit être vraie, où L_0 est l'extension basique. Donc il existe un homomorphisme ψ de L_1 dans L_0 *sur* K, c'est-à-dire tel que ψ est un isomorphisme de K_1 (l'image de K dans L_1) sur K_0 (l'image de K dans L_0). En prenant pour α l'isomorphisme $\psi^{-1}\ \varphi_0$ de K sur K_1 nous voyons qu'il satisfait la condition de normalité (N) : car si a, a_i sont éléments de K tels que $\alpha(a) \prec \sum_i^* \alpha(a_i)$ dans L_1, alors on a, par l'application de l'homomorphisme ψ de L_1 dans L_0,

$$\psi[\alpha.(a)] \subset \psi\left[\sum_i^* \alpha(a_i)\right] = \sum_i^* [\psi.\alpha(a_i)] \text{ dans } L_0$$

d'où

$$(\wedge a) \subset \sum_i^* [\wedge(a_i)] \text{ dans } L_0,$$

c'est-à-dire $a \in \left[\overline{\bigcup_i \wedge(a_i)}\right]$. Il en résulte que L_1 est une extension normale.

D'autre part, nous allons voir que chaque extension normale possède un « noyau » qui est R-minimale. Le « noyau » d'une extension quelconque est introduit dans le

Lemme 3. — *Si* L_1 *est une extension de* K *avec* $\varphi_1(K) = K_1$ *pour l'image de* K *le sous-ensemble* $\overline{L}_1$ *de* L_1, *formé par les éléments qui sont sommes* $\sum_i^* \varphi_1(a_i)$ *d'éléments de* K_1, *est une sous-algèbre de* L_1 *pour* $(\prec, .)$ *et une extension de* K *avec* $\varphi_1(K) = K_1$ *pour l'image de* K; *nous appellerons* $\overline{L}_1$ *le « noyau » de* L_1.

Observons d'abord que

$$\left[\sum_i^* \varphi_1(a_i)\right] \cdot \left[\sum_j^* \varphi_1(b_j)\right] = \sum_{i,j}^* [\varphi_1(a_i).\varphi_1(b_j)] = \sum_{i,j}^* \varphi_1(a_i.b_j),$$

donc $\overline{L}_1$ est une sous-algèbre par rapport à (..) de L_1, avec l'ordre partiel de L_1; $\overline{L}_1$ peut être considérée comme une sous-algèbre de L_1 par rapport à $(\prec, .)$; de plus

$$\sum_\lambda^* \left[\sum_{i(\lambda)}^* \varphi_1(a_{i\lambda})\right] = \sum_{\lambda, i(\lambda)}^* \varphi_1(a_{i\lambda});$$

c'est-à-dire $\overline{L_1}$ contient la somme dans L_1 d'un ensemble de ses éléments; cette somme est donc aussi la somme dans $\overline{L_1}$, et $\overline{L_1}$ étant une sous algèbre de L_1 par rapport à (.), la somme y est distribuée (comme dans L_1). $\overline{L_1}$ contient K_1 et l'homomorphisme φ_1 de K dans L_1 est aussi un homomorphisme de K dans $\overline{L_1}$; φ_1 est de plus un isomorphisme de K sur K_1, comme plus haut. Donc $\overline{L_1}$ est bien une extension de K avec $\varphi_1(K) = K_1$ comme l'image de K.

THÉORÈME 3. — 1° *Le noyau d'une extension normale est une extension* R-*minimale* (1);

2° *L'extension basique est* R*-*minimale parmi les extensions normales, et elle est la seule extension de ce type, à une équivalence près.*

Démonstration. — 1° Supposons L_1 normale avec image K_1, et soit $\overline{L_1}$ son noyau. Considérons la transformation ψ de $\overline{L_1}$ dans l'extension basique L_0 définie par

$$\psi(\alpha) = {\sum}^{\star} \{\Lambda(a_i)\} = \{\overline{a_i}\}$$

pour les a_i de K vérifiant $\varphi_1(a_i) \prec \alpha (\in \overline{L_1})$. On a évidemment $\alpha = {\sum_i}^{\star} \varphi_1(a_i)$ dans L_1 et dans $\overline{L_1}$, pour les a_i de K vérifiant $\varphi_1(a_i) \prec \alpha$; et $\alpha \prec \beta \rightarrow \psi(\alpha) \subset \psi(\beta)$.

Montrons que ψ conserve $\sum^{\star}$ et . :

a. Si

$$\alpha = {\sum_j}^{\star} \alpha_j \text{ dans } \overline{L_1}, \qquad \text{où} \quad \alpha_j = {\sum_i}^{\star} \varphi_1(a_{ji}) \text{ dans } L_1,$$

pour les a_{ij} de K vérifiant $\varphi_1(a_{ji}) \prec \alpha_j$ alors $\alpha_j = {\sum_i}^{\star} \varphi_1(a_{ji})$ dans $\overline{L_1}$ aussi, donc

$$\alpha = {\sum_j}^{\star} \alpha_j = {\sum_j}^{\star} {\sum_i}^{\star} \varphi_1(a_{ji}) = \sum_{ji} \varphi_1(a_{ji}) \text{ dans } \overline{L_1}.$$

Il en résulte que $\psi(\alpha) \supset$ chaque $\varphi_1(a_{ji})$, donc $\psi(\alpha) \supset$ chaque $\psi(\alpha_j)$.

D'autre part $\psi(\alpha) = \{\overline{c_k}\}$ pour les c_k de K vérifiant $\varphi_1(c_k) \prec \alpha$, où

$$\varphi_1(c_k) \prec {\sum_{i,j}}^{\star} \varphi_1(a_{ji}) \text{ dans } L_1.$$

Pour l'extension normale L_1, l'isomorphisme φ_1 de K sur K_1 doit satisfaire la condition de normalité (N), d'après (5.1). Il en résulte que

$$\varphi_1(c_k) \prec {\sum_{i,i}}^{\star} \varphi_1(a_{ji}) \rightarrow c_k \in \{\overline{a_{ji}}\}_{j,i};$$

(1) *Note ajoutée en épreuve.* — L'inverse est aussi vrai : une extension L_1 est normale si son noyau $\overline{L_1}$ est R-minimal; car si β est un homomorphisme de $\overline{L_1}$ dans L_0 sur K, alors $\alpha = \beta^{-1} \varphi_0$ est un isomorphisme de K sur K_1 vérifiant la condition de normalité (N).

mais

$$\{\overline{a_{ji}}\}_{ji} = \overline{\bigcup_j \bigcup_i (a_{ji})} = \overline{\bigcup_i \overline{\bigcup_i a_{ji}}} = \sum_j{}^{*} \psi(\alpha_j),$$

donc

$$\psi(\alpha) = \{\overline{c_k}\} \subset \overline{\sum_j{}^{*} \psi(\alpha_j)} = \sum_j{}^{*} \psi(\alpha_j), \qquad \text{et} \qquad \psi(\alpha) = \sum_j{}^{*} \psi(\alpha_j) \text{ dans } L_0.$$

b. Si

$$\alpha = \beta.\gamma \text{ dans } \overline{L}_1, \qquad \text{avec } \beta = \sum_i{}^{*} \varphi_1(b_i), \qquad \gamma = \sum_i{}^{*} \varphi_1(c_j),$$

[pour les b_i, c_j de K vérifiant $\varphi_1(b_i) \prec \beta$ et $\varphi_1(c_j) \prec \gamma$]

$$\alpha = \beta.\gamma = \sum_{ij}{}^{*} [\varphi_1(b_i).\varphi_1(c_j)] = \sum_{ij}{}^{*} \varphi_1(b_i.c_j);$$

$\psi(\alpha) = \{\overline{d_k}\}$, pour les d_k de K vérifiant $\varphi_1(d_k) \prec \alpha$.

Mais chaque $\varphi_1(b_i.c_j)$ est $\prec \alpha$, donc

$$\psi(\alpha) \supset \sum_{ij}{}^{*} \{\overline{b_i.c_j}\} = (\overline{\mathrm{BC}})(\overline{\mathrm{B}\,\mathrm{C}}) = \psi(\beta).\psi(\gamma),$$

où $B = \{b_i\}$, $C = \{c_j\}$, donc $\overline{B} = \psi(\beta)$, $\overline{C} = \psi(\gamma)$; d'autre part

$$\varphi_1(d_k) \prec \alpha = \sum_{ij}{}^{*} \varphi_1(b_i.c_j)$$

dans l'extension normale L_1 entraîne que

$$d_k \in \{\overline{b_i.c_j}\}, \qquad \text{donc} \quad \psi(\alpha) \subset \{\overline{b_i.c_j}\}_{ij} = \psi(\beta).\psi(\gamma).$$

Donc $\psi(\alpha) = \psi(\beta).\psi(\gamma)$.

Nous avons donc montré que ψ est un homomorphisme de $\overline{L}_1$ dans L_0; évidemment, $\psi[\varphi_1(a)] = \varphi_0(a)$; il en résulte que ψ est un isomorphisme de K_1 sur K_0 ($= \varphi_0.\varphi_1^{-1} =$ la composition de deux isomorphismes de K_1 sur K et de K sur K_0).

$\overline{L}_1$ vérifie bien la relation $\overline{L}_1 R L_0$, qui avec la relation $L_0 R L'$ établie pour une extension quelconque L' de K, montre que L_1 est R-minimale parmi toutes les extensions.

2° Supposons que L_1 est une extension normale et L_0 l'extension basique de K (avec les images K_1 et K_0). Si nous considérons l'homomorphisme φ de L_0 dans L_1 défini dans la première partie du théorème 2, $\varphi(A) \prec \varphi(B)$ dans L_1 pour A, B de L_0, entraîne que

$$\sum_{a_i \in A}{}^{*} \varphi_1(a_i) \prec \sum_{b_j \in B}{}^{*} \varphi_1(b_j);$$

donc chaque $\varphi_1(a_i)$ est $\prec \sum_{b_j \in B}{}^{*} \varphi_1(b_j)$ dans L_1; L_1 étant normale, la condition de normalité pour l'isomorphisme φ_1 de K sur K_1 entraîne que chaque a_i est dans $\{\overline{b_j}\}_j = B$, d'où $A \subset B$. Donc $\varphi(A) = \varphi(B) \rightarrow A = B$, et φ est biunivoque.

Nous avons déjà montré que φ est un homomorphisme de L_0 dans L_1 sur K_1; donc on a la relation $L_0 R^* L_1$.

Enfin, supposons que L_1 est aussi une extension R^*-minimale parmi les extensions normales. Il en résulte que $L_1 R^* L_0$ est vrai; il existe par conséquent un homomorphisme biunivoque θ de L_1 dans L_0 qui est un isomorphisme de K_1 sur K_0. L'extension L_1 avec K_1 $[= \varphi_1(K)]$ pour l'image de K peut aussi être considérée comme une extension *avec l'isomorphisme* $(\theta^{-1}.\varphi_0)$ de K sur K_1 pour l'homomorphisme biunivoque de K dans L_1 (au lieu de φ_1) [*voir* les remarques 3.3].

Donc la démonstration de la relation $L_0 R^* L_1$ ci-dessus est valable avec $\theta^{-1}\varphi_0$ au lieu de φ_1. Après cette modification dans la notation ci-dessus, nous avons dans $(\theta.\varphi)$ un homomorphisme biunivoque de L_0 dans lui-même tel que $\theta.\varphi$ se réduit à la transformation identique sur K_0; mais, il en résulte que, pour $A \in L_0$,

$$(\theta.\varphi)\,A = \theta.\varphi\left(\sum_{a_i \in A}^{*}\{\wedge(a_i)\}\right) = \sum_{a_i \in A}^{*}\theta.\varphi\{\wedge(a_i)\} = \sum_{a_i \in A}^{*}\{\wedge(a_i)\} = A;$$

c'est-à-dire : $\theta.\varphi$ est l'identité sur L_0 aussi. Donc θ, φ sont transformations univoques entre L_0 et L_1, inverses l'une de l'autre; et $\varphi(L_0) = L_1$.

Donc φ est un isomorphisme, sur K, de L_0 sur L_1, c'est-à-dire : L_0, L_1 sont équivalents.

6. **Cas particuliers.** — 6.1. *Demi-treillis multiplicatif.* — K étant un demi-treillis multiplicatif, nous pouvons considérer K comme une $(\prec, .)$-algèbre, où la multiplication . est le produit $\frown$ défini par l'ordre. L'extension basique de K s'identifie alors avec l'extension canonique de ce système multiplicatif K pour les sommes distributives, telle qu'elle est définie par M. H. M. Mac Nielle [7]. Parmi les extensions de K, celles dans lesquelles la multiplication . est la même que le produit $\frown$ défini par l'ordre, sont toutes normales. Car, soit L_1 une telle extension et $\varphi_1(K)$ l'image de K. Alors, pour a, $a_i \in K$,

$$a \in \{\overline{a_i}\}_i \rightarrow \wedge(a) \subset \sum_i^{*}\{\wedge(a_i)\} \text{ dans } L_0,$$

d'où

$$\wedge(a) = \wedge(a) \frown \sum_i^{*}\{\wedge(a_i)\} = \sum_i^{*}\{\wedge(a) \frown \wedge(a_i)\},$$

$$\wedge(a) \frown \wedge(b) = \sum_i^{*}\{\wedge(a) \frown \wedge(a_i) \frown \wedge(b)\}$$

et

$$\wedge(b) \frown \wedge(a) = \sum_i^{*}\{\wedge(b) \frown \wedge(a) \frown \wedge(a_i)\}.$$

Ces relations dans L_0 entraînent :

$$\wedge(a)=\sum_i^{*}\{\wedge(a)\frown\wedge(a_i)\},\qquad \wedge(a)\frown\wedge(b)=\sum_i^{*}\{\wedge(a)\frown\wedge(a_i)\frown\wedge(b)\}$$

et

$$\wedge(b)\frown\wedge(a)=\sum_i^{*}\{\wedge(b)\frown\wedge(a)\frown\wedge(a_i)\}$$

dans K_0, car les éléments de la forme $\wedge(a)$, $\wedge(a)\frown\wedge(b)=\wedge(a\frown b)$, ... sont dans K_0.

Par l'application de l'isomorphisme $\wedge(a)\to a$ de K_0 sur K suivi par l'homomorphisme φ_1 de K dans L_1, nous voyons que

$$\varphi_1(a)=\sum_i^{*}\{\varphi_1(a)\frown\varphi_1(a_i)\}=\varphi_1(a)\frown\sum_i^{*}\{\varphi_1(a_i)\}<\sum_i^{*}\{\varphi_1(a_i)\}$$

dans L_1; *donc* L_1 *est normal.*

L'extension basique L_0 étant R^*-minimale parmi les extensions normales, elle est aussi $\subset$-minimale (car $R^*\rightarrowtail\subset$). Et le résultat de M. Mac Neille que L_0 est l'extension canonique revient à peu près à dire que L_0 est la seule $\subset$-minimale parmi les extensions avec multiplication (.) égale au produit ($\frown$) défini par l'ordre. Donc notre théorème entraîne la $\subset$-minimalité, mais l'unicité de cette extension $\subset$-minimale reste à montrer. On peut la trouver dans la démonstration de M. Mac Neille. Ici remarquons seulement que la même extension sert à la fois comme l'extension basique et l'extension canonique.

6.2. *Demi-treillis additif.* — Si nous considérons de la même façon un demi-treillis additif K comme une ($\prec$, .)-algèbre avec l'addition ($\smile$) jouant le rôle de (.), nous voyons d'abord que toutes les sommes qui existent dans K sont distribuées par (.), la loi de distributivité résultant de la loi d'associativité de l'addition. Donc l'extension basique L_0 se compose maintenant des sous-ensembles (non vides) A de K contenant les sommes (qui existent dans K) de sous-ensembles de A; c'est-à-dire des « idéaux complets » de K, d'après la définition de M. R. Vaidyanathaswamy [9]. L'extension canonique de K par « coupures » définie par M. Mac Neille est isomorphe à la famille des « idéaux comprincipaux » de K [9] qui est, en général, une sous-famille de L_0. Ces extensions satisfont aussi la condition que la multiplication (.) est la même que l'addition ($\smile$). Nous verrons plus tard (exemple 1, § 7) que l'extension par « coupures » de K n'est pas, en général, une extension R-minimale ou normale.

6.3. *Les chaînes.* — Une chaîne K peut être considérée comme un cas spécial d'un demi-treillis multiplicatif ou d'un demi-treillis additif. Toutes les sommes qui existent sont distribuées dans les deux cas, et l'extension basique est ici équivalente à l'extension par « coupures » (7).

(7) Dans une chaîne K, les idéaux complets sont aussi idéaux comprincipaux.

Plus généralement nous considérons une multiplication $(.)$ (homogène par rapport à l'ordre) définie dans la chaîne K telle que $a.b$ soit une fonction continue par rapport à chaque facteur, quand K est muni de la topologie intrinsique (définie par la base des ensembles ouverts formés par les demi-droites ouvertes et leurs intersections finies). K est encore une $(\prec, .)$-algèbre dans laquelle toutes les sommes qui existent sont distribuées par $(.)$; car

$$a = \sum_i a_i \text{ dans K} \rightarrowtail (a = \text{un } a_i) \text{ ou } (a = \limsup \{ a_i \}_i)$$

$$\rightarrowtail (b.a = \text{un } b.a_i) \text{ ou } (b.a = \limsup \{ b.a_i \}_i)$$

et

$$(a.b = \text{un } a_i.b) \text{ ou } (a.b = \limsup \{ a_i.b \}_i)$$

c'est-à-dire

$$a = \sum_i a_i \rightarrowtail b.a = \sum_i (b.a_i) \qquad \text{et} \qquad a.b = \sum_i (a_i.b)$$

donc

$$a = \sum_i{}^{\star} a_i.$$

L'extension basique de K est donc l'extension par « coupures »; autrement dit, l'extension basique peut être obtenue par l'adjonction des limites supérieures.

Un cas intéressant est celui où K est la chaîne des nombres rationnels dans l'intervalle (0, 1), (fermé pour la multiplication); l'extension basique est équivalente à la chaîne des nombres réels dans le même intervalle (le nombre 1 inclusif).

6.4. *Les algèbres additives avec une base additive finitaire.* — Les modules et les idéaux d'un anneau nous présentent des exemples d'algèbres avec une base additive, finitaire. Nous définissons donc :

Un sous-ensemble multiplicativement fermé Δ d'une $(\prec, .)$-algèbre K, est appelé *base additive finitaire de* K si :

1° chaque élément de K est une somme (finie ou infinie) d'éléments de Δ distribuée par $(.)$, et

2° $\delta \prec \sum_i^{\star} \delta_i$ dans K pour δ, $\delta_i \in \Delta$ entraîne que $\delta \prec \sum_{r=1,\ldots,n}^{\star} \delta_{i(r)}$, une somme finie de certains δ_i, dans K.

Théorème 4. — *Si* K *est une sous-algèbre par rapport à* $(+, .)$ *d'une* $\left(\sum^{\star}, .\right)$*-algèbre* L *qui possède une base additive, finitaire* Δ *contenue dans* K, *alors* L *est une extension de* K *équivalente à l'extension basique* L_0.

Démonstration. — Observons que, dans K, les sommes finies existent et sont distribuées par $(.)$; c'est-à-dire : K est une algèbre additive. Désignons par K_0 l'image de K dans L_0.

Considérons les transformations φ, f entre L_0 et L définis par :

pour $A \in L_0$,

$$f(A) = \alpha = \sum_{a_i \in A}^{*} a_i \text{ dans L (ou } A \subset K \subset L)$$

et pour $\alpha \in L$,

$$\varphi(\alpha) = A = \bigwedge(\alpha) \cap K.$$

On a évidemment $f(A) \in L$ et $\varphi(\alpha) \in L_0$. Il est clair aussi que $\underline{A \subset \varphi f(A)}$ pour chaque A de L_0 et $\underline{\alpha \succ f\varphi(\alpha)}$ pour chaque α de L.

D'autre part, si x de $K \in \varphi f(A)$ et $A \in L_0$, $x \prec \sum_{a_i \in A}^{*} a_i$ dans L. En exprimant x, a_i au moyen des éléments de la base Δ de L, nous avons

$$\sum_{k}^{*} x_k = x \prec \sum_{a_i \in A}^{*} a_i = \sum_{i}^{*} \left(\sum_{j}^{*} a_{ij} \right),$$

où x_k, a_{ij} sont dans Δ; d'où chaque $x_k \prec \sum_{i}^{*} \sum_{j}^{*} a_{ij}$ dans L et, d'après l'hypothèse sur Δ, $x_k \prec \sum_{r=1,\ldots,n_k}^{*} a_{ij(r)}$ dans L_1 où $a_{ij(r)} \prec a_i \in A$. Mais K contient avec les $a_{ij(r)}$ (de Δ) aussi leurs sommes finies $\sum_{r=1,\ldots,n_k}^{*} a_{ij(r)}$; il en résulte que $x_k \in \bigwedge \sum^{*}(A)$; et de plus nous avons $x = \sum_{k}^{*} x_k$ dans K $\Big[$car $x = \sum_{k}^{*} x_k$ dans L_0 et x, x_k sont éléments dans la sous-algèbre pour $(.)$, K$\Big]$. Donc

$$x \in \sum^{*} \bigwedge \sum^{*}(A) \subset \bar{A} = A,$$

et $\underline{\varphi f(A) \subset A}$; c'est-à-dire *pour chaque* A *de* L_0

$$\underline{A = \varphi f(A).} \tag{1}$$

Pour $\alpha \in L$, nous avons la relation

$$\alpha = \sum_{i}^{*} b_i \text{ dans L},$$

$$b_i \in [\Delta \cap \bigwedge(\alpha)] \subset [K \cap \bigwedge(\alpha)] = \varphi(\alpha);$$

donc $\alpha \prec f\varphi(\alpha)$, ce qui, avec l'inverse déjà établie, nous donne :

$$\alpha = f\varphi(\alpha) \text{ pour chaque } \alpha \text{ de L.} \tag{2}$$

Les résultats (1) et (2) entraînent que f et φ sont des transformations biunivoques, inverses l'une de l'autre, entre L et L_0. De plus

$$A \subset B \rightarrow f(A) \prec f(B) \qquad \text{et} \qquad \alpha \prec \beta \rightarrow \varphi(\alpha) \subset \varphi(\beta),$$

c'est-à-dire φ et f conservent l'ordre, donc les sommes définies par l'ordre aussi.

Alors pour α, β de L observons que $\alpha = \sum_r \delta_r$, $\beta = \sum_s \delta_s$, où

$$\delta_r \in [\Delta \cap \wedge(\alpha)] \subset \varphi(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \delta_s \in [\Delta \cap \Delta(\beta)] \subset \varphi(\beta),$$

entraînent que

$$\alpha = \sum_{a_i \in \varphi(\alpha)} a_i \qquad \text{et} \qquad \beta = \sum_{b_j \in \varphi(\beta)} b_j;$$

ces sommes sont distribuées dans L, qui est une $\left(\sum^*, .\right)$-algèbre, c'est-à-dire

$$\alpha = \sum_{a_i \in \varphi(\alpha)}^* a_i, \qquad \beta = \sum_{b_j \in \varphi(\beta)}^* b_j.$$

Il résulte que

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha).\varphi(\beta) &= \sum_i \{\varphi(a_i)\}.\sum_j \{\varphi(b_j)\} \text{ dans } L_0 \text{ (car } \varphi \text{ conserve les sommes)},\\
&= \sum_i^* \{\varphi(a_i)\}.\sum_j^* \{\varphi(b_j)\} \text{ dans } L_0 \text{ (car toutes les sommes sont distribuées dans } L_0),\\
&= \sum_{i,j}^* \{\varphi(a_i).\varphi(b_j) \text{ dans } L_0,\\
&= \sum_{i,j}^* \{\wedge(a_i.b_j) \cap K\} \text{ dans } L_0,\\
&= \sum_{i,j}^* \{\varphi(a_i.b_j)\} \text{ dans } L_0,\\
&= \varphi\left[\sum_{i,j}^* (a_i.b_j)\right] \left[\text{car } \varphi \text{ conserve les sommes, donc } \varphi\left[\sum^* (a_i.b_j)\right] = \sum^* \varphi(a_i.b_j)\right],\\
&= \varphi\left[\left(\sum_i^* a_i\right).\left(\sum_j^* b_j\right)\right],\\
&= \varphi(\alpha.\beta);
\end{aligned}$$

φ et $f = \varphi^{-1}$ conservent donc $(.)$ aussi bien que l'ordre; donc ils sont des isomorphismes par rapport à $(\prec, .)$. L_0 étant une extension de K, il en résulte que l'isomorphe L en est une aussi, et $L \equiv L_0$.

Applications. — I. Étant donné un anneau commutatif R et un sous-anneau S, les S-idéaux de R forment une algèbre complètement additive $I_s(R)$, avec la relation d'inclusion comme ordre partiel et $(.)$ définie par $A.B =$ le plus petit S-idéal contenant $\{a_i.b_j\}$, $a_i \in A$, $b_j \in B$.

On vérifie facilement que $I_s(R)$ est une $\left(\sum^*, .\right)$-algèbre et que les S-idéaux *principaux* forment une base additive finitaire, de $I_s(R)$. Les S-idéaux d'une base finie forment une sous-algèbre $F_s(R)$ de $I_s(R)$ pour $(+, .)$ contenant les S-idéaux principaux. Donc $I_s(R)$ est une extension de $F_s(R)$ équivalente à l'extension basique de $F_s(R)$.

II. Soit maintenant T un sous-ensemble multiplicativement fermé, ne contenant pas o, dans l'anneau commutatif S. Alors on peut construire (suivant M. A. I. Uskov [8]) un anneau R de quotients de la forme $\frac{s}{t}$ où $s \in \mathrm{S}$, $t \in \mathrm{T}$: $\frac{s}{t} = \frac{s'}{t'}$ si $s.t'.\tau = s'.t.\tau$ pour un τ de T, l'addition et la multiplication étant définies comme d'habitude.

S peut être encore considéré comme un sous-anneau de R $\left(\text{immergé dans R par l'isomorphisme } s \to \left\{\frac{s.t}{t}\right\}, t \in \mathrm{T}\right)$; et l'algèbre $\mathrm{I}_s(\mathrm{R})$ des S-idéaux de R contient une base additive finitaire formée par les S-idéaux principaux. Cette base est contenue dans la sous-algèbre $\mathrm{I}'_s(\mathrm{R})$ de $\mathrm{I}_s(\mathrm{R})$ par rapport à $(+, .)$ formée par les S-idéaux *fractionnaires* (c'est-à-dire les S-idéaux A vérifiant la condition : $\mathrm{A}t \subset \mathrm{S}$ pour un $t \in \mathrm{T}$). Donc $\bar{\mathrm{I}}_s(\mathrm{R})$ est une extension de $\mathrm{I}'_s(\mathrm{R})$ équivalant à son extension basique.

6.5 *L'algèbre des transformations d'un ensemble dans une $(\prec, .)$-algèbre avec* o. — Soit A un ensemble quelconque et C une algèbre partiellement ordonnée avec o ($\prec$ chaque x). L'ensemble C^A des transformations $\{f\}$ de A *dans* C peut être considéré comme une $(\prec, .)$-algèbre en définissant :

$(f \prec g$, pour $f, g \in \mathrm{C}^\mathrm{A}) \rightleftharpoons [f(a) \prec g(a)$ dans C, pour chaque $a \in \mathrm{A}]$.

et $(f = g.h$ pour $f, g, h \in \mathrm{C}^\mathrm{A}) \rightleftharpoons [f(a) = g(a).h(a)$ dans C, pour chaque $a \in \mathrm{A}]$.

D'abord montrons le

Lemme 4. — *Pour f, f_i de* C^A,

$$\left(f = \sum_i{}^* f_i \text{ dans } \mathrm{C}^\mathrm{A}\right) \rightleftharpoons \left[f(a) = \sum_i{}^* f_i(a) \text{ dans C, pour chaque } a \in \mathrm{A}\right].$$

Il est évident que $f = \sum_i f_i$ dans C^A dès que $f(a) = \sum_i f_i(a)$ dans C, pour chaque $a \in \mathrm{A}$. Inversement soit $f = \sum_i f_i$ dans C^A et $a \in \mathrm{A}$; d'une part $f(a) \succ$ chaque $f_i(a)$ dans C; et d'autre part, soit $c \succ$ chaque $f_i(a)$ dans C ($c \in \mathrm{C}$); il existe un élément f_c de C^A qui est $\succ$ chaque f_i et tel que $f_c(a) = c$ [f_c est définie par $f_c(x) = f(x)$ pour $x (\neq a) \in \mathrm{A}$ et $f_c(a) = c$]. Il en résulte que $f_c \succ \sum_i f_i = f$ et $c = f_c(a) \succ f(a)$, d'où $f(a) = \sum_i f_i(a)$ dans C. L'élément a étant choisi arbitrairement dans A nous avons le résultat :

$$(1) \qquad \left(f = \sum_i f_i \text{ dans } \mathrm{C}^\mathrm{A}\right) \rightleftharpoons \left[f(a) = \sum_i f_i(a) \text{ dans C, pour chaque } a \in \mathrm{A}\right].$$

Supposons maintenant que $f = \sum_i{}^* f_i$ dans C^A. Alors

$$g.f = \sum_i (g.f_i) \qquad \text{et} \qquad f.g = \sum (f_i.g);$$

et d'après (1), quel que que soit $a \in A$, nous avons les résultats suivants dans C :

$$f(a) = \sum_i f_i(a); \qquad g(a).f(a) = \sum_i [g(a).f_i(a)]; \qquad f(a).g(a) = \sum_i [f_i(a).g(a)].$$

Étant donné un élément c quelconque de C, définissons g_c de C^A par : $g_c(x) = 0$ pour $x(\neq a) \in A$ et $g_c(a) = c$; en remplaçant g ci-dessus par g_c, nous avons

$$f(a) = \sum_i f_i(a); \qquad c.f(a) = \sum_i [c.f_i(a)]; \qquad f(a).c = \sum_i [f_i(a).c].$$

Ces relations étant valables pour chaque a de A et chaque c de C, il en résulte que $f(a) = \sum_i^* f_i(a)$ dans C, pour chaque a de A.

Inversement, soit $f(a) = \sum_i^* f_i(a)$ dans C pour chaque $a \in A$. D'après (1), $\underline{f = \sum_i f_i}$ dans C^A; de plus, pour un g quelconque de C^A, et chaque $a \in A$, nous avons

$$(g.f)(a) = g(a).f(a) = \sum_i [g(a).f_i(a)] = \sum_i (g.f_i)(a),$$

donc [d'après (1)], $g.f = \sum_i (g.f_i)$; de même $f.g = \sum_i (f_i.g)$, d'où $f = \sum_i^* f_i$ dans C^A, ce qui démontre le lemme.

Une conséquence immédiate du lemme est que l'algèbre C^A est additive ou complètement additive en même temps que C. $\left[\text{avec } (f +^* g)(a) = f(a) +^* g(a) \text{ dans C, ou } \left(\sum_i^* f_i\right)(a) = \sum_i^* [f_i(a)] \text{ dans C, pour chaque } a \in A\right]$. En particulier soit (EC) l'extension basique de C; alors $(EC)^A$ est complètement additive. Nous allons voir que cette algèbre est isomorphe à l'extension basique $E(C^A)$ de C^A.

Théorème 5. — *Pour l'algèbre de toutes les transformations d'un ensemble arbitraire* A *dans une* $(\prec, .)$*-algèbre* C *avec* 0, *l'extension basique est isomorphe à l'algèbre de toutes les transformations de* A *dans l'extension basique de* C.

Démonstration. — Écrivons EC et $E(C^A)$ pour les extensions basiques de C et de C^A; le résultat à montrer est donc $(EC)^A \approx E(C^A)$.

A chaque élément $\bar{f}$ de $(EC)^A$ nous pouvons associer un élément $i(\bar{f})$ de $E(C^A)$ en définissant : $i(\bar{f}) =$ l'ensemble des f_ν dans C^A vérifiant $f_\nu(a) \in \bar{f}(a)$ pour chaque $a \in A$.

$i(\bar{f})$ est en effet un élément de $E(C^A)$: car,

$$f \in C^A, \qquad f \prec f_\nu, \qquad f_\nu \in i(\bar{f}) \rightarrow \text{ pour chaque } a \in A,$$
$$f(a) \prec f_\nu(a), \qquad f_\nu(a) \in \bar{f}(a), \qquad \bar{f}(a) \in (EC) \rightarrow \text{ pour chaque } a \in A,$$
$$f(a) \in \bar{f}(a) \rightarrow f \in i(\bar{f}),$$

et

$$f \in C^A, \qquad f = \sum_r^* f_{\nu_r}, \qquad f_{\nu_r} \in i(\bar{f}) \ni\!\!\rightarrow \text{pour chaque } a \in A,$$

$f(a) = \sum_r^* f_{\nu_r}(a)$ dans C (d'après le lemme 4),

$$f_{\nu_r}(a) \in \bar{f}(a), \qquad \bar{f}(a) \in (EC) \ni\!\!\rightarrow \text{pour chaque } a \in A,$$

$$f(a) \in \bar{f}(a) \ni\!\!\rightarrow f \in i(\bar{f}).$$

D'autre part, à chaque élément $\mathcal{F}$ de $E(C^A)$ nous pouvons associer un élément $j(\mathcal{F})$ de $(EC)^A$ en définissant :

$$j(\mathcal{F}) = \bar{f}, \qquad \text{où } \bar{f}(a) = \{f_\nu(a)\}_{f_\nu \in \mathcal{F}}, \text{ pour chaque } a \in A;$$

$\bar{f}$ est bien un élément de $(EC)^A$ si $\bar{f}(a)$, pour chaque a de A, est dans (EC); alors pour chaque $a \in A$,

$$c \in C, \quad c \prec f_\nu(a), \quad f_\nu \in \mathcal{F} \ni\!\!\rightarrow f_c \prec f_\nu, \quad f_\nu \in \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} \in E(C^A), \quad f_c(a) = c$$

où f_c de C^A est définie par : $f_c(x) = o$ pour $x(\neq a) \in A$ et $f_c(a) = c$

$$\ni\!\!\rightarrow f_c \in \mathcal{F}, \qquad f_c(a) \in f(a) \ni\!\!\rightarrow c \in \bar{f}(a);$$

et $c = \sum_s^* f_{\nu_s}(a)$ dans C,

$$f_{\nu_s} \in \mathcal{F} \ni\!\!\rightarrow g = \sum_s^* g_{\nu_s}, \quad g_{\nu_s} \prec f_{\nu_s}, \quad f_{\nu_s} \in \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} \in E(C^A), \quad g(a) = c,$$

où g_{ν_s} et g sont définies par

$$g_{\nu_s}(x) = o \quad \text{pour} \quad x(\neq a) \in A, \qquad g_{\nu_s}(a) = f_{\nu_s}(a)$$

et

$$g(x) = o \quad \text{pour} \quad x(\neq a) \in A, \quad g(a) = c \ni\!\!\rightarrow g_{\nu_s} \in \mathcal{F}, \quad g \in \mathcal{F}, \quad g(a) \in \bar{f}(a) \ni\!\!\rightarrow c \in \bar{f}(a).$$

Ces transformations i, j entre $(EC)^A$ et $E(C^A)$ sont biunivoques et inverses l'une de l'autre; pour cela il suffit de montrer que $(i.j)$ et $(j.i)$ sont respectivement les transformations identiques de $E(C^A)$ et $(EC)^A$.

Soient donc $\bar{f} \in (EC)^A$ et $\bar{g} = j.i(\bar{f})$. Il est facile de voir que $\bar{g}(a) \subset \bar{f}(a)$ pour chaque $a \in A$. Inversement, pour un élément c de C dans $\bar{f}(a)$ il existe un f_c de C^A tel que $f_c(a) = c$ et $f_c(x) = o$ pour $x(\neq a) \in A$; il en résulte que $f_c(x) \in \bar{f}(x)$ pour chaque x de A [car $o \in \bar{f}(x)$, qui est non vide, étant un élément de (EC)]; donc $f_c \in j(\bar{f})$ et $c = f_c(a) \in \bar{g}(a)$. Nous avons donc montré que $\bar{g}(a) = \bar{f}(a)$ pour chaque a de A, d'où $\bar{f} = \bar{g} = j.i(\bar{f})$ pour chaque $\bar{f}$ de $(EC)^A$.

D'autre part, soit $\mathcal{F} \in E(C^A)$ et $\mathcal{G} = i.j(\mathcal{F})$. Il est évident que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Inversement, pour un f de C^A dans $\mathcal{G}$ et chaque a de A, on a $f(a) \in \{f_\nu(a)\}_{f_\nu \in \mathcal{F}}$, c'est-à-dire il y a au moins un $f_\nu = f_{\nu(a)}$ de $\mathcal{F}$ tel que $f(a) = f_{\nu(a)}(a)$. Associons ainsi un $f_{\nu(a)}$ à chaque a de A, et définissons $g_{\nu(a)}$ de C^A par $g_{\nu(a)}(x) = o$ pour $x(\neq a) \in A$ et $g_{\nu(a)}(a) = f_{\nu(a)}(a) = f(a)$. Il en résulte que $f(a) = \sum_{\nu(a)}^* g_{\nu(a)}(a)$

pour chaque a de A, et $g_{\nu(a)} \prec f_{\nu(a)}$. D'après le lemme 4 on a donc $f = \sum^* g_{\nu(a)}$ dans C^A, $g_{\nu(a)} \prec f_{\nu(a)}$, $f_{\nu(a)} \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in E(C^A)$, donc $f \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ aussi.

Donc $\mathcal{F} = i.j(\mathcal{F})$ pour chaque $\mathcal{F} \in E(C^A)$.

On vérifie sans difficulté que les transformations i, j conservent l'ordre, et que j conserve aussi la multiplication. Donc $i = \overset{-1}{j}$ conserve la multiplication, et i, j sont des isomorphismes [pour $(\prec, \ ,)$] entre les algèbres $E(C^A)$ et $(EC)^A$. $E(C^A)$ étant l'extension basique de C^A, $(EC)^A$ peut aussi être considérée comme une extension de C^A, équivalente à $E(C^A)$, l'image de C^A étant formée par les $j[\wedge(f)]$, $f \in C^A$.

D'après les résultats du paragraphe 6.3, nous pouvons choisir pour C, EC respectivement les chaînes des nombres rationnels et des nombres réels dans l'intervalle fermé (o, 1). Nous avons donc le :

Corollaire. — *Si* A *est un ensemble quelconque, l'algèbre additive de toutes les fonctions rationnelles de* A *avec valeurs dans* (o, 1) *possède comme extension l'algèbre complètement additive de toutes les fonctions réelles de* A *à valeurs dans* (o, 1); *et cette extension est équivalente à l'extension basique.*

7. **Quelques exemples.** — *Exemple* 1. — Supposons que K soit le demi-treillis additif formé par les sous-ensembles finis (ou vides) d'un ensemble infini E [avec l'addition ($\cup$) pour .]. Nous considérons deux extensions de K : la première L_0 sera le treillis complet de tous les sous-ensembles de E, avec K lui-même comme image de K; la seconde L_1 sera le treillis complet formé par les sous-ensembles finis (ou vides) de E et l'ensemble E; L_1 contient aussi K lui-même comme image de K. Pour L_0, L_1 aussi la multiplication (.) est la même comme l'addition ($\cup$).

Évidemment L_0 est équivalente à l'extension basique de K, donc $L_0 R L_1$ est vraie. D'autre part la transformation identique de L_1 dans L_0 est un isomorphisme de L_1 sur un sous-ensemble (L'_1) de L_0 sur K; donc $L_1 \subset L_1$ est vrai. Mais les relations $L_0 R L_1$ et $L_1 \subset L_0$ ne sont pas inversibles; évidemment $L_0 \subset L_1$ n'est pas possible; aussi $E = \sum_i^* \{(a_i)\}$ dans L_1, $E \neq \sum_i^* \{(a_i)\}$ dans L_0, quand $\{a_i\}$ est un sous-ensemble propre et non fini de E, entraînent qu'on ne peut pas trouver un homomorphisme de L_1 dans L_0 sur K; c'est-à-dire $L_1 R L_0$ n'est plus possible.

Donc nous avons les conclusions suivantes :

1° R et $\subset$ sont relations indépendantes.

2° ni $R \not\rightarrow \overline{R}$, ni $\subset \not\rightarrow \overline{R}$ (car $\overline{R} \not\rightarrow \subset$ et R).

3° il existe les extensions non normales; en effet L_1 ne peut pas être normale quand $L_0 \overline{R} L_1$ n'est pas possible. (Observons que L_1 est isomorphe à l'extension de K par « coupures ».)

4° Il n'existe pas, en général, d'extensions $\overline{R}$-minimales; car soit L_i une extension de K qui satisfait $L_i \overline{R} L_1$ (ou seulement $L_i \subset L_1$); il est facile de voir que $L_i \equiv L_1$, donc $L_i \overline{R} L_0$ n'est pas possible (quand $L_1 R L_0$ n'est pas vrai).

Exemple 2. — Soit K une $(\prec, .)$-algèbre avec un plus grand élément 1, qui est, de plus, un élément-unité pour la multiplication [par exemple l'algèbre des nombres rationnels dans l'intervalle fermé (0, 1)].

Pour l'extension basique L_0 de K l'élément $\bigwedge(1)$ est évidemment l'élément maximum et un élément-unité. Supposons que M soit une $\left(\sum^*, .\right)$-algèbre quelconque; et définissons un ordre $\prec$ et une multiplication . dans $L_1 = (L_0 \cup M)$ par

$$(x \prec y \text{ pour } x, y \in L_1) \rightleftarrows \begin{cases} x, y \in L_0 \text{ et } x \subset y \text{ dans } L_0; \\ x, y \in M \text{ et } x \prec y \text{ dans } M; \\ x \in L_0 \text{ et } y \in M. \end{cases}$$

$$(x = y.z \text{ pour } x, y, z \in L_1) \rightleftarrows \begin{cases} x, y, z \in L_0 \text{ et } x = y.z \text{ dans } L_0; \\ x, y, z \in M \text{ et } x = y.z \text{ dans } M; \\ y \in L_0, z \in M \text{ et } x = y. \\ z \in L_0, y \in M \text{ et } x = z. \end{cases}$$

On voit facilement que L_1, une $\left(\sum^*, .\right)$-algèbre, est aussi une extension de K avec $K_0[= \varphi_0(K)]$ comme image de K. De plus $L_1 R L_0$ est vrai; car la transformation φ :

$$\varphi(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in M (\subset L_1),$$
$$\varphi(x) = x \quad \text{si} \quad x \in L_0 (\subset L_1)$$

est évidemment un homomorphisme de L_1 dans L_0 sur K. De $L_1 R L_0$ et $L_0 R L$ pour une extension quelconque L_i de K, résulte que L_1 est aussi une extension R-minimale; et $L_1 \not\equiv L_0$ quand M est choisi proprement. Donc, nous avons les résultats :

1° plusieurs extensions de K peuvent être R-minimale;
2° non $R^* \rightarrowtail \equiv$, car $L_0 R^* L_1$ est vrai, mais $L_0 \equiv L_1$ ne l'est pas.

Exemple 3. — Supposons que K soit le demi-treillis multiplicatif des trois éléments (a, b, o) avec $o \prec a$, $o \prec b$, $o \prec o$, $a \prec a$, $b \prec b$, et $\cap$ pour $(.)$. L'extension basique L_0 de K est fermée par les éléments $\{(o), (o, a), (o, b), (o, a, b)\}$ avec $\cap$ pour $(.)$. Nous considérons une autre extension L_1 de K formée par l'ensemble des éléments $(o_1, a_1, b_1, c_1, d_1)$ avec un ordre réflexif et transitif $\prec$, et une multiplication associative $(.)$ soumises aux conditions :

$$o_1 \prec a_1 \prec c_1 \prec d_1, \qquad o_1 \prec b_1 \prec c_1 \prec d_1,$$
$$x_1 . d_1 = d_1 . x_1 = d_1 \text{ pour chaque } x_1 \text{ de } L_1$$

et

$$x_1 . y_1 = x_1 \cap y_1 \qquad \text{pour} \quad x_1 \neq d_1 \neq y_1, \qquad x_1 y_1 \in L_1.$$

L_1 est une extension de K, avec l'image K_1 constitue par le sous-ensemble (o_1, a_1, b_1). Le noyau de cette extension est la sous-algèbre d'élements (o_1, a_1, b_1, c_1) qui est isomorphe à L_0 par la correspondance :

$$o_1 \leftrightarrow (o) = o_0, \; a_1 \leftrightarrow (a, o) = a_0, \; b_1 \leftrightarrow (b, o) = b_0, \; c_1 \leftrightarrow (a, b, o) = c_0.$$

On en déduit facilement que L_1 est une extension normale. Mais L_1 ne peut pas être R-minimale. Car soit φ un homomorphisme de L_1 dans L_0 sur K,

$$\varphi(c_1) = \varphi(a_1 +^* b_1) = a_0 +^* b_0 = c_0;$$
$$\varphi(d_1) = \varphi(d_1 +^* c_1) = \varphi(d_1) +^* c_0 \succ c_0,$$

d'où $\varphi(d_1) = c_0$; mais

$$c_0 = \varphi(d_1) = \varphi(d_1 . a_1) \neq \varphi(d_1) . \varphi(a_1) = c_0 . a_0 = a_0;$$

c'est-à-dire φ ne peut pas conserver la multiplication $(.)$, s'il conserve les sommes distribuées par $(.)$. Donc $L_1 R L_0$ est impossible; L_1 *est un exemple d'une extension normale qui n'est pas* R-*minimale.*

8. Les congruences d'une algèbre additive avec o et de son extension basique. — Supposons que K soit une algèbre additive avec un élément zéro, $o(o \prec x$ et $o . x = x . o = o$, pour chaque x de K). L'extension basique L_0 de R possède aussi un élément zéro, $\bigwedge(o)$.

Soit $\mathcal{C}(K)$ la famille des congruences (E) définie sur K pour $\left(\sum^*\right)$ $\Big($c'est-à-dire E est une relation d'équivalence sur K telle que $a = \sum_i^* a_i$ et $b = \sum_i^* b_i$ dans K et $a_i E b_i$ pour chaque couple (a_i, b_i) entraîne $a E b\Big)$. Avec la relation d'ordre $\subset$ pour ces congruences définies par

$$(E_1 \subset E_2) \rightleftharpoons (a E_1 b \rightarrow a E_2 b),$$

on voit que $\mathcal{C}(K)$ est un treillis complet.

Considérons alors la classe E(o) des éléments de K congrus à o par rapport à une telle congruence E; alors on a

$$a E o, \qquad b \prec a \rightarrow b = (b +^* o) E (b +^* a) = a E o \rightarrow b E o$$

et

$$a = \sum_i^* a_i \text{ dans } K_1 \text{ avec } a_i E o \rightarrow a = \left(\sum_i^* a_i\right), \qquad \left(\sum_i^* a_i\right) E \left(\sum_i^* o\right) = o \rightarrow a E o;$$

donc E(o) est un élément A de l'extension basique L_0 de K.

Cette transformation $\varphi : E_i \rightarrow A_i = E_i(o)$, de $\mathcal{C}(K)$ dans L_0 satisfait évidemment aux conditions :

$$E_1 \subset E_2 \rightarrow A_1 \subset A_2 \qquad \text{et} \qquad E = \bigcap_i E_i \rightarrow A = \bigcap_i A_i.$$

Plusieurs congruences E_i peuvent avoir la même *classe-zéro* $A = E_i(o)$; mais alors $E = \bigcap_i E_i$ a en même temps A comme classe-zéro; donc il existe une congruence *minimum* (E_A) parmi toutes celles qui ont une classe-zéro A commune. La nature de cette congruence (E_A) paraît dans le

Lemme 5. — *Étant donné un élément* A *de* L_0, *la relation binaire* E_A *définie sur* K *par*

$$(aE_Ab) \rightleftharpoons [\wedge(a) +^* A = \wedge(b) +^* A \text{ dans } L_0]$$

est une relation de congruence pour $\left(\sum^*\right)$ *sur* K; *de plus la classe-zéro de* E_A *est* A, *et* E_A *est la plus petite congruence* E *sur* K *ayant* A *pour classe-zéro.*

Il est bien clair, d'après la définition de la relation E_A, qu'elle est réflexive, symétrique et transitive. Soit alors $a = \sum_i^* a_i$, $b = \sum_i^* b_i$ dans K, où $a_i E_A b_i$ est vérifié par chaque couple d'éléments (a_i, b_i); on a

$$\wedge(a) +^* A = \left[\sum_i^* \wedge(a_i)\right] +^* A = \sum_i^* [\wedge(a_i) +^* A],$$

de même

$$\wedge(b) +^* A = \sum_i^* [\wedge(b_i) +^* A] \quad \text{et} \quad \wedge(a_i) +^* A = \wedge(b_i) +^* A.$$

Il en résulte que $\wedge(a) +^* A = \wedge(b) +^* A$, c'est-à-dire aE_Ab; donc E_A est bien une congruence pour $\left(\sum^*\right)$.

Pour un a de K,

$$aE_A\mathrm{o} \rightleftharpoons \wedge(a) +^* A = \wedge(\mathrm{o}) +^* A \rightleftharpoons \wedge(a) +^* A = A \rightleftharpoons \wedge(a) \subset A \rightleftharpoons a \in A;$$

donc la classe-zéro de E_A est égale à A.

Enfin, soit E une congruence pour $\left(\sum^*\right)$ sur K avec A pour classe-zéro; alors, pour c, $d \in K$,

$$cE_Ad \rightarrowtail \wedge(c) +^* A = \wedge(d) +^* A \text{ dans } L_0 \rightarrowtail \{\overline{c, a_i}\} = \{\overline{d, a_i}\}, \quad \text{ou} \quad A = \{a_i\}.$$

Soit $C = \{c, a_i\}$, et $C = C_0, C_1, \ldots, C_\lambda = \overline{C}$ la suite bien ordonnée définissant $\overline{C}$; alors :

1° pour $x \in C_0 = C$, $x +^* c = c +^* c$ ou $c +^* a_i$, $a_i E \mathrm{o}$; donc $(x +^* c) E c$ est vérifié par chaque $x \in C_0$.

2° Si $(x +^* c) E c$ est vérifié par chaque x de C_σ, alors $(x +^* c) E c$ est vérifié par chaque x de $C_{\sigma+1}$, aussi; car si $x \in C_{\sigma+1}$, $x = \sum_i^* x_i$ dans K, où $x_i \prec y_i \in C_\sigma$; il en résulte que $x +^* c = \sum_i^* (x_i +^* c)$ et $(y_i +^* c) E c$ par l'hypothèse sur C_σ.

$$\begin{aligned}(y_i +^* c) E c \text{ et } (x_i +^* c) \prec (y_i +^* c) &\rightarrowtail (y_i +^* c) \\ = (y_i +^* c) +^* (x_i +^* c) = x_i + (y_i + c) &E (x_i + c)\end{aligned}$$

et

$$(y_i +^* c) E c \rightarrowtail (x_i +^* c) E c.$$

Donc

$$(x +^* c) = \sum_i^* (x_i +^* c)\,\mathrm{E}\left(\sum^* c\right) = c \text{ et } (x +^* c)\,\mathrm{E}\,c$$

pour chaque x de $C_{\sigma+1}$.

3° Si $(x +^* c)\,\mathrm{E}c$ est vérifie par chaque x dans chaque C_σ pour $\sigma < \rho$, nombre ordinal-limite, alors $(x +^* c)\,\mathrm{E}c$ est vérifié pour chaque x dans $C_\rho = \bigcup_{\sigma<\rho} (C_\sigma)$.

L'induction transfinie nous donne donc $(x +^* c)\,\mathrm{E}c$ pour chaque x dans chaque C_σ, en particulier pour chaque x dans $C_\lambda = \overline{C}$; mais $d \in \{\overline{d, a_i}\} = \{\overline{c, a_i}\} = \overline{C}$.

Il en résulte que $(d +^* c)\,\mathrm{E}c$; de même, par symétrie, $(c +^* d)\,\mathrm{E}d$, et enfin $c\mathrm{E}d$; c'est-à-dire $\mathrm{E}_A \subset \mathrm{E}$, si E est une congruence quelconque avec A pour classe-zéro. E_A n'est donc autre que l'élément minimum dans la famille des éléments de $\mathcal{C}(K)$ associée par φ au même élément A de L_0. Nous voyons aussi que φ applique $\mathcal{C}(K)$ *sur* L_0, car chaque A de L_0 vérifie $\varphi(\mathrm{E}_A) = A$. Nous avons donc le

THÉORÈME 6. — *Il y a un homomorphisme φ par rapport à $(\cap)$ du treillis complet $\mathcal{C}(K)$ des congruences pour $\left(\sum^*\right)$ d'une algèbre additive* K *avec élément zéro, sur le treillis complet L_0 formé par l'extension basique de* K, *$\varphi(\mathrm{E})$ pour chaque* E *de $\mathcal{C}(K)$ étant la classe-zéro de* E.

Appelons un élément A de L_0 *régulier à droite* si $A.K \subset A$. Il est clair que les éléments de L_0 réguliers à droite forment un sous-treillis $L_{0(d)}$ de L_0 contenant K et (o). De plus $L_{0(d)}$ est un idéal à gauche de L_0, car B.A est régulier à droite avec A.

Une congruence E sur K est appelée *régulière à droite* (suivant M. P. Dubreil [2]), si $a\mathrm{E}b \rightarrowtail (a.c)\,\mathrm{E}(b.c)$ pour tous a, b, c de K. On vérifie aussitôt qu'une telle congruence a pour classe-zéro un élément de L_0 régulier à droite. Inversement, quand $A(\in L_0)$ est régulier à droite, la congruence E_A est aussi régulière à droite : car

$$\begin{aligned} a\mathrm{E}_A b,\ (a, b, c\mathrm{K}) &\rightarrowtail \wedge(a) +^* A = \wedge(b) +^* A,\\ &\rightarrowtail [\wedge(a) +^* A].\wedge(c) = [\wedge(b) +^* A].\wedge(c),\\ &\rightarrowtail \wedge(a).\wedge(c) +^* A.\wedge(c) = \wedge(b).\wedge(c) +^* A.\wedge(c),\\ &\rightarrowtail \wedge(a).\wedge(c) +^* A.\wedge(c) +^* A = \wedge(b).\wedge(c) +^* A.\wedge(c) +^* A,\\ &\rightarrowtail \wedge(a).\wedge(c) +^* A = \wedge(b).\wedge(c) +^* A,\\ &\rightarrowtail \wedge(a.c) +^* A = \wedge(b.c) +^* A,\\ &\rightarrowtail (a.c)\,\mathrm{E}_A(b.c). \end{aligned}$$

Il en résulte que φ est un homomorphisme par rapport à $(\cap)$ de sous-treillis complet $\mathcal{C}_d(K)$ de $\mathcal{C}(K)$ des congruences régulières à droite, *sur* le sous-treillis $L_{0(d)}$ des éléments de L_0 réguliers à droite.

Supposons maintenant que K *possède un élément-unité à droite e_d* ($x.e_d = x$ pour chaque x de K). Évidemment $\varphi_0(e_d) = \wedge(e_d)$ est un élément-unité à droite pour L_0. Alors nous avons le lemme :

Lemme 6. — *Étant donné un élément* A *de* L_0 *régulier à droite, la relation binaire* E_d^A *définie par* $(aE_d^A b)$ *pour* $a, b \in K \rightleftharpoons (a.x \in A$ *si, et seulement si* $b.x \in A$, *pour chaque* x *de* K) *est une relation de congruence* [8] *sur* K *régulière à droite, ayant* A *pour classe-zéro; de plus* E_d^A *est la plus grande congruence sur* K *régulière à droite avec* A *pour classe-zéro.*

De la définition même de E_d^A résulte que E_d^A est une relation réflexive, symétrique et transitive.

Or, soit $a = \sum_i^* a_i$, $b = \sum_i^* b_i$ dans K, où $a_i E_d^A b_i$ est vérifié par chaque couple d'éléments (a_i, b_i). On a alors, pour chaque x de K,

$$a.x = \left(\sum_i^* a_i\right).x = \sum_i^* (a_i.x) \in A$$

si, et seulement si chaque $(a_i.x) \in A$; de même $b.x \in A$ si, et seulement si chaque $(b_i.x) \in A$; mais $(a_i x) \in A \rightleftharpoons (b_i.x) \in A$, par l'hypothèse. Donc $(a.x) \in A \rightleftharpoons (b.x) \in A$, c'est-à-dire $aE_d^A b$.

D'autre part, si $aE_d^A b$ et $c \in K$, alors

$$(a.c).x \in A \rightleftharpoons a.(c.x) \in A \rightleftharpoons b.(c.x) \in A \rightleftharpoons (b.c)x \in A$$

pour chaque x de K; donc E_d^A est bien une congruence régulière à droite Pour $a \in K$,

$$aE_d^A o \rightarrow a.e_d \in A\,(\text{car } o.e_d = o \in A) \rightarrow a \in A,$$

et inversement

$$a \in A \rightarrow a.x \in A.K \subset A, \text{ si } x \in K \rightarrow a.x \in A \text{ pour chaque } x \in K.$$

Mais $o.x \in A$ pour chaque $x \in A$, d'où $aE_d^A o$; donc la classe-zéro de E_d^A est A.

Enfin soit E une congruence sur K régulière à droite ayant A pour classe-zéro; on a pour chaque x de K,

$$aEb \rightarrow (a.x)E(b.x) \rightarrow (a.x)Eo \text{ si, et seulement si } (b.x)Eo$$
$$\rightarrow (a.x) \in A \text{ si, et seulement si } (b.x) \in A \rightarrow aE_d^A b;$$

donc $E \subset E_d^A$, et E_d^A est une congruence régulière à droite maximum avec A pour classe-zéro, d'où le théorème :

Théorème 7 [9]. — 1° *L'homomorphisme* φ *du théorème* 6 *est un homomorphisme par rapport à* $(\cap)$ *du treillis complet* $\mathcal{C}_d(K)$ *des congruences régulières à droite* sur *le treillis complet* $L_{0(d)}$ *d'éléments de* L_0 *réguliers à droite.*

2° *Quand* K *possède un élément-unité à droite* (e_d) *cet homomorphisme de* $\mathcal{C}_d(K)$ *sur* $L_{0(d)}$ *conserve aussi les sommes.*

---

(8) Nous ne considérons que les congruences pour $\left(\sum^*\right)$ dans ce paragraphe.

(9) Évidemment, on a des résultats analogues pour les congruences régulières à gauche.

Pour déduire la deuxième partie du théorème 7, supposons que

$$E = \sum E_i, \qquad [E, E_i \in \mathcal{C}_d(K)], \qquad \varphi(E) = A \qquad \text{et} \qquad \varphi(E_i) = A_i.$$

Il est évident que $A \supset$ chaque A_i. D'autre part, soit B un élément de $L_{0(d)}$ qui est $\supset$ chaque élément A_i. Alors d'après le lemme 6, chaque

$$E_i \subset E_d^{A_i} \subset E_d^B, \qquad \text{d'où} \qquad E \subset E_d^B \qquad \text{et} \qquad \varphi(E) = A \subset \varphi(E_d^B) = B.$$

Il en résulte que $\varphi(E) = A$ est bien la somme $\sum_i A_i$ dans $L_{0(d)}$ des $\varphi(E_i) = A_i$.

Tous ces résultats sont valables quand l'algèbre additive K est remplacée par l'algèbre complètement additive L_0; on a alors un isomorphisme entre L_0 et son extension basique $(L_0)_0$:

$$A \leftrightarrow \bigwedge(A);$$

et les éléments réguliers à droite de L_0 et de $(L_0)_0$ correspondent dans cet isomorphisme : car $A.L_0 \subset A \rightleftharpoons (\bigwedge A).L_{00} \subset \bigwedge(A)$. On vérifie, de plus, que les restrictions à L_0, considérée comme une sous-algèbre de $(L_0)_0$, des congruences $E_{\bigwedge(A)}$ et $E_d^{\bigwedge(A)}$ définies sur L_0, sont respectivement les congruences E_A et E_d^A définies sur K.

Enfin, observons que pour $\bigwedge(A)$ régulier à droite dans $(L_0)_0$,

$$CE_d^{\bigwedge(A)}D \rightleftharpoons A::C = A::D,$$

où $A::C$, $A::D$ sont les résiduels à gauche [1] de A par C et par D, dans la $\left(\sum^*, .\right)$-algèbre L_0.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory* [*Amer. Math. Soc.*, Colloq. Pub., vol. 25 (édition révisée), 1948].

[2] P. Dubreil, *Contribution à la théorie des demi-groupes* (*Mém. Acad. Sc.*, t. 63, 1941, p. 1-52).

[3] V. S. Krishnan, *Extensions of partially ordered sets.* I (*Jour. Ind. Math. Soc.*, vol. 11, 1947, p. 49-68).

[4] V. S. Krishnan, *Extensions of partially ordered sets.* II (*Jour. Ind. Math. Soc.*, vol. 12, 1948, 89-106)

[5] S. V. Krishnan, *Extensions of multiplicative systems and modular lattices* (*Jour. Ind. Math. Soc.*, vol. 13, 1949, p. 49-59.

[6] V. S. Krishnan, *L'extension d'une $(\prec, .)$-algèbre à une $\left(\sum^*, .\right)$-algèbre* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 1447-1448 et 1559-1561).

[7] H. M. Mac Neille, *Partially ordered sets* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 42, 1937, p. 416-460).

[8] A. L. Uzkov, *On the ringsof quotients of commutative rings* (*Russ.*) (*Math. Sbor.*, t. 22, n° 64, 1948, p. 439-441).

[9] R. Vaidyanathaswamy, *The ideal theory of the Partially ordered set* (*Proc. Ind. Acad. Sc.*, vol. 13, 1941, p. 94-99).