BULLETIN DE LA S. M. F.

ROBERT CAMPBELL

Équations intégrales des fonctions de Mathieu associées et applications

Bulletin de la S. M. F., tome 78 (1950), p. 219-233

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1950__78__219_0>

ÉQUATIONS INTÉGRALES DES FONCTIONS DE MATHIEU ASSOCIÉES ET APPLICATIONS;

PAR M. ROBERT CAMPBELL.

Recherche des noyaux des équations intégrales auxquelles satisfont les fonctions de Mathieu associées. Limite de cette recherche au cas où elle conduit à résoudre des équations différentielles.

Applications :

1° Au calcul numérique des fonctions de Mathieu associées.

2° A la détermination des valeurs asymptotiques.

3° Au développement de ces fonctions en séries de produits de fonctions de Bessel.

4° A la recherche de relations entre fonctions de différents ordres. Position du même problème dans le cas où les fonctions sont de période quelconque.

Nous avons donné précédemment (1) une méthode de calcul des fonctions de Mathieu associées fondée sur leurs développements en séries de polynomes trigonométriques. Il est intéressant de rechercher également des équations intégrales auxquelles elles satisfont, comme cela a été fait pour les fonctions de Mathieu ordinaires (2).

Nous emploierons les notations utilisées dans notre précédent travail (3) :

$pe_n^\nu(\xi)$ désignera la fonction *entière,* solution de l'équation dite de Mathieu associée :

$$(E_p)\qquad \frac{d^2U}{d\xi^2} - 2\nu\,\mathrm{tg}\,\xi\,\frac{dU}{d\xi} + (a + k^2f^2\sin^2\xi)U = 0,$$

qui se réduit pour $k = 0$ au polynome de Gegenbauer $C_n^\nu(\sin\xi)$ et $Ce_n^\nu(\xi)$ désignera le produit $\cos^\nu\xi\, pe_n^\nu(\xi)$, qui satisfait, lui, à l'équation « réduite »

$$(E_p^N)\qquad \frac{d^2\mathfrak{U}}{d\xi^2} + \left[a + + \nu^2\,\frac{\nu(1-\nu)}{\cos^2\xi} + k^2f^2\sin^2\xi\right]\mathfrak{U} = 0.$$

(1) Cf. *Sur les fonctions de Mathieu associées* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 78, 1950, p. 185).

(2) WHITTAKER et WATSON, *Modern analysis*, p. 404; POOLE, *Proc. London Math. Soc.*, t. 20, 1921, p, 374; INCE, *Proc. Royal Soc. of Edinburg*, t. 59, 1940, p. 176; GOLDSTEIN, *Trans. Cam. Phil. Soc.*, t. 23, p. 303; BICKLEY, *Phil. Mag.*, t. 30, 1940, p. 312.

(3) *Loc. cit.*, p. 185.

Rappelons que cette équation différentielle est obtenue à partir d'une séparation de variables dans l'équation des ondes lorsqu'on rapporte celle-ci à un système de quadriques *de révolution* homofocales

$$\rho = f \operatorname{ch} \eta \cos \xi, \qquad z = f \operatorname{sh} \eta \sin \xi$$

et que l'on en cherche les solutions de forme (φ étant l'azimut) :

$$p = \operatorname{ch}^m \eta \cos^m \xi \, \mathrm{U}(\xi) \, \mathrm{V}(\eta) \cos m\varphi;$$

alors $2\nu = 2m + 1$.

U est alors solution de (E_p), V solution d'une équation très analogue en η (avec lignes hyperboliques), appelée « modifiée de (E_p) » [1].

Nous nous proposons donc d'obtenir une équation intégrale pour la fonction $pe_n^\nu(\xi)$, c'est-à-dire une relation de la forme

$$pe_\eta^\nu(\theta) = \lambda_n \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{N}(\theta, \xi) \cos^{2\nu}\xi \, pe_n^\nu(\xi) \, d\xi.$$

Recherche du noyau. — Le problème se ramène donc à la détermination des noyaux possibles $\mathrm{N}(\theta, \xi)$ de l'équation. Considérons alors l'équation des ondes que l'on écrit en coordonnées semi-polaires, soit

$$(\mathrm{O}_p) \qquad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial p}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -k^2 p.$$

Une solution de cette équation, $\mathrm{G}(\rho, z)$, *entière en* ρ *et* z,

$$\mathrm{G}(\rho, z) = \mathrm{G}(f \cos \xi \operatorname{ch} \eta, f \sin \xi \operatorname{sh} \eta)$$

est alors développable en séries de fonctions fondamentales des équations (E_p) et (E_p modifiée), c'est-à-dire sous la forme

$$\sum_0^\infty \mathrm{B}_n^\nu \, pe_n^\nu(\xi) \, pe_n^\nu(i\eta) \quad (^2).$$

En posant $i\eta = \theta$ et en appliquant l'orthogonalité des fonctions $pe_n^\nu \cos^\nu \xi$, on obtient la relation

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{G}[f \cos\theta \cos\xi, f \sin\theta \sin\xi] \, pe_n^\nu(\xi) \cos^{2\nu}\xi \, d\xi$$

$$= \mathrm{B}_n \, pe_n^\nu(\theta) \int_{-\pi}^{+\pi} [pe_n^\nu(\xi)]^2 \cos^{2\nu}\xi \, d\xi = \mathrm{B}_n \, pe_n^\nu(\theta),$$

puisque pe_n^ν est supposée normée. On obtient de cette façon une infinité de noyaux d'équations intégrales pour les fonctions pe_n^ν, par exemple [en séparant les

---

[1] Dans cette étude, qui vise surtout les applications, on supposera 2ν entier, pour se limiter au domaine réel.

[2] *Voir* à ce sujet : Poole, *Proc. London Math. Soc.*, t. 20, 1921, p. 374; Goldstein, *Trans. Cam. Phil. Soc.*, t. 23, 1923, p. 303; Mac Lachlan, *Mathieu Functions*, p. 208; R. Campbell, *C. R. Acad. Sc.*, t. 222, 1946, p. 26.

variables dans l'équation (O_p) et introduisant le paramètre q] :

$$N_1 = \mathrm{ch}\ (fk \sin\theta \sin\xi),$$

$$N_2 = \cos(fk \sin\theta \sin\xi \sqrt{k^2 - q^2})\, J_m(qf \cos\theta \cos\xi) \cos^{-m}\xi \cos^{-m}\theta.$$

On peut présenter les choses autrement. Si l'on refait dans l'équation (O_p) le changement

$$\rho = f\,\mathrm{ch}\,\eta \cos\xi, \qquad z = f\,\mathrm{sh}\,\eta \sin\xi,$$

ses solutions à variables *non séparées* en ξ et η, mais de la forme $P(\xi, \eta) \cos m\varphi$ sont celles de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial\eta^2} - (2m+1)\left[\mathrm{tg}\,\xi \frac{\partial P}{\partial\xi} - \mathrm{th}\,\eta \frac{\partial P}{\partial\eta}\right] + k^2 f^2 (\sin^2\xi + \mathrm{sh}^2\eta) P = 0,$$

qui s'écrit, en posant, comme ci-dessus, $\eta = i\theta$, et après le changement de fonction

$$P = \cos^{-\nu}\xi \cos^{-\nu}\theta\, \mathfrak{P},$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial\theta^2} + \left\{ \nu(1-\nu)\left[\frac{1}{\cos^2\xi} - \frac{1}{\cos^2\theta}\right] + k^2 f^2 (\sin^2\xi - \sin^2\theta) \right\} \mathfrak{P} = 0.$$

On peut alors chercher une solution de l'équation (E_P^N) sous la forme

$$U(\xi) = \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} N(\theta, \xi)\, \Phi(\theta)\, d\theta.$$

En substituant, on obtient

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + \left[A + \frac{\nu(1-\nu)}{\cos^2\xi} + k^2 f^2 \sin^2\xi\right] U$$

$$= \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} \left\{ \frac{\partial^2 N}{\partial\xi^2} + \left[\frac{\nu(1-\nu)}{\cos^2\xi} + k^2 f^2 \sin^2\xi\right] N \right\} \Phi(\theta)\, d\theta + \lambda A \int_{-\pi}^{+\pi} N \Phi\, d\theta$$

qui, d'après (2), s'écrit

$$\lambda \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial^2 N}{\partial\theta^2} \Phi(\theta)\, d\theta + \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} \left[A + \frac{\nu(1-\nu)}{\cos^2\xi} + k^2 f^2 \sin^2\xi\right] N\, \Phi\, d\theta.$$

Or

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \Phi \frac{\partial^2 N}{\partial\theta^2}\, d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi\, d(N'_\theta) = [\Phi N'_\theta - N \Phi'_\theta]_{-\pi}^{+\pi} + \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi'' N\, d\theta.$$

Si l'on choisit $N(\theta, \xi)$ et $\Phi(\theta)$ pour que le terme tout intégré soit nul [condition (1)], la quantité $\int_{-\pi}^{+\pi} N(\theta, \xi)\, \Phi(\theta)\, d\theta$ sera solution de l'équation (E_P^N), si Φ lui-même y satisfait. Si, de plus, Φ et U sont des solutions de même période (N ayant lui-même cette période), Φ et U sont multiples l'un de l'autre. Les deux solutions trouvées ci-dessus donnent immédiatement les noyaux symétriques :

$$\mathfrak{N}_1 = \frac{\cos}{\sin}\left[\sqrt{k^2 - q^2}\, f \sin\theta \sin\xi\right] J_m(q f \cos\theta \cos\xi) \sqrt{\cos\theta \cos\xi},$$

$$\mathfrak{N}_2 = \frac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}\,[kf \sin\theta \sin\xi] \cos^\nu\theta \cos^\nu\xi \qquad (q \text{ paramètre})$$

(on prend cos ou sin, ch ou sh, suivant que pe_n^ν est pair ou impair).

Rechercher les noyaux qui nous intéressent revient donc à chercher une solution de l'équation des ondes (écrite par exemple en coordonnées polaires), qu'on puisse développer en séries de fonctions fondamentales $\sum_{0}^{\infty} B_n^\nu pe_n^\nu(\xi) pe_n^\nu(i\eta)$.

Pour *limiter* cette recherche, nous nous bornerons seulement à chercher les solutions de $\nabla^2 p = -k^2 p$ qui s'obtiennent par des séparations de variable. Nous allons donc, d'abord, déterminer les surfaces de coordonnées (de révolution autour de Oz), sur lesquelles l'équation $\nabla^2 p = -k^2 p$ se décompose en deux équations différentielles. Rappelons que dans le cas $\nabla^2 p = 0$, la question a été résolue par M. René Lagrange [*Sur les surfaces de révolution qui possèdent des harmoniqnes* (*Acta mathematica*, 1939)].

Décomposition de l'équation des ondes. — Avec les notations de Hobson ([1]), soient

$$z + i\rho = f(\eta + i\theta), \qquad x + iy = \rho e^{i\varphi}$$

les équations de la surface de révolution cherchée, f étant l'inconnue. Le ds^2 de l'espace est

$$\rho^2 d\varphi^2 + f'(\eta + i\theta) f'(\eta - i\theta)(d\eta^2 + d\theta^2).$$

L'équation des ondes s'écrit d'autre part

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + f'_+ f'_- \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) = -k^2 \rho f'_+ f'_- U$$

[où f_+ signifie $f(\eta + i\theta)$], les solutions de la forme

$$p = T(\theta) H(\eta) e^{im\varphi}$$

s'obtiennent en résolvant

$$0 = \frac{1}{H}\frac{d^2H}{d\eta^2} + \frac{1}{T}\frac{d^2T}{d\theta^2} + \frac{f'_+ - f'_-}{f_+ - f_-}\frac{1}{H}\frac{dH}{d\eta} + i\frac{f'_+ + f'_-}{f_+ - f_-}\frac{1}{T}\frac{dT}{d\theta} + 4m^2\frac{f'_+ f'_-}{(f_+ - f_-)^2} + k^2 f'_+ f'_-.$$

Les conditions cherchées sont donc

(A) $$\frac{f'_+ - f'_-}{f_+ - f_-} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial\eta}\log(f_+ - f_-) = \text{fonction de } (\eta \text{ seul}),$$

(A′) $$\frac{f'_+ + f'_-}{f_+ - f_-} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial\theta}\log(f_+ - f_-) = \text{fonction de } (\theta \text{ seul}),$$

(B) $$4m^2\frac{f'_+ f'_-}{(f_+ - f_-)^2} + k^2 f'_+ f'_- \quad \text{de la forme } H_1(\eta) + T_1(\theta).$$

(A) et (A′) expriment que $f_+ - f_-$ (ou $2i\rho$) est le produit d'une fonction de θ par une fonction de η. Reste alors à écrire que ρ est une fonction harmonique. Si $\rho = g_1(\eta) g_2(\theta)$, on doit avoir

$$\frac{g''_1}{g_1} + \frac{g''_2}{g_2} = 0,$$

d'où l'on tire sans difficulté que les surfaces cherchées sont des quadriques et que la condition (B) se trouve satisfaite.

([1]) Hobson, *Spherical and ellipsoïdal Harmonics*, Chap. X, p. 410.

Le problème plus général des solutions de la forme

$$P = T(\theta) H(\eta) R(\eta, \theta) e^{im\varphi}$$

se résout également. Les conditions (A) et (A′) deviennent alors

$\rho R^2 =$ produit d'une fonction de θ seul par une fonction de η seul,

mais la condition (B) est plus compliquée :

$$(3') \quad \frac{1}{\rho R}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho\frac{\partial R}{\partial\theta}\right)\right] + \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2\right]\left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) = G_1(\eta) + G_2(\theta).$$

En utilisant une remarque faite par M. Lagrange (*ibid.*, p. 287) selon laquelle le premier terme ci-dessus vaut

$$-\frac{1}{2\rho}\Delta\rho + \frac{1}{4\rho^2}\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2\right] + f(\eta \text{ seul}) + f(\theta \text{ seul}),$$

la condition (B′) s'écrit

$$(B'') \qquad \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{f'_+ f'_-}{(f_+ - f_-)^2} + \frac{k^2}{4} f'_+ f'_- = f(\eta \text{ seul}) + f(\theta \text{ seul}).$$

1° Si nous voulons que la décomposition ait lieu quel que soit m, il faut que cette équation soit une identité, c'est-à-dire que $\frac{f'_+ f'_-}{(f_+ - f_-)^2}$ et $f'_+ f'_-$ soient l'un et l'autre une somme $f(\eta \text{ seul}) + f(\theta \text{ seul})$.

La première condition est celle que M. Lagrange a résolue en posant

$$\eta + i\theta = \alpha, \qquad f(\eta + i\theta) = u(\alpha),$$
$$\eta - i\theta = \beta, \qquad f(\eta - i\theta) = v(\beta),$$

dans

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\theta}\,\frac{f'_+ f'_-}{(f_+ - f_-)^2} = 0,$$

qui devient ainsi

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\left[\frac{u'_\alpha v'_\beta}{(u_\alpha - v_\beta)^2}\right] = 0$$

dont la solution générale est (*ibid.*, p. 292)

$$u'^2_\alpha = au^4 + 4bu^3 + 6cu^2 + 4du + e$$

et de même en v'^2_α avec v.

La deuxième donne, elle,

$$\frac{u'''}{u'} = \text{const.}, \qquad \frac{v'''}{v'} = \text{const.},$$

c'est-à-dire $a = b = 0$, d'où

$$u'^2_\alpha = 6cu^2 + 4du + e.$$

Les surfaces cherchées sont alors les quadriques comme au cas précédent. La fonction $R(\eta, \theta) = 1$.

2° Si nous voulons que la décomposition ait lieu seulement pour une valeur donnée de m, par exemple : $m = 0$ (ondes à symétrie circulaire), il suffit que la condition (B″) soit *une équation*. Avec le même changement de variable, elle s'écrit

$$(\mathrm{B}''')\quad u'_\alpha v'_\beta\left[6\frac{u'^2-v'^2}{(u-v)^4}-6\frac{u''+v''}{(u-v)^3}+\left(\frac{u'''}{u'}-\frac{v'''}{v'}\right)\left(\frac{1}{(u-v)^2}-\frac{k^2}{4m^2-1}\right)\right]=0 \qquad \left(m\neq\pm\frac{1}{2}\right).$$

On la résout en supposant $\beta = \text{const.}$ (v, v', v'', v''' constants). Si

$$u - v_0 = \mathrm{U},\quad v_0'^2 = \lambda,\quad v_0'' = \mu,\quad v_0''' = \nu,\quad \frac{k^2}{4m^2-1} = k'^2,$$

elle est

$$6\mathrm{U}'^3 - 6\mathrm{U}\mathrm{U}'\mathrm{U}'' + \mathrm{U}^2\mathrm{U}''' = [6\lambda + 6\mu\mathrm{U} + \nu(\mathrm{U}^2 - k^2\mathrm{U}^4)]\mathrm{U}'.$$

Si l'on prend U′ comme fonction et U comme variable, U^{-3} est alors facteur intégrant et l'on obtient

$$\mathrm{U}_\alpha'^2 = (a - lk'^2)\mathrm{U}^4 + 4b\mathrm{U}^3 + 6c\mathrm{U}^2 + 4d\mathrm{U} + e + lk'^2\mathrm{U}^4 \operatorname{Log}\mathrm{U}$$

et une formule analogue pour $\mathrm{V}_\beta'^2$ (les constantes n'étant pas les mêmes). Il reste à déterminer les constantes *abcdel* pour que les expressions satisfassent à la condition (B‴).

Si $\mathrm{M}(\alpha, \beta)$ désigne le crochet facteur de $u'_\alpha v'_\beta$ dans (B‴), on a à écrire que $(u-v)^4\mathrm{M}(\alpha, \beta)$ est identiquement nul quand on remplace $\mathrm{U}_\alpha'^2$ et $\mathrm{V}_\beta'^2$ par les expressions trouvées. On constate alors aussitôt que l doit être nul, ce qui ramène au cas précédent, et les surfaces cherchées à être encore des quadriques.

La recherche des noyaux revient alors à celle des solutions à variables séparées de l'équation $\nabla^2 p + k^2 p = 0$, écrite dans les différents systèmes de coordonnées, dont les surfaces sont des quadriques de révolution.

1° *Sphères et cônes*. — Le découpage de l'espace par sphères concentriques et cônes de révolution conduit aux solutions (λ est la colatitude, r le rayon vecteur)

$$\Sigma(r, \cos\lambda) = \frac{\mathrm{J}_{n+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{r}}\mathrm{P}_n^m(\cos\lambda)e^{im\varphi}\quad (m \text{ entier}).$$

On repasse aux variables ξ, η (ou θ) des fonctions de Mathieu associées par

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \frac{f}{\sqrt{2}}(\cos 2\xi + \cos 2\theta)^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos\lambda = \frac{i\sqrt{2}\sin\xi\sin\theta}{\sqrt{\cos 2\xi + \cos 2\theta}} = \frac{z}{r}.$$

Si $n - m = \mathrm{E}$ est entier, la fonction $\mathrm{P}_n^m(\cos\lambda)$ est entière. Le noyau N_3 qu'on en déduit est bien tel que $\mathrm{N}_3 \cos^{-\nu}\xi \cos^{-\nu}\theta$ soit une fonction entière de ξ et θ qui s'écrit

$$\mathrm{N}_3 = r^{-\frac{1}{2}}\mathrm{J}_{m+\mathrm{E}+\frac{1}{2}}(kr)\mathrm{P}_{m+\mathrm{E}}^m\left(\frac{z}{r}\right)\sqrt{\cos\xi\cos\theta};$$

où

$$r = \frac{f}{\sqrt{2}}(\cos 2\xi + \cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}, \qquad z = if \sin\xi \sin\theta$$

et où l'on pourra séparer parties réelle et imaginaire.

Si $m = -\frac{1}{2}$, on doit retrouver le noyau d'une fonction de Mathieu ordinaire; or, $P_r^m(\cos\lambda)$ devient

$$P^{-\frac{1}{2}}_{E-\frac{1}{2}}(\cos\lambda) = \cos^{-\frac{1}{2}}\lambda \cos E\lambda,$$

ce qui redonne en particulier, pour $E = 0$, le noyau $J_0[kr]$.

2° *Paraboloïdes homofocaux.* — La séparation des variables s'effectue ici, mais on obtient des équations différentielles de type

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{dy}{du} + \left(a + k^2u^2 + \frac{m^2}{u^2}\right)y = 0$$

et une autre où a est changé en $-a$.

La solution évidente en est $u^m e^{i\frac{k}{2}u^2}$, avec $a = 2(m+1)k$.

En remarquant que

$$u = f\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi}{2}\right)\operatorname{sh}\left(i\frac{\pi}{4} - \frac{\eta}{2}\right),$$

$$v = f\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\xi}{2}\right)\operatorname{sh}\left(i\frac{\pi}{4} + \frac{\eta}{2}\right),$$

cette solution $(uv)^m e^{i\frac{k}{2}(u^2-v^2)}$ redonne le noyau déjà trouvé N_2.

La deuxième solution, qui s'écrit

$$u^m e^{i\frac{k}{2}u^2}\int_{u_0}^{u}\frac{e^{-iku^2}\,du}{u^{2m+1}},$$

donne un noyau qui s'exprime à l'aide des fonctions γ incomplètes ou des fonctions W_{km} de Whittaker, c'est-à-dire, en choisissant convenablement u_0 :

$$W_{-\frac{\nu}{2},\frac{1-\nu}{2}}\left[\frac{k}{f}(z+r)\right]W_{-\frac{\nu}{2},\frac{1-\nu}{2}}\left[\frac{k}{f}(z-r)\right],$$

où r et z ont les mêmes valeurs que ci-dessus.

3° Restent les quadriques homofocales à centre, mais le noyau qu'on trouve pour les fonctions de l'ellipsoïde allongé s'écrit

$$pel\left(\frac{\pi}{2} - \xi\right)pelh\left(i\frac{\pi}{2} - \eta\right)$$

et l'on ne fait que retomber ici sur des relations banales entre ces fonctions et celles de l'ellipsoïde aplati. Le problème de la recherche systématique des noyaux que nous nous étions posé est donc achevé.

Application de ces équations intégrales. — 1° Soient d'abord quelques applications de l'équation intégrale la plus simple, qui, relativement aux fonctions $pe_n^\nu(\xi)$ s'écrit

$$pe_n^\nu(\theta) = \lambda_n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \operatorname{ch}(kf \sin\theta \sin\xi) \cos^{2\nu}\xi \, pe_n^\nu(\xi)\, d\xi.$$

On peut l'utiliser pour *calculer* $pe_n^\nu(\theta)$ sous la forme $\Sigma A_n^\nu C_s^\nu(\sin\theta)$, c'est-à-dire retrouver ainsi le développement déjà calculé [1] et cela même dans le cas où la méthode que nous y avons exposée est en défaut (ce qui peut arriver pour ν entier).

On peut, en effet, en tirer un développement de la forme (soit $kf = q$) :

$$pe_n^\nu(\theta, q) = \beta_0(\theta) + q\beta_1(\theta) + q^2\beta_2(\theta) + \ldots$$

en puissances croissantes de q (intéressant lorsqu'on cherche une définition pour q petit). On n'a pas à se soucier des valeurs caractéristiques de a, mais il faut calculer le λ_n. On tient compte du fait que si $q \to 0$,

$$\beta_0(\theta) \to P_n(\sin\theta).$$

Ébauchons le calcul dans le cas le plus simple $\left(\nu = \frac{1}{2},\ n = 0\right)$. Alors, $\lambda_n \to 1$ si $k \to 0$. On pose donc

$$\frac{1}{\lambda} = 1 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \ldots,$$
$$pe_0(\theta) = 1 + q\beta_1(\theta) + q^2\beta_2(\theta) + \ldots.$$

D'autre part, on peut développer le ch en série de Mac-Laurin, d'où

$$(1 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \ldots)[1 + q\beta_1(\theta) + q^2\beta_2(\theta) + \ldots]$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{q^2}{2!}\sin^2\theta \sin^2\xi + \ldots\right)[1 + q\beta_1(\xi) + \ldots]\cos\xi \, d\xi.$$

Le calcul est *plus simple* que pour les fonctions de Mathieu (même celle d'indice zéro) en raison de la présence du terme $\cos\xi\, d\xi = dt$. On peut immédiatement former l'équation générale du système, β_p devant être une fonction linéaire de $P_0(\sin\theta)$, $P_2(\sin\theta)$, $P_{2n}(\sin\theta)$ *sans terme constant* :

$$\alpha_2 + \beta_2(\theta) = \int_0^1 \beta_2\, d\theta + \frac{1}{3}\frac{\sin^2\theta}{2!},$$

$$\alpha_4 + \alpha_2\beta_2 + \beta_4 = \int_0^1 \beta_4\, d\theta + \frac{1}{3!}\sin^2\theta + \frac{1}{5!}\sin^4\theta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\alpha_{2p} + \alpha_{2p-2}\beta_2 + \ldots + \beta_{2p} = \int_0^1 \beta_{2p}\, d\theta + \frac{1}{3!}\sin^2\theta + \ldots + \frac{\sin^{2p}\theta}{(2p+1)!},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---

[1] Cf. *loc. cit.* (*Bull. Soc. math. France*, t. 78, 1950, p. 185).

Comme on précise la définition de la fonction $ce_0^{\frac{1}{2}}$ en stipulant que le coefficient constant dans le développement en série des P_n soit 1, on détermine les $\beta_i(\theta)$ pour qu'elles ne contiennent aucun terme constant. On trouve ainsi

$$\frac{1}{\lambda} = 1 + \frac{1}{18}q^2 + \frac{713}{12\,600}q^4 + o(q^6),$$

$$pe_0(\theta) = 1 + \frac{q^2}{9}P_2(\sin\theta) + q^4\left[\frac{757}{34\,020}P_2 + \frac{13}{430}P_4\right] + o(q^6).$$

2° *Valeurs asymptotiques.* — Rappelons que l'on a déjà utilisé cette même équation intégrale à propos des développements de $peh_n^\nu(\eta)$ en série de fonctions de Bessel ([1]). Les valeurs asymptotiques de $peh_n^\nu(\eta)$, pour η grand, peuvent être calculées, soit à partir de ces développements, soit directement, grâce à la précédente équation intégrale. On a démontré que l'expression

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \mathrm{ch}(kf\sin\theta\sin\xi)\cos^{2\nu}\xi\, U(\xi)\, d\xi$$

était la solution de l'équation (E_p) en même temps que $U(\xi) = \Sigma A_n^\nu C_n^\nu(\sin\xi)$. Donc la fonction

$$V(\eta) = \lambda_n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(kf\,\mathrm{sh}\,\eta\sin\xi)\cos^{2\nu}\xi\, U(\xi)\, d\xi$$

est la solution correspondant à $U(\xi)$ dans l'équation modifiée.

Posant alors, comme a fait Marschall ([2]) :

$$\frac{1}{2}fke^\eta = x, \qquad \xi = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

on obtient

$$V(x) = \lambda_n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\left[\left(x - \frac{f^2k^2}{4x}\right)\cos\alpha\right]\left[\sum_0^\infty A_n^\nu C_n^\nu(\cos\alpha)\right]\sin^{2\nu}\alpha\, d\alpha.$$

Posant alors $\cos\alpha = 1 - \frac{t}{x}$ et faisant tendre x vers l'infini, on obtient

$$\lim_{x\to\infty} V(x) = \lambda_n \sum_0^\infty A_n^\nu C_n^\nu(1)\, x^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left[\cos x\int_0^t t^{\nu-\frac{1}{2}}\cos t\, dt + \sin x\int_0^t t^{\nu-\frac{1}{2}}\sin t\, dt\right].$$

Ces intégrales ont un sens et sont connues dans la théorie des fonctions eulériennes lorsque ν est compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$. Mais le produit

$$x^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^x t^{\nu-\frac{1}{2}}\cos t\, dt$$

---

(1) Cf. *loc. cit.* (*Bull. Soc. math. France*, t. 78, 1950, p. 185).

(2) *Proc. Edin. Math. Soc.*, t. 40, 1921, p. 223.

a un sens quel que soit ν, car

$$\frac{1}{x^{\nu+\frac{1}{2}}}\int_0^x t^{\nu-\frac{1}{2}}\cos t\,dt = \frac{1}{x^{\nu+\frac{1}{2}}}\Big[t^{\nu-\frac{1}{2}}\sin t\Big]_0^x - \frac{\nu-\frac{1}{2}}{x^{\nu-\frac{1}{2}}}\int_0^x t^{\nu-\frac{3}{2}}\sin t\,dt.$$

Le terme tout intégré tend vers zéro quand $x \to \infty$ et l'autre permet de faire descendre d'une unité l'exposant de t; et l'on a toujours

$$\lim_{\eta\to\infty} ceh_n^\nu(\eta) = \lambda_n\sqrt{\frac{2}{kf}}\,pe_n^\nu\left(\frac{\pi}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{\eta}{2}}\left\{\begin{array}{l}\sin\left(\frac{fk}{2}e^\eta - \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right),\\ \text{(ou cos)}.\end{array}\right.$$

C'est la valeur asymptotique cherchée. Si $\nu = 0$, on retrouve l'expression asymptotique des fonctions de Mathieu donnée par Heine et Marschall. Le cas où $\nu = \frac{1}{2}$ donne

$$ceh_n^{\frac{1}{2}}(\eta) \sim \lambda_n\sqrt{\frac{2}{fk}}\left(\sum_0^\infty A_n\right)e^{-\frac{\eta}{2}}\sin\left(\frac{fk}{2}e^\eta\right).$$

3° *Application de l'équation intégrale à noyaux de Bessel.* — On sait le prix que Bickley (*loc. cit.*) et Mac Lachlan (*Theory of Mathieu functions*) attachent aux développements des fonctions $ce_n(\xi)$ en séries non de fonctions de Bessel, mais de ***produits de fonctions de Bessel*** (¹). Toujours en supposant $pe_n^\nu(\xi)$ développé sous la forme $\Sigma A_n^\nu C_n^\nu(\sin\xi)$, on va essayer d'obtenir un de ces développements.

Pour cela, nous appliquons l'équation intégrale de noyau N_3 :

$$ce_n^\nu(\xi) = \mu_n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} J_{m+\frac{1}{2}+E}\left[\frac{kf}{\sqrt{2}}(\cos 2\theta + \cos 2\xi)^{\frac{1}{2}}\right]P_{m+E}^m\left[\frac{i\sqrt{2}\sin\xi\sin\theta}{\sqrt{\cos 2\theta + \cos 2\xi}}\right]ce_n^\nu(\theta)\sqrt{\cos\xi\cos\theta}\,d\theta.$$

On prendra $E = 0$. $P_m^m(\cos\lambda)$ vaut alors $\sin^m\lambda$ soit $\left(\frac{\rho}{r}\right)^m$. L'équation s'écrit (en pe_n^ν) et puisque $m + E = m = n$,

$$pe_n^\nu(\xi) = \mu_n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}\left[\frac{kf}{\sqrt{2}}(\cos 2\theta + \cos 2\xi)^{\frac{1}{2}}\right]}{(\cos 2\theta + \cos 2\xi)^{n+\frac{1}{2}}}\cos^{2\nu}\theta\,pe_n^\nu(\theta)\,d\theta.$$

La formule suivante de Sonine (²) :

$$\frac{J_n\left[(r^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}\right]}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi)^{\frac{n}{2}}} = 2^n\Gamma(n)\sum_0^\infty (n+s)\frac{J_{n+s}(r)}{r^n}\frac{J_{n+s}(R)}{R^n}C_s^n(\cos\varphi)$$

fournit le développement cherché de $pe_n^\nu(\xi)$ en série de produits de fonctions de Bessel.

(¹) *Voir* aussi Dougall, *Proc. Edin. Math. Soc.*, 1922-1923.

(²) *Math. Annalen*, t. 16, 1876, p. 80.

En effet, en posant

$$r = ge^{i\xi}, \qquad R = ge^{-i\xi}, \qquad \varphi = 2\theta,$$

on obtient

$$\frac{J_n\sqrt{2}g(\cos 2\xi + \cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}}{g^n 2^{\frac{n}{2}}(\cos 2\xi + \cos 2\theta)^{\frac{n}{2}}} = 2^n\Gamma(n)\sum_0^\infty (n+s)\frac{J_{n+s}(ge^{i\xi})J_{n+s}(ge^{-i\xi})C_s^n(\cos\varphi)}{g^n}.$$

En prenant $\sqrt{2}g = \frac{kf}{\sqrt{2}}$, $\left(g = \frac{kf}{2}\right)$, on a un développement du noyau de l'équation intégrale sous la forme

$$pe_n^\nu(\xi) = 2^{\frac{3\nu}{2}}\Gamma(\nu)\sum_0^\infty (\nu+s)J_{\nu+s}\left(\frac{kf}{2}e^{i\xi}\right)J_{\nu+s}\left(\frac{kf}{2}e^{-i\xi}\right)\mu_{2n}$$
$$\times\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} pe_{2n}^\nu(\theta)\cos^{2\nu}\theta C_s^\nu(\cos 2\theta)\,d\theta,$$

mais $pe_n^\nu(\theta)$ étant développé justement sous la forme $\Sigma A_{2r}^\nu C_{2r}^\nu(\sin\theta)$, on aura, comme coefficients du développement, des intégrales de forme :

$$\sum_0^\infty A_{2r}^\nu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} C_{2r}^\nu(\sin\theta)\sum_0^\infty C_s^\nu(\cos 2\theta)\cos^{2\nu}\theta\,d\theta.$$

Ici une complication s'élève du fait que $C_s^\nu(\cos 2\theta)$ et $C_{2r}^\nu(\cos 2\theta)$ ne sont pas liés très simplement. Toutefois, on peut calculer $C_s^\nu(\cos 2\theta)$ sous la forme d'une fonction linéaire d'autres polynomes de Gegenbauer :

$$C_s^\nu(\cos 2\theta) = B_s^s C_{2s}^\nu(\sin\theta) + B_{s-1}^s C_{2s-2}^\nu(\sin\theta) + \ldots + B_0^s.$$

Les B_i^s sont faciles à calculer. Il existe dans ce développement fini, si $s > r$ un terme $B_r^s C_{2r}^\nu(\sin\theta)$. On a de même un terme B_{r+1}^s provenant de C_{s-1}^ν, etc. Donc l'intégrale définie porte sur une série

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\sum_{s=r}^{s=\infty} B_r^s C_{s2}^\nu(\sin\theta)C_{s2}^\nu(\sin\theta)\cos^{2\nu}\theta\,d\theta,$$

ou encore après calcul

$$\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\nu-1)\Gamma(\nu-1)} \times \frac{\Gamma(2r+2\nu-1)}{\Gamma(2r+\nu)\Gamma(2r)}\sum_{s=r}^{s=\infty} B_r^s.$$

Les B_r^s étant des entiers, la série $\sum_s B_r^s$ diverge, mais l'expression $A_{2r}^\nu \sum_s B_r^s$, elle, a un sens; et finalement la série $\sum_0^\infty \left[A_{2r}^\nu \sum_r^\infty B_r^s\right]$ converge (plus lentement naturellement que la série des A_{2r}^ν).

Comme les B_r^s, faciles à calculer, ne sont tout de même pas immédiats et qu'il faut encore déterminer μ_{2n}, ce développement en série de fonctions $J_p\left(\frac{kf}{2}e^{i\xi}\right)$, $J_p\left(\frac{kf}{2}e^{-i\xi}\right)$ n'est pas très facile à obtenir, sauf dans le cas très simple des fonctions de Mathieu et peut-être aussi dans celui où $\nu = \frac{1}{2}$.

Restent à déterminer les constantes λ_{2n} et μ_{2n}.

1° λ_{2n}. — On a

$$pe_n^\nu(\xi) = \lambda_n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{J_n(kf\cos\theta\cos\xi)}{\cos^n\xi}\cos^{n+1}\theta\, pe_n^\nu(\theta)\,d\theta.$$

Faisons ici $\xi = 0$ et supposons $pe_n^\nu(\theta)$ développé en série de *puissances* de $\sin\theta$. Prenons n pair par exemple :

$$pe_{2N}^\nu(\theta) = \lambda_{2N}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} J_{2N}(kf\cos\theta)\cos^{m+1}\theta \sum_0^\infty \alpha_{2r}\sin^{2r}\theta\,d\theta,$$

or, Sonine a montré (*loc. cit.*) que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} J_m(kf\cos\theta)\cos^{m+1}\theta\,\sin^{2n-2m-1}\theta\,d\theta = 2^{n-m}J_n(kf)(kf)^{m-n}\Gamma(n-m),$$

d'où

$$pe_{2n}^\nu(0) = \alpha_0 = \lambda_{2n}\sum_0^\infty \alpha_{2r}J_{m+r+\frac{1}{2}}(kf)(kf)^{-r-\frac{1}{2}}\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right).$$

2° Si l'on fait de même $\xi = 0$ dans l'équation intégrale à noyau N_3 déjà utilisée :

$$pe_n^\nu(0) = \mu_{2n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 2^{-\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{4}\right)}J_{m+\frac{1}{2}}(kf\cos\theta)\cos^{m+\frac{1}{2}}\theta\left[\sum_0^\infty \alpha_{2r}\sin^{2r}\theta\right]d\theta.$$

Comme r est entier, chaque intégrale précédente n'est pas exactement du type de Sonine, mais peut être du moins ramenée à la forme

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x^\nu J_\nu(x)(1-x^2)^{r-\frac{1}{2}}\,dx,$$

qui est elle-même une série d'intégrales de forme $\int z^n J_n(z)\,dz$ dont on sait qu'on peut calculer chacune d'elles.

4° *Relations entre des fonctions de différents ordres.* — Par analogie avec les fonctions de Legendre, appelons dans la fonction $pe_n^\nu(x)$, n l'*indice* et ν l'*ordre*.

Une formule trigonométrique telle que

$$\cos(n+1)x = \cos x\cos nx - \sin x\sin nx$$

donne la relation entre deux fonctions $\cos nx$ *d'indices* différant de 1. Ince se proposant de généraliser cette formule et d'une façon générale les formules de la trigonométrie aux fonctions de Mathieu ordinaires $ce_n(x)$ et $se_n(x)$ a été amené à calculer par exemple $ce_n(x)$ en fonction des autres ce_p d'indice entier (¹). Ces formules n'ont pas la commodité des formules trigonométriques (auxquelles elles se réduisent lorsque k est nul), car Ince a constaté que chacune d'elles fait intervenir une infinité de fonctions ce_p ou se_p.

Il serait banal de généraliser aux ce_n^ν la méthode de Ince pour les ce_n, mais un nouveau problème se pose ici, celui des relations entre des fonctions de *différents ordres*.

Pour cela l'équation intégrale de noyau N_1 peut nous servir, car l'*ordre* figure, justement, dans la fonction de Bessel du noyau.

Or, on peut écrire, en posant $kf\cos\theta\cos\xi = x$ et d'après le noyau N_1 :

$$x^{-m}J_m(x) = \sum_0^\infty B_k^\nu pe_k^\nu(0)pe_k^\nu(\xi).$$

Comme par ailleurs, on a l'identité classique

$$x^{-m-1}J_m(x) = x^{-m}J_{m+1}(x) + x^{-m}J_{m-1}(x)$$

en exprimant ces trois termes en séries de fonctions caractéristiques, et en appliquant la propriété d'orthogonalité des pe_n^ν, on peut tirer ainsi l'une des fonctions soit $pe_{h_0}^{\nu+1}(\xi)$ en série des pe_k^ν et des $pe_l^{\nu-1}$.

On obtient facilement ainsi

$$pe_{h_0}^{\nu+1}(\xi) = \frac{1}{\cos^2\xi}\left[\sum_0^\infty \lambda_{h_0,j}pe_j^\nu(\xi) + \sum_0 \mu_{h_0,l}pe_l^{\nu-1}(\xi)\right].$$

Les coefficients sont des intégrales définies, toutes de la forme

$$\int_{-\pi}^{+\pi} pe_l^n(\xi)pe_l^{n+1}(\xi)\cos^{2n+2}\xi\,d\xi.$$

Il reste évidemment à déterminer les B_k^ν, ce qui ne présente aucune difficulté. Ces formules se réduisent pour $k=0$ aux formules de récurrence entre les polynomes de Gegenbauer d'ordre différent d'un entier.

On peut par le procédé obtenir la dérivée d'une fonction pe_k^ν sous forme d'un développement analogue de fonctions $pe_k^{\nu+1}$.

Il suffit de partir de la formule

$$xJ'_m = mJ_m - xJ_{m+1},$$

il n'y a pas de nouvelles intégrales définies à calculer.

(¹) *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, t. 59, 1940, p. 176.

Équations intégrales des pe_n^ν, quand n est fractionnaire. — De même qu'on a trouvé ci-dessus des noyaux développables sous la forme

$$N(\xi, \eta) = \sum_0^\infty B_k^\nu pe_n^\nu(\theta) pe_n^\nu(\xi) \qquad (n \text{ entier}).$$

Il s'agit de trouver des noyaux qui soient développables suivant des séries dont chaque élément soit de la forme

$$B_{\frac{r}{s}+i} pe^\nu_{\frac{r}{s}+j}(\xi) pe^\nu_{\frac{r}{s}+j}(\theta).$$

Ces fonctions qui ont pour période $2s\pi$ ne sont plus entières par rapport à $\cos\xi \cos\theta = \rho$, $\sin\xi \sin\theta = z$, mais le sont par rapport aux quantités

$$u = \cos\frac{\xi}{n}\cos\frac{\theta}{n}, \qquad v = \sin\frac{\xi}{n}\sin\frac{\theta}{n}.$$

Il s'agit donc de trouver pour l'équation des ondes des solutions qui soient :

1° entières en u et v;

2° non entières en ρ et z, car alors elles auraient pour périodes non pas vraiment $2s\pi$, mais 2π et ne répondraient pas à la question.

Or, si l'on passe des variables ξ, η aux variables u, v, on a les relations

$$\rho + iz = \mathrm{ch}(\xi + i\eta) = P_s(u + iv),$$

r_s désignant le polynome ch[$s$argch].

On a alors

$$\rho = \rho_s(u, v) \qquad z = z_s(u, v)$$

(ρ_s, z_s étant des polynomes) et l'on est ramené à chercher des solutions, entières en u, v, de l'équation des ondes sur la surface de révolution définie par ces deux équations paramétriques, c'est-à-dire exactement au même problème que celui que nous avons traité au début de cette étude dans le cas des ellipsoïdes et hyperboloïdes.

On détermine facilement le polynome P_s et les nouvelles surfaces sur lesquelles nous avons à écrire l'équation des ondes sont les suivantes :

$$s = 2 \begin{cases} \rho = 2(u^2 - v^2) - 1 & \text{(paraboloïdes)}, \\ z = 4uv; \end{cases}$$

$$s = 3 \begin{cases} \rho = u(4u^2 - 12v^2 + 3), \\ z = v(4v^2 + 12u^2 - 3); \end{cases}$$

$$s = 4 \begin{cases} z = 8[u^4 + v^4 - 6u^2v^2 - 8(u^2 - v^2) + 1], \\ \rho = 16uv[2(u^2 - v^2) - 1]; \end{cases}$$

. . . .

Or, les surfaces ne sont du deuxième ordre que dans le cas où $s = 2$ et le problème de la recherche d'une solution par *séparation des variables* n'est possible que dans ce cas. *C'est ce qui explique que l'on n'ait jamais résolu ce problème, même dans le cas des équations de Mathieu ordinaires, pour s quelconque.*

Toutefois, pour les fonctions de période 4π, le problème consiste à chercher des solutions entières en u et v (mais non en u^2, ni v^2, ni uv) de l'équation (déjà obtenue ci-dessus) qui exprime $\nabla^2 p + k^2 p = 0$ sur des paraboloïdes de révolution homofocaux

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{dy}{du} + \left(a + k^2u^2 + \frac{m^2}{u^2}\right)y = 0.$$

Rappelons que dans ce cas, en effet, où $m = \pm\frac{1}{2}$ (équation de Mathieu simple), Poole a donné de cette équation des solutions et déduit pour les fonctions $ce_{\frac{1}{2}}$, $se_{\frac{1}{2}}$, des équations intégrales, déjà compliquées et difficiles à utiliser dans la pratique (1). Dans le cas général, l'équation différentielle précédente mériterait une étude particulière au même titre que celle de Mathieu associée, mais cette analyse dépasserait de beaucoup les limites que nous avons dû fixer à celle-ci.

Manuscrit reçu le 25 janvier 1950.

---

(1) *Proc. London Math. Soc.*, t. 20, 1921, p. 374.