BULLETIN DE LA S. M. F.

V. LALAN

Sur l'emploi d'un repère canonique dans l'étude des réseaux conjugués

Bulletin de la S. M. F., tome 78 (1950), p. 162-184
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1950__78__162_0>

SUR L'EMPLOI D'UN REPÈRE CANONIQUE DANS L'ÉTUDE DES RÉSEAUX CONJUGUÉS;

PAR M. V. LALAN.

Introduction. — Dans un Mémoire paru au *Bulletin des Sciences mathématiques* (t. 67, 1943, p. 1-26), et qui a pour objet la détermination des surfaces admettant une seconde forme fondamentale donnée, M. Élie Cartan introduit un repère birectangle $Me_1e_2e_3$ choisi de telle sorte que, le déplacement élémentaire étant $dM = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$, la seconde forme fondamentale s'écrive $(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$ (en supposant la courbure totale positive). Le présent travail apporte une contribution à la théorie d'un tel repère, que nous appelons *le repère canonique associé au réseau conjugué* $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$. Le problème de la détermination du repère canonique est intimement lié, comme on le verra dans la seconde Partie, à celui de *la déformation des surfaces avec conservation d'un réseau conjugué* (¹). Nous retrouvons notamment un fait déjà signalé en 1901 par A. Demoulin (*C. R. Acad. Sc.*, t. 133, 1901, p. 265), à savoir que toute la difficulté du dernier problème réside dans l'intégration d'une certaine équation aux dérivées partielles du quatrième ordre. Notre méthode nous permet de former explicitement ladite équation; si l'intégration n'en paraît pas possible dans le cas général, elle se laisse effectuer dans certains cas particuliers, comme nous l'indiquons brièvement, en nous bornant au cas où le réseau conjugué ne contient pas de géodésiques. Un résumé de ce travail a paru dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 229, 1949, p. 1115).

I. — Repère canonique associé à un réseau conjugué.

1. Définition du repère canonique. — Un réseau conjugué étant tracé sur une surface, nous lui attachons un repère birectangle $Me_1e_2e_3$. M est le point courant de la surface, e_1 et e_2 sont deux vecteurs respectivement tangents aux courbes du réseau qui passent en M, e_3 est normal, unitaire et dirigé comme $e_1 \wedge e_2$. Si les longueurs de e_1 et e_2 sont prises arbitrairement, la forme asymptotique s'écrit, en posant $dM = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$,

$$\Phi = a(\omega^1)^2 + c(\omega^2)^2.$$

(¹) Pour la bibliographie, *voir* S. FINIKOFF, *Déformation à réseau conjugué persistant et problèmes géométriques qui s'y rattachent* (*Mém. Sc. Math.*, fasc. 96, 1939).

a et c sont des fonctions de point, dont on peut ramener les valeurs à ± 1, en disposant des longueurs de e_1 et e_2. Au cas où la courbure totale de la surface est positive, on peut, en intervertissant au besoin les indices 1 et 2, supposer a et c positifs et, en posant

$$\bar{\omega}^1 = \sqrt{a}\,\omega^1, \qquad \bar{\omega}^2 = \sqrt{c}\,\omega^2,$$

on obtiendra

$$\Phi = (\bar{\omega}^1)^2 + (\bar{\omega}^2)^2. \tag{1}$$

Les vecteurs tangents sont maintenant

$$\bar{e}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{a}}, \qquad \bar{e}_2 = \frac{e_2}{\sqrt{c}}.$$

Si la courbure totale est négative, on peut supposer a négatif et c positif. On posera alors

$$\bar{\omega}^1 = \sqrt{-a}\,\omega^1, \qquad \bar{\omega}^2 = \sqrt{c}\,\omega^2,$$

et la forme asymptotique deviendra

$$\Phi = -(\bar{\omega}^1)^2 + (\bar{\omega}^2)^2. \tag{2}$$

Nous ferons les calculs en supposant Φ réduite à l'expression (1); l'expression (2) conduit d'ailleurs à des calculs peu différents.

Supposons e_1 et e_2 choisis dès le début pour que Φ ait l'expression (1). Nous dirons alors que le repère $Me_1e_2e_3$ est *le repère canonique associé au réseau conjugué;* ω^1 et ω^2 seront dites *les formes canoniques relatives au réseau.*

2. Propriétés du repère canonique. — Le ds^2 s'écrit $g_{ik}\omega^i\omega^k$. Les formes canoniques ω^1, ω^2 ne sont pas en général des différentielles exactes; nous poserons

$$d\omega^1 = r[\omega^1\omega^2], \qquad d\omega^2 = s[\omega^2\omega^1]. \tag{3}$$

Nous introduisons comme d'ordinaire les formes $\omega_i{}^k$ par

$$\begin{aligned} de_1 &= \omega_1{}^1 e_1 + \omega_1{}^2 e_2 + \omega_1{}^3 e_3,\\ de_2 &= \omega_2{}^1 e_1 + \omega_2{}^2 e_2 + \omega_2{}^3 e_3,\\ de_3 &= \omega_3{}^1 e_1 + \omega_3{}^2 e_2. \end{aligned}$$

Dans de_3, il n'y a pas de terme en e_3, en vertu de l'hypothèse $(e_3)^2 = 1$. Si i et k valent 1 ou 2, nous posons

$$\omega_i{}^k = \gamma_i{}^k{}_j\,\omega^j.$$

Les $\gamma_i{}^k{}_j$ sont les symboles de Christoffel généralisés; ils se distinguent des symboles de Christoffel proprement dits en ce qu'ils ne sont pas symétriques par rapport aux deux indices inférieurs; on a

$$\gamma_1{}^1{}_2 - \gamma_2{}^1{}_1 = r, \qquad \gamma_2{}^2{}_1 - \gamma_1{}^2{}_2 = s. \tag{4}$$

Puisque le repère est canonique, on a

$$\omega_1{}^3 = \omega^1, \qquad \omega_2{}^3 = \omega^2, \tag{5}$$

d'où l'on déduit par différentiation extérieure

$$(6)\qquad \begin{cases} 2[\omega_1{}^1\omega^1] + [(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^1)\omega^2] = 0, \\ [(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^1)\omega^1] + 2[\omega_2{}^2\omega^2] = 0. \end{cases}$$

Posons, pour alléger l'écriture,

$$\omega_1{}^2 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2, \qquad \omega_1{}^1 = \lambda\omega^1 + \rho\omega^2,$$
$$\omega_2{}^1 = \gamma\omega_1 + \delta\omega^2, \qquad \omega_2{}^2 = \sigma\omega^1 + \mu\omega^2,$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \gamma_1{}^2{}_1, \qquad \beta = \gamma_1{}^2{}_2, \qquad \gamma = \gamma_2{}^1{}_1, \qquad \delta = \gamma_2{}^1{}_2,$$
$$\lambda = \gamma_1{}^1{}_1, \qquad \rho = \gamma_1{}^1{}_2, \qquad \sigma = \gamma_2{}^2{}_1, \qquad \mu = \gamma_2{}^2{}_2.$$

Des formules (6), on tire par résolution

$$(7)\qquad \begin{cases} 2\rho = \alpha + \gamma, \\ 2\sigma = \delta + \beta. \end{cases}$$

Ces deux relations vont jouer un rôle important dans la théorie. C'est à quoi se réduisent, dans l'occurrence, les équations de Codazzi de la théorie générale.

Quant à l'équation de Gauss, elle devient simplement

$$(8)\qquad Kg = 1,$$

K désignant la courbure totale et g le déterminant $|g_{ik}|$.

Réciproquement, si les relations (7) et (8) sont satisfaites, et si l'on sait que les équations $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ définissent un réseau conjugué, il est possible d'associer au ds^2 donné, $g_{ik}\omega^1\omega^2$, une seconde forme $(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$. En effet, on a en premier lieu, puisque le réseau est conjugué,

$$\omega_1{}^3 = a\omega^1, \qquad \omega_2{}^3 = c\omega^2.$$

La condition (8) donne $ac = 1$. Les équations de Codazzi s'écrivent, compte tenu de (7),

$$a_2 + \alpha(c - a) = 0, \qquad c_1 + \delta(a - c) = 0;$$

elles équivalent, grâce à $c = \frac{1}{a}$, à la seule équation aux différentielles totales

$$a\,da = (a^2 - 1)(a^2\,\delta\omega^1 + \alpha\omega^2),$$

qui admet évidemment la solution $a = 1$.

3. **Représentation sphérique.** — Quelques particularités se présentent en ce qui concerne la représentation sphérique. Si m décrit l'image sphérique, posons, en appelant m_1 et m_2 des vecteurs tangents aux courbes sphériques,

$$dm = m_1\omega^1 + m_2\omega^2,$$

et comparons avec

$$de_3 = \omega_3{}^1 e_1 + \omega_3{}^2 e_2.$$

en tenant compte de $de_3 = dm$. Du fait que e_3 est orthogonal à e_1 et e_2, on déduit facilement

(9)
$$\begin{cases} \omega_3{}^1 = -g^{11}\omega_1{}^3 - g^{12}\omega_2{}^3 = -g^{11}\omega^1 - g^{12}\omega^2, \\ \omega_3{}^2 = -g^{21}\omega_1{}^3 - g^{22}\omega_2{}^3 = -g^{21}\omega^1 - g^{22}\omega^2, \end{cases}$$

donc

$$de_3 = (-g^{11}e_1 - g^{12}e_2)\omega^1 + (-g^{21}e_1 - g^{22}e_2)\omega^2,$$

et, par conséquent,

(10)
$$m_1 = -g^{11}e_1 - g^{12}e_2, \qquad m_2 = -g^{21}e_1 - g^{22}e_2.$$

Or, il est indiqué d'introduire, d'une façon générale, à côté du repère $\mathrm{M}e_1e_2$, le repère supplémentaire $\mathrm{M}e^1e^2$, les vecteurs e^1, e^2 étant définis par les relations

$$e^1.e_2 = 0, \qquad e^1.e_1 = 1, \qquad e^2.e_1 = 0, \qquad e^2.e_2 = 1.$$

Cela permet d'écrire

$$e^1 = g^{11}e_1 + g^{12}e_2, \qquad e^2 = g^{21}e_1 + g^{22}e_2$$

et

$$(e^1)^2 = g^{11}, \qquad e^1.e^2 = g^{12}, \qquad (e^2)^2 = g^{22}.$$

On en conclut, en revenant à (10),

(11)
$$m_1 = -e^1, \qquad m_2 = -e^2,$$

formules qui ne sont d'ailleurs qu'un cas particulier de la formule générale

$$m_i = -\Phi_{ik}e^k.$$

en supposant qu'on a écrit

$$\Phi = \Phi_{ik}\omega^i\omega^k.$$

Si l'on forme l'élément linéaire sphérique, ds'^2 (nous accentuerons tout ce qui se rapporte à l'image sphérique), en posant

$$ds'^2 = g'_{ik}\omega^i\omega^k,$$

on a, d'après ce qui précède,

(12)
$$g'_{ik} = m_i.m_k = e^i.e^k = g^{ik}.$$

Or, on prouve facilement que les différentielles de^1, de^2 s'expriment en fonction de e^1, e^2 et e_3 par les formules

$$de^1 = -\omega_1{}^1e^1 - \omega_2{}^1e^2 - \omega_3{}^1e_3,$$
$$de^2 = -\omega_1{}^2e^1 - \omega_2{}^2e^2 - \omega_3{}^2e_3.$$

Donc

$$dm_1 = -\omega_1{}^1m_1 - \omega_2{}^1m_2 + \omega_3{}^1e_3,$$
$$dm_2 = -\omega_1{}^2m_1 - \omega_2{}^2m_2 + \omega_3{}^2e_3.$$

Mais la sphère, en tant que surface dont le ds'^2 est $g'_{ik}\omega^i\omega^k$ possède des formes $(\omega_i{}^k)'$ qui vérifient, par définition,

$$dm_1 = (\omega_1{}^1)'m_1 + (\omega_1{}^2)'m_2 + (\omega_1{}^3)'e_3,$$
$$dm_2 = (\omega_2{}^1)'m_1 + (\omega_2{}^2)'m_2 + (\omega_2{}^3)'e_3.$$

La comparaison donne, en particulier,

$$(13)\qquad (\omega_1{}^1)' = -\omega_1{}^1, \quad (\omega_1{}^2)' = -\omega_2{}^1, \quad (\omega_2{}^1)' = -\omega_1{}^2, \quad (\omega_2{}^2)' = -\omega_2{}^2,$$

d'où les relations entre les symboles sphériques et ceux de la surface,

$$(14)\qquad \begin{cases} \alpha' = -\gamma, & \gamma' = -\alpha, & \lambda' = -\lambda, & \sigma' = -\sigma; \\ \beta' = -\delta, & \delta' = -\beta, & \rho' = -\rho, & \mu' = -\mu, \end{cases}$$

relations qui se résument en

$$(15)\qquad (\gamma_i{}^k{}_j)' = -\gamma_k{}^i{}_j.$$

On remarque que la somme $\alpha' + \gamma'$ est égale, au signe près, à $\alpha + \gamma$, de même que ρ' est égal, au signe près, à ρ, si bien que les formules (7) s'écrivent aussi

$$(16)\qquad \begin{cases} 2\rho' = \alpha' + \gamma', \\ 2\sigma' = \delta' + \beta', \end{cases}$$

ce qui est conforme à la règle générale suivant laquelle les équations de Codazzi conservent la même expression quand on y remplace les symboles de la surface par les symboles sphériques.

4. **Détermination du repère canonique.** — Nous envisageons maintenant le problème suivant : *le ds^2 d'une surface étant donné sous la forme $g_{ik}\omega^i\omega^k$, et les lignes $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ formant un réseau conjugué, trouver les formes canoniques $\overline{\omega^1}$, $\overline{\omega^2}$.*

Les formes cherchées ne peuvent différer des formes connues que par un facteur

$$(17)\qquad \overline{\omega}^1 = p\,\omega^1, \qquad \overline{\omega}^2 = q\,\omega^2.$$

Nous résoudrons le problème en deux temps. Dans une première étape, nous ferons un changement du type précédent

$$(18)\qquad (\omega^1)^* = \xi\omega^1, \qquad (\omega^2)^* = \eta\omega^2,$$

tel qu'après ce changement, la condition de Gauss (8) soit satisfaite

$$(19)\qquad \mathrm{K}g^* = 1.$$

Le ds^2 étant invariant, on a

$$g^*_{11} = \frac{g_{11}}{\xi^2}, \qquad g^*_{12} = \frac{g_{12}}{\xi\eta}, \qquad g^*_{22} = \frac{g_{22}}{\eta^2},$$

et, par suite,

$$\mathrm{K}g^* = \frac{\mathrm{K}g}{\xi^2\eta^2}.$$

Il suffira donc d'assujettir ξ et η à la condition

$$\xi^2\eta^2 = \mathrm{K}g.$$

Le produit $\xi\eta$ n'est ainsi défini qu'au signe près, mais on peut s'imposer la condition que ce produit, qui figure dans

$$[(\omega^1)^*(\omega^2)^*] = \xi\eta[\omega^1\omega^2],$$

soit positif, ce qui revient à n'envisager que des changements conservant l'orientation de la surface. Donc

$$\xi\eta = +\sqrt{\mathrm{K}g}.$$

Le résultat est réel, puisqu'on a supposé $\mathrm{K} > 0$.

Supposons que la transformation (18) ait été effectuée au préalable. Nous appelons maintenant ω^1 et ω^2 ce que nous appelions tout à l'heure $(\omega^1)^*$ et $(\omega^2)^*$. Le ds^2 donné, $g_{ik}\omega^i\omega^k$, est donc supposé vérifier

$$\mathrm{K}g = 1.$$

Si nous faisons la transformation (17), il faut, pour conserver la propriété précédente, que $pq = 1$. Nous poserons, en conséquence, la transformation à déterminer sous la forme

$$\bar{\omega}^1 = t\omega^1, \qquad \bar{\omega}^2 = \frac{1}{t}\omega^2. \tag{20}$$

t doit être choisi de façon que les relations (7) soient satisfaites par les nouveaux symboles de Christoffel, donc de façon que

$$\left\{\begin{array}{l} 2\bar{\rho} = \bar{\alpha} + \bar{\gamma}, \\ 2\bar{\sigma} = \bar{\delta} + \bar{\beta}. \end{array}\right. \tag{21}$$

Il nous faut savoir exprimer les nouveaux symboles en fonction des anciens, quand on effectue la transformation (20). Le calcul direct ne présente aucune difficulté, en raison de la simplicité de cette transformation. On peut aussi les déduire des formules générales suivantes, qui généralisent, pour le calcul pfaffien absolu, les formules classiques du calcul tensoriel.

Si les formules de changement sont [1]

$$\omega^\alpha = \theta_i{}^\alpha\omega^i \qquad \text{d'où} \qquad \omega^i = \theta_\alpha{}^i\omega^\alpha,$$

on a

$$\gamma_\alpha{}^\rho{}_\beta = \theta_\alpha{}^i\theta_\beta{}^j\theta_k{}^\rho\gamma_i{}^k{}_j - \theta_\alpha{}^i\theta_\beta{}^j(\theta_i{}^\rho)_j, \tag{22}$$

le dernier symbole $(\theta_i{}^\rho)_j$ désignant une dérivée pfaffienne de $\theta_i{}^\rho$, selon le schéma

$$d\theta_i{}^\rho = (\theta_i{}^\rho)_j\omega^j.$$

On trouve ici

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{t^3}, \qquad \bar{\delta} = t^3\delta, \qquad \bar{\beta} = \frac{\beta}{t}, \qquad \bar{\gamma} = t\gamma,$$

$$\bar{\rho} = t\rho - t_2, \qquad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{t} - \left(\frac{1}{t}\right)_1$$

---

(1) Les notations adoptées sont celles de R. Lagrange, dans son Ouvrage : *Calcul différentiel absolu* (*Mém. Sc. math.*, fasc. 19, 1926, p. 3).

(les indices 1 et 2 dénotent des dérivées pfaffiennes). Nous obtenons donc les deux équations

$$2t\rho - 2t_2 = \frac{\alpha}{t^3} + t\gamma,$$

$$\frac{2\sigma}{t} - 2\left(\frac{1}{t}\right)_1 = t^3\delta + \frac{\beta}{t},$$

qui se transforment, si l'on pose $t^2 = z$, en

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} z_2 &= (2\rho - \gamma)z - \frac{\alpha}{z}, \\ \left(\frac{1}{z}\right)_1 &= (2\sigma - \beta)\frac{1}{z} - \delta z. \end{aligned}\right.$$

Nous sommes assuré que ces deux équations ont au moins une solution, car, d'après notre hypothèse initiale, les lignes $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ forment un réseau conjugué; la seconde forme a donc pour expression $a(\omega^1)^2 + c(\omega^2)^2$. De plus, d'après notre hypothèse supplémentaire, $Kg = 1$, donc $ac = 1$; la seconde forme est donc

$$a(\omega^1)^2 + \frac{1}{a}(\omega^2)^2.$$

Si l'on écrit les équations de Codazzi, on trouve que a vérifie les deux équations

$$a_2 = (2\rho - \gamma)a - \frac{\alpha}{a},$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)_1 = (2\sigma - \beta)\frac{1}{a} - \delta a.$$

Ce sont précisément les équations (23); celles-ci admettent donc, au moins, la solution $z = a$.

Cette remarque prouve, en outre, qu'à toute solution du système (23) correspond une immersion du ds^2 donné, pour laquelle les lignes $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ forment un réseau conjugué.

La condition de compatibilité des deux équations (23) est

$$z_{21} - z_{12} + rz_1 - sz_2 = 0,$$

r et s ayant la signification indiquée en (3), et pouvant être remplacés, d'après (4), par

$$(24)\qquad r = \rho - \gamma, \qquad s = \sigma - \beta.$$

Les calculs sont un peu plus simples si l'on pose

$$z = e^{\theta}.$$

Les équations (23) deviennent

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} \theta_1 &= \beta - 2\sigma + \delta e^{2\theta}, \\ \theta_2 &= -\gamma + 2\rho - \alpha e^{-2\theta}, \end{aligned}\right.$$

et la condition de compatibilité est

$$(26)\qquad \begin{aligned} &e^{2\theta}[\delta_2 - r\delta + 2\delta(2\rho - \gamma)] + e^{-2\theta}[\alpha_1 - s\alpha + 2\alpha(2\sigma - \beta)] \\ &\quad = 2\rho_1 - \gamma_1 + 2\sigma_2 - \beta_2 + 4\alpha\delta + r(\beta - 2\sigma) + s(\gamma - 2\rho). \end{aligned}$$

Cette condition détermine, généralement, $e^{2\theta} = z^2$ par des calculs finis. On trouve deux valeurs pour $e^{2\theta}$, donc deux valeurs aussi pour e^{θ} (qui doit être positif). L'une de ces valeurs vérifie nécessairement le système (25).

En conclusion, *connaissant le ds^2 d'une surface et un réseau conjugué, on peut généralement, par des calculs finis, déterminer au moins un repère canonique associé à ce réseau.* La surface sera alors essentiellement déterminée, car son ds^2 est connu par hypothèse, et sa seconde forme s'écrit

$$\Phi = (\overline{\omega}^1)^2 + (\overline{\omega}^2)^2 = e^{\theta}(\omega^1)^2 + e^{-\theta}(\omega^2)^2.$$

Exceptionnellement, il pourra arriver que les deux solutions données par (26) satisfassent (25); il y aurait, dans ce cas, deux manières d'associer au réseau un repère canonique. En d'autres termes, *la surface considérée ferait partie d'un couple de surfaces isométriques avec correspondance du réseau conjugué donné.*

Enfin, il peut arriver que (26) soit satisfaite quel que soit θ; le système (25) est alors équivalent à une équation de Pfaff complètement intégrable. On peut, dans ce cas, associer au réseau conjugué une infinité de repères canoniques différents, dépendant d'un paramètre. Cela revient à dire que *le ds^2 donné est susceptible d'une infinité d'immersions différentes, pour lesquelles le réseau donné est toujours conjugué.*

C'est de ce dernier cas que nous allons nous occuper. Son étude équivaut d'après l'énoncé qui précède, à celle des *réseaux conjugués persistants* [réseaux $(\mathfrak{T})$].

II. — Réseaux conjugués admettant une infinité de repères canoniques.

5. Degré de généralité des surfaces possédant un réseau $(\mathfrak{T})$. — Supposons que ω^1 et ω^2 soient déjà des formes canoniques. Nous posons

$$\overline{\omega}^1 = t\,\omega^1, \qquad \overline{\omega}^2 = \frac{1}{t}\,\omega^2,$$

et nous cherchons à quelle condition il est possible de déterminer t, avec une constante arbitraire, de façon que $\overline{\omega}^1$ et $\overline{\omega}^2$ soient, elles aussi, des formes canoniques. On a donc, par hypothèse,

$$(27)\qquad 2\rho = \alpha + \gamma, \qquad 2\sigma = \delta + \beta,$$

et aussi

$$2\overline{\rho} = \overline{\alpha} + \overline{\gamma}, \qquad 2\overline{\sigma} = \overline{\delta} + \beta.$$

Le calcul fait dans les pages précédentes reste applicable; en posant $t = e^{\frac{\theta}{2}}$, on obtient la condition d'intégrabilité (26), mais celle-ci, en vertu de (27), s'écrit simplement

$$e^{2\theta}(\delta_2 - r\delta + 2\alpha\delta) + e^{-2\theta}(\alpha_1 - s\alpha + 2\alpha\delta) = \alpha_1 - s\alpha + \delta_2 - r\delta + 4\alpha\delta. \tag{28}$$

On aura une infinité de solutions, si (28) ne contient pas θ, si, par conséquent

$$\delta_2 - r\delta + 2\alpha\delta = 0, \qquad \alpha_1 - s\alpha + 2\alpha\delta = 0, \tag{29}$$

conditions qui peuvent s'écrire, avec les notations du calcul extérieur,

$$d(\delta\omega^1) - 2\alpha\delta[\omega^1\omega^2] = 0, \qquad d(\alpha\omega^2) + 2\alpha\delta[\omega^1\omega^2] = 0. \tag{30}$$

Nous pouvons dès lors former le système différentiel qui détermine les surfaces contenant un réseau du type étudié [réseau ($\mathfrak{T}$)].

Nous écrivons d'abord les deux équations différentielles linéaires qui expriment le fait que Φ se réduit à $(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$, à savoir

$$\omega_1{}^3 = \omega^1, \qquad \omega_2{}^3 = \omega^2. \tag{31}$$

Il est inutile de considérer (27) : c'est une conséquence de (31).

Pour donner la signification des fonctions α et δ, qui figurent seules dans (30), à l'exclusion de β et γ, nous écrivons les deux relations quadratiques

$$[(\omega_1{}^2 - \alpha\omega^1)\omega^2] = 0, \qquad [(\omega_2{}^1 - \delta\omega^2)\omega^1] = 0. \tag{32}$$

Le système différentiel mixte (linéaire et quadratique) formé de (31), (32) et (30) est le système qui détermine nos surfaces. Pour voir s'il est en involution, différentions extérieurement (31); nous retrouvons des formules déjà obtenues en (6)

$$\left\{\begin{aligned} &2[\omega_1{}^1\omega^1] + [(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^1)\omega^2] = 0, \\ &[(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^1)\omega^1] + 2[\omega_2{}^2\omega^2] = 0. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Les six relations quadratiques (32), (33), (30) contiennent six formes secondaires

$$\omega_1{}^2, \quad \omega_2{}^1, \quad \omega_1{}^1, \quad \omega_2{}^2, \quad d\delta - \delta\omega_1{}^1, \quad d\alpha - \alpha\omega_2{}^2,$$

et la matrice polaire est, en prenant les relations quadratiques dans l'ordre indiqué,

$$\begin{Vmatrix} \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega^2 & \omega^2 & 2\omega^1 & 0 & 0 & 0 \\ \omega^1 & \omega^1 & 0 & 2\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta\omega^2 & 0 & 0 & \omega^1 & 0 \\ -\alpha\omega^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{Vmatrix} = 4(\omega^1)^3(\omega^2)^3.$$

Son rang étant égal à 6, le système est en involution, avec $s_1 = 6$, et *sa solution générale dépend de six fonctions d'un argument*. C'est un résultat bien connu, mais qui se démontre généralement par des calculs fort laborieux.

6. Image sphérique d'un réseau ($\mathfrak{T}$). — Si $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ détermine sur la sphère un réseau image d'un réseau $\mathfrak{T}$, on a, en vertu de (30) et (14),

$$d(\beta'\omega^1) + 2\beta'\gamma'[\omega^1\omega^2] = 0, \qquad d(\gamma'\omega^2) - 2\beta'\gamma'[\omega^1\omega^2] = 0. \tag{34}$$

Le trièdre $mm_1m_2e_3$ associé à un tel réseau sphérique vérifie, en raison de $dm = de_3$,

$$(\omega_3{}^1)' = \omega^1, \qquad (\omega_3{}^2)' = \omega^2. \tag{35}$$

D'autre part, les relations quadratiques donnant la signification des fonctions β' et γ' sont

$$\left[\left((\omega_1{}^2)' - \beta'\omega^2\right)\omega^1\right] = 0, \qquad \left[\left((\omega_2{}^1)' - \gamma'\omega^1\right)\omega^2\right] = 0. \tag{36}$$

Le système différentiel qui détermine nos réseaux sphériques est formé des équations linéaires (35) et des expressions quadratiques (36) et (34). Les différentielles extérieures de (35) sont nulles. En effet, d'après (13), on a

$$d(\omega_3{}^1)' = [(\omega_3{}^1)'(\omega_1{}^1)'] + [(\omega_3{}^2)'(\omega_2{}^1)'] = -[\omega^1\omega_1{}^1] - [\omega^2\omega_1{}^2]$$

et

$$d\omega^1 = [\omega^1\omega_1{}^1] + [\omega^2\omega_2{}^1].$$

Il y a bien égalité entre ces deux différentielles extérieures, à cause de

$$2[\omega^1\omega_1{}^1] + [\omega^2(\omega_1{}^2 + \omega_2{}^1)] = 0$$

qui est la première équation (6).

Pour décider de l'involution, il suffit donc de considérer les relations quadratiques (36) et (34).

On peut écrire (36),

$$[(\omega_2{}^1 + \beta'\omega^2)\omega^1] = 0, \qquad [(\omega_1{}^2 + \gamma'\omega^1)\omega^2] = 0$$

et (34), en tenant compte de $d\omega^1 = -[\omega^1\omega_1{}^1] - [\omega^2\omega_1{}^2]$,

$$\left[\left(\frac{d\beta'}{\beta'} + \omega_1{}^1 - \gamma'\omega^2\right)\omega^1\right] + [(\omega_1{}^2 + \gamma'\omega^1)\omega^2] = 0,$$
$$[(\omega_2{}^1 + \beta'\omega^2)\omega^1] + \left[\left(\frac{d\gamma'}{\gamma'} + \omega_2{}^2 - \beta'\omega^1\right)\omega^2\right] = 0.$$

On voit que ces quatre relations quadratiques contiennent les quatre formes secondaires

$$\omega_2{}^1 + \beta'\omega^2, \quad \omega_1{}^2 + \gamma'\omega^1, \quad \frac{d\beta'}{\beta'} + \omega_1{}^1 - \gamma'\omega^2, \quad \frac{d\gamma'}{\gamma'} + \omega_2{}^2 - \beta'\omega^1.$$

La matrice polaire s'écrit

$$\begin{Vmatrix} \omega^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & \omega^1 & 0 \\ \omega^1 & 0 & 0 & \omega^2 \end{Vmatrix} = (\omega^1)^2(\omega^2)^2.$$

Comme elle n'est pas identiquement nulle, on a $s_1 = 4$: *la solution générale dépend de quatre fonctions arbitraires d'un argument.* En comparant avec le résultat trouvé au n° 5, on voit qu'à toute image sphérique d'un réseau ($\mathfrak{L}$) correspondent une infinité de réseaux ($\mathfrak{L}$) dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument.

Précisons que les calculs précédents ne concernent que le cas général, celui où le réseau ($\mathfrak{L}$) ne contient pas de géodésiques ($\alpha\delta \neq 0$).

7. **Première intégration.** — Les équations (30) donnent par addition

$$d(\delta\omega^1 + \alpha\omega^2) = 0,$$

donc $\delta\omega^1 + \alpha\omega^2$ est une différentielle exacte, dP, et l'on a

$$\delta = P_1, \qquad \alpha = P_2. \tag{37}$$

La première équation (30) donne, en outre,

$$-P_{12} + rP_1 = 2P_1P_2. \tag{38}$$

Si l'on appelle u et v des intégrales premières quelconques de ω^1 et ω^2, respectivement, l'équation (38) équivaut à

$$-\frac{\partial^2 P}{\partial u\, \partial v} = 2\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial P}{\partial v},$$

qui s'intègre par

$$P = \frac{1}{2}\log(U + V),$$

U et V, respectivement fonctions de u et de v, sont deux intégrales premières de ω^1 et ω^2. Nous identifierons dans la suite U et u, V et v, si bien que

$$P = \frac{1}{2}\log(u + v). \tag{39}$$

Comme on a

$$du = u_1\omega^1, \qquad dv = v_2\omega^2,$$

on déduit de (37)

$$\delta = \frac{u_1}{2(u+v)}, \qquad \alpha = \frac{v_2}{2(u+v)} \tag{40}$$

et

$$\delta\omega^1 = \frac{du}{2(u+v)}, \qquad \alpha\omega^2 = \frac{dv}{2(u+v)}. \tag{41}$$

Si l'on se reporte aux équations (23), où l'on fait $2\rho - \gamma = \alpha$, $2\sigma - \beta = \delta$, on obtient l'équation complètement intégrable,

$$\frac{z\,dz}{z^2 - 1} = \frac{z^2\,du + dv}{2(u+v)},$$

dont la solution générale est, en désignant par h une constante arbitraire,

$$z = \sqrt{\frac{h+v}{h-u}}, \qquad \text{d'où} \qquad t = \sqrt[4]{\frac{h+v}{h-u}}. \tag{42}$$

La solution évidente $z = 1$ correspond à h infini.

La formule (42) montre comment, si le réseau est un réseau ($\mathfrak{T}$), on passe d'un repère canonique à un autre.

8. **La fonction** $Q(u, v)$. — Nous allons prouver que *les composantes contrevariantes du tenseur métrique*, g^{ik}, *d'une surface possédant un réseau* ($\mathfrak{T}$) *peuvent s'exprimer à l'aide de* α, δ, *et des dérivées pfaffiennes premières et secondes d'une certaine fonction de point* $Q(u, v)$.

Partons de la relation fondamentale

$$dg^{11} = -2g^{12}\omega_2{}^1 - 2g^{11}\omega_1{}^1.$$

Nous en tirons notamment, l'indice inférieur désignant une dérivée pfaffienne,

$$(g^{11})_2 = -2g^{12}\delta - g^{11}(\alpha + \gamma),$$

à cause de $2\rho = \alpha + \gamma$. Cela peut encore s'écrire en introduisant r, qui vaut

$$\gamma_1{}^1{}_2 - \gamma_2{}^1{}_1 = \rho - \gamma = \frac{\alpha + \gamma}{2} - \gamma = \frac{\alpha - \gamma}{2},$$

$$(g^{11})_2 = -2g^{12}\delta + 2g^{11}(r - \alpha). \tag{43}$$

Par ailleurs, (29) donne

$$\frac{\delta_2}{\delta} = r - 2\alpha. \tag{44}$$

De (43) et (44), on déduit

$$\frac{(g^{11})_2}{g^{11}} - \frac{\delta_2}{\delta} = -2\frac{g^{12}}{g^{11}}\delta + r \qquad \text{ou} \qquad \left(\log\frac{g^{11}}{\delta}\right)_2 = -2\frac{g^{12}}{g^{11}}\delta + r,$$

ou enfin

$$\left(\frac{g^{11}}{\delta}\right)_2 - r\frac{g^{11}}{\delta} = -2g^{12}. \tag{45}$$

On prouvera de même

$$\left(\frac{g^{22}}{\alpha}\right)_1 - s\frac{g^{22}}{\alpha} = -2g^{12}. \tag{46}$$

L'égalité des premiers membres permet de conclure que

$$\frac{g^{11}}{\delta}\omega^1 + \frac{g^{22}}{\alpha}\omega^2$$

est une différentielle exacte; posons $= dQ$. D'où

$$g^{11} = \delta Q_1, \qquad g^{22} = \alpha Q_2, \qquad g^{12} = -\frac{1}{2}(Q_{12} - rQ_1). \tag{47}$$

Ainsi se trouve établie notre proposition.

9. **L'élément linéaire sphérique et la fonction** $Q(u, v)$. — Le ds'^2 sphérique peut s'exprimer à l'aide des dérivées ordinaires de Q. En effet, nous avons vu [formule (12)] que

$$g'_{ik} = g^{ik}.$$

On a donc

$$ds'^2 = \delta Q_1(\omega^1)^2 - (Q_{12} - rQ_1)\omega^1\omega^2 + \alpha Q_2(\omega^2)^2, \tag{48}$$

d'où, d'après (40), et tenant compte de $Q_{12} - rQ_1 = Q_{uv} u_1 v_2$,

$$ds'^2 = \frac{Q_u}{2(u+v)} du^2 - Q_{uv}\, du\, dv + \frac{Q_v}{2(u+v)} dv^2. \tag{49}$$

C'est une formule déjà obtenue par A. Demoulin (*C. R. Acad. Sc.*, t. 133, 1901, p. 265). La fonction Q introduite au n° 8 ne concerne donc que l'image sphérique des réseaux ($\mathfrak{T}$). Nous savons, par l'analyse du n° 6, que la détermination de ces images sphériques n'introduit que quatre fonctions arbitraires d'un argument. D'autre part, on voit facilement que Q doit vérifier une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre, qu'on obtiendrait en exprimant que la courbure totale du ds'^2 est égale à 1. Le rapprochement de ces deux assertions prouve que la solution générale de cette équation du quatrième ordre dépend de quatre fonctions arbitraires d'un argument. Nous ne formerons pas ici l'équation aux dérivées partielles que vérifie Q; nous la retrouverons plus loin, en utilisant les relations que vérifient les inconnues $u_1(u, v)$, $v_2(u, v)$ qui figurent dans (40).

10. **La surface $\overline{S}$.** — Avant de procéder à la détermination de u_1 et v_2, il ne sera pas sans intérêt de vérifier que les conditions (34) sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un réseau sphérique soit l'image du réseau asymptotique d'une surface $\overline{S}$ dont la courbure totale serait $\overline{K} = -\frac{1}{(u+v)^2}$.

Sur $\overline{S}$, la seconde forme quadratique est $2\bar{b}\omega^1\omega^2$ et, en désignant par $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, ..., $\bar{\sigma}$, $\bar{\mu}$ ses symboles de Christoffel, les équations de Codazzi s'écrivent

$$\frac{\bar{b}_1}{\bar{b}} = -2\bar{\beta} + \bar{\lambda} + \bar{\sigma}, \qquad \frac{\bar{b}_2}{\bar{b}} = -2\bar{\gamma} + \bar{\mu} + \bar{\rho}. \tag{50}$$

Or, $\bar{g}$ désignant le discriminant du $d\bar{s}^2$ de $\overline{S}$, on a, comme toujours,

$$\frac{\bar{g}_1}{2\bar{g}} = \bar{\lambda} + \bar{\sigma}, \qquad \frac{\bar{g}_2}{2\bar{g}} = \bar{\mu} + \bar{\rho},$$

ce qui permet d'écrire les équations de Codazzi

$$\left(\log\frac{\bar{b}^2}{\bar{g}}\right)_1 = -4\bar{\beta}, \qquad \left(\log\frac{\bar{b}^2}{\bar{g}}\right)_2 = -4\bar{\gamma}$$

ou encore, puisque $\overline{K} = -\frac{\bar{b}^2}{\bar{g}}$,

$$[\log(-\overline{K})]_1 = -4\bar{\beta}, \qquad [\log(-\overline{K})]_2 = -4\bar{\gamma}. \tag{51}$$

Si $\overline{K}$ est de la forme $-\frac{1}{(u+v)^2}$, u et v étant des intégrales premières quelconques de ω^1 et ω^2, il vient

$$\frac{u_1}{2(u+v)} = \bar{\beta}, \qquad \frac{v_2}{2(u+v)} = \bar{\gamma}. \tag{52}$$

En tenant compte de $u_{12} = ru_1$, qui est une conséquence de $du = u_1\omega^1$, on obtient, par différentiation pfaffienne logarithmique de (52),

$$\frac{\bar\beta_2}{\bar\beta} = r - 2\bar\gamma, \qquad \frac{\bar\gamma_1}{\bar\gamma} = s - 2\bar\beta,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(53) \qquad d(\bar\beta\omega^1) - 2\bar\beta\,\bar\gamma[\omega^1\omega^2] = 0, \qquad d(\bar\gamma\omega^2) + 2\bar\beta\,\bar\gamma[\omega^1\omega^2] = 0.$$

Réciproquement, si les équations (53) sont satisfaites, et si $\bar\beta\bar\gamma \neq 0$, on en déduit par addition

$$d(\bar\beta\omega^1 + \bar\gamma\omega^2) = 0,$$

donc il existe une fonction $\mathcal{L}$ telle que

$$\bar\beta = \mathcal{L}_1, \qquad \bar\gamma = \mathcal{L}_2,$$

et l'on voit, d'après (51), que $\mathcal{L}$ n'est autre que $-\frac{1}{4}\log(-\bar{K})$. La première équation donne ensuite

$$\mathcal{L}_{12} - r\mathcal{L}_1 + 2\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 = 0,$$

ce qui s'intègre, comme on a vu au n° 7, par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\log(U + V).$$

Il suit de là que

$$\bar{K} = -\frac{1}{(U+V)^2}.$$

Ni U ni V ne peuvent être constantes, car on aurait $\bar\beta\bar\gamma = 0$, contre l'hypothèse. On peut donc prendre $U = u$, $V = v$, et l'on retrouve

$$\bar{K} = -\frac{1}{(u+v)^2}.$$

Voyons ce que les équations (53) entraînent concernant les symboles sphériques $\bar\alpha'$, $\bar\beta'$, ..., $\bar\mu'$ de $\bar{S}$. On démontre facilement les relations

$$\bar\alpha' = -\bar\alpha, \qquad \bar\beta' = -\bar\beta, \qquad \bar\gamma' = -\bar\gamma, \qquad \bar\delta' = -\bar\delta,$$

si bien que les équations (53) se transforment en (34). Ces relations (34) (avec l'hypothèse $\beta'\gamma' \neq 0$) expriment donc bien la condition nécessaire et suffisante pour que le réseau sphérique $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ soit l'image du réseau asymtotique d'une surface ayant $-\frac{1}{(u+v)^2}$ pour courbure totale.

11. Détermination de u_1 et v_2. — Alors que le ds'^2 sphérique des surfaces possédant un réseau ($\mathfrak{T}$) s'exprime à l'aide de la seule fonction $Q(u, v)$ et de ses dérivées, le ds^2 de ces surfaces fait intervenir, en outre, u_1 et v_2. En tenant compte des expressions (47) trouvées pour g^{ik}, et des expressions (40) trouvées pour α et δ, on montre aisément que l'élément linéaire de nos surfaces s'écrit

$$(54) \qquad ds^2 = \frac{1}{Q_u Q_v - (u+v)^2 Q_{uv}^2} \times \left[\frac{2(u+v)}{u_1^4} Q_v \, du^2 + \frac{4(u+v)^2}{u_1^2 v_2^2} Q_{uv} \, du \, dv + \frac{2(u+v)}{v_2^4} Q_u \, dv^2 \right].$$

Au lieu de u_1 et v_2, nous prendrons pour inconnues auxiliaires ξ et η, avec

$$(55) \qquad \xi^2 = \frac{2(u+v)}{u_1^4}, \qquad \eta^2 = \frac{2(u+v)}{v_2^4},$$

et, en posant

$$(56) \qquad R = Q_u Q_v - (u+v)^2 Q_{uv}^2,$$

le ds^2 s'écrira

$$(57) \qquad ds^2 = \xi^2 \frac{Q_v}{R} du^2 + 2(u+v)\xi\eta \frac{Q_{uv}}{R} du \, dv + \eta^2 \frac{Q_u}{R} dv^2.$$

Puisque l'on a

$$\delta = \frac{u_1}{2(u+v)}, \qquad \alpha = \frac{v_2}{2(u+v)},$$

on peut écrire (55) sous la forme

$$\xi^2 = \frac{1}{\delta u_1^3}, \qquad \eta^2 = \frac{1}{\alpha v_2^3},$$

d'où, en prenant les dérivées pfaffiennes logarithmiques

$$(58) \qquad \frac{2\xi_2}{\xi} = -\frac{\delta_2}{\delta} - \frac{3u_{12}}{u_1}, \qquad \frac{2\eta_1}{\eta} = -\frac{\alpha_1}{\alpha} - \frac{3v_{21}}{v_2}.$$

Mais, d'après (44), on a

$$\frac{\delta_2}{\delta} = r - 2\alpha, \qquad \text{et de même} \qquad \frac{\alpha_1}{\alpha} = s - 2\delta.$$

En outre,

$$u_{12} = r u_1, \qquad v_{21} = s v_2;$$

(58) devient donc

$$\frac{2\xi_2}{\xi} = -4r + 2\alpha, \qquad \frac{2\eta_1}{\eta} = -4s + 2\delta,$$

et, comme l'on a

$$r = \frac{\alpha - \gamma}{2}, \qquad s = \frac{\delta - \beta}{2},$$

il vient finalement

$$(59) \qquad \frac{\xi_2}{\xi} = \gamma, \qquad \frac{\eta_1}{\eta} = \beta.$$

D'après (47),

$$(60) \qquad g^{11} g^{22} - (g^{12})^2 = \alpha\delta Q_1 Q_2 - \frac{1}{4}(Q_{12} - r Q_1)^2 = \alpha\delta u_1 v_2 R,$$

R ayant l'expression (56).

Or on sait que

$$d \log[g^{11} g^{22} - (g^{12})^2] = -2\omega_1{}^1 - 2\omega_2{}^2.$$

Donc, à cause de (60), on obtient notamment

$$(61)\qquad \frac{\alpha_1}{\alpha}+\frac{\delta_1}{\delta}+\frac{u_{11}}{u_1}+\frac{v_{21}}{v_2}+\frac{R_1}{R}=-2\lambda-2\sigma.$$

Par ailleurs

$$d\log g^{11}=-2\frac{g^{12}}{g^{11}}\omega_2{}^1-2\omega_1{}^1$$

donne en particulier, compte tenu de $g^{11}=\delta Q_1$,

$$(62)\qquad \frac{\delta_1}{\delta}+\frac{Q_{11}}{Q_1}=-2\frac{g^{12}}{g^{11}}\gamma-2\lambda.$$

Éliminons λ en soustrayant (62) de (61) :

$$(63)\qquad \frac{\alpha_1}{\alpha}+\frac{u_{11}}{u_1}+\frac{v_{21}}{v_2}+\frac{R_1}{R}-\frac{Q_{11}}{Q_1}=-2\sigma+2\frac{g^{12}}{g^{11}}\gamma.$$

Mais la seconde relation (40) donne

$$\frac{\alpha_1}{\alpha}=\frac{v_{21}}{v_2}-\frac{u_1}{u+v}=s-2\delta.$$

Donc (63) devient, compte tenu de $2\sigma=\delta+\beta$,

$$s-2\delta+\frac{u_{11}}{u_1}+s+\frac{R_1}{R}-\frac{Q_{11}}{Q^1}=-\delta-\beta+\frac{2g^{12}}{g^{11}}\gamma.$$

A cause de $2s=\delta-\beta$, et eu égard à (47), il reste

$$\frac{u_{11}}{u_1}+\frac{R_1}{R}-\frac{Q_{11}}{Q_1}=-\gamma\frac{Q_{12}-rQ_1}{\delta Q_1},$$

ce qui peut encore s'écrire, d'après (59),

$$\left(\log\frac{Q_1}{u_1 R}\right)_1=\frac{\xi_2}{\xi}\,\frac{Q_{uv}u_1v_2}{\delta Q_1}.$$

Remplaçant Q_1 par $Q_u u_1$, et simplifiant, on obtient

$$\left(\frac{Q_u}{R}\right)_{.1}=\frac{\xi_2}{\xi}\,\frac{Q_{uv}v_2}{R\delta}$$

ou, en tenant compte de (40) pour exprimer δ :

$$\left(\frac{Q_u}{R}\right)_u=2(u+v)\frac{\xi_v}{\xi}\,\frac{Q_{uv}}{R}\,\frac{v_2{}^2}{u_1{}^2}.$$

Mais, d'après (55), on a

$$\frac{v_2{}^2}{u_1{}^2}=\frac{\xi}{\eta}.$$

Notre formule devient donc

$$\left(\frac{Q_u}{R}\right)_u=2(u+v)\frac{\xi_v}{\xi}\,\frac{Q_{uv}}{R}\,\frac{\xi}{\eta}=2(u+v)\frac{\xi_v}{\eta}\,\frac{Q_{uv}}{R};$$

ce que nous écrirons finalement

$$\frac{\xi_v}{\eta} = \frac{1}{2(u+v)} \frac{R}{Q_{uv}} \left(\frac{Q_u}{R}\right)_u. \tag{64}$$

Des calculs symétriques donneraient évidemment

$$\frac{\eta_u}{\xi} = \frac{1}{2(u+v)} \frac{R}{Q_{uv}} \left(\frac{Q_v}{R}\right)_v. \tag{65}$$

Les formules (64) et (65) montrent comment s'obtiendraient ξ et η si Q était connu. L'intégration de ce système se ramène manifestement à celle d'une équation linéaire du second ordre à une inconnue, qui introduit deux fonctions arbitraires d'un argument. Ainsi se trouve expliquée la différence entre le degré de généralité du ds^2 et celui du ds'^2.

12. Détermination de la fonction Q. — Il nous reste à former explicitement l'équation du quatrième ordre qui détermine Q. Nous l'obtiendrons en écrivant l'équation de Gauss prise sous la forme

$$d\omega_1{}^1 = [\omega_1{}^2 \omega_2{}^1] + [\omega_1{}^3 \omega_3{}^1] \tag{66}$$

qui est une des équations classiques de structure.

Au second membre

$$[\omega_1{}^2 \omega_2{}^1] = (\alpha\delta - \beta\gamma)[\omega^1 \omega^2] = \left[\frac{1}{4(u+v)^2} - \frac{\xi_v \eta_u}{\xi\eta}\right][du\, dv]$$

en utilisant (40) et (59). Si l'on écrit (64) et (65), en abrégé,

$$\frac{\xi_v}{\eta} = \mathfrak{A}, \qquad \frac{\eta_u}{\xi} = \mathfrak{B}, \tag{67}$$

il vient

$$[\omega_1{}^2 \omega_2{}^1] = \left[\frac{1}{4(u+v)^2} - \mathfrak{A}\mathfrak{B}\right][du\, dv].$$

D'autre part, puisque

$$\omega_1{}^3 = \omega^1, \qquad \omega_2{}^3 = \omega^2$$

et

$$\omega_3{}^1 = -g^{11}\omega_1{}^3 - g^{12}\omega_2{}^3 = -g^{11}\omega^1 - g^{12}\omega^2,$$

il vient

$$[\omega_1{}^3 \omega_3{}^1] = -g^{12}[\omega^1 \omega^2].$$

Mais

$$g^{12} = -\frac{1}{2}(Q_{12} - rQ_1) = -\frac{1}{2} Q_{uv} u_1 v_2,$$

d'où

$$[\omega_1{}^3 \omega_3{}^1] = \frac{1}{2} Q_{uv}[du\, dv].$$

Le second membre de (66) est donc, en divisant par $[du\, dv]$,

$$\frac{1}{4(u+v)^2} - \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \frac{1}{2} Q_{uv}.$$

Au premier membre

$$\omega_1{}^1 = \lambda\,\omega^1 + \rho\,\omega^2 = \frac{\lambda}{u_1}\,du + \frac{\rho}{v_2}\,dv,$$

$$d\omega_1{}^1 = \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\rho}{v_2}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda}{u_1}\right)\right][du\,dv].$$

Or

$$\rho = \frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{v_2}{4(u+v)} + \frac{\xi_2}{2\xi},$$

λ se tire de (61). En tenant compte de (40), on a

$$\frac{\alpha_1}{\alpha} = \frac{v_{21}}{v_2} - \frac{u_1}{u+v} = \quad s \quad - 2\delta,$$

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{u_{11}}{u_1} - \frac{u_1}{u+v} = \frac{u_{11}}{u_1} - 2\delta.$$

L'équation (61) donne donc, eu égard à $2\sigma = \delta + \beta$,

$$(68) \qquad -2\lambda = 2s - 3\delta + \beta + 2\frac{u_{11}}{u_1} + \frac{R_1}{R}.$$

Mais, d'après (55)

$$u_1^2 = \frac{\sqrt{2(u+v)}}{\xi},$$

donc

$$\frac{2u_{11}}{u_1} = \frac{u_1}{2(u+v)} - \frac{\xi_1}{\xi} = \delta - \frac{\xi_1}{\xi}.$$

(68) devient, compte tenu de $2s = \delta - \beta$,

$$2\lambda = \delta + \frac{\xi_1}{\xi} - \frac{R_1}{R} = \frac{u_1}{2(u+v)} + \frac{\xi_u u_1}{\xi} - \frac{R_u u_1}{R}$$

et

$$\frac{\lambda}{u_1} = \frac{1}{4(u+v)} + \frac{\xi_u}{2\xi} - \frac{R_u}{2R}.$$

Le premier membre de (66) est donc, divisé par $[du\,dv]$,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{4(u+v)} + \frac{\xi_v}{2\xi}\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{4(u+v)} + \frac{\xi_u}{2\xi} - \frac{R_u}{2R}\right].$$

Il reste simplement

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \log R}{\partial u\,\partial v}.$$

Finalement, l'équation que doit vérifier Q est

$$(69) \qquad \frac{\partial^2 \log R}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2(u+v)^2}\left[1 - \frac{R^2}{Q_{uv}^2}\left(\frac{Q_u}{R}\right)_u\left(\frac{Q_v}{R}\right)_v\right] + \frac{\partial^2 Q}{\partial u\,\partial v},$$

où R désigne toujours $Q_u Q_v - (u+v)^2\,Q_{uv}^2$.

13. Signification de R. — Reprenons la surface $\overline{S}$ sur laquelle $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ définissent les lignes asymptotiques, et qui a pour courbure totale $-\frac{1}{(u+v)^2}$.

(Nous surlignons tous les symboles qui concernent $\bar{S}$.) Selon la règle générale, m étant le point courant de la sphère, et $\bar{e}^i$ désignant les vecteurs du repère supplémentaire sur $\bar{S}$, on a

$$m_i = -\bar{\Phi}_{ik}\bar{e}^k,$$

ce qui donne, dans le cas présent,

$$m_1 = -\bar{b}\,\bar{e}^2, \qquad m_2 = -\bar{b}\,\bar{e}^1,$$

donc

$$g'_{11} = \bar{b}^2\bar{g}^{22}, \qquad g'_{12} = \bar{b}^2\bar{g}^{12}, \qquad g'_{22} = \bar{b}^2\bar{g}^{11}$$

et, par suite,

(70) $$g' \quad \text{ou} \quad |g'_{ik}| = \bar{b}^4|\bar{g}^{ik}| = \frac{\bar{b}^4}{\bar{g}}.$$

Mais on a

$$\bar{K} = -\frac{\bar{b}^2}{\bar{g}},$$

donc

(71) $$\bar{K} = -\frac{g'}{\bar{b}^2}.$$

Or, d'après (49)

$$g'_{11} = \frac{Q_u u_1^2}{2(u+v)}, \qquad g'_{12} = -\frac{Q_{uv}}{2}u_1 v_2, \qquad g'_{22} = \frac{Q_v v_2^2}{2(u+v)},$$

donc

$$g' = \frac{R u_1^2 v_2^2}{4(u+v)^2}$$

et, par suite, (71) devient

(72) $$\bar{K} = -\frac{R u_1^2 v_2^2}{4\bar{b}^2(u+v)^2}$$

Par hypothèse $\bar{K} = -\frac{1}{(u+v)^2}$; on tire donc de (72)

$$4\bar{b}^2 = R u_1^2 v_2^2, \qquad 2\bar{b} = \sqrt{R}\,u_1 v_2,$$

et la forme asymptotique de $\bar{S}$ s'écrit

(73) $$\bar{\Phi} = 2\bar{b}\,\omega^1\omega^2 = \sqrt{R}\,u_1 v_2\omega^1\omega^2 = \sqrt{R}\,du\,dv.$$

Telle est la formule qui met en évidence la signification de la fonction R.

Les calculs qui précèdent permettent, en outre, de former l'élément linéaire $d\bar{s}^2$ de $\bar{S}$. On a, en effet

$$\bar{g}_{11} = \frac{\bar{g}^{22}}{|\bar{g}^{ik}|}, \qquad \bar{g}_{12} = -\frac{\bar{g}^{12}}{|\bar{g}^{ik}|}, \qquad \bar{g}_{22} = \frac{\bar{g}^{11}}{|\bar{g}^{ik}|}.$$

Or

$$|\bar{g}^{ik}| = \frac{1}{\bar{g}} = \frac{g'}{\bar{b}^4},$$

donc

$$\bar{g}_{11} = \frac{\bar{b}^2}{g'}g'_{11}, \qquad \bar{g}_{12} = -\frac{\bar{b}^2}{g'}g'_{12}, \qquad \bar{g}_{22} = \frac{\bar{b}^2}{g'}g'_{22},$$

et, comme on a

$$\frac{\bar{b}^2}{g'} = -\frac{1}{\bar{K}} = (u+v)^2,$$

il vient finalement

$$(74) \qquad d\bar{s}^2 = (u+v)^2 \left[\frac{Q_u\, du^2}{2(u+v)} + Q_{uv}\, du\, dv + \frac{Q_v\, dv^2}{2(u+v)} \right].$$

Ce $d\bar{s}^2$, comme le ds'^2 sphérique, ne dépend que de Q, et non de u_1 et v_2.

Si $\bar{H}$ désigne la courbure moyenne de $\bar{S}$, en appliquant la formule classique

$$2\bar{H}\bar{\Phi} = ds'^2 + \bar{K}\, d\bar{s}^2.$$

on trouve immédiatement

$$2\bar{H}\bar{\Phi} = -2Q_{uv}\, du\, dv,$$

d'où, d'après (73),

$$\bar{H} = -\frac{Q_{uv}}{\sqrt{R}}.$$

L'asphéricité $\bar{A}$ (demi-différence des courbures principales), qui vérifie

$$\bar{A}^2 = \bar{H}^2 - \bar{K},$$

a pour expression

$$\bar{A}^2 = \frac{Q_u Q_v}{R(u+v)^2}.$$

14. Cas particuliers. — L'équation (69) s'intègre dans le cas où l'on ajoute l'hypothèse

$$(75) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Q_u}{R}\right) = 0.$$

On trouve alors, avec une fonction arbitraire de v,

$$(76) \qquad Q = \frac{1}{2}\log\frac{uv}{u+v} + V,$$

ce qui entraîne

$$(77) \qquad R = \frac{vV'}{2u(u+v)}.$$

Quant à ξ et η, on les détermine avec deux nouvelles fonctions arbitraires,

$$(78) \qquad \xi = \frac{2U_1'}{u}, \qquad \eta = vU_1V'\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{v^2V'} + \frac{2}{v}\right) + V_1.$$

Les courbes $u = C$ sont planes, dans des plans parallèles; les lignes $v = C$ sont planes, elles aussi, dans des plans perpendiculaires aux plans des lignes $u = C$. Les surfaces correspondantes sont les *surfaces de Goursat*.

Si $V_1 = 0$, on a les *surfaces de Peterson*; les plans des lignes $v = C$ passent par une droite fixe, orthogonale aux plans des lignes $u = C$.

Au cas où l'on a à la fois

$$(79) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Q_u}{R}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{Q_v}{R}\right) = 0,$$

on obtient, h désignant une constante arbitraire,

$$Q = \frac{1}{2}\log\frac{(u+h)(v+h)}{u+v}; \tag{80}$$

les surfaces correspondantes sont les *surfaces de translation à courbes génératrices situées dans des plans rectangulaires.*

La considération de la fonction Q permet de caractériser simplement les surfaces à réseau ($\mathfrak{T}$) jouissant de certaines propriétés particulières.

Cherchons d'abord la *condition pour qu'en tout point de la surface, les plans osculateurs des courbes* $u = C$, $v = C$ *qui y passent soient rectangulaires.*

Le système d'équations aux dérivées partielles qui définit les coordonnées du point courant M, h désignant la normale unitaire et la seconde forme étant écrite $L\,du^2 + N\,dv^2$, a pour expression

$$\left\{\begin{aligned} M_{u^2} &= \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{Bmatrix} M_u + \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{Bmatrix} M_v + Lh, \\ M_{uv} &= \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} M_u + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} M_v, \\ M_{v^2} &= \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} M_u + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 \end{Bmatrix} M_v + Nh. \end{aligned}\right. \tag{81}$$

Au point M, la binormale à la courbe $u = C$ a la direction $M_v \wedge M_{v^2}$, c'est-à-dire, d'après la seconde équation (81),

$$-\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} M_u \wedge M_v - Nh \wedge M_v.$$

On pose $\omega^1 = \sqrt{L}\,du$, $\omega^2 = \sqrt{N}\,dv$, donc

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{L}}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

et, en outre,

$$\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{N}{\sqrt{L}}\,\delta$$

ou, en tenant compte de (40),

$$\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{N}{2L(u+v)}.$$

Mais (55) donne $\xi^2 = 2(u+v)L^2$, donc

$$\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{LN}{\xi^2}.$$

On peut donc prendre comme binormale (non unitaire) à la courbe $u = C$ le vecteur

$$B = \left(\frac{L}{\xi^2} M_u + h\right) \wedge M_v.$$

Des calculs analogues donnent comme binormale à la courbe $v = C$,

$$B' = \left(\frac{N}{\eta^2} M_v + h\right) \wedge M_u.$$

Écrivons que ces binormales sont orthogonales,

$$\mathrm{B.B'} = \begin{vmatrix} \left(\frac{L}{\xi^2}M_u + h\right)\left(\frac{N}{\eta^2}M_v + h\right) & \left(\frac{L}{\xi^2}M_u + h\right)M_u \\ \left(\frac{N}{\eta^2}M_v + h\right)M_v & M_u . M_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{LN}{\xi^2\eta^2}F + 1 & \frac{L}{\xi^2}E \\ \frac{N}{\eta^2}G & F \end{vmatrix} = 0$$

(en supposant le ds^2 écrit $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$).

Le calcul donne

$$\frac{LN}{\xi^2\eta^2} = \frac{F}{EG - F^2}. \tag{82}$$

Or, compte tenu de (47)

$$\frac{F}{EG - F^2} = -\frac{g^{12}}{\sqrt{LN}} = \frac{1}{2\sqrt{LN}}(Q_{12} - rQ_1) = \frac{1}{2\sqrt{LN}}Q_{uv}u_1v_2 = \frac{Q_{uv}}{2LN},$$

si bien que (82) donne

$$Q_{uv} = 2\frac{L^2N^2}{\xi^2\eta^2},$$

ou encore, eu égard à (55),

$$Q_{uv} = \frac{1}{2(u+v)^2}. \tag{83}$$

Telle est la condition pour qu'en tout point de la surface, les plans osculateurs aux courbes $u = C$, $v = C$ soient rectangulaires. Q doit donc être de la forme

$$Q = -\frac{1}{2}\log(u+v) + U + V. \tag{84}$$

Cherchons, en second lieu, *à quelle condition les courbes* $u = C$ *sont planes.* Le vecteur B doit conserver une direction fixe le long de $u = C$, c'est-à-dire que B_v doit être colinéaire à B. Or

$$\frac{\partial B}{\partial v} = \left(\frac{L_v}{\xi^2}M_u + \frac{L}{\xi^2}M_{uv} + h_v - \frac{2L\xi_v}{\xi^3}M_u\right) \wedge M_v + \left(\frac{L}{\xi^2}M_u + h\right) \wedge M_{vv}.$$

On remplace L_v par $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{smallmatrix} \right\} L - \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{smallmatrix} \right\} N$ en vertu d'une équation de Codazzi, h_v par

$$\frac{FNM_u - ENM_v}{EG - F^2},$$

en vertu d'une équation de Weingarten. Puis, dans le développement du dernier produit vectoriel, on tient compte de

$$\frac{LN}{\xi^2} = \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix} \right\},$$

et il vient finalement

$$\frac{\partial B}{\partial v} = \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{matrix} \right\} B - N\left(\frac{\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{smallmatrix} \right\}}{\xi^2} - \frac{F}{EG - F^2}\right) M_u \wedge M_v.$$

Pour que B_v soit colinéaire à B, il faut et il suffit que

$$\frac{F}{EG - E^2} = \frac{\left\{\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 & \end{matrix}\right\}}{\xi^2} = \frac{LN}{\xi^2 \eta^2}.$$

Or, on a vu tout à l'heure que

$$\frac{F}{EG - F^2} = \frac{Q_{uv}}{2LN}.$$

La condition devient donc, compte tenu de (55),

$$Q_{uv} = \frac{2L^2N^2}{\xi^2\eta^2} = \frac{1}{2(u+v)^2}.$$

C'est la condition (83) déjà trouvée. Elle signifie donc à la fois que les plans osculateurs aux courbes $u = C$ et $v = C$ sont orthogonaux, et que les courbes $u = C$ sont planes. En raison de la symétrie, elle signifie aussi que les courbes $v = C$ sont planes : chacune de ces trois propriétés est donc équivalente aux deux autres.

Il resterait à élucider comment doivent être choisies U et V, dans la formule (84), pour que Q satisfasse à l'équation du quatrième ordre (69). Or nous connaissons déjà une solution dépendant d'une fonction arbitraire; c'est celle que donne la formule (76), qui peut s'écrire aussi, en changeant légèrement la notation

$$Q = -\frac{1}{2}\log(u+v) + \frac{1}{2}\log u + V. \tag{85}$$

On a tout aussi bien, en intervertissant les rôles de u et v,

$$Q = -\frac{1}{2}\log(u+v) + \frac{1}{2}\log v + U. \tag{86}$$

Ce sont, en fait, les seules solutions; nous montrons dans un autre travail, que toute solution de (69) qui vérifie (83), vérifie aussi l'une des deux équations

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Q_u}{R}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{Q_v}{R}\right) = 0,$$

et, par conséquent, s'exprime par (85) ou par (86).

(Manuscrit reçu le 21 décembre 1949.)