BULLETIN DE LA S. M. F.

ISTVAN FARY

Sur la densité des réseaux de domaines convexes

Bulletin de la S. M. F., tome 78 (1950), p. 152-161
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1950__78__152_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA DENSITÉ DES RÉSEAUX DE DOMAINES CONVEXES;

PAR M. ISTVÁN FÁRY.

I. — Introduction.

1. Étant donné dans le plan *un domaine convexe* K et deux vecteurs p et q, linéairement indépendants, l'ensemble R(K) des domaines définis par

$$\text{(1)} \qquad R(K): \quad K + mp + nq \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

sera appelé *réseau de domaines*; nous désignons par $K + x$ le domaine transformé de K en faisant subir au domaine K la translation x. Il est connu que les vecteurs $p' = m'p + n'q$, $q' = m''p + n''q$ engendrent le même réseau ponctuel R que p et q, si et seulement si $m'n'' - n'm'' = 1$ (m', n', m'', n'' entiers). Le réseau de domaines (1) ne dépend alors que du module R engendré par les vecteurs p et q. Lorsque dans (1) K se réduit à un seul point, on retrouve la notion connue de réseau ponctuel; donc le réseau de domaines en est une généralisation naturelle. On appellera parallélogramme fondamental de R(K) le parallélogramme $N: \lambda p + \mu q (0 \leqq \lambda \leqq 1,\ 0 \leqq \mu \leqq 1)$. On voit immédiatement que l'aire de ce parallélogramme ne dépend pas du choix des vecteurs p, q, qui engendrent le module R (concernant ces notions élémentaires, *cf.* Hardy, Wright [4]). La *densité* de R(K) sera définie par le rapport

$$\text{(2)} \qquad d = \frac{V(K)}{V(N)},$$

où V(K) et V(N) désignent respectivement l'aire des deux domaines. Une transformation affine du plan fait correspondre à un réseau de domaines un autre réseau de domaines de même densité; les questions qui rattachent à cette notion font partie alors de la Géométrie affine.

Si les domaines de R(K) n'ont deux à deux aucun point intérieur commun, on dira que R(K) est *séparé*. Si d'autre part les domaines de R(K) recouvrent le plan, on dira que R(K) est *recouvrant*.

Considérons un réseau séparé R(K). Soit D_n une suite croissante de domaines convexes dont la réunion est le plan entier, $\overline{D}_n$ le sous-domaine de D_n, couvert par les domaines de R(K). On a alors

$$d = \lim_{n \to \infty} \frac{V(\overline{D}_n)}{V(D_n)},$$

c'est-à-dire la densité définit la probabilité pour qu'un point du plan soit recouvert (Minkowski définit la densité à l'aide de cette limite; *voir* Minkowski [7]). On peut pareillement interpréter la densité des réseaux recouvrants.

Convenons d'appeler réseau simplement recouvrant celui dont les domaines n'ont deux à deux aucun point intérieur commun, et dont les domaines recouvrent le plan (c'est alors en même temps un réseau séparé et recouvrant). Si le réseau R(K) est ou bien recouvrant, ou bien séparé, alors la condition [*voir* (2)] $d = 1$, c'est-à-dire $V(K) = V(N)$, est équivalente à la condition que le réseau est simplement recouvrant.

2. Les réseaux de domaines (surtout ceux à plusieurs dimensions) ont été beaucoup étudiés par Minkowski [6, 7] en Géométrie des nombres. Entre autres Minkowski a cherché de déterminer les vecteurs p et q [*voir* (1)], de façon que la densité du réseau *séparé* R(K) soit maximum; il a donné des critères nécessaires et suffisants pour qu'un réseau R(K) ait une densité maximum. Le problème suivant n'est pas résolu : soit D(K) la densité maximum de tous les réseaux séparés construits à partir d'un domaine K. En faisant varier K dans l'ensemble des domaines convexes à symétrie centrale, D(K) atteint un minimum. Quels sont les domaines K pour lesquels ce minimum est atteint? On sait seulement d'après les résultats de Reinhardt [8] et Mahler [5] que $\min D(K) < \pi \frac{\sqrt{3}}{6}$ (où K est à symétrie centrale), et cela montre que le minimum n'est pas atteint pour une ellipse (comme on pensait auparavant).

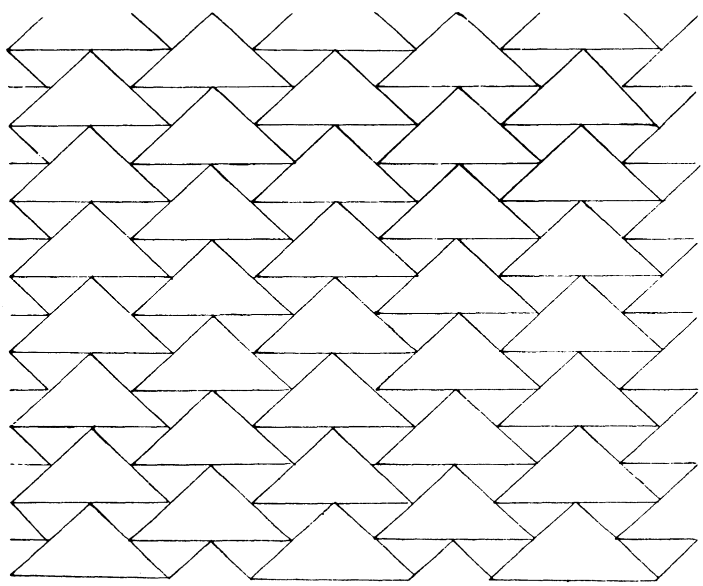


Fig. 1.

3. Par contre, si l'on ne se borne pas aux domaines à symétrie centrale, on a l'énoncé suivant (*fig.* 1) :

Théorème 1. — *La densité maximum des réseaux séparés construits à partir d'un domaine convexe* K *est* $\geqq \frac{2}{3}$. *L'égalité n'a lieu que dans le cas où* K *est un triangle.*

Nous démontrons aussi le *dual* de ce théorème :

Théorème 2. — *La densité minimum des réseaux recouvrants, construits à partir d'un domaine convexe* K, *est* $\leqq \frac{3}{2}$, *l'égalité n'ayant lieu que dans le cas où* K *est un triangle.*

Le premier théorème avait été énoncé d'abord comme hypothèse par M. Fejes-Tóth [1]; dans une conversation particulière il m'avait indiqué que le théorème *dual* semblait fort probable.

Nous démontrons encore le théorème suivant (1) :

Théorème 3. — *Si le domaine* K *est convexe, et si* K_* *désigne un domaine convexe à symétrie centrale dont l'aire est maximum parmi les domaines à symétrie centrale et situés dans* K, *alors*

$$\frac{V(K_*)}{V(K)} \geqq \frac{2}{3},$$

l'égalité n'ayant lieu que dans le cas où K *est un triangle.* (*Dans ce cas extremum le domaine* K_* *sera un hexagone affinement régulier* $K \cap K'$, *où* K' *désigne le symétrique du triangle* K *par rapport à son centre de gravité; voir* Fáry *et* Rédei [2].)

Intuitivement ce théorème signifie que parmi les domaines convexes le triangle est celui qu'on peut le moins bien approcher par des domaines à symétrie centrale. On a aussi le *dual* du théorème ci-dessus :

Si K^* *est le plus petit domaine convexe à symétrie centrale, qui contient le domaine convexe* K, *on a l'inégalité*

$$\frac{V(K)}{V(K^*)} \geqq \frac{1}{2}.$$

Ce théorème est connu, et d'ailleurs sa démonstration est facile.

II. — **Réseaux séparés.**

1. Dans ce paragraphe nous démontrons le théorème 1. A cet effet nous allons construire, à partir d'un domaine K donné, un réseau R(K) dont la densité est $\geqq \frac{2}{3}$.

Nous effectuons d'abord cette construction dans le cas où K jouit de la pro-

(1) *Cf.* A. S. Besicowitch, *Measure of asymetrie of convex curves* (*Journ. of the London Math. Soc.*, t. 23, 1948, p. 237-240). J'ai rédigé ce travail avant d'avoir pris connaissance de la Note citée de M. Besicowitch (ajouté à la correction des épreuves).

priété a suivante : par chaque point frontière de K passe une droite d'appui et une seule; l'intersection de cette droite avec K se réduit au point de contact.

On appelle *domaine vectoriel* d'un domaine convexe K, le domaine K^0, à symétrie centrale, engendré par les extrémités des vecteurs issus d'un point fixe O, et équipollents aux différents vecteurs ayant pour origines et pour extrémités des points quelconques de K. Si nous supposons que K jouit de la propriété a, K^0 possède, lui aussi, cette propriété. Désignons par $P^0(s)$ un point variable de la courbe frontière C^0 de K^0, où s désigne l'angle du vecteur $OP^0(s)$ avec une direction fixe du plan $(0 \leqq s < 2\pi)$. D'après la construction de K^0, il est évident que dans le domaine K il existe un vecteur QP équipollent à un vecteur donné $OP^0(s)$; d'après la propriété a ce vecteur QP est unique. Q et P sont situés sur C, courbe fontière de K, et les tangentes en ces points sont parallèles.

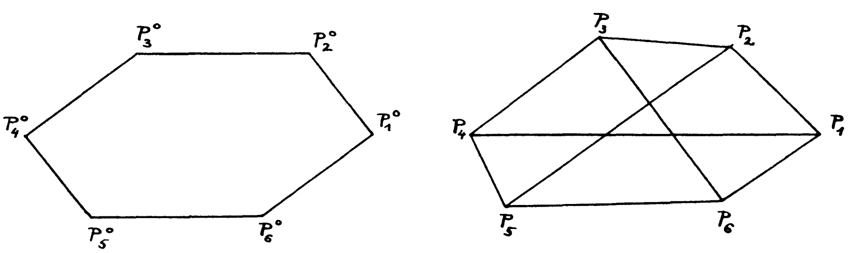
2. Soit $P^0(s)$ donné, et construisons l'hexagone $H^0(s)$ inscrit dans C^0 (*fig.* 2a) :

$$H^0(s) = P_1^0, \quad \ldots, \quad P_6^0, \qquad P_1^0 = P^0(s), \tag{3}$$

tel quel $P_3^0 P_2^0 = OP_1^0$, $OP_i^0 = - OP_{i+3}^0 [P_i = P_j$, si $i \equiv j \pmod 6]$. Cet hexagone est l'image affine d'un hexagone régulier; pour simplifier l'exposé nous convenons d'appeler hexagone affinement régulier un hexagone qui est l'image affine d'un hexagone régulier.

$H^0(s)$ étant un hexagone affinement régulier on a

$$OP_i^0 + OP_{i+2}^0 = OP_{i+1}^0. \tag{4}$$



a *b*

Fig. 2.

Nous faisons correspondre à $H^0(s)$ un hexagone $H(s)$ inscrit dans C, de la façon suivante. Au vecteur OP_i^0 correspond un vecteur, et un seul, situé dans K. Les vecteurs correspondant aux vecteurs OP_i^0 et OP_{i+3}^0 ont les mêmes extrémités (mais leurs orientations sont opposées). Ainsi les extrémités des vecteurs correspondant aux vecteurs $OP_i^0 (i = 1, \ldots, 6)$ déterminent un hexagone (*fig.* 2b) :

$$H(s) = P_1, \quad \ldots, \quad P_6 \tag{5}$$

inscrit dans C. On a, d'après (4),

$$P_{i+3} P_i + P_{i+5} P_{i+2} = P_{i+4} P_{i+1}. \tag{6}$$

3. Je dis que R(K) [*voir* (1)] est *séparé*, si l'on prend $p = P_4 P_1$ et $q = P_5 P_2$.

Il résulte de la définition p et q [d'après (6)] que deux domaines consécutifs de la suite

$$K+p, \quad K+q, \quad K+q-p, \quad K-p, \quad K-q+p \tag{7}$$

se touchent, et chacun d'eux touche K. (Nous disons que deux domaines convexes se touchent si leur intersection non vide se réduit à un segment où à un point.) $P_1, \ldots, P_6$ sont les points de contacts de K avec les domaines (7); d'après l'homogénéité du réseau chaque domaine de celui-ci est touché par six autres domaines. On voit aisément que le réseau de domaines R(K) est *séparé*.

4. Démontrons qu'il y a un s, tel que les droites $P_2(s)P_6(s)$ et $P_3(s)P_5(s)$ sont parallèles. Supposons que ces droites aient pour toute valeur de s un point commun $P(s)$.

Remarquons d'abord que le point $P(s)$ ne peut jamais être situé sur la droite P_4P_1, il est donc dans un des deux demi-plans définis par cette droite. D'autre part il est évident que les hexagones $H(s)$ et $H(s+\pi)$ sont identiques, car ils diffèrent seulement par la numérotation des sommets. Or, on a $P(s)=P(s+\pi)$, mais les directions des droites $P_4(s)P_1(s)$, $P_4(s+\pi)P_1(s+\pi)$ sont opposées [comme $P_1(s)=P_4(s+\pi)$, $P_4(s)=P_1(s+\pi)$]. Si $P(s)$ est situé à gauche de la droite $P_4(s)P_1(s)$, après une rotation de l'angle π, il sera à droite. En faisant varier continûment le paramètre s, on peut passer d'une position à l'autre; cela est en contradiction avec le fait que $P(s)$ n'est jamais situé sur la droite $P_4(s)P_1(s)$. La démonstration est alors achevée.

5. Nous avons donc construit pour chaque domaine K jouissant de la propriété a un réseau de domaines possédant les propriétés suivantes :

1° K est touché par six autres domaines de R(K);

2° si $P_1, \ldots, P_6$ sont les points de contacts, convenablement numérotés, de K avec les autres domaines de R(K), les segments P_2P_6 et P_3P_5 sont parallèles.

Soit maintenant K un domaine convexe quelconque. En approchant K avec des domaines K_n, qui possèdent la propriété a, et en construisant pour chaque K_n le réseau de domaines $R(K_n)$ qui jouit des propriétés 1°, 2°, on voit aisément qu'une suite partielle de cette suite de réseaux de domaines converge vers un réseau R(K) jouissant des mêmes propriétés 1°, 2°.

6. Proposition. — *Soit* R(K) *un réseau de domaines ayant les propriétés* 1°, 2°. *La densité de* R(K) *est* $\geq \frac{2}{3}$; *l'égalité n'a lieu que si* K *est un triangle.*

Démonstration. — Soit H l'hexagone $P_1, \ldots, P_6$ (*fig.* 3). Puisque H est inscrit dans C, courbe frontière de K, il suffit de montrer que

$$\frac{V(H)}{V(N)} \geq \frac{2}{3},$$

où N désigne le parallélogramme fondamental de R(K). La densité (2) est invariante par rapport à une transformation affine, on peut donc supposer que les droites parallèles (*voir* l'hypothèse 2°) P_2P_6 et P_3P_5 sont perpendiculaires à la droite P_1P_4. Désignons par Q_2 le point d'intersection des droites P_1P_4 et P_2P_6, et par Q_3 le point d'intersection des droites P_1P_4 et P_3P_5. Soit $H' = P'_1, \ldots, P'$ l'hexagone $H + P_1P_4$. Si l'on fait subir au plan la translation P_6P_3, alors la

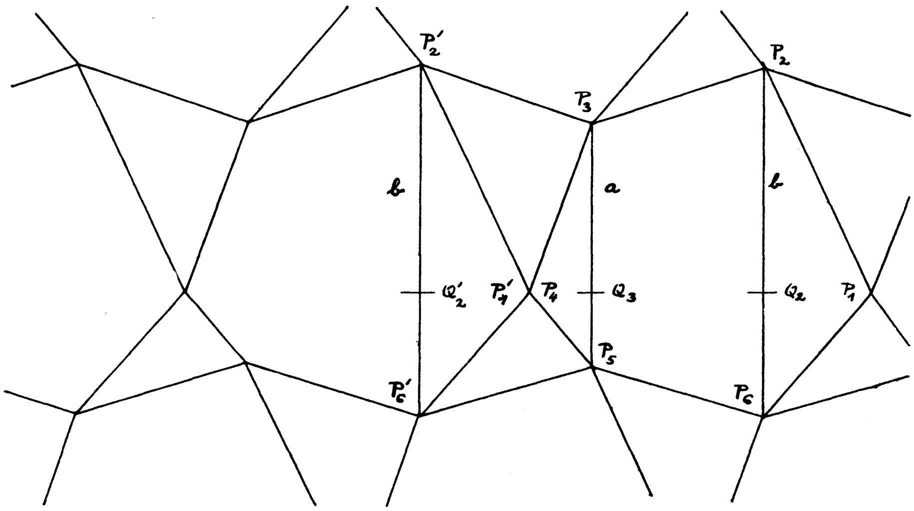


Fig. 3.

droite P_2P_6, vient sur la droite P_3P_5, et P_3P_5 vient sur $P'_2P'_6$; on a donc $\overline{Q_2Q_3} = \overline{Q_3Q'_2}$. L'hexagone H et les deux triangles adjacents $T_1 = P'_2P_4P_3$ et $T_2 = P'_6P_5P_4$ forment un octogone, dont l'aire est égale à $V(N)$, puisque le réseau de domaines qu'on obtient à partir de cet octogone (et les vecteurs $p = P_4P_1$, $q = P_5P_2$) recouvre simplement le plan. On a ainsi $V(N) = V(H) + V(T_1) + V(T_2)$, et il suffit de montrer que

$$V(H) \geq 2[V(T_1) + V(T_2)],$$

c'est-à-dire que, si l'on désigne le quadrilatère $P_1P_2P_3P_4$ par H_1 et le quadrilatère $P_4P_5P_6P_1$ par H_2, on a

$$(8) \qquad V(H_1) \geq 2V(T_1), \qquad V(H_2) \geq 2V(T_2).$$

Pour prouver la première des inégalités (8) posons $a = P_3Q_3$, $b = P_2Q_2$; on peut supposer que $a \leq b$. Nous distinguons deux cas.

$2a > b$. — Puisque $a \leq b$, l'aire de $H'_1 = Q_2P_2P_3Q'_2$ est plus petite que l'aire de H_1, et, d'autre part, l'aire du triangle $T'_1 = P_3P'_2Q'_2$ est plus grande que l'aire de T_1. Il suffit donc de démontrer l'inégalité $H'_1 \geq 2T'_1$, ce qui est aisé

$$V(H'_1) = \frac{a+b}{2}d + \frac{ad}{2} > bd = 2V(T'_1) \qquad (d = \overline{Q_3Q_2} = \overline{Q_3Q'_2}).$$

$2a \leq b$. — Il résulte de notre hypothèse que la droite P_2P_3 coupe le segment

$Q'_2 Q_3$; soit Q le point d'intersection. L'aire de H_1 est plus grande que la somme des aires des triangles $Q_2 P_2 Q$ et $QP'_2 Q'_2$. On a alors

$$V(H_1) \geqq \frac{d+x}{2} b + \frac{d-x}{2} b = bd = 2V(T'_1) \qquad (x = \overline{Q_3 Q};\ T'_1 = P_3 Q P'_2).$$

Le même raisonnement s'applique pour la deuxième inégalité de (8), ce qui démontre $\frac{V(H)}{V(N)} \geqq \frac{2}{3}$.

Si $\frac{V(H)}{V(N)} = \frac{2}{3}$, on a $V(H_1) = 2V(T_1)$, ainsi $Q = P_4$, et $V(T'_1) = V(T_1)$, $Q = Q'_2$, c'est-à-dire H_1 est un triangle. En considérant la deuxième des inégalités (8), nous voyons enfin que K est un triangle. La démonstration du théorème 1 est alors achevée.

III. — Réseaux recouvrants.

1. Nous allons établir le

Lemme 1. — *Soit* R(K) *un réseau de domaines recouvrant le plan. Le domaine* K *contient un hexagone convexe à symétrie centrale* H (*qui peut être dégénéré en un quadrilatère*), *tel que le réseau* R(H) *construit à partir de* H, *recouvre simplement le plan.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que le domaine K contient une partie convexe H, telle que R(H) recouvre simplement le plan, car d'après un théorème connu, on ne peut construire un réseau qui recouvre simplement le plan qu'à partir d'un parallélogramme ou d'un hexagone à symétrie centrale.

On peut supposer que K possède des points intérieurs communs avec $2k \geqq 2$ domaines de R(K). (Car, s'il existe un point, qui est intérieur aux domaines K et $K + x$, alors il existe aussi un point qui est intérieur au domaines K et $K - x$.)

Soit K et $K + mp + nq$ deux domaines ayant un point intérieur commun. Désignons par PQ un arc de la frontière de $K + mp + nq$ dont les extrémités sont situées sur la frontière de K.

Soit H_1 la partie de K située entre les droites l et $l - mp - nq$, où l désigne la droite PQ. D'après la construction il est évident que les domaines H_1 et $H_1 + mp + nq$ n'ont pas de point intérieur commun et que le réseau $R(H_1)$ recouvre le plan. Dans le réseau $R(H_1)$ il n'y a alors que $2(k-1)$ domaines au plus qui ont un point intérieur en commun avec le domaine H_1.

Au bout de k opérations au plus on obtient alors un domaine situé dans K, qui possède la propriété énoncée. Le lemme est ainsi démontré.

Lemme 2. — *Si* C *est une courbe convexe fermée* (*la courbe frontière d'un domaine convexe*), *il existe un hexagone affinement régulier inscrit dans* C.

Démonstration. — Soit d'abord C une courbe continûment différentiable qui ne contient pas des segments. Nous démontrons qu'il existe un hexagone affinement régulier $H = P_1, \ldots, P_6$ et un seul, dont cinq sommets sont situés sur C, le sixième n'est pas à l'extérieur de C, le vecteur P_1P_2 faisant un angle φ donné à l'avance avec une direction donnée.

Soit AB la plus grande corde de C ayant la direction φ. Si $o < \delta < \overline{AB}$, il existe de part et d'autre de AB exactement une corde de longueur δ, parallèle à AB; soient $P_1^\delta P_2^\delta$ et $P_4^\delta P_5^\delta$. Considérons l'hexagone affinement régulier $H^\delta = P_1^\delta, \ldots, P_6^\delta$. Pour δ petit P_3^δ et P_6^δ seront à l'intérieur de C, pour δ voisin de AB, P_3^δ et P_6^δ seront à l'extérieur de C. En faisant donc varier δ continûment on peut amener cinq sommets de l'hexagone à être sur C et le sixième à l'intérieur ou sur C.

Nous montrons que cet hexagone est unique. Supposons au contraire que $H = (P_i)$ et $H' = (P'_i)$ sont deux hexagones affinement réguliers inscrits dans C, tels que $P_1P_2 \parallel P'_1P'_2$, $\overline{P_1P_2} < \overline{P'_1P'_2}$ (*fig.* 4). Il résulte de la dernière inégalité

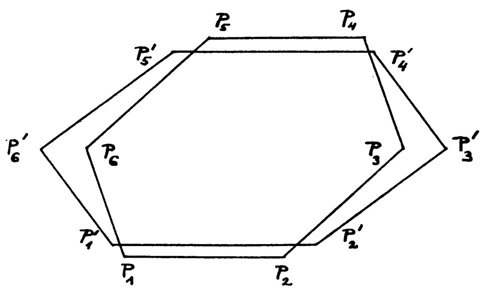


Fig. 4.

(chacun des hexagones étant affinement régulier) que les segments P_2P_3 et P_3P_4 coupent le segment $P'_2P'_4$. De même les segments P_5P_6 et P_6P_1 coupent le segment $P'_5P'_1$. L'angle au sommet P_3 de H est plus grand que l'angle au sommet P'_3 de H', donc le triangle $P'_2P'_3P'_4$ contient le point P_3; de même le triangle $P'_5P'_6P'_1$ contient le sommet P_6. Cela implique que l'hexagone H a deux sommets à l'intérieur de C, contrairement à nos hypothèses.

Il résulte de l'existence et de l'unicité de l'hexagone $H(\varphi)$ que ses sommets varient continûment avec φ. En numérotant les sommets d'un de ces hexagones, cette numérotation détermine celle de tous les autres. Désignons par Φ_i $(i = 1, \ldots, 6)$ l'ensemble de φ pour lesquels, dans l'hexagone correspondant, le sommet P_i est à l'intérieur de C. Si Φ_i n'est pas vide, alors Φ_{i+3} n'est pas vide non plus, car en vertu de l'unicité de $H(\varphi)$ le même hexagone appartient aux directions φ et $\varphi + \pi$ [mais avec une autre numérotation des sommets, à savoir $P_i(\varphi) = P_{i+3}(\varphi + \pi)$]. Les ensembles Φ_i sont ouverts, leurs complémentaires étant fermés. Il existe donc des directions qui n'appartiennent à aucun de Φ_i, car l'ensemble de toutes les directions est connexe, et ne peut pas être décomposé en un nombre fini d'ensembles ouverts. Ainsi le lemme est démontré pour les courbes continûment dérivables, qui ne contiennent pas de segments, et puisque toute courbe convexe peut être approchée par des courbes de ce type, et ceci de telle façon que les hexagones affinement réguliers, inscrits aux courbes tendent vers un hexagone affinement régulier inscrit dans la courbe C, le lemme est alors démontré en toute généralité.

Lemme 3. — *Soit* K *un domaine convexe*, $H = P_1, \ldots, P_6$ *un hexagone affinement régulier inscrit dans* C, *courbe frontière de* K. *Nous avons l'inégalité*

$$\frac{V(K)}{V(H)} \leq \frac{3}{2}.$$

Démonstration. — Menons une droite d'appui t_i de C par chacun des points P_i. Désignons par Q_i le point d'intersection des droites t_i et t_{i+1}. L'hexagone $H' = Q_1, \ldots, Q_6$ contient K, il suffit donc de démontrer l'inégalité

$$\frac{V(H')}{V(H)} \leq \frac{3}{2}. \tag{9}$$

Les droites P_1P_2, P_3P_4, P_5P_6 déterminent un triangle $T = A_1A_2A_3$ [le sommet A_1 est opposé au côté P_3P_4, etc. (*fig.* 5)]. Le triangle symétrique de $P_1Q_1P_2$ par

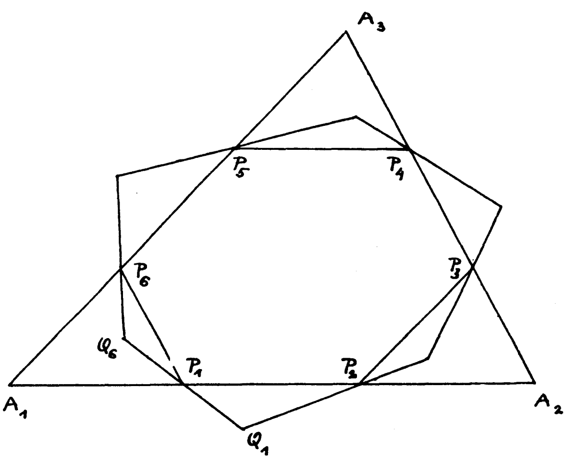


Fig. 5.

rapport au point P_1 est situé dans le triangle $A_1P_1P_6$ ($A_2P_2 = P_2P_1 = P_1A_1$, car H est un hexagone affinement régulier); la somme de l'aire des triangles $P_1Q_1P_2$ et $P_6Q_6P_1$ est donc plus petite que l'aire de $A_1P_1P_6$. En répétant cette opération pour les points P_3 et P_5, on obtient finalement $V(H') \leq V(T)$. Mais d'autre part $V(H) = \frac{2}{3}V(T)$, d'où résulte l'inégalité (9). Le lemme est donc démontré.

2. Nous pouvons maintenant établir le théorème 2. Considérons un domaine K et l'hexagone affinement régulier inscrit dans sa courbe frontière (lemme 2). Soient p et q deux vecteurs déterminés par les milieux de deux couples de côtés parallèles de H. On voit immédiatement que les domaines $H + mp + nq$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) recouvrent simplement le plan, donc qu'on a $V(N) = V(H)$ pour le parallélogramme fondamental N du réseau R(K), construit avec les vecteurs p et q qu'on vient de définir. Or, $K \supseteq H$, donc R(K) recouvre le plan. Nous obtenons

pour la densité d de celui-ci

$$d = \frac{V(K)}{V(N)} = \frac{V(K)}{V(H)}.$$

Cette dernière quantité est $\leqq \frac{3}{2}$ d'après le lemme 3, ce qui démontre la première proposition du théorème 2.

Pour démontrer la seconde partie du théorème considérons un réseau de triangles R(T) qui recouvre le plan. D'après le lemme 1 il existe un hexagone (ou parallélogramme) H situé dans T tel que le réseau R(H) recouvre simplement le plan. Il est facile de démontrer que dans ce cas

$$\frac{V(T)}{V(H)} \geqq \frac{3}{2} \quad \text{(H à symétrie centrale)},$$

la valeur minimum $\frac{3}{2}$ étant atteinte pour un hexagone convenablement choisi. Par conséquent la densité minimum de réseaux recouvrant R(T) est $\frac{3}{2}$. La démonstration est alors achevée.

3. Le théorème 3 résulte immédiatement des lemmes 2 et 3, car on a évidemment $V(K_*) \geqq V(H)$, où H est un hexagone affinement régulier, inscrit dans la courbe frontière de K. Nous obtenons ainsi l'inégalité du théorème, et la démonstration est complète.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] L. Fejes, *Eine Bemerkung über die Bedeckung der Ebene durch Eibereiche mit Mittelpunkt* (*Acta Scientiarum Mathematicarum*, Szeged, t. 11, 1946, p. 93-95).

[2] I. Fáry und L. Rédei, *Der zentralsymmetrische Kern und die zentralsymmetrische Hülle von konvexen Körpern* [*Mathematische Annalen* (à paraître)].

[3] Bonnesen und Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*.

[4] Hardy and Wright, *An introduction to the theory of numbers*.

[5] K. Mahler, *On the densest packing of convex domains* (*Koninklijke Akademie van Wetenschappen*, t. 50, 1947, p. 108-118).

[6] H. Minkowski, *Diophantische Approximationnen*.

[7] H. Minkowski, *Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper* (*Gesammelte Abhand lungen*, Bd. II).

[8] K. Reinhardt, *Über die dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Bereiche in der Ebene und eine besondere Art konvexer Kurven* (*Abh. Math. Sem. der Hansischen Univ.*, t. 10, 1934, p. 216-230).

(Manuscrit reçu le 26 juillet 1949).