BULLETIN DE LA S. M. F.

ROBERT CAMPBELL

Sur une expression remarquable des solutions de période $2k\pi$ de l'équation de Mathieu associée

Bulletin de la S. M. F., tome 77 (1949), p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1949__77__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR UNE EXPRESSION REMARQUABLE DES SOLUTIONS DE PÉRIODE $2k\pi$ DE L'ÉQUATION DE MATHIEU ASSOCIÉE;

PAR ROBERT CAMPBELL.

INTRODUCTION.

L'équation différentielle de Mathieu

$$(\mathrm{I}) \qquad y'' + (a + k^2 \cos^2 x)y = 0,$$

qui apparaît dans un grand nombre de problèmes de physique mathématique (vibration d'une membrane plane elliptique, potentiel sur les cylindres elliptiques, problème de modulation de fréquence en radioélectricité) a fait l'objet de recherches variées principalement chez les mathématiciens anglais (¹). L'équation dite de Mathieu associée

$$(\mathrm{II}) \qquad y'' + 2\nu y' \cot x + (a + k^2 \cos^2 x)y = 0,$$

qui généralise la précédente, et qui se rencontre dans l'étude de la vibration d'un haut-parleur circulaire et dans les problèmes de potentiel sur les hyperquadriques, a fait l'objet de recherches plus récentes (²). En général les mathématiciens se

(¹) Sur l'équation de Mathieu, voir principalement : N. W. MAC LACHLAN, *Theory of Mathieu functions*, Oxford, 1947; PIERRE HUMBERT, *Fonctions de Mathieu et de Lamé* (*Memorial des Sciences mathématiques*. 1932); INCE, *Characteristic numbers of Mathieu equation* (*Proc. Royal Soc. Edinburg*, t. 46, 1925, p. 20; 1926, p. 316; t. 47, 1927, p. 294); GOLDSTEIN, *Mathieu functions* (*Trans. Cambridge Phil. Soc.*, t. 23, 1927, p. 303).

Voir aussi, pour les résultats qu'il juxtapose, le mémoire extrêmement condensé et malheureusement peu lisible de N. J. O. STRUTT, *Lamesche, Mathieusche und verwandte funktionen in Physik und Technik*, Berlin, Springer, 1932.

Pour les tables numériques, consulter les articles cités de Ince, et voir aussi : *Table of Characteristic Values of Mathieu's differential équation* (*A. M. P.*, report, 165; *I. R. Mathematical tables project*, *National Bureau of Standard America*, 1945.)

(²) Sur l'équation de Mathieu associée, *voir* HUMBERT, *Mathieu functions of higher order; Proc. Ed. math. Soc.* ou (P. E. M. S.), t. 40, 1922, p. 27; *Potentiels et prépotentiels*. Gauthier-Villars, 1932; et également INCE, *Associated Mathieu functions* (*Proc. Edinburg, Math. Soc.*, 41, 1923, p. 94).

sont attachés, pour ces équations, à déterminer des procédés de calcul *pratique* pour le calcul des intégrales, en particulier des intégrales périodiques en x. Le but de cette étude est d'appliquer à l'équation (II), qui comprend l'équation de Mathieu comme un cas particulier, une méthode simple, pour l'obtention théorique des intégrales et redonnant rigoureusement aussi certains résultats, obtenus déjà par des procédés d'approximation.

1. Le procédé employé ici avait été ébauché par Poole dans le cas de l'équation de Mathieu ([1]). Il est très général et nous l'appliquons à l'équation (II), où nous posons $\sin x = z$, et qui devient alors

$$(z^2-1)y''_{z^2}+(2\nu+1)zy'_z-(a+k^2z^2)y=0.$$

Il consiste à étudier ([2]), par la méthode classique appelée quelquefois *théorème de Fuchs*, les développements des solutions au voisinage des points -1 et $+1$ qui, selon la terminologie habituelle, sont des singularités régulières.

Si l'on pose $z \neq 1+u$ et qu'on cherche un développement

$$y = u^r + A_1 u^{r+1} + \ldots + A_n u^{r+n} + \ldots,$$

on trouve que r doit être égal à 0 ou à $\frac{1}{2}-\nu$.

Donc, si ν est différent de la moitié d'un impair, on obtient pour l'équation deux solutions (si $|1-z|<2$)

$$F_1(1-z) = 1 + a_1(1-z) + \ldots + a_n(1-z)^n + \ldots,$$

$$F_2(1-z) = (1-z)^{\frac{1}{2}-\nu}[1 + b_1(1-z) + \ldots + b_n(1-z)^n + \ldots].$$

On obtient de même deux autres solutions $F_1(1+z)$, $F_2(1+z)$ avec les *mêmes* a_n et b_n. Ces a_n et ces b_n sont des fonctions de a et de k^2 déterminées par des équations récurrentes à trois termes.

Les quatre solutions $F_1(1-z)$, $F_2(1-z)$, $F_1(1+z)$, $F_2(1+z)$ ne sont évidemment pas indépendantes; et Poole a montré ([3]) que, dans un cas général qui englobe celui-ci, on avait les relations

$$(S) \quad \left\{\begin{aligned} F_1(1-z) &= \alpha F_1(1+z) + \beta F_2(1+z), \\ F_2(1-z) &= \frac{1-\alpha^2}{\beta} F_1(1+z) - \alpha F_2(1+z), \end{aligned}\right.$$

α et β étant des constantes.

([1]) Poole, *Certain classes of Mathieu functions* (*Pr. London, Math. Soc.*, t. 20, 1921, p. 374).

([2]) *Voir* aussi R. Campbell, *C. R. Acad. Sc.*, t. 224, 1947, p. 1322.

([3]) Il suffit de remarquer que les quatre fonctions précédentes sont liées par deux relations linéaires

$$F_1(1-z) = \alpha F_1(1+z) + \beta F_2(1+z),$$
$$F_2(1-z) = \gamma F_1(1+z) + \delta F_2(1+z),$$

comme solutions d'une même équation linéaire et de changer le signe de z en répétant la substitution, soit

$$\begin{aligned} F_1(1-z) &= (\alpha^2+\beta\gamma) F_1(1-z) + \beta(\alpha+\delta) F_2(1-z), \\ F_2(1-z) &= \gamma(\alpha+\delta) F_1(1-z) + (\beta\gamma+\delta^2) F_2(1-z), \end{aligned} \quad \text{d'où} \left\{\begin{aligned} \alpha^2+\beta\gamma &= \beta\gamma+\delta^2 = 1, \\ \beta(\alpha+\delta) &= \gamma(\alpha+\delta) = 0. \end{aligned}\right.$$

On voit facilement qu'on ne peut avoir $\alpha = \delta$; donc $\alpha = -\delta$, et $\beta\gamma = 1-\alpha^2$. C. Q. F. D.

2. Un des problèmes fondamentaux qui intéressent les physiciens est celui de la recherche des solutions périodiques, en particulier celles dont la période est 2π (on se sert d'habitude d'un développement en série trigonométrique). Ici, la recherche de telles solutions conduit à trouver, *quand la variable x augmente de 2π*, la modification correspondante éprouvée par les solutions fondamentales en z, F_1 et F_2. La variable z, dans le plan complexe décrit alors un lacet autour du segment $(-1, +1)$.

Si l'on prend au point A l'origine du lacet et si l'on pose $F_1(1-z) = F_1^-$ et $F_2(1-z) = F_2^-$, les solutions fondamentales, en B, sont liées à celles en A par le système S.

La description du petit cercle de B à C multiplie F_2^+ par $-e^{-2\pi i\nu}$. La première relation, en C, s'écrit donc alors

$$F_1^- = \alpha F_1^+ - \beta e^{-2\pi i\nu} F_2^+$$

et, en remplaçant F_1^+ et F_2^+ par leurs valeurs originelles (S),

$$F_1^- = \alpha[\alpha F_1^- + \beta F_2^-] - \beta e^{-2\pi i\nu}\left[\frac{1-\alpha^2}{\beta} F_1^- - \alpha F_2^-\right]$$

ou

$$F_1^- = [\alpha^2 - (1-\alpha^2) e^{-2\pi i\nu}] F_1^- + \alpha\beta(1 + e^{-2\pi i\nu}) F_2^-.$$

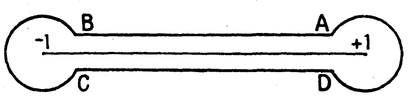

Fig. 1.

En continuant ainsi jusqu'au retour à l'origine A du lacet, et en procédant de même pour F_2, on trouve que F_1^- devient, au bout d'un tour de la variable z,

$$(F_1^-) = F_1^-[\alpha^2 + q(\alpha^2 - 1)] - F_2^- \alpha\beta q(1+q),$$

F_2^- devient (F_2^-)

$$(F_2^-) = F_2^-\left[\frac{\alpha(1-\alpha^2)}{\beta}(1+q)\right] - F_2^- q[1 - \alpha^2(1+q)], \quad \text{où} \quad q = e^{-2\pi i\nu}.$$

Cherchons une combinaison $AF_1^- + BF_2^-$ sur laquelle les modifications de ce système puissent s'écrire

$$A(F_1^-) + B(F_2^-) = (AF_1^- + BF_2^-) \times \sigma \quad [1],$$

σ est donné par l'équation *caractéristique*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 + (\alpha^2 - 1)q - \sigma & -\alpha\beta q(1+q) \\ \frac{\alpha}{\beta}(1-\alpha^2)(1+q) & -q[1 - \alpha^2(1+q)] - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

ou encore

$$\sigma + \frac{q^2}{\sigma} = \alpha^2(1+q)^2 - 2q.$$

---

(1) C'est ce que Poincaré appelle *chercher la forme canonique de la substitution linéaire*. C'est la même opération qu'on effectue en cherchant l'équation en S d'un système linéaire, ou encore en réduisant une matrice à sa forme diagonale.

Bornons-nous au cas où σ est imaginaire de module 1.

Si l'on pose $\sigma = q\,e^{i\theta}$, cette équation s'écrit finalement

$$\alpha = \varepsilon \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos \pi\nu} \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{C}$$

Réciproquement, si l'équation (C) est vérifiée, c'est que, après que la variable z a parcouru une fois le lacet précédent, la substitution $AF_1^- + BF_2^-$ a été multipliée par $\sigma = e^{i(\theta - 2\pi\nu)}$. La recherche de la solution de période 2π en x revient donc à celle de la résolution de l'équation $\sigma = 1$, soit $\theta - 2\pi\nu = 2r\pi$ (avec r entier).

Plus généralement la recherche de la solution de période $2s\pi$ en x revient à celle de l'équation $\sigma^s = 1$, soit $\theta - 2\pi\nu = \frac{2r\pi}{s}$ (s entier). Si l'on veut obtenir une solution de période $2s\pi$, il faut donc :

1° Résoudre l'équation

$$\alpha = \varepsilon \frac{\cos\left(\nu + \frac{r}{s}\right)\pi}{\cos \pi\nu}. \tag{Cs}$$

2° Calculer les constantes A et B de l'expression $AF_1 + BF_2$.

3. D'habitude la condition d'existence d'une solution de période 2π ou $2s\pi$ s'exprime par une relation entre a et k^2, généralement transcendante. Dans le cas de l'équation de Mathieu et des solutions de période 2π, cette équation a déjà été bien des fois recherchée (1). On la trouve ici de manière tout à fait nouvelle et sous forme très simple si l'on remarque que la quantité α, que Poincaré appelle l'invariant, est une fonction entière des paramètres a et k^2 de l'équation (2). Il suffit de faire $z = -1$ dans l'expression

$$F_1(1-z) = \alpha F_1(1+z) + \beta F_2(1+z)$$

pour obtenir (3)

$$\alpha = F_1(2) = 1 + \sum_1^\infty 2^n a_n(a, k^2) \qquad [\text{puisque } F_2(0) = 0],$$

sous forme d'une série dont la convergence facilement démontrable est très lente (4).

On peut obtenir encore cet invariant en faisant $z = 0$, ce qui donne

$$\alpha(a, k^2) = \frac{F_1(1)\,F'_2(1) + F_2(1)\,F'_1(1)}{F_1(1)\,F'_2(1) - F_2(1)\,F'_1(1)},$$

$$\beta(a, k^2) = \frac{-2F_2(1)\,F'_1(1)}{F_1(1)\,F'_2(1) - F_2(1)\,F'_1(1)}.$$

(1) *Cf.*, articles cités de Ince, Goldstein : *voir* aussi Whittaker, *Modern analysis*, p. 409.

(2) Poincaré, *Acta mathematica*, 8, 1886, p. 295.

(3) *Voir* aussi Forsyth, *Theory of differential equations*, t. 4.

(4) $z = -1$ étant sur le rayon de convergence, appliquer la règle de Duhamel.

Ces expressions font intervenir des séries plus convergentes et fournissent la valeur de β, qui sera utile par la suite.

On peut se demander ce que devient l'équation caractéristique précédente lorsque k tend vers zéro et que l'équation de Mathieu devient celle du mouvement oscillatoire ordinaire. Dans ce cas, les intégrales de période 2π ont lieu pour $a = N$. et ce sont $\cos Nx$ et $\sin Nx$. L'équation caractéristique s'écrit $\alpha = \pm 1$. Il est facile de s'assurer qu'elle est vérifiée : par exemple avec les cosinus, qu'on doit développer en séries de puissances de $1 - z = t$, c'est-à-dire de $1 - \cos x$ (on prend α sour la 1^{re} forme $1 + \Sigma 2^n a^n$).

$N = 1, \quad \cos x = 1 - (1 - z), \quad a_1 = -1, \quad \alpha = 1 + 2a_1 = -1.$

$N = 2, \quad \cos 2x = 2(1 - t^2) - 1 = 1 - 4t + 2t^2,$
$\alpha = 1 + 2(-4) + 4(+2) = +1.$

$N = 3, \quad \cos 3x = 4z^3 - 3z = 1 - 9t + 12t^2 - 4t^3,$
$\alpha = 1 + 2(-9) + 4(+12) + 8(-4) = -1.$

$N = 4, \quad \cos 4x = 1 - 16t + 40t^2 - 32t^3 + 8t^4,$
$\alpha = 1 + 2(-16) + 4(+40) + 8(-32) + 16(+8) = +1.$

$N = 5, \quad \cos 5x = 1 - 25t + 100t^2 - 140t^3 + 80t^4 - 16t^5,$
$\alpha = 1 + 2(-25) + 4(+100) + 8(-140) + 16(+80) + 32(-16) = -1.$

(Le signe $+$ correspond aux fonctions de période π, le signe $-$ aux fonctions de périodes 2π.)

4. Expressions des solutions dont la période est multiple de 2π. — De là, on peut tirer les valeurs A, B, coefficients de la combinaison cherchée. Ces quantités sont proportionnelles aux deux éléments d'une même rangée du déterminant Δ précédent. Le calcul est assez compliqué; développons-le ici, *dans le cas des fonctions de Mathieu ordinaires* ($\nu = 0$) (on donnera ci-dessous des indications sur le cas général). Alors

$$q = 1, \qquad \theta = 2\frac{r}{s}\pi, \qquad \sigma = e^{i\theta}, \qquad \alpha = \varepsilon \cos\frac{r\pi}{s},$$

A et B sont proportionnels à $2\alpha^2 - 1 - e^{i\theta}$ et $-2\alpha\beta$.

Or, α et β sont liés par

$$(1 - \alpha) F_1(1) = \beta F_2(1),$$

d'où l'on tire β en fonction de α, c'est-à-dire de $\cos\frac{r\pi}{s}$.

Le calcul, après simplification des fractions et en supposant $\cos\frac{r\pi}{s} \neq 0$ donne, si

$$\varepsilon = +1, \qquad \frac{A}{\dfrac{\cos\frac{r\pi}{2s}}{F_1(1)}} = \frac{B}{\dfrac{-i\sin\frac{r\pi}{2s}}{F_2(1)}}.$$

On aura donc une solution de période $2s\pi$, soit

$$\text{(R)} \qquad y_s^r = C\left[\cos\frac{r\pi}{2s}\,\frac{F_1^s(1-z)}{F_1^s(1)} - i\sin\frac{r\pi}{2s}\,\frac{F_2^s(1-z)}{F_2^s(1)}\right],$$

F_1^r et F_2^s désignant F_1 et F_2 quand on y a remplacé a et k^2 par leurs valeurs tirées de l'équation caractéristique précédente $\alpha = \cos \frac{r\pi}{s}$ (C est réelle ou complexe).

Cette expression contient des imaginaires. Si $s = 1$, c'est-à-dire pour les fonctions de période 2π, elle se réduit soit à un multiple de $F_1(1 - z)$, soit à un multiple de $F_2(1 - z)$. Ces fonctions, exprimées avec la variable x, sont désignées habituellement et respectivement par $ce_N(x)$ et $se_N(x)$ [$ce_N(x)$ se réduisant à $\cos Nx$ pour $k = 0$ et $se_N(x)$ à $\sin Nx$] et appelées *fonctions de Mathieu.* On appellera par analogie, et selon une suggestion de Poole, $ce_{\frac{r}{s}+p}(x)$ et $se_{\frac{r}{s}+p}(x)$ les fonctions déduites des parties réelle et imaginaire de l'expression précédente (R), qui sont des solutions de période $2s\pi$ en x.

Dans le cas, exclu jusqu'ici, où $s = 2$, l'équation caractéristique est $\alpha = 0$, elle ne contient plus le signe $\pm$, mais elle donne naissance à des fonctions $ce_{\frac{1}{2}+p}(x)$ et $se_{\frac{1}{2}+p}(x)$ obtenues, elles aussi respectivement, en faisant A ou B nul (comme pour les fonctions de Mathieu proprement dites, mais avec des valeurs différentes pour les a_n et les b_n).

Application. — Goldstein, dans un Mémoire déjà assez ancien ([1]), a donné pour les intégrales de période $2s\pi$ de l'équation de Mathieu une formule asymptotique qui permet de les représenter de façon numériquement satisfaisante lorsque les paramètres a et k sont infiniment grands. Cette formule était obtenue par un procédé dont l'auteur lui-même déplore le manque de rigueur (puisqu'elle consiste à négliger dans un développement les termes $\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}, \ldots, \frac{1}{k^n}$, en conservant par ailleurs le terme en e^{-k}).

Elle permet d'écrire, pour k très grand, une solution de période $2s\pi$ sous la forme

$$Y = L\left[H e^{-\frac{r\pi i}{2s}} \pm h e^{\frac{r\pi i}{2s}}\right] \qquad \text{(L const. complexe)},$$

soit encore

$$Y = L\left[\cos\frac{r\pi}{2s}(H + h) - i \sin\frac{r\pi}{2s}(H - h)\right].$$

On sait par ailleurs ([2]), et il est facile pour le voir d'appliquer la méthode de Horn ([3]), que $(H + h)$ est une représentation asymptotique d'une fonction ce_N ordinaire et $(H - h)$ celle d'une se_N. La formule de Goldstein n'apparaît donc comme rien d'autre que comme un cas particulier de celle que nous venons de démontrer, à cela près que celle de Goldstein ne s'applique que pour les valeurs

---

([1]) Goldstein, article cité : *Asymptotic expansions.* P. R. S. E., 1929.

([2]) Ince, *Mathieu'equations with large parameters* (*Journal of the London Math. Soc.*, t. 1, 1926, p. 46); Ince, *Characteristic, numbers of Mathieu's equation* (*Proc. Royal Soc. of Edinburg*, t. 46 et 47, 1926-1927, p. 316 et 294); Goldstein, *Mathieu Functions* (*Trans. Cambridge Phil. Soc.*, t. 23, 1927, p. 303).

([3]) Horn, *Math. Annalen*, t. 52, 1899. Quand k est très grand, l'équation $y'' - k^2\chi(x)y = 0$ admet une solution de la forme $\varphi(x)[\exp k\omega(x)](1 + \varepsilon)$. où $\omega'^2 = \chi$.

infiniment grandes des paramètres, tandis que (R) s'applique quels que soient a et k, et qu'elle est généralisable à d'autres équations que celles de Mathieu.

On rappelle que les fonctions H et h pour les grandes valeurs de a et k sont représentables par les expressions (équation de Mathieu ordinaire)

$$\mathrm{H} = e^{k \sin x} \frac{\cos^m\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{\sin^{m+1}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}, \qquad h = e^{-k \sin x} \frac{\cos^m\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\sin^{m+1}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}.$$

Application aux calculs numériques. — On peut utiliser les remarques pré-

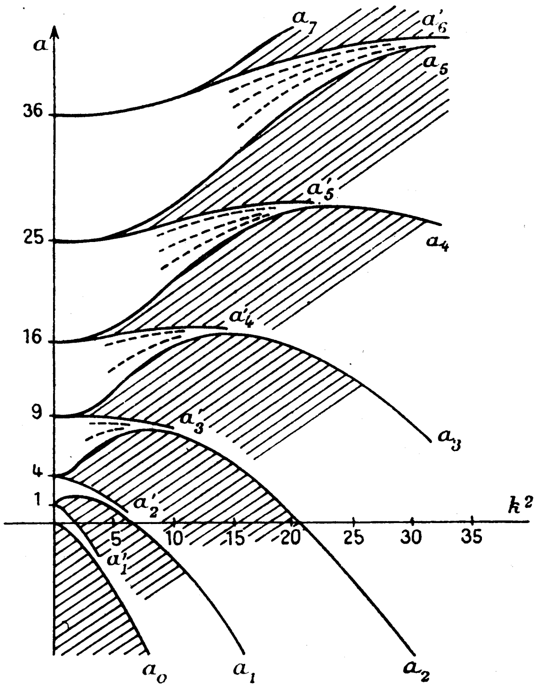

Fig. 2.

Les courbes a_0, a_1, a_2, ... sont celles où il faut choisir le point (a, k^2) pour obtenir respectivement une intégrale qui soit ce_0, ce_1, ce_2, ... Les courbes a'_1, a'_2, ... sont celles qui donnent naissance à des intégrales se_0, se_1, se_2 .... La courbe a_n est asymptote à la courbe a'_{n+1}. (Pour ces résultats, et ces courbes voir les articles cités de Ince, ou encore le livre de Mac-Lachlan, p. 40). Les courbes figurées en pointillé sont celles où il faut choisir (a, k^2) pour avoir une intégrale de période $2s\pi$. Elles sont asymptotes aux précédentes. Les régions hachurées sont celles où le choix de (a, k^2) donne pour l'équation une intégrale qui ne peut rester finie quand x tend vers l'infini. (Régions dites d'*instabilité*.)

cédentes pour les calculs asymptotiques (lorsque k est très grand) des fonctions $y_s^r(z)$ ou encore $ce_{\frac{r}{s}+p}(x)$. En effet, les travaux de Ince [1] ont montré que les

[1] *Characteristic numbers of Mathieu'equations* (*Proc. Royal Soc. of Edinburg*, t. 46, 1926 p. 316 et t. 47, 1927, p. 294); *Mathieu functions of stable type* (*Phil. Mag.*, 6, 1928, p. 547).

valeur (a, k^2) qui engendrent les solutions *stables* (et en particulier *périodiques*) sont asymptotes dans le plan (a, k^2) aux valeurs qui engendrent les fonctions ce_N et se_N, lorsque k est très grand. Donc, le calcul numérique d'une fonction F_1^s revient à celui d'une F_1. Et la formule trouvée donne alors la valeur asymptotique de y_s^r par le simple calcul de F_1 et F_2 (c'est-à-dire ce_N et se_N) (¹), ce qui corrobore bien le résultat de Goldstein.

5. **Cas général.** — Toute cette analyse se généralise sans difficulté aux fonctions de Mathieu *associées*, on obtient de même

$$y_{s,\nu}^r = G_1 \cos\frac{r\pi}{2s} - G_2 \sin\left(\nu + \frac{r}{2s}\right)\pi,$$

avec l'équation caractéristique

$$\alpha(a, k^2)\cos\nu\pi + \varepsilon\cos\left(\nu + \frac{r}{s}\right)\pi = 0.$$

Si $\varepsilon = +1$

$$y_{s,\nu}^r = C\left[\cos\frac{r\pi}{2s}\left(\frac{G_1 - G_2\sin\nu\pi}{\cos\nu\pi}\right) - \sin\frac{r\pi}{2s}G_2\right],$$

avec

$$G_1 = \frac{F_1(1-z)}{F_1(1)} = \frac{\sum_0^\infty a_n(1-z)^n}{\sum_0^\infty a_n}$$

et

$$G_2 = e^{\pi i\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}(1-z)^{\frac{1}{2}-\nu}\frac{\sum_0^\infty b_n(1-z)^n}{\sum_0^\infty b_n}$$

Si $\varepsilon = -1$

$$\overline{y}_{s,\nu}^r = C\left[\sin\frac{r\pi}{2s}\left(\frac{G_1 - G_2\sin\nu\pi}{\cos\nu\pi}\right) + \cos\frac{r\pi}{2s}G_2\right].$$

Si k est très grand, on peut faire une application analogue aux calculs numériques, le coefficient ν n'intervenant pas dans le calcul des valeurs asymptotiques (²).

Reste le cas où ν est la moitié d'un impair, la série F_2 n'est plus solution, car alors les racines de la déterminante diffèrent d'un entier (ou sont confondues).

(¹) Cela revient encore à dire que, lorsque k est très grand, les zéros de la fonction entière $\alpha + \varepsilon\cos\left(\frac{r\pi}{s}\right)$ forment un ensemble qui se rapproche indéfiniment de l'ensemble des zéros de la fonction entière $\alpha \pm 1$. Il resterait à démontrer directement cette propriété.

(²) *Voir*, à ce sujet, Ince, *Mathieu's equation with large parameters* (*Journal of London Math. Society*, t. 11, 1926, p. 40); *Voir* aussi (*Proc. Royal Soc. of Edinburg*, t. 46, et 47, 1926-1927, p. 316 et 294).

Selon la méthode générale on prend la seconde solution sous la forme

$$\overline{F}_2(1-z) = F_1(1-z)\,\mathrm{Log}(1-z) + H_1(1-z),$$

$H_1(1-z)$ étant une fonction entière ou méromorphe.

Comme pour le cas de ν quelconque, on suit les modifications successives subies par F_1 et $\overline{F}_2$ le long du lacet décrit autour des points -1 et $+1$. Quand z décrit le demi-cercle BC, $L(1+z)$ augmente de πi. Un calcul analogue conduit à l'équation en σ

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha\beta\pi i - \beta^2\pi^2 - \sigma & \beta^2\pi i \\ \pi i(1-\alpha^2) + \alpha\beta\pi^2 & i - \alpha\beta\pi i - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on veut que la fonction soit de période $2s\pi$, il faut que $\sigma = e^{2\pi i\frac{r}{s}}$ et l'équation en σ s'écrit alors

$$\beta(\alpha, k^2) = \frac{2\varepsilon}{\pi}\sin\frac{r\pi}{s}.$$

L'expression de β en fonction des coefficients a_i et $\overline{b}_i$ du développement de F_1 et $\overline{F}_2$ a été donnée ci-dessus $[F_1(1)$ se réduit à $H_1(1)]$. Le calcul se conduit facilement à partir du précédent par un passage à la limite, en remarquant que l'intégrale $\overline{F}_2$ s'obtient comme limite de $\dfrac{F_2-F_1}{\frac{1}{2}-\nu}$. La nouvelle intégrale générale s'écrit alors avec les coefficients A et B de l'ancienne

$$(A+B)F_1 + B\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\overline{F}_2.$$

Et l'intégrale de période $2s\pi$ correspondante à pour expression

$$Y_s^r = G_1 \sin\frac{r\pi}{2s} + \frac{1}{\pi}\overline{G}_2\cos\frac{r\pi}{2s} \qquad \text{si} \quad \varepsilon = +1,$$

$$\overline{Y}_s^r = G_1 \cos\frac{r\pi}{2s} - \frac{1}{\pi}\overline{G}_2\sin\frac{r\pi}{2s} \qquad \text{si} \quad \varepsilon = -1,$$

où G_1 a la même expression que ci-dessus et où $\overline{G}_2$ vaut $\dfrac{\overline{F}_2(1-z)}{\overline{F}_2(1)}$.

(Manuscrit reçu le 24 mai 1948.)