BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS CHÂTELET

Relations entre l'arithmétique et la géométrie sur une quadrique

Bulletin de la S. M. F., tome 76 (1948), p. 108-113

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1948__76__108_0>

RELATIONS ENTRE L'ARITHMÉTIQUE ET LA GÉOMÉTRIE SUR UNE QUADRIQUE ;

PAR M. FRANÇOIS CHÂTELET.

Je vais développer ici quelques idées qui ne conduisent pas à des résultats nouveaux, mais me semblent intéressantes pour les méthodes utilisées.

Je considère des quadriques Q définies en coordonnées homogènes par des équations de la forme

$$\sum a_{i,j} x_i x_j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

dont les coefficients $a_{i,j}$ sont des *nombres rationnels* qu'on peut supposer entiers. J'étudie les deux problèmes arithmétiques suivants :

1. Problème des *points rationnels* : chercher les systèmes de quatre nombres rationnels x_1, x_2, x_3, x_4 qui vérifient la relation (1).

2. Problème de la *classification en genres* : chercher si deux quadriques Q et Q′ données peuvent être déduites l'une de l'autre par une transformation homographique non dégénérée de l'espace en lui-même à coefficients rationnels :

$$\frac{x'_1}{a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3 + a_1^4 x_4} = \frac{x'_2}{a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3 + a_2^4 x_4}$$
$$= \frac{x'_3}{a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + a_3^3 x_3 + a_3^4 x_4} = \frac{x'_4}{a_4^1 x_1 + a_4^2 x_2 + a_4^3 x_3 + a_4^4 x_4},$$

(tous les a_i^j rationnels, déterminant des $a_i^j \neq 0$). Ces deux problèmes peuvent s'énoncer dans le langage de la théorie arithmétique des formes quadratiques; ils ont été résolus par Minkowski ([1]), Hasse ([2]), Siegel ([3]).

Je vais les étudier ici par une méthode nouvelle qui fait appel aux propriétés géométriques classiques des quadriques. Elle les ramène aux problèmes analogues pour les coniques, considérées toutefois dans les différents corps quadratiques et non plus seulement dans le seul corps des nombres rationnels.

([1]) *Ges. Abh.*, 1, 1914, p. 219.
([2]) J. DE CRELLE, 153, 1924, p. 158.
([3]) *Amer. J. of Math.*, 63, 1941, p. 658.

1. L'une des propriétés géométriques les plus importantes des quadriques est l'existence sur une telle surface de deux systèmes de génératrices rectilignes, et l'on peut aussi se proposer de chercher les génératrices *rationnelles* de ces quadriques. J'entends par là les droites situées sur la quadrique qui peuvent être définies par des systèmes de deux équations à eoefficients tous rationnels ou dont les coordonnées pluckériennes sont rationnelles.

Il est classique de représenter une droite de l'espace ordinaire à trois dimensions E_3 par le point d'un espace E_5 à cinq dimensions, dont les coordonnées homogènes sont les coordonnées pluckériennes de cette droite. Un calcul classique montre alors que les génératrices de deux systèmes d'une quadrique Q sont représentées respectivement par les points de deux coniques γ_1 et γ_2 de cet espace E_5. Le problème des droites rationnelles sur Q est ainsi équivalent à celui des points rationnels sur les deux coniques γ_1 et γ_2.

Il est important de reconnaître si les coefficients de γ_1 et de γ_2 sont rationnels. La méthode de décomposition en carrés permet de ramener l'équation d'une quadrique Q à la forme

$$a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2+a_4x_4^2=0,$$

par un changement d'axes obliques convenables. La méthode n'introduit que des calculs rationnels sur les coefficients de Q; les nouveaux coefficients a_1, a_2, a_3, a_4 sont donc rationnels. J'introduis alors les nombres $\theta=\sqrt{-a_1a_2}$ et $\omega=\sqrt{-a_3a_4}$ qui peuvent être rationnels ou irrationnels, réels ou complexes. Les équations d'une droite D du premier système peuvent être mises sous la forme

$$a_1x_1+\theta x_2=\lambda a_1(a_3x_3+\omega x_4), \qquad -\lambda a_3(a_1x_1-\theta x_2)=a_3x_3-\omega x_4,$$

où λ est un paramètre arbitraire qui détermine la droite D. Si $x_4=0$ représente le plan de l'infini, les coordonnées pluckériennes de cette droite (définies à un facteur de proportionnalité près) sont déterminées par les relations

$$\begin{aligned}\frac{\theta(1-a_1a_3\lambda^2)}{p}&=-\frac{a_1(1+a_1a_3\lambda^2)}{q}\\&=-\frac{2a_1\theta\lambda}{r}=-\frac{a_1\omega(1-a_1a_3\lambda^2)}{a_3l}=-\frac{\omega\theta(1+a_1a_3\lambda^2)}{a_3m}=\frac{2a_1\omega\lambda}{n}.\end{aligned}$$

Ces formules constituent bien la représentation paramétrique en fonction de λ d'une conique γ_1 de l'espace E_5. Cette conique est tracée dans le plan

$$\begin{aligned}a_1\omega\theta p+a_3\theta^2 l&=0,\\ \omega\theta q-a_1a_3m&=0,\\ \omega\theta r+\theta^2 n&=0,\end{aligned}$$

et peut être définie dans ce plan par l'équation homogène

$$a_1^2p^2-\theta^2q^2+a_1a_3r^2=0.$$

Ces équations ne contiennent plus qu'un seul nombre éventuellement irrationnel : le produit $\omega\theta$, puisque $\theta^2=-a_1a_2$ est rationnel.

Le second système de génératrices peut être obtenu simplement en remplaçant dans les calculs précédents θ par $-\theta$ sans changer ω; la conique γ_2 est donc tracée dans le plan

$$\begin{aligned} -a_1\omega\theta p + a_3\theta^2 l &= 0, \\ -\omega\theta q - a_1 a_3 m &= 0, \\ -\omega\theta r + \theta^2 n &= 0, \end{aligned}$$

et peut être définie dans ce plan par l'équation homogène

$$a_1^2 p^2 - \theta^2 q^2 + a_1 a_3 r^2 = 0.$$

Ainsi, si le produit $\omega\theta$ est rationnel, c'est-à-dire si le produit $d = a_1 a_2 a_3 a_4$ est un carré parfait, les coefficients de γ_1 et de γ_2 sont tous rationnels. Dans ce cas, la recherche des droites rationnelles sur Q est équivalente au problème classique de Lagrange, Gauss et Legendre : chercher s'il existe des points rationnels sur une conique donnée (γ_1 ou γ_2) à coefficients rationnels.

Par contre, si $\omega\theta = \sqrt{d}$ est irrationnel, il ne peut exister de point rationnel sur γ_1 : En effet, un tel point serait aussi situé sur la conique « conjuguée » de γ_1, obtenue en remplaçant dans les équations de γ_1 l'irrationnelle « principale » $\omega\theta$ par $-\omega\theta$; cette conique conjuguée est γ_2. Or γ_1 et γ_2 ne peuvent avoir de point commun, puisque les deux systèmes de génératrices de Q n'ont pas d'élément commun.

Le raisonnement précédent montre encore que, d'une façon générale, si un corps algébrique contient un point de γ_1 (c'est-à-dire si les coordonnées de ce point sont des nombres de ce corps), il contient nécessairement le produit $\omega\theta = \sqrt{d}$. Le problème arithmétique, susceptible de solutions effectives, le plus simple qu'on puisse se poser au sujet des génératrices de Q est donc la recherche des génératrices de Q à coefficients dans le corps K engendré par le produit $\omega\theta = \sqrt{d}$. Ce dernier problème est équivalent à celui de la recherche des points de γ_1 (ou de γ_2) à coefficients dans le corps K (corps quadratique du corps des nombres rationnels). Les problèmes de cette espèce ont été étudiés et résolus par Hasse ([2]) qui a étendu les résultats de Lagrange, Gauss et Legendre concernant le corps des nombres rationnels. On sait donc reconnaître s'il existe des génératrices de Q dans K (c'est-à-dire à coefficients dans ce corps) et les obtenir toutes le cas échéant.

Rappelons que, s'il existe des points de K sur γ_1, on peut obtenir une représentation unicursale propre de γ_1 à coefficients dans K; on peut, par suite, former les équations des droites du premier système en fonction d'un paramètre convenable μ en n'introduisant que l'irrationnelle $\omega\theta$. Mais, s'il n'existe pas de point de K sur γ_1, il n'existe pas non plus de représentation unicursale propre de γ_1 à coefficients dans K; dans ce cas, pour représenter les génératrices du premier système en fonction d'un paramètre, il est nécessaire d'introduire, outre $\omega\theta$, une seconde irrationnelle (par exemple θ dans les équations précédemment indiquées).

Enfin remarquons que, si dans les équations du premier système précédemment indiquées on remplace θ par $-\theta$ et ω par $-\omega$, on obtient un autre ensemble d'équations représentant le même système de génératrices de Q en fonction d'un autre paramètre.

2. Abordons alors le problème des points rationnels sur une quadrique Q donnée (à coefficients rationnels). Pour utiliser les résultats du paragraphe précédent, nous déterminerons les points de Q comme intersections de génératrices de systèmes différents.

Par un point rationnel M de Q, de coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, passent une génératrice de chacun des deux systèmes. Mais ces génératrices n'ont pas en général leurs coefficients rationnels. On peut déterminer le paramètre λ de la génératrice du premier système qui passe par M par la relation

$$a_1 x_1 + \theta x_2 = \lambda a_1 (a_3 x_3 + \omega x_4),$$

ce qui introduit les irrationnelles θ et ω. On peut aussi déterminer les coordonnées pluckériennes p, q, r, l, m, n de cette droite par les relations

$$\begin{aligned} a_1\omega\theta p + a_3\theta^2 l &= 0, \\ \omega\theta q - a_1 a_3 m &= 0, \\ \omega\theta r + \theta^2 n &= 0, \\ x_4 l &= x_3 q - x_2 r, \\ x_4 m &= x_1 r - x_3 p, \\ x_4 n &= p x_2 - q x_1. \end{aligned}$$

On vérifie que ce système linéaire en p, q, r, l, m, n admet une solution et une seule si M est situé sur Q. Ces relations introduisent seulement l'irrationnelle éventuelle $\omega\theta$.

Ainsi si $\omega\theta$ est un nombre rationnel, les génératrices de Q passant par un point rationnel de cette quadrique sont rationnelles. Réciproquement, l'intersection de deux génératrices rationnelles de systèmes différents est un point rationnel. Dans ce cas, le problème de la recherche des points rationnels sur Q se ramène complètement à celui de la recherche des génératrices rationnelles de Q que nous avons traité au paragraphe précédent.

Si $\omega\theta$ n'est pas rationnel, les génératrices de Q passant par un point rationnel M ont leurs coefficients dans le corps K. De plus, on obtient la génératrice du second système passant par M en reprenant le même calcul que pour la première, à condition seulement d'y remplacer $\omega\theta$ par $-\omega\theta$. Donc les deux génératrices passant par M sont conjuguées l'une de l'autre dans le corps K. Ce qui montre en particulier que ces deux génératrices ne sont pas rationnelles, puisqu'elles sont conjuguées l'une de l'autre dans K et sont distinctes.

Réciproquement considérons l'intersection M de deux génératrices de Q à coefficients dans K et conjuguées l'une de l'autre (elles sont de systèmes différents puisque les points conjugués dans K des points de γ_1 sont situés sur γ_2). Ce point a d'abord ses coordonnées dans K, mais il est de plus conjugué de lui-même dans K, donc c'est un point rationnel.

Dans ce cas, la recherche des points rationnels sur Q se ramène à la recherche des génératrices de Q à coefficients dans K, problème que nous avons aussi traité au paragraphe précédent.

3. Envisageons alors le problème de la classification des quadriques en genres.

Si une homographie L non dégénérée transforme une quadrique Q en une quadrique Q′, elle transforme les génératrices de Q en celles de Q′ et plus précisément transforme chaque système de génératrices de Q en un système de génératrices de Q′. En se rapportant aux images des génératrices de Q et Q′, dans E_5, on peut donc déduire de L une correspondance birationnelle et biunivoque l_1 entre γ_1 et l'une des coniques γ'_1 correspondant à Q′, ainsi qu'une correspondance birationnelle et biunivoque l_2 entre γ_2 et l'autre conique γ'_2 correspondant à Q′. Or l'étude géométrique des coniques montre que toute correspondance birationnelle et biunivoque entre deux coniques est la trace sur ces coniques d'une homographie entre leurs plans. Nous désignerons encore par l_1 et l_2, deux homographies dont les traces sur γ_1 et γ_2 respectivement sont les correspondances l_1 et l_2 précédentes.

Réciproquement, une homographie l_1 entre γ_1 et γ'_1 (et entre leurs plans) et une homographie l_2 entre γ_2 et γ'_2 déterminent une correspondance birationnelle et biunivoque L entre Q et Q′ : pour construire le transformé M′ d'un point M de Q, il suffit de construire l'intersection des génératrices de Q′ transformées respectivement dans l_1 et dans l_2 des génératrices du premier et du second système de Q passant par M. L'étude géométrique des quadriques montre qu'une telle correspondance birationnelle et biunivoque L est la trace sur Q d'une homographie de l'espace.

Mais, si l'homographie L (ainsi que les quadriques Q et Q′) a ses coefficients rationnels, il n'en est pas nécessairement de même des homographies l_1 et l_2. En effet, pour obtenir un système de formules de l_1, à partir d'un système de formules de L, on peut utiliser la représentation des génératrices de Q et de Q′ au moyen d'un paramètre; ce qui fait intervenir les irrationnelles ω, θ, ω' et θ'. On peut aussi utiliser le calcul des coordonnées pluckériennes des génératrices passant par un point de Q ou de Q′; ce qui introduit seulement les irrationnelles éventuelles $\omega\theta$ et $\omega'\theta'$.

Ce dernier calcul n'introduit même qu'une des irrationnelles $\omega\theta$ ou $\omega'\theta'$. En effet, on calculera les coordonnées pluckériennes de la droite D'_1 du premier système de Q′ passant par un point M′ de Q′ en fonction des coordonnées de M′. Puis on examinera les coordonnées de M′ en fonction des coordonnées du point M de Q dont M′ est le transformé dans L. Enfin on exprimera les coordonnées de M en fonction des coordonnées pluckériennes des deux génératrices D_1 et D_2 de Q passant par M et l'on constatera que les coordonnées pluckériennes de D'_1 ne dépendent que de celles de D_1 et non de celles de D_2. L'expression des coordonnées pluckériennes de D'_1 en fonction des coordonnées de M′ nécessite bien l'introduction de l'irrationnelle éventuelle $\omega'\theta'$; mais l'expression des coordonnées de M en fonction des coordonnées pluckériennes de D_1 et de D_2 ne nécessite l'introduction d'aucune irrationnelle.

Ainsi, si l'homographie L est rationnelle, l'homographie l_1 a ses coefficients dans le corps K′ engendré par $\omega'\theta'$, et aussi dans le corps K engendré par $\omega\theta$, comme on le voit en formant un système de formules de l'inverse l_1^{-1} à partir d'un système de formules de l'inverse L^{-1}. Donc une première condition nécessaire pour qu'il existe une homographie rationnelle entre Q et Q′ (c'est-à-dire pour que Q et Q′ appartiennent au même genre) est que les corps K et K′ correspondant à ces quadriques soient identiques.

Si les quadriques Q et Q′ correspondent au corps des nombres rationnels, un couple d'homographies rationnelles l_1 et l_2 entre γ_1 et γ'_1 et entre γ_2 et γ'_2 respectivement déterminent réciproquement une homographie L entre Q et Q′ à coefficients rationnels. Donc le problème de la classification en genres des quadriques correspondant au corps des nombres rationnels se ramène à celui de la classification des coniques dans le corps des nombres rationnels. Ce dernier problème a été aussi résolu par Lagrange, Gauss et Legendre.

Si l'homographie L est rationnelle et si le corps K est un corps quadratique proprement dit, remarquons encore que, pour obtenir un système de formules de l_2, il suffit de reprendre le même calcul que pour l_1 et d'y remplacer seulement $\omega\theta$ par $-\omega\theta$, ou $\omega'\theta'$ par $-\omega'\theta'$. Donc les homographies l_1 et l_2 sont conjuguées entre elles dans le corps K.

Réciproquement, considérons l'homographie L entre Q et Q′ déterminée par un couple d'homographies l_1 et l_2 entre γ_1 et γ'_1 et entre γ_2 et γ'_2 respectivement à coefficients dans K et conjuguées entre elles dans K. Cette homographie L a certainement ses coefficients dans K et est de plus conjuguée d'elle-même dans ce corps; donc elle a ses coefficients rationnels.

Ainsi le problème de la classification en genres des quadriques correspondant à un corps quadratique K se ramène au problème de la classification des coniques dans le corps K. Ce problème a aussi été résolu par Hasse qui a étendu les résultats de Lagrange, Gauss et Legendre. En traduisant les résultats obtenus dans cette voie, on obtient sans peine tous les résultats connus concernant la classification des quadriques et leurs points rationnels.

(Manuscrit reçu le 15 novembre 1948.)