Bulletin de la S. M. F.

Laguerre

Sur certains réseaux singuliers formés par des courbes planes

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 129-136

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__129_1>

Sur certains réseaux singuliers formés par des courbes planes;
par M. Laguerre.

(Séance du 16 avril 1873.)

1. Dans tout ce qui suit, je considérerai z, ζ et les quantités analogues comme des quantités égales à l'unité et introduites seulement pour rendre les formules homogènes.

Cela posé, A, B et C désignant trois polynômes du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport à x et y et liés par la relation

$$(1) \qquad Ax + By + Cz = 0,$$

on voit qu'en faisant varier ξ et η, l'équation

$$(2) \qquad A\xi + B\eta + C\zeta = 0$$

représente une infinité de courbes du $n^{\text{ième}}$ degré. Ces courbes forment un réseau, et l'on pourra généralement, par deux points, pris arbitrairement dans le plan, faire passer une courbe appartenant à ce réseau.

Une telle courbe est déterminée par les valeurs particulières que l'on donne à ξ, η, ζ; il est clair d'ailleurs, en vertu de l'équation (1), que le point M, dont les coordonnées sont ξ, η, ζ, appartient à cette courbe; je dirai que le point M est son point principal.

Une courbe du réseau singulier (2) est évidemment déterminée par son point principal.

2. Toutes les courbes du réseau ont en commun tous les points communs aux courbes $A = 0$, $B = 0$ et $C = 0$.

Pour déterminer le nombre de ces points, je remarque que, si l'on désigne respectivement par P et par Q l'ensemble des termes du degré n, par rapport à x et y, dans A et B, on a identiquement, en vertu de la relation (1),

$$Px + Qy = 0.$$

On a donc, U désignant un polynôme homogène et du degré $(n-1)$ par rapport à x et y

$$(3) \qquad P = Uy \quad \text{et} \quad Q = -Ux.$$

Cela posé, les courbes $A = 0$ et $B = 0$ se coupent en n^2 points qui, en vertu de (1), se trouvent sur la courbe $Cz = 0$; des relations (3) il résulte, d'ailleurs, que $(n-1)$ de ces points d'intersection se trouvent sur la droite de l'infini $z = 0$; les $(n^2 - n + 1)$ autres points d'intersection se trouvent donc à la fois sur les trois courbes $A = 0$, $B = 0$ et $C = 0$.

D'où la conclusion suivante :

Toutes les courbes du réseau passent par $(n^2 - n + 1)$ points fixes.

Je dirai que ces points sont les pivots du réseau.

3. En vertu des équations (1) et (2), on voit que l'équation d'une quelconque des courbes du réseau peut se mettre sous la forme

$$A(x-\xi)+B(y-\eta)=0,$$

ξ et η étant les coordonnées de son point principal.

Soit

$$A(x-\xi')+B(y-\eta')=0$$

une autre courbe du réseau ayant pour point principal (ξ', η'); si A et B ne sont pas nuls en même temps, pour tout point commun aux deux courbes, on aura

$$\frac{y-\eta}{x-\xi}=\frac{y-\eta'}{x-\xi'}.$$

D'où la proposition suivante :

Indépendamment des (n^2-n+1) points qui leur sont communs, deux courbes quelconques du réseau se coupent en $(n-1)$ autres points qui sont situés sur une même droite. Le $n^{\text{ième}}$ point où cette droite rencontre l'une quelconque des courbes est le point principal de cette courbe.

4. De là se déduisent immédiatement quelques corollaires dont la démonstration est immédiate et qu'il suffit d'énoncer :

1° *Si deux courbes du réseau se coupent en $(n-1)$ points distincts des pivots, on peut par ces $(n-1)$ points faire passer une infinité de courbes du réseau; les points principaux de ces courbes sont situés sur la droite contenant les $(n-1)$ points d'intersection.*

2° *Étant donnée une courbe quelconque du réseau ayant pour point principal le point* M *et étant pris arbitrairement dans le plan le point* P, *si l'on mène* PM, *cette droite rencontre la courbe en $(n-1)$ points distincts du point* M; *ces $(n-1)$ points et le point* P *sont situés sur une courbe du réseau ayant pour point principal le point* P.

5. Les résultats qui précèdent peuvent encore s'énoncer ainsi : Étant donnée une droite dans le plan, les courbes du réseau, qui

ont pour points principaux les différents points de la droite, ont en commun $(n-1)$ points situés sur cette droite; je les appellerai, pour abréger, les points centraux de la droite.

Cela posé, on peut énoncer la proposition suivante :

Si une droite tourne autour d'un point fixe, le lieu de ses points centraux est la courbe du réseau ayant ce point fixe pour point principal.

6. Étant pris un point quelconque M dans le plan, imaginons la courbe du faisceau ayant pour point principal le point M et menons par ce point les tangentes à la courbe dont le point de contact est distinct de M.

Je dis que ces droites sont tangentes à une même courbe K. En effet, MA étant l'une de ces tangentes et A le point où elle touche la courbe, si l'on désigne par M_1 un point quelconque de la droite MA : la courbe du réseau ayant M_1 pour point principal passe par les $(n-1)$ points distincts de M où la première courbe coupe MA : elle rencontre donc MA en deux points confondus en A, et lui est tangente en ce point. Les deux faisceaux de droite émanant du point M et du point M_1 ont donc la droite MA en commun et la proposition est démontrée.

On peut, d'ailleurs, du point M, mener à la courbe du réseau qui a M pour point principal (n^2-n-2) tangentes ayant un point de contact distinct de M.

D'où le théorème suivant :

Si, de chaque point M *du plan, on mène à la courbe du réseau ayant ce point pour point principal les tangentes dont le point de contact est distinct de* M, *toutes ces droites enveloppent une même courbe* K, *qui est de la classe* (n^2-n-2).

7. Supposons le point M choisi de telle sorte que la courbe du réseau, qui a M pour point principal, possède un point double : deux des tangentes issues du point M coïncideront, d'où il suit que le point M est situé sur K.

D'où cette conclusion :

La courbe K *est le lieu des points principaux des courbes du réseau qui possèdent un point double.*

Si la courbe du réseau ayant (ξ, η) pour point principal a un point double, on a simultanément les trois équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \xi \dfrac{dA}{dx} + \eta \dfrac{dB}{dx} + \zeta \dfrac{dC}{dx} = 0, \\ \xi \dfrac{dA}{dy} + \eta \dfrac{dB}{dy} + \zeta \dfrac{dC}{dy} = 0, \\ \xi \dfrac{dA}{dz} + \eta \dfrac{dB}{dz} + \zeta \dfrac{dC}{dz} = 0; \end{array}\right.$$

et l'équation de la courbe K s'obtiendra en éliminant x, y et z entre ces trois relations.

D'où il suit que :

La courbe K *est du degré* $3(n-1)$.

8. Des considérations qui précèdent résulte encore la proposition suivante :

Si, de chaque point M *du plan, on mène à la courbe du réseau dont ce point est le point principal les tangentes dont le point de contact est distinct de* M, *les points de contact de toutes ces tangentes sont situées sur une même courbe* H, *qui est aussi le lieu des points doubles des courbes du réseau.*

Il est facile de démontrer analytiquement l'identité de ces deux lieux.

Il est clair, en effet, que l'équation du lieu des points doubles du réseau s'obtient en éliminant ξ, η, ζ entre les équations (4); cette équation est donc

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dA}{dx} & \dfrac{dB}{dx} & \dfrac{dC}{dx} \\ \dfrac{dA}{dy} & \dfrac{dB}{dy} & \dfrac{dC}{dy} \\ \dfrac{dA}{dz} & \dfrac{dB}{dz} & \dfrac{dC}{dz} \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dA}{dx} & \dfrac{dB}{dx} & \dfrac{dC}{dx} \\ \dfrac{dA}{dy} & \dfrac{dB}{dy} & \dfrac{dC}{dy} \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore, puisque l'on a identiquement $C = -Ax - By$,

$$\begin{vmatrix} \frac{dA}{dx} & \frac{dB}{dx} & -A \\ \frac{dA}{dy} & \frac{dB}{dy} & -B \\ A & B & 0 \end{vmatrix} = A^2 \frac{dB}{dy} - AB\left(\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy}\right) + B^2 \frac{dA}{dx} = 0.$$

D'autre part, soit

$$(5) \qquad A(x-\xi) + B(y-\eta) = 0$$

l'équation de la courbe du réseau ayant pour point principal le point (ξ, η); l'équation de la tangente au point (x, y) de cette courbe est

$$\begin{aligned}(X-x)&\left[A + \frac{dA}{dx}(x-\xi) + \frac{dB}{dx}(y-\eta)\right] \\ &+ (Y-y)\left[B + \frac{dA}{dy}(x-\xi) + \frac{dB}{dy}(y-\eta)\right] = 0;\end{aligned}$$

en exprimant que cette tangente passe par le point (ξ, η), on aura la relation

$$\begin{aligned}(\xi - x)A + (\eta - y)B &- \frac{dA}{dx}(x-\xi)^2 \\ -\left(\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy}\right)&(x-\xi)(y-\eta) - \frac{dB}{dy}(y-\eta)^2 = 0.\end{aligned}$$

Éliminant $(\xi - x)$ et $(\eta - y)$ entre cette relation et la relation (5), il vient

$$A^2 \frac{dB}{dy} - AB\left(\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy}\right) + B^2 \frac{dA}{dx} = 0,$$

ce qui est bien l'équation que nous avions trouvée pour le lieu des points doubles du réseau.

La proposition que j'avais énoncée est donc vérifiée, et l'on voit en outre que la courbe H est du degré $3(n-1)$.

9. Soient deux courbes de degré n; supposons que $(n-1)$ de leurs n^2 points d'intersection soient situés sur une même ligne droite, je dis que leurs $(n^2 - n + 1)$ autres points d'intersection sont les pivots d'un réseau singulier de l'espèce de ceux que je viens d'examiner.

En effet, la propriété dont je parle étant projective, on peut supposer que la droite qui renferme $(n-1)$ des points d'intersection est la droite de l'infini et, en choisissant convenablement les axes, on voit que les équations des deux courbes peuvent se mettre respectivement sous la forme

$$Py + Q = 0 \quad \text{et} \quad Px - Q' = 0$$

Q et Q′ désignant des polynômes du $(n-1)$ degré en x et y, et P un polynôme homogène et du même degré par rapport à ces variables. De là résulte immédiatement que l'équation

$$\xi(Q + Py) + \eta(Q' - Px) - \zeta(Qx + Q'y) = 0$$

est celle d'un réseau singulier ayant pour pivots les $(n^2 - n + 1)$ points d'intersection des deux courbes données qui ne sont pas situés à l'infini.

10. De là résulte encore que les courbes du troisième degré : passant par sept points fixes forment un réseau singulier du troisième ordre.

La courbe K est alors de la quatrième classe et du sixième degré : c'est donc la courbe la plus générale de la quatrième classe. Je ne m'étendrai pas à ce sujet; c'est, en effet, des propriétés de ce réseau particulier que M. Aronhold a déduit la solution du problème suivant : *Construire la courbe de quatrième classe ayant sept points doubles donnés* (ou, pour parler plus exactement, du problème corrélatif, *construire la courbe du quatrième degré ayant pour tangentes doubles sept droites données*). Je renverrai à cet égard au Mémoire de l'illustre géomètre [1].

11. On sait que, généralement, les courbes du quatrième ordre, qui passent par treize points fixes, ont également en commun trois autres points parfaitement déterminés et forment un faisceau [2].

On voit, néanmoins, par ce qui précède, que si deux courbes du

---

(1) ARONHOLD, *Ueber den gegenseitigen Zusammenhang der 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Curve 4ten Grades.* (*Monatsbericht der K. P. A. zu Berlin*, 1864, p. 499).

(2) SALMON, *Higher plane curves*, 2e édition, p. 16.

quatrième ordre, passant par treize points donnés, se coupent en trois autres points situés en ligne droite, les courbes qui passent par ces treize points forment un faisceau; en d'autres termes, on peut toujours faire passer une de ces courbes par ces points et deux points pris arbitrairement dans le plan.

On peut, en outre, énoncer la proposition suivante :

Si, des seize points d'intersection de deux courbes du quatrième ordre, trois sont situés en ligne droite, deux courbes quelconques du même ordre passant par les treize autres points d'intersection se rencontrent en trois autres points qui sont également en ligne droite.