JACQUES DENY

Sur l’approximation des fonctions harmoniques

Bulletin de la S. M. F., tome 73 (1945), p. 71-73
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1945__73__71_0>

SUR L'APPROXIMATION DES FONCTIONS HARMONIQUES;

PAR M. JACQUES DENY.

Le but de cette Note est de montrer comment quelques résultats très simples relatifs à l'extrémisation des masses permettent de retrouver les théorèmes [1] de M. Brelot sur l'approximation des fonctions harmoniques continues.

Rappelons [2] que si λ est une distribution positive portée par un compact E de l'espace euclidien considéré R_τ [3] à τ dimensions ($\tau \geqq 2$), il existe sur E une distribution positive λ' et une seule (dite *extrémisée* de λ) qui conserve le potentiel sur CE et qui le rende minimum sur E. La masse totale est la même. λ' est portée par la frontière $\overset{*}{E}$ de E. Un point M de E est stable si $U^{\lambda'}(M) = U^{\lambda}(M)$ [4] pour toute λ positive, instable dans le cas contraire; tout point intérieur de E est donc instable.

De ces quelques résultats, on déduit immédiatement le

LEMME I. — *Pour que la frontière* $\overset{*}{E}$ *de* E *ne soit le support d'aucune distribution* (*de signe quelconque*) *dont le potentiel soit identiquement nul sur* CE, *il faut et il suffit que* E *n'ait aucun point-frontière instable.*

---

(1) Théorèmes I et II de l'article précédent.

(2) *Cf.* le Mémoire de M. Brelot noté IV dans l'article précédent.

(3) On pourrait développer la théorie de l'extrémisation pour les compacts de l'espace $\overline{R_\tau}$, introduit par M. Brelot; cela nécessite une étude précise de la stabilité du point à l'infini. [*Cf.* M. BRELOT, *Minorantes sous-harmoniques, extrémales et capacités* (*Journal de Math.*, 1944)]. Notons encore que l'extrémisation pour un compact de R_τ n'est autre qu'un balayage sur l'*ouvert* CE (notion introduite par H. Cartan dans un travail inédit); ce point de vue permet d'étendre l'opération aux ensembles fermés non bornés.

(4) $U^{\lambda}(M)$ désigne la valeur en M du potentiel $\left(\text{logarithmique ou en } \frac{1}{r^{n-2}}\right)$ engendré par la distribution λ.

Nous appellerons *fonctions harmoniques élémentaires relatives au point* A les fonctions

$$\Phi_n^{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{H}_n(\mathrm{M})}{r^{2n+\tau-2}} \cdot \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

où $r = \overline{\mathrm{AM}}$ et $\mathrm{H}_n =$ polynome harmonique de degré n [1]. Pour $\tau = 2$, on pose $\Phi_0^{\mathrm{A}} = \log\frac{1}{r}\cdot$ Si A est à l'infini, on prend $\Phi_n^{\mathrm{A}} = \mathrm{H}_n$. Notons que lorsque le nombre de dimensions τ est pair, ces fonctions sont des fractions rationnelles des coordonnées de M (à l'exception du terme logarithmique dans le cas $\tau = 2$).

Soit maintenant E un compact de R_τ. Son complémentaire CE est constitué par un nombre fini ou dénombrable de domaines D_0 (non borné), D_1, D_2, ... Choisissons *arbitrairement* un point A_p dans chaque D_p.

Lemme II. — *Pour que le potentiel* U^λ *engendré par une distribution* λ *portée par* E *soit identiquement nul dans* D_p, *il faut et il suffit que les quantités* $\int \Phi_n^{\mathrm{A}_p}(\mathrm{M})\, d\lambda(\mathrm{M})$ *soient toutes nulles.*

On s'en assure aussitôt en développant $\mathrm{U}^\lambda(\mathrm{P})$ en série entière de $\overline{\mathrm{A}_p\mathrm{P}}$ autour du point A_p.

Théorème. — *Pour que toute fonction* F *continue sur* E, *harmonique en tout point intérieur de* E (*s'il en existe*), *puisse être approchée uniformément par des combinaisons linéaires finies des fonctions harmoniques élémentaires* $\Phi_n^{\mathrm{A}_p}$, *il faut et il suffit que* E *n'ait aucun point-frontière instable.*

Démonstration. — La condition nécessaire et suffisante pour que toutes les F puissent être ainsi approchées, est que les valeurs que prennent sur $\overset{*}{\mathrm{E}}$ les $\Phi_n^{\mathrm{A}_p}$ forment un ensemble *total* dans

---

[1] On sait que si l'on pose $\mathrm{H}_n = r^n \mathrm{Y}_n$, on peut exprimer linéairement Y_n à l'aide des fonctions hypersphériques fondamentales d'ordre n. Ainsi, pour $\tau = 2$, on peut prendre pour les Φ_n^{A}

$$\log\frac{1}{r}, \quad \frac{\cos\theta}{r}, \quad \frac{\sin\theta}{r}, \quad \ldots, \quad \frac{\cos n\theta}{r}, \quad \frac{\sin n\theta}{r}, \quad \ldots.$$

l'espace des fonctions continues sur $\overset{*}{E}$, donc, d'après un théorème bien connu de S. Banach, qu'il n'existe aucune distribution λ portée par $\overset{*}{E}$ telle que $\int \Phi_n^{A_p}\, d\lambda = 0$ pour tous les n et p, c'est-à-dire telle que U^λ soit nul sur chacun des D_p (lemme II), donc hors de E. Or le lemme I montre que pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que E n'admette aucun point-frontière instable.

On reconnaît les résultats de M. Brelot, du moins dans le cas de R_τ (1); on obtient même une sorte de développement en série de Laurent pour F; les fonctions harmoniques qui réalisent l'approximation *n'ont que des singularités ponctuelles, non essentielles et en nombre fini.*

Lorsque $CE = D_0$ et que A_0 est le point à l'infini, on obtient le théorème de M. Keldych et M. Lavrentieff sur l'approximation uniforme à l'aide des polynomes harmoniques.

Lorsque $\tau = 2$ et que CE est constitué par un nombre fini de domaines, E n'a pas de point-frontière instable; d'où la possibilité de développer toutes les F en série uniformément convergente de fractions rationnelles harmoniques et de termes en $\log \frac{1}{r_p}$. Cet énoncé est dû à J. L. Walsh (2).

(Manuscrit reçu le 10 juillet 1945).

---

(1) On pourrait adapter le raisonnement précédent à l'espace $\overline{R_\tau}$ en utilisant les résultats du Mémoire cité de M. Brelot.

(2) J. L. Walsh, *The approximation of the harmonic functions by harmonic polynomials and by harmonic rational functions* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 35, 1929, p. 197-209).