BULLETIN DE LA S. M. F.

M. BRELOT

# Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 73 (1945), p. 55-70
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1945__73__55_0>

# SUR L'APPROXIMATION ET LA CONVERGENCE DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS HARMONIQUES OU HOLOMORPHES;

Par M. Brelot.

## I. — INTRODUCTION.

1. La représentation conforme, si souvent utilisée en théorie des fonctions harmoniques ou de variable complexe, et qui tourne les difficultés plutôt qu'elle ne les éclaire, impose inutilement des restrictions comme la connexion simple et dissimule les extensions à l'espace. On peut apprécier son caractère d'outil provisoire en parcourant par exemple un fascicule de Lavrentieff [1]. Or, sans avoir encore une connaissance assez approfondie de la mesure harmonique et de l'extension à un domaine quelconque de l'intégrale de Poisson-Stieltjes, on peut déjà en procédant directement renouveler un peu la théorie des fonctions holomorphes par les progrès récents de la théorie des fonctions harmoniques et je vais ici en quelques remarques simples prolonger dans ce sens deux articles [2] sur ce sujet, en séparant ce qui tient à l'harmonicité seule.

Nous reprendrons d'abord la question de l'approximation par des fonctions harmoniques ou polynomes harmoniques. Un théorème

---

(1) *Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynomes* (*Actualités scient. et ind.*, n° 441, 1936).

(2) *Quelques applications aux fonctions holomorphes de la théorie moderne du potentiel et du problème de Dirichlet* (*Bull. Ac. Royale des Sc. de Liége*, 1939, p. 385) (noté I).

*Sur l'allure à la frontière des fonctions harmoniques, sous-harmoniques ou holomorphes* (*ibid.*, 1939, p. 468) (II).

Sur ce sujet signalons, outre l'ouvrage de Nevanlinna (*Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin, 1936) une série de travaux de Privaloff (*C. R. Ac. Sc. de l'U. R. S. S.* et *Recueil math. de Moscou*, vers 1938) et de Monna (*Acad. Royale de Hollande*, 1940).

central de Walsh [3] est que, *dans le plan*, une fonction finie continue sur la frontière bornée d'un domaine infini D, peut être approchée à $\varepsilon$ près par un polynome harmonique. La démonstration est une adaptation de celle de Lebesgue dans sa résolution du problème *plan* de Dirichlet. Lavrentieff retrouva le résultat sous forme voisine en utilisant la représentation conforme [4]. On fit des extensions à l'espace moyennant des restrictions comme celle que le complémentaire du domaine soit de mesure nulle [5]. Puis Keldych et Lavrentieff reconnurent, dans de courtes Notes sans démonstrations [6], le lien étroit de cette question avec celle d'un problème de Dirichlet « par l'extérieur » qu'ils traitaient en même temps et donnaient certains critères d'approximation nécessaires et suffisants. Quels qu'aient été les développements qui ont dû suivre et que j'ignore, il paraît utile de reprendre la question en profitant de l'étude plus générale ultérieure du problème de Dirichlet pour ensembles compacts [7] (bornés fermés) dont nous rappellerons les notions utiles ici. Nous allons ainsi pouvoir très brièvement approfondir dans l'espace à $\tau \geqq 2$ dim l'approximation sur un compact d'une fonction finie continue par des fonctions harmoniques [8] et donner des critères définitifs qui doivent être voisins de ceux de Keldych-Lavrentieff.

Ainsi dans l'énoncé de Walsh repris pour $\tau \geqq 2$ dim, la condi-

---

(3) WALSH, *Über die Entwicklung einer harmonischen Funktion nach harmonischen Polynomen* (*Journal de Crelle*, t. 159, 1928).

(4) Voir Lavrentieff, *loc. cit.*, théor. 18.

(5) KELDYCH et LAVRENTIEFF, *Sur les suites de polynomes harmoniques* (*C. R. Acad. Sc.*, 202, 1936, p. 1149).

(6) KELDYCH et LAVRENTIEFF, *Sur le problème de Dirichlet* (*C. R. Acad. Sc.*, 204, 1937, p. 1788). KELDYCH, *Sur la résolubilité et la stabilité du problème de Dirichlet* (*C. R. Ac. Sc. U. R. S. S.* t. XVIII, 1938, n° 6).

(7) *Voir* essentiellement : *Problème de Dirichlet et majorantes harmoniques* (*Bull. Sc. math.*, mars-avril 1939, noté III).

*Critères de régularité et de stabilité* (*Bull. Acad. Royale Belg.*, XXV, 1939, p. 125, noté IV).

On pourrait au fond ne pas expliciter ce problème et se servir de « l'extrémisation » générale, extension du balayage développée dans l'article : *Minorantes sous-harmoniques, extrémales et capacités* [*Journ. de Math.*, 1944 (noté V)].

(8) Cette question a été dans le plan, étudiée aussi par M. Inoue à qui j'ai d'ailleurs communiqué dès 1940-41 à peu près les développements du présent article (§ III). *Voir* les tentatives de M. Inoue dans ses articles des *Proceedings of the Imp. Ak.*, Tokyo, t. XV, 1939.

tion à ajouter (nécessaire et suffisante pour l'approximation de toute fonction finie continue) est que le domaine ne soit effilé (9) en aucun point-frontière. Or cela a lieu dans le plan à cause d'une propriété spécialement plane des ensembles effilés sur laquelle je me suis déjà étendu (10); et en général c'est vrai même pour un ouvert, si le complémentaire est de mesure nulle (11), ce qui « explique » les résultats partiels antérieurs.

Puis on examinera les théorèmes sur les suites bornées de fonctions holomorphes ou harmoniques qui concluent à une convergence ou une unicité de limite sur un ouvert ou fermé moyennant la même propriété sur la frontière ou une partie de la frontière (Montel, Hartogs, Lavrentieff). Ils comportent des restrictions dont nous verrons l'inutilité (connexion simple, domaine de Jordan, partie rectifiable de la frontière quand il suffit qu'elle soit de mesure harmonique $> 0 \ldots$). Ces résultats dérivent *de manière très banale* de la représentation intégrale des solutions du problème de Dirichlet [pour ouverts (12) ou compacts] qui généralise l'intégrale de Poisson et évite de s'y ramener par représentation conforme. Ceux qui demandent essentiellement l'holomorphie de $f(z)$ s'obtiennent en considérant $\log|f(z)|$ qui est sousharmonique ou vaut $-\infty$.

Comme j'ai examiné ailleurs (13) en détail l'extension de la théorie des fonctions harmoniques à l'espace (à $\tau$ dim) rendu *compact* selon $\overline{R}_\tau$ par l'adjonction d'un point $\mathcal{R}_\tau$ à l'infini, je me placerai directement dans $\overline{R}_\tau$, les raisonnements étant les mêmes

---

(9) On dit qu'un ensemble quelconque E est effilé au point P si P n'est pas adhérent à $E \cap \complement P$ ou s'il existe au voisinage de P, $u$ sous-harmonique telle que $\limsup_{M \in E,\, M \neq P,\, M \to P} u < u(P)$, (ce qu'on étend à l'espace $\overline{R}_\tau$ introduit plus loin, avec la restriction si $\tau > 2$ et P à l'infini, que E ne contienne pas ce point).

Voir : *Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel* (*Journ. de Math.*, t. XIX, 1940, p. 319) (VI).

(10) *Voir* dans (VI) le théorème D : dans le plan, si un ensemble E est effilé au point O, il existe des circonférences arbitrairement petites de centre O, ne rencontrant pas E.

(11) *Voir* IV à la fin.

(12) On supposera connu l'essentiel de l'article : *Familles de Perron et problème de Dirichlet* [*Acta Szeged.*, IX, 1939 (VII)].

(13) *Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques* [*Ann. Éc. Norm. sup.*, t. 61, 1944, p. 301 (VIII)].

que dans une partie bornée de l'espace ordinaire $R_\tau$. Ainsi au lieu de fonctions harmoniques dans $R_\tau$ qu'approchent les polynomes harmoniques, s'introduisent les fonctions harmoniques dans $\overline{R}_\tau$ hors d'un point Q distinct ou non de $\mathcal{R}_\tau$.

## II. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LE PROBLÈME DE DIRICHLET POUR COMPACTS.

**2.** Soit dans $\overline{R}_\tau$ un compact (ou fermé) $E \neq \overline{R}_\tau$ et sur la frontière $\overset{\star}{E}$ une fonction réelle $f$ finie ou non. Par analogie avec le problème de Dirichlet pour ouverts sous sa forme générale, considérons sur les ouverts contenant E la famille $\mathcal{F}_1$ des fonctions $u$ telles que, en tout point P de $\overset{\star}{E}$,

$$\limsup_{M \in CE,\ M \to P} u \leqq f(P) \tag{1}$$

et qui soient dans chaque domaine composant sousharmoniques ou $-\infty$.

On notera $\underline{K}_f^E(M)$ leur enveloppe supérieure, d'ailleurs harmonique ou égale à $\pm\infty$ sur chaque domaine composant de l'intérieur de E.

On introduira par symétrie évidente (changement de sousharmonique en surharmonique, lim sup en lim inf, $\leqq$ en $\geqq$ ...) une famille $\mathcal{F}_2$ avec enveloppe inférieure $\overline{K}_f^E(M)$ égale à $-\underline{K}_{(-f)}^E$.

On comparera les deux enveloppes en comparant deux fonctions des deux familles et l'on trouve

$$\underline{K}_f \leqq \overline{K}_f; \tag{2}$$

et l'on obtiendra aussitôt une série de propriétés de ces fonctionnelles analogues aux $\underline{H}_f$, $\overline{H}_f$ du problème pour ouverts.

Si en $M_0$ on a pour certains $f$

$$\underline{K}_f = \overline{K}_f,$$

cette valeur commune notée $K_f$ est une fonctionnelle linéaire croissante ($f$ bornée ou $\geqq 0$). Si l'égalité a lieu pour $f_n$ tendant uniformément vers $f$ bornée, elle aura lieu pour $f$, et

$$K_{f_n}(M_0) \to K_f(M_0).$$

Cela permet de voir l'égalité *partout* sur E pour une donnée $\varphi$ finie continue sur $\overset{\star}{E}$; en effet :

$\alpha$. On peut approcher $\varphi$ à $\varepsilon$ près par la différence de deux fonctions sousharmoniques (finies continues) dans un ouvert contenant E ([14]);

$\beta$. Si $f$ est *sous-harmonique* (d'ailleurs non nécessairement continue) dans un ouvert contenant E, $\underline{K}_f = \overline{K}_f$ partout sur E.

Considérons en effet une suite décroissante $\omega_n$ d'ouverts tendant vers E ou mieux l'ordonné filtrant des ouverts $\omega_i$ contenant E. $H_f^{\omega_i}$ prolongée par $f$, modifiée convenablement aux points-frontière irréguliers de $\omega_i$ devient sousharmonique ([15]) et par suite décroît; donc elle tend vers une frontière sousharmonique égale à $f$ hors E; cette limite appartenant à $\mathcal{F}_1$ minore $\underline{K}_f$. D'autre part, $H_f^{\omega_i}$ appartient à $\mathcal{F}_2$ donc majore $K_f$, et aussi sa limite.

Outre le résultat cherché, on relèvera que (pour $f$ sousharmonique) :

$\gamma$. $K_f$ s'obtient comme limite de $H_f^{\omega_i}$ par décroissance;

$\delta$. $K_f$ est la fonction maxima sur E dont le prolongement par $f$ est sousharmonique.

3. Ainsi pour $f$ finie continue sur $\overset{\star}{E}$, $K_f$ existe et est une fonctionnelle qui se représente par une intégrale de Radon :

$$(3) \qquad K_f(M) = \int_{\overset{\star}{E}} f\, d\nu_M \qquad (M \in E).$$

Cela s'étend, avec cette même représentation intégrale, à $f$ prolongeable sousharmoniquement au voisinage de E, comme on le voit

---

([14]) *Voir* VIII, n° 12.

([15]) Cela résulte des propriétés de l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions sousharmoniques, mais peut se voir aussi plus « élémentairement » comme dans le lemme 3 de l'article *Sur la théorie autonome des fonctions sous-harmoniques* [*Bull. Sc. math.*, 1940 (noté IX)].

par une suite de fonctions sousharmoniques continues tendant en décroissant vers $f$; mais contrairement à ce qui a lieu dans le problème pour ouverts, si $f$ est sommable — $\mu_{M_0}$ (et même semi-continue) ([16]), il n'y a pas généralement de $K_f$.

Approfondissons l'étude de la « solution » $K_f$ pour $f$ finie continue :

A. *Si l'on prolonge continûment $f$ en $\Phi$ (bornée) et qu'on reprenne l'ordonné filtrant des $\omega_i$ contenant* E, $H_\Phi^{\omega_i}$ *tend sur* E *vers* $K_f$ (d'après $\alpha$ et $\gamma$).

B. Définissons comme « stables » les points M de E tels que $K_f(M) = f(M)$ *quelle que soit $f$* (finie continue).

*Pour que* $M_0$ *soit stable, il faut et il suffit que* CE *soit non effilé en* $M_0$.

D'après notre définition de $K_f$, la condition est suffisante.

Inversement si CE est effilé en $M_0$, on formera $u$ sousharmonique dans un ouvert contenant E avec $\limsup\limits_{M \in CE,\, M \to M_0} u < u(M_0)$ ([17]), puis une fonction $\varphi$ finie continue sur E telle que

$$\varphi(P) \geqq \limsup_{M \in CE,\, M \to P} u \qquad (P \in \overset{\star}{E})$$
$$\varphi(M_0) < u(M_0).$$

On voit alors que

$$K_\varphi(M_0) \geqq u(M_0) > \varphi(M_0).$$

4. Tout en renvoyant à (V) et (III) soulignons *quelques* propriétés des points stables ou instables :

*a*. L'ensemble des points instables est réunion dénombrable de compacts.

*b*. Si $\omega$, de complémentaire non polaire, contient E, l'ensemble des points-frontière instables de E est négligeable pour $\omega - E$

---

([16]) Il suffit de prendre $f =$ const. K sauf en un point, sur une circonférence et de prendre pour E l'intérieur et sa frontière.

([17]) On l'obtient à partir de la fonction locale de la définition par prolongement avec modification convenable hors d'un voisinage de $M_0$, ou encore avec la représentation potentielle selon (VIII).

(c'est-à-dire de mesure harmonique nulle pour chaque domaine composant [18]).

*c.* La distribution de masse $\mu_M$, de total 1, ne charge que l'ensemble des points stables (d'ailleurs partout dense sur E) et se réduit à la masse unité en M, si et seulement si M de E est un point stable [19].

*d.* Dans $\overline{R_2}$, si CE est formé d'un nombre fini de domaines, tout point frontière de E est stable [20].

Supposons dans $\overline{R_\tau}$, E d'intérieur vide. Alors

1° Si P est instable, tout voisinage ouvert $\omega$ assez petit a une frontière passant par un point instable [21].

2° L'ensemble des points instables est vide ou de mesure (de Lebesgue) non nulle [22].

---

[18] Proposition au fond de De La Vallée Poussin, qu'on peut établir dans nos hypothèses générales en utilisant le résultat connu dans $R_\tau$ et étudiant le rôle de $R_\tau$. Mieux vaut adapter comme suit la démonstration donnée en note dans (II) p. 473. Utilisons (V) et (VIII) et partons de $v$ sousharmonique finie continue dans $\omega$, telle que l'extrémale V pour E diffère de $v$ sur $\overset{\star}{E}$ aux points instables. Soit $\omega_1$ ouvert tel que $\omega \supset \bar{\omega}_1 \supset \omega_1 \supset E$; alors $H_v^{\omega_1 - E} = H_V^{\omega_1 - E}$ d'où la nullité de la mesure harmonique relative à $\omega_1 - E$ puis à $\omega - E$.

[19] *Voir* IV et V. Ce rôle des points stables suggère de remplacer dans la définition de $K_f$ la condition (1) par sa restriction aux seuls points stables, ce qui revient à la condition $u(P) \leqq f(P)$ aux points stables. On peut démontrer grâce à (*b*) que l'inégalité (2) subsiste; les anciens $\underline{K}_f$, $\overline{K}_f$ encadrent les nouveaux, mais la représentation intégrale du nouveau $\underline{K}_f$ ne s'étend toujours pas aux fonctions semi-continues.

[20] Cela résulte de la propriété citée note [10]. Le cas du point à l'infini s'examine par inversion.

[21] Sinon, considérons une fonction sousharmonique $u$ caractérisant l'effilement; ses lim sup dans $\omega$ à la frontière de $\omega$ seraient plus petites que sa valeur en P.

[22] *Voir* IV pour le cas de E borné. En utilisant ce résultat et celui qui précède, on traite le cas général en remarquant que $\mathcal{R}_\tau$ ne peut être isolé sur l'ensemble des points instables.

## III. — APPROXIMATION PAR FONCTIONS HARMONIQUES ([22 bis]).

5. Nous nous plaçons donc dans $\overline{R}_\tau (\tau \geqq 2)$ où nous considérons dans ce chapitre un compact (ou fermé) $E \neq \overline{R}_\tau$ de frontière $\overset{\star}{E}$.

Lemme 1. — *Si* $\Phi$ *est continue bornée au voisinage de* E *et si tous les points-frontière de* E *sont stables,* $H_\Phi^\omega$ *converge sur* $\overset{\star}{E}$ *uniformément vers* $\Phi$ *quand* $\omega$ *ouvert varie dans une suite décroissante de limite* E (*ou dans l'ordonné filtrant des ouverts contenant* E).

Cela résulte de ($\alpha$) et de ce que, si $\Phi$ est sousharmonique, il y a décroissance sur le compact $\overset{\star}{E}$ de $H_\Phi^\omega$ continue vers $\Phi$ continue, d'où l'uniformité de convergence.

Théorème 1. — *Pour que toute fonction finie continue sur* $\overset{\star}{E}$ *puisse être approchée à* $\varepsilon$ *près par une fonction harmonique dans un ouvert contenant* E, *il faut et il suffit que tous les points-frontière de* E *soient stables, c'est-à-dire que* CE *soit non effilé en tout point de* $\overset{\star}{E}$.

La condition est suffisante d'après le théorème précédent.

Elle est nécessaire car si $h$ harmonique approche $f$ à $\varepsilon$ près sur E, $h-\varepsilon$ et $h+\varepsilon$ l'encadrent et encadrent donc $K_f$ sur E. D'où $K_f = f$ sur $\overset{\star}{E}$ quelle que soit $f$.

Corollaire. — *Supposons que* E *n'admette pas de points instables. Pour qu'une fonction* $\varphi$ *sur* E *puisse être approchée à* $\varepsilon$ *près par une fonction harmonique dans un ouvert contenant* E, *il faut et suffit que* $\varphi$ *soit finie continue sur* E *et harmonique à l'intérieur.*

---

([22 bis]) Pendant la composition typographique de cet article, M. J. Deny faisait *indépendamment* la même étude dans $R_\tau$, en évitant très heureusement l'application répétée du procédé « de déplacement du pôle » et les lourdeurs du lemme 3. Il expose lui-même plus loin sa méthode que l'on peut adapter à notre présentation. Soulignons seulement que le théorème de son article s'étend à un compact de $\overline{R}_\tau$ en remplaçant les $\Phi$ par les fonctions harmoniques hors d'un point Q de CE et d'un $A_p$ (ce qui se voit aussi par notre méthode).

6. Utilisons maintenant comme lemme une proposition généralisant un théorème de Runge-Walsh ([23]), et qui donne une sorte de prolongement harmonique à $\varepsilon$ près. Séparons-en un lemme préliminaire adapté d'une idée de Runge.

Lemme 2. — *Soit dans* $\overline{R_\tau}$ *deux points* P, Q (*distincts ou non*) *de* CE. *Si le point* S *est assez voisin de* P, *on peut, quel que soit* $\varepsilon$ *et quelle que soit* $u$ *harmonique hors* P *et* Q (*respectivement hors* S *et* Q) *former* $v$ *harmonique hors* S *et* Q (*respectivement hors* P *et* Q) *et approchant* $u$ *sur* E *à* $\varepsilon$ *près*. Même énoncé en supprimant le point Q.

Si Q est en $\mathcal{R}_\tau$, et $P \neq Q$, le théorème résulte d'un développement classique ([24]) sur l'extérieur (contenant E) d'un domaine sphérique de centre S contenant P (ou de centre P contenant S). Il suffit de prendre un certain nombre fini de termes.

Si P, Q, $\mathcal{R}_\tau$ sont distincts, on fera une transformation de Kelvin (simple inversion dans le plan) de pôle Q et puissance 1. Par inversion P, S deviennent $P_1$, $S_1$; E devient $E_1$ borné. Le cas du plan est immédiat. Supposons $\tau \geqq 3$; $u$ devient la somme de $u(\mathcal{R}_\tau)\, h(QM)$ et d'une fonction $u_1$ harmonique hors $\mathcal{R}_\tau$ et $P_1$ (respectivement $S_1$) nulle en Q. On choisit un voisinage de $P_1$ tel que pour tout $S_1$ sur lui, on puisse former $v_1$ harmonique hors $\mathcal{R}_\tau$ et $S_1$ (resp. $P_1$) nulle en Q et approchant $u_1$ à $\varepsilon$ près sur E. On achève par transformation de pôle Q et l'on traite de même les autres cas.

Lemme 3. — *Soit* $u$ *harmonique dans* $\omega$ *ouvert contenant* E. *Considérons parmi les domaines composants de* CE *ceux* $\delta_i$, *en nombre fini, contenant au moins un point de* $C\omega$ *et prenons dans chacun d'eux un point* $Q_i$ (*si l'on veut sur* $C\omega$). *On peut construire une fonction harmonique dans* $\overline{R_\tau}$ *hors des*

---

([23]) *Voir* Runge, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen* (*Acta Math.*, t. 6, 1885); Walsh, *The approximation of harmonic function by harmonic polynomials and by harmonic rational functions* (*Bull. am. math. Soc.*, vol. 35, 1939).

([24]) *Voir* VIII, § II utile pour ce qui suit; $h(r)$ désigne $\log \frac{1}{r}$ dans le plan, $\frac{1}{r^{\tau-2}}$ dans l'espace.

*points* $Q_i$ *et approchant* $u$ *à* $\varepsilon$ *près sur* E *et même sur le complémentaire* $E_0$ *de la réunion des* $\delta_i$.

Au moyen d'un réseau cubique par exemple, on formera un ouvert $\omega_1$ tel que :

1° $E_0 \subset \omega_1 \subset \overline{\omega_1} \subset \omega$, $\overline{\omega_1}$ ne contenant pas l'un, Q, des $Q_i$.

2° Sa frontière $\overset{\star}{\omega_1}$ $\left(\text{contenue dans } \bigcup_i \partial_i\right)$ ne contienne pas les $Q_i$, soit bornée et constituée d'un nombre fini de surfaces assez régulières (surfaces latérales de cubes, segments si $\tau = 2$). Choisissons Q comme point de base de la fonction harmonique fondamentale $h_Q(M, P)$ généralisant la fonction

$$h(MP) = h_{\mathcal{R}_\tau}(M, P) \quad ([25]).$$

Alors dans $\omega_1$

$$u(M) = \frac{1}{\varphi_\tau} \int_{\omega_1} \left[ u \frac{dh_Q(M, P)}{dn} - h_Q(M, P) \frac{du}{dn} \right] d\sigma_P$$

(normale intérieure) ([26]).

Selon une idée de Runge, on approchera l'intégrale par une somme de Riemann en prenant des positions $P_p$ de P et $u$ pourra être approchée à $\varepsilon$ près sur $E_0$ par une somme de termes dont chacun est harmonique hors Q et l'un des $P_p$. En imaginant qu'on joigne chaque $P_p$ à l'un des $Q_i$ (qui peut être Q) par une courbe continue tracée sur CE, on verra qu'on peut intercaler un nombre fini de points tels que, en répétant l'application du lemme 2, on obtienne relativement à chaque terme une fonction harmonique hors Q et hors du point $Q_i$ associé, qui approche le terme arbitrairement et uniformément sur $E_0$.

Théorème 2. — *Soit* $\alpha$ *un compact de* CE. *Pour que toute fonction continue sur* $\overset{\star}{E}$ *puisse être approchée à* $\varepsilon$ *près par une fonction harmonique sur* $C\alpha$. *il faut et suffit que,* $\Delta$ *étant la réunion (d'ailleurs finie) des domaines composants de* CE *qui*

---

([25]) *Voir* VIII, n° 17.

([26]) $\varphi_\tau$ désigne dans $R_\tau$ le flux de $h(OM)$ entrant dans la sphère de centre O $+ 2\pi$ dans le plan, et dans l'espace à $\tau \geq 3$ lim, le produit de $(\tau - 2)$ par la surface de la sphère unité.

*contienent au moins un point de $\alpha$, $\overset{\star}{E}$ soit la frontière de* $C\Delta$ *et que tout point de $\overset{\star}{E}$ soit stable pour* $C\Delta$.

La condition est nécessaire. Inspirons-nous d'un passage de J. L. Walsh; considérons $f$ finie continue sur $\overset{\star}{E}$ et $u_n$ harmonique sur $C\alpha$ convergeant uniformément vers $f$ sur $\overset{\star}{E}$; il y aura convergence uniforme sur $C\Delta$ dont la frontière appartient à $\overset{\star}{E}$ et la limite $u$ est harmonique sur l'intérieur $\omega$ de $C\Delta$. S'il existait un point P de $\overset{\star}{E}$ dans $\omega$, prenons pour $f$ une fonction $\geqq 0$ nulle en P seulement; alors $u$ serait $> 0$ à la frontière de $\omega$ et nulle en P. Donc $\overset{\star}{E}$ est bien la frontière de $C\Delta$ et le théorème 1 affirme que tout point de $\overset{\star}{E}$ est stable pour $C\Delta$.

La condition est suffisante d'après le théorème 1 et le lemme 3; on prendra comme points $Q_i$ un point sur $\alpha$ dans chacun des composants de $\Delta$.

On en tire divers énoncés particuliers et l'on remarquera qu'une fonction harmonique hors $\mathcal{R}_\tau$ peut être approchée à $\varepsilon$ près sur tout compact par un polynome harmonique. Par exemple :

Corollaire 1. — *Pour qu'une fonction finie continue sur la frontière d'un domaine* D *puisse être approchée à $\varepsilon$ près par une fonction harmonique hors d'un point* Q *de* D *il faut et suffit que* D *ne soit nulle part effilé à la frontière.*

Pour Q en $\mathcal{R}_\tau$, cela donne le résultat souligné dans l'introduction.

Corollaire 2. — *Si* CE *est connexe et nulle part effilé à la frontière, pour qu'une fonction $\varphi$ sur* E *puisse être approchée à $\varepsilon$ près par une fonction harmonique hors* Q *de* CE, *il faut et suffit que $\varphi$ soit finie continue sur* E *et harmonique à l'intérieur.*

La condition sur l'effilement est satisfaite dans le plan, ce qui, dans $\overline{R_2}$ pour Q en $\mathcal{R}_2$, donne le premier énoncé de Lavrentieff [27] sur l'approximation par polynomes harmoniques.

---

[27] *Opuscule cité*, théorème 18.

## IV. — QUELQUES PROPRIÉTÉS DE CONVERGENCE DES FONCTIONS HARMONIQUES.

7. Soit dans $\overline{R_\tau}$ un ouvert $\Omega$ de complémentaire non polaire. On sait ([28]) que pour la fonction $f$ donnée sur $\overset{\star}{\Omega}$ et « résolutive », la solution correspondante du problème de Dirichlet s'exprime :

$$H_f^\Omega(M) = \int f \, d\mu_M \quad ({}^{29}),$$

et que si $f$ est bornée, elle admet en tout point-frontière irrégulier Q une pseudo-limite ([30]) qui s'exprime de même

$$\Lambda_f^\Omega(Q) = \int f \, d\mu_Q \quad ({}^{31})$$

On en déduit aussitôt des propriétés (par exemple de convergence) de $H_f^\Omega$ d'après des hypothèses sur $f$. Cherchons des propriétés inverses.

Disons presque-partout-$\mu$ (par abréviation p. p.-$\mu$) sur $\overset{\star}{\Omega}$ dans le sens de presque-partout-$\mu_M$ pour tout $M \in \Omega$ (c'est-à-dire sauf sur un ensemble négligeable). On appellera borne supérieure (inférieure) en mesure harmonique, la plus petite (grande) des constantes K majorant (minorant) $f$ presque-partout-$\mu$. On sait que :

Lemme 4 ([32]). — *Si $f$ est résolutive, les bornes de $H_f$ sont égales aux bornes respectives de $f$ en mesure harmonique.*

---

([28]) *Voir* (VII), (VIII) et pour la seconde partie : *Sur les ensembles effilés* [*Bull. Sc. math.*, janvier 1944 (noté X)]; *Sur l'allure des fonctions harmoniques à la frontière* [*C. R. Acad. Sci.*, 220, 1945, p. 676-678 (XI)].

([29]) $\mu_M$ est la mesure de Radon sur $\overset{\star}{\Omega}$ dite mesure harmonique (les ensembles négligeables étant de mesure — $\mu_M$ nulles quelles que soit $M \in \Omega$).

([30]) On dit que $\varphi$ admet en Q une pseudo-limite $l$, si pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de $l$, il existe un ensemble effilé $\mathcal{E}$ en Q, tel que, hors $\mathcal{E}$ et Q, assez près de Q, $\varphi$ ait sa valeur dans $\mathcal{V}$.

([31]) Les ensembles de mesure — $\mu_Q$ nulle sont ceux de mesure — $\mu_M$ nulle pour M appartenant au domaine composant de $\Omega$ dont Q est point-frontière irrégulier.

([32]) *Voir* (V), n° 4.

De là résulte :

THÉORÈME 3. — *Si pour $f$ résolutive*, $H_f = 0$, on a $f = 0$ p. p.-$\mu$.
*Si $f_n$ résolutive est telle que $f_n \leqq g$ résolutive fixe et* $\limsup H_{f_n} \geqq 0$, *alors*

$$\limsup_{n \to \infty} f_n \geqq 0, \qquad \text{p. p.-}\mu.$$

*Donc* si $|f_n| \leqq g$, l'hypothèse $H_{f_n} \to 0$ *entraîne que*

$$\lim f_n = 0, \qquad \text{p. p.-}\mu$$

*sur l'ensemble où* $\lim f_n$ *existe.*

Soit encore $f_n \geqq 0$ [33] résolutive telle que $H_{f_n} \to 0$. En considérant chaque domaine composant, il résulte du théorème de Fisher-Riesz et grâce au procédé diagonal pour passer à $\Omega$, que l'on peut extraire une suite $f_{n_p}$ convergeant vers 0 p. p.-$\mu$.

Si l'on suppose au lieu de $f_n \geqq 0$, seulement $H_{f_n} \geqq 0$ sur un voisinage d'un compact $\alpha$ de $\overset{\star}{\Omega}$, on peut extraire une suite $f_{n_p}$ convergeant vers 0 p. p.-$\mu$ sur $\alpha$.

Toutes ces conséquences banales de la représentation intégrale de $H_f$ contiennent ou entraînent immédiatement des résultats antérieurs, comme des énoncés de Lavrentieff [34] donnés pour un domaine plan simplement connexe et dont voici des généralisations.

THÉORÈME 4. — *Soient les $u_n$, $v_n$ harmoniques et bornés dans leur ensemble dans $\Omega$ (de complémentaire non polaire) admettant* p. p.-$\mu$ *sur une partie $\alpha$ de la frontière des limites selon des fonctions $\varphi_n$, $\psi_n$ qui convergent* p. p.-$\mu$ *vers des fonctions $\varphi$, $\psi$ sur $\alpha$.*

*a. Si $\alpha = \overset{\star}{\Omega}$ et si $\varphi = \psi$* p. p.-$\mu$, *$u_n$ et $v_n$ ont même limite* U *(harmonique) et leurs pseudo-limites en* Q *irrégulier convergent vers celle de* U.

*b. Si $u_n$ et $v_n$ ont même limite* U, $\varphi = \psi$ p. p.-$\mu$ sur $\alpha$.

---

(33) Cette restriction de signe ne peut être supprimée comme le prouve l'exemple (L. Schwartz) de la fonction harmonique $r^n \sin n\theta$ dans le cercle unité.

(34) *Voir* dans son opuscule le théorème 20, et la fin du théorème 14 relatif aux fonctions holomorphes.

La première partie résulte de ce que $u_n = H^{\Omega}_{\varphi_n}$, $v_n = H^{\Omega}_{\psi_u}$ d'où d'ailleurs $U = H^{\Omega}_{\varphi}$.

Soit pour ($b$), $\beta_n$ l'ensemble de $\overset{\star}{\Omega}$ où $u_n$ et $v_n$ ont des limites, $\beta$ l'intersection des $\beta_n$ puis $\gamma$ la partie où les $\varphi_n$, $\psi_n$ ont des limites; alors $\gamma$ contient $\alpha$ à un ensemble négligeable près. Introduisons $\Phi_n$ égale sur $\gamma$ à $\varphi_n - \psi_n$ et ailleurs sur $\overset{\star}{\Omega}$ à une constante K majorant $|u_n - v_n|$. Si $\Phi = \lim \Phi_n$, on a successivement $u_n - v_n \leqq H_{\Phi_n}$, $\lim H_{\Phi_n} = H_{\Phi} \geqq 0$ d'où $\varphi - \psi \geqq 0$ p. p.-$\mu$ sur $\gamma$. De même avec $\psi - \varphi$, d'où la conclusion.

*Remarque.* — Les hypothèses sont remplies pour $u_n$, $v_n$ bornées dans $\Omega$, harmoniques dans des ouverts contenant $\overline{\Omega}$ (en particulier comme dans l'hypothèse de Lavrentieff pour $u_n$, $v_n$ polynomes harmoniques et $\Omega$ borné) et convergentes dans $\overline{\Omega}$.

8. Soit maintenant E un compact $\neq \overline{R_\tau}$ et des $u_n$ harmoniques dans des ouverts contenant E. On a

$$u_n(M) = \int_{\overset{\star}{E}} u_n \, d\nu_M \, (M \in E).$$

Donc :

THÉORÈME 5. — *Si les $u_n$ sont bornées dans leur ensemble sur* E, *la convergence aux points-frontière stables entraîne la convergence partout sur* $\overset{\star}{E}$; *et pour deux telles suites $u_n$ l'égalité des limites aux points stables entraîne l'égalité sur* E.

Lorsque $E = \overline{\Omega}$ ce résultat est avantageux par rapport à ceux qui précèdent puisque l'ensemble des points-frontière instables peut être non négligeable pour $\Omega$ ([35]).

Les résultats précédents donnent aussitôt des énoncés pour des suites de *fonctions holomorphes*, en particulier de polynomes

---

([35]) Si cet ensemble était toujours négligeable, le balayage de la masse ponctuelle en P de $\Omega$ (extrémisation pour $\Omega$) n'apporterait pas de masse sur l'ensemble des points instables et l'extrémisation à faire pour passer de $\mu_P$ à $\nu_P$ ne changerait rien. Cette identité de $\mu_P$ et $\nu_P$ entraînerait celle des solutions pour $\Omega$ et $\overline{\Omega}$ (et distribution-frontière finie continue), laquelle n'a pas toujours lieu comme l'ont montré Keldych-Lavrentieff dans un premier exemple.

en $z$; il suffit de les appliquer aux parties harmoniques (réelle et imaginaire ) ([36]).

## V. — PROPRIÉTÉS DE CONVERGENCE DES FONCTIONS HOLOMORPHES.

9. En remarquant que si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine de $\overline{R_2}$, $\log|f(z)|$ y vaut $-\infty$ ou une fonction sousharmonique, il est facile grâce à la théorie du problème de Dirichlet pour domaines, de remplacer dans le théorème 4 ($a$) adapté à $f(z)$ l'hypothèse $\alpha = \overset{\star}{\Omega}$ par celle que $\alpha$ est seulement de mesure harmonique intérieure $> 0$, en généralisant ainsi des résultats de Montel, Khintchine, Lavrentieff ([37]). Le raisonnement est voisin de ceux utilisés déjà pour obtenir des résultats analogues ([38]), dont l'un va nous servir de lemme.

Lemme 5. — *Soit dans le domaine* $\omega$ (*de complémentaire non polaire dans* $\overline{R_\tau}$) $u_n$ *sousharmonique, bornée supérieurement indépendamment de* $n$ *et* $\varphi_n(P)$ *sa* $\limsup\limits_{M\in\omega,\, M\to P}$ *à la frontière. Si, l'ensemble où* $\limsup\limits_{n\,\infty}\varphi_n = -\infty$ *est de mesure harmonique* $> 0$, *alors* $u_n \to -\infty$ *sur* $\omega$.

Cela résulte de

$$u_n \leq H^{\omega}_{\varphi_n} = \int_{\overset{\star}{\omega}} \varphi_n \, d\mu_M.$$

Théorème 6. — *Soit* $f_n(z)$ *holomorphe et de module* $\leq K$ *fini fixe dans le domaine* $\omega$ (*de complémentaire non polaire dans* $\overline{R_2}$) *et* $\alpha$ *un ensemble sur* $\overset{\star}{\omega}$ *de mesure harmonique intérieure* $> 0$. *On suppose qu'aux points de* $\alpha$, $f_n(z)$ *admette une limite* $\varphi_n$ *et que* $\varphi_n$ *converge sur* $\alpha$. *Alors* $f_n(z)$ *converge dans* $\omega$ (*vers une fonction holomorphe*).

Considérons $\log|f_{n+p_n} - f_n|$ où $p_n$ est un entier, $> 0$, fonction de $n$. Cette fonction de $z$ vaut $-\infty$ ou est sousharmonique et

---

([36]) Ainsi se retrouve outre la seconde partie du théorème 14 déjà mentionnée, le théorème 16 du fascicule de Lavrentieff, d'extension immédiate à un compact quelconque différent de $\overline{R_\tau}$.

([37]) *Voir* l'opuscule de Lavrentieff, Chap. III, n$^{os}$ 8-9.

([38]) *Voir* le début de (I), où l'extension est immédiate d'un domaine borné à un domaine de $\overline{R_\tau}$ de complémentaire non polaire.

bornée supérieurement par $2\log K$, donc d'après le lemme 5 tend $-\infty$; ainsi $f_{n+p_n}-f_n \to 0$ sur $\omega$ et comme $p_n$ est fonction arbitraire de $n$ $f_{n+p}-f_n$ tend vers zéro quand $n\to\infty$ indépendamment de $p$ d'où la convergence de $f_n$ (39).

*Uniformité de convergence.* — Il y a évidemment convergence uniforme sur tout compact de $\omega$. Si l'on veut davantage, supposons que $\varphi_n$ converge uniformément sur $\alpha$. Il y a alors convergence uniforme de $f_n$ sur tout ensemble E de $\omega$ où la mesure harmonique intérieure de $\alpha$ majore un nombre $>0$. Par exemple on peut prendre pour E *un ensemble dont l'adhérence ne contient que des points de $\omega$ ou des points intérieurs de $\alpha$ dans le sous-espace* $\overset{\star}{\omega}$ (c'est-à-dire dont l'adhérence admet un voisinage qui ne rencontre pas $\overset{\star}{\omega}-\alpha$). Cela résulte en effet de la propriété suivante :

Lemme 6. — *Soit pour $\Omega$ ouvert quelconque (de complémentaire non polaire dans $\overline{R_\tau}$) la mesure harmonique $\mu_M(e)$ d'un ensemble ouvert sur le sous-espace $\overset{\star}{\Omega}$. Si $e$ n'est pas polaire, la* $\liminf\limits_{M\in\Omega,\, M\to Q}\mu_M(e)$ *en tout point Q de $e$ est* $>0$.

Évident si Q est régulier. Si Q est irrégulier, $\mu_M(e)$ prolongée par 1 au voisinage de Q devient une fonction surharmonique $v$ lorsqu'on la prend aux points irréguliers égale à la lim inf de $\mu_M$ en ces points; $v$ vaut en Q sa pseudo-limite et celle de $\mu_M$ (considéré sur $\Omega$); et cette dernière est $>0$ car $e$ n'est pas de mesure-$\mu_Q$ nulle [$\mu_M(e)$ étant visiblement $>0$ dans le domaine composant dont Q est point-frontière irrégulier] (40).

(Manuscrit reçu le 23 mai 1945).

---

(39) Au lieu d'utiliser $p_n$, on peut se servir, selon une remarque de L. Schwartz, de ce que la convergence de $\varphi_n$ entraîne la convergence uniforme sur une partie de $\alpha$ de mesure harmonique $>0$. L'ensemble où $\varphi_n$ existe et converge étant harmoniquement mesurable, on peut supposer seulement dans ce théorème et ce qui suit, que $\alpha$ est de mesure harmonique *extérieure* $>0$.

(40) On pourra s'appuyer sur (IX) (théorème 1, *b*).

Au moins dans le cas utile de $\Omega$ domaine borné, le lemme résulte aussi de résultats de Keldych (*C. R. Acad. Sci. U. R. S. S.*, 1938, *loc. cit.* Théorèmes 1 et 2) ou de Frostman (*Kungl. Fisiogr. Sällsk.*, Lund, Förd. t. 9, n° 2. Les points irréguliers dans la théorie du potentiel et le critère de Wiener, n° 5 et 6).