Bulletin de la S. M. F.

Paul Vincensini

Sur certains types de congruences appartenant à un complexe linéaire, et sur les suites de Laplace de réseaux quadratiques de Wilczynski de période 4

Bulletin de la S. M. F., tome 73 (1945), p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1945__73__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR CERTAINS TYPES DE CONGRUENCES APPARTENANT A UN COMPLEXE LINÉAIRE, ET SUR LES SUITES DE LAPLACE DE RÉSEAUX QUADRATIQUES DE WILCZYNSKI DE PÉRIODE 4;

PAR M. PAUL VINCENSINI.

Introduction. — Le début du présent article est un complément à un Mémoire des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (4e série, t. IV, 1940, p. 97), consacré à l'étude de certaines congruences rectilignes situées dans un complexe linéaire ou tétraédral.

Ces congruences dérivent, par une transformation que dans un autre travail (1) j'ai appelée $T[\mathcal{F}(Z)]$, de congruences normales convenablement choisies. Parmi elles figurent, en particulier, les congruences à surface moyenne plane, à enveloppée moyenne point, et à foyers associés équidistants d'une droite fixe, intimement liées les unes aux autres, et en relation les unes et les autres avec de nombreuses questions de géométrie différentielle.

Dans le Mémoire des *Annales de Toulouse* cité plus haut j'ai recherché les congruences de ces trois derniers types appartenant à un complexe linéaire, en supposant que l'axe du complexe occupe

(1) *Sur une transformation de l'espace réglé et sur les systèmes sphériques isothermes* (*Bull. des Sc. Math.*, 2e série, t LXV, juillet-août-sept. 1941).

une position spéciale dans la congruence. Pour les congruences à surface moyenne plane, le plan moyen est supposé perpendiculaire à l'axe du complexe; pour les congruences à enveloppée moyenne point, le point moyen (par lequel passent les plans médiateurs des différents segments focaux) est situé sur l'axe du complexe, et pour les congruences à foyers associés équidistants d'une droite fixe la droite est l'axe du complexe.

Je reprends ici le problème sans faire aucune hypothèse particulière sur la position de l'axe du complexe. Je commence par rechercher, d'une façon générale, toutes les congruences normales dont les transformées par une T[$\mathcal{F}$(Z)] sont dans un complexe linéaire. Ces congruences dépendent d'une certaine équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre. Le procédé de calcul employé donne cette équation sous forme invariante (indépendante de la représentation sphérique adoptée). La forme obtenue met en évidence une interprétation géométrique de l'équation, à laquelle se rattachent des constructions intéressantes pour les congruences des trois types dont il a été question ci-dessus, dans les cas indiqués de particularisation de la position de l'axe du complexe.

Il existe une congruence du complexe commune aux trois types. La considération de cette congruence fournit le point de départ d'une étude métrique des suites périodiques de réseaux quadratiques de Wilczynski de période 4. Je détermine complètement, et de façon purement géométrique, toutes les suites périodiques de cette espèce. On verra, en particulier, comment le caractère de Wilczynski (congruences appartenant à des complexes linéaires) est une conséquence du caractère quadratique des réseaux de la suite. Les quatre réseaux d'une suite périodique du type envisagé sont deux à deux sur une même quadrique, et le couple des deux quadriques supports jouit de la propriété caractéristique que chacune des deux quadriques qui le constituent est sa propre polaire réciproque par rapport à l'autre.

Le cas où l'une des deux quadriques est une sphère conduit, en particulier, à la connaissance d'une infinité de systèmes cycliques, orthogonaux à une même sphère, et dont les congruences des axes des cercles (congruences cycliques) sont dans un complexe linéaire

1. La transformation $T[\mathcal{F}(Z)]$ et quelques-unes de ses propriétés. — Dans ce premier paragraphe je rappelle la définition de la transformation de l'espace réglé étudiée dans le Mémoire cité du *Bulletin des Sciences Mathématiques*, ainsi que quelques résultats essentiels.

D (de cosinus directeurs X, Y, Z) étant une droite quelconque de l'espace rapporté à un système d'axes rectangulaires $Oxyz$, H la projection orthogonale de O sur D, K la projection orthogonale de H sur le plan xOy, K_1 le point déduit de K par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de O dans le plan xOy, et L l'homothétique de K_1 dans une homothétie de centre O dont le rapport $\mathcal{F}(Z)$ ne dépend que de l'angle que fait D avec Oz, la droite Δ transformée de D est la parallèle menée par L à D.

O, Oz et xOy sont respectivement le *centre*, l'*axe* et le *plan* de la transformation. $\mathcal{F}(Z)$ est la *fonction transformatrice* de l'espace réglé, et la transformation elle-même est représentée par $T[\mathcal{F}(Z)]$.

En examinant plus spécialement l'effet produit sur une congruence normale quelconque par une transformation $T[\mathcal{F}(Z)]$, j'ai été amené à envisager, d'un point de vue nouveau, les congruences à surface moyenne plane, à enveloppée moyenne point et à foyers associés équidistants d'une droite fixe, dont il a été question dans l'Introduction (*Bull. des Sc. Math.*).

Toute congruence normale (D) convenablement transformée fournit (une homothétie étant négligée) une congruence de chacun des trois types précédents; la congruence à surface moyenne plane (xOy) s'obtient avec la fonction transformatrice $\mathcal{F}(Z) = Z$, la congruence à enveloppée moyenne point [le point O] avec la fonction transformatrice $\mathcal{F}(Z) = \frac{1}{Z}$, enfin la congruence à foyers associés équidistants d'une droite fixe (Oz) provient de la fonction transformatrice $\mathcal{F}(Z) = \frac{1}{Z} - Z$.

En envisageant *toutes* les congruences normales (D) de l'espace on obtient, moyennant les transformations $T[Z]$, $T\left[\frac{1}{Z}\right]$, $T\left[\frac{1}{Z} - Z\right]$, *toutes* les congruences à surface moyenne plane, *toutes* les congruences à enveloppée moyenne point, et *toutes* les congruences à foyers associés équidistants d'une droite fixe.

La congruence normale (D) la plus générale peut être définie par les formules (de Weingarten)

$$
(1) \qquad \begin{cases} \xi = \Delta(\Phi, X), \\ \eta = \Delta(\Phi, Y), \\ \zeta = \Delta(\Phi, Z), \end{cases}
$$

où X, Y, Z (fonctions de deux variables u, v) sont les cosinus directeurs d'un rayon quelconque, ξ, η, ζ les coordonnées de la projection orthogonale H de l'origine O sur ce rayon, Φ une fonction arbitraire de u, v, et $\Delta(\Phi, X)$ le paramètre différentiel mixte des deux fonctions Φ et X relatif au ds^2 de la représentation sphérique de la congruence

$$
ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2.
$$

Φ est d'ailleurs la distance algébrique du point O au plan tangent, normal à D, à l'une quelconque des surfaces orthogonales aux rayons de la congruence. Ces dernières surfaces peuvent donc être définies (au parallélisme près), soit ponctuellement comme lieux du point

$$
(2) \qquad \begin{cases} x = \Delta(\Phi, X) + \Phi X, \\ y = \Delta(\Phi, Y) + \Phi Y, \\ z = \Delta(\Phi, Z) + \Phi Z, \end{cases}
$$

soit tangentiellement comme enveloppes du plan

$$
(3) \qquad Xx + Yy + Zz = \Phi.
$$

Dans ces conditions, la congruence transformée par $T[\mathcal{F}(Z)]$ de la congruence normale (D) est définie par les formules suivantes, donnant les coordonnées du point où le rayon générateur perce le plan xOy de la transformation

$$
(4) \qquad \begin{cases} x = -\mathcal{F}(Z)\Delta(\Phi, Y), \\ y = \mathcal{F}(Z)\Delta(\Phi, X). \end{cases}
$$

Les congruences à surface moyenne plane (xOy), à enveloppée moyenne point (O), ou à foyers associés équidistants d'une droite fixe (Oz), sont donc définies, une fois la représentation sphérique (X, Y, Z) choisie, par les systèmes d'équations respectifs

$$(5)\qquad \begin{cases} x = -Z\,\Delta(\Phi, Y), \\ y = Z\,\Delta(\Phi, X); \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{Z}\Delta(\Phi, Y), \\ y = \dfrac{1}{Z}\Delta(\Phi, X); \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} x = -\left(\dfrac{1-Z^2}{Z}\right)\Delta(\Phi, Y), \\ y = \left(\dfrac{1-Z^2}{Z}\right)\Delta(\Phi, X). \end{cases}$$

2. Congruences normales dont les transformées par une $T[\mathcal{F}(Z)]$ sont dans un complexe linéaire. — L'intérêt de la recherche des congruences normales dont les transformées sont dans un complexe linéaire tient à ce que, si une famille (F) de congruences, définie par une propriété géométrique imposée aux congruences qui la constituent, est contenue dans l'ensemble des transformées des différentes congruences normales de l'espace par une transformation $T[\mathcal{F}(Z)]$ déterminée, il suffira, dans la recherche générale ci-dessus, de particulariser $\mathcal{F}(Z)$ en lui donnant la forme qui convient à la famille (F), pour obtenir *toutes* les congruences de cette famille situées dans un complexe linéaire.

Ainsi, avec $\mathcal{F}(Z) = Z$, ou $\frac{1}{Z}$, ou $\frac{1}{Z} - Z$, on obtiendra toutes les congruences à surface moyenne plane, à enveloppée moyenne point, ou à foyers associés équidistants d'une droite fixe, situées dans un complexe linéaire.

(D) étant une congruence normale arbitraire définie avec les notations du numéro 1, les coordonnées plückériennes du rayon générateur, Δ, de la congruence (Δ) transformée de (D) par une $T[\mathcal{F}(Z)]$ quelconque, sont

$$X,\quad Y,\quad Z;\qquad L = yZ,\qquad M = -xZ,\qquad N = xY - yX;$$

soit, en remplaçant les coordonnées (x, y) du point où Δ perce le plan xOy par leurs expressions (4), et en tenant compte de la relation évidente

$$X\Delta(\Phi, X) + Y\Delta(\Phi, Y) + Z\Delta(\Phi, Z) = 0$$

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} X,\ Y,\ Z; \\ L = Z\mathcal{F}(Z)\Delta(\Phi, X), \\ M = Z\mathcal{F}(Z)\Delta(\Phi, Y), \\ N = Z\mathcal{F}(Z)\Delta(\Phi, Z). \end{array}\right.$$

Donnons-nous un complexe linéaire quelconque (C)

$$(9)\qquad a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + \alpha_1 L + \alpha_2 M + \alpha_3 N = 0.$$

En exprimant que Δ est dans (C), on obtient

$$(10)\quad a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + Z\mathcal{F}(Z)[\alpha_1\Delta(\Phi, X) + \alpha_2\Delta(\Phi, Y) + \alpha_3\Delta(\Phi, Z)] = 0.$$

X, Y et Z étant des fonctions connues de u et v, et la fonction transformatrice $\mathcal{F}(Z)$ étant choisie, (10) est pour Φ une équation aux dérivées partielles du premier ordre linéaire dont l'intégration fera connaître, par les équations (4), les congruences (Δ) transformées des congruences normales par la transformation $T[\mathcal{F}(Z)]$ qui sont dans le complexe linéaire (C).

L'équation (10) peut être interprétée géométriquement. Excluons le cas où les diamètres du complexe (C) seraient isotropes. On peut alors supposer $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$. La quantité

$$\alpha_1\Delta(\Phi, X) + \alpha_2\Delta(\Phi, Y) + \alpha_3\Delta(\Phi, Z)$$

représente la projection orthogonale, sur l'axe du complexe, de la perpendiculaire OH abaissée de l'origine O sur le rayon générateur D de la congruence normale (D) dont la transformée par $T[\mathcal{F}(Z)]$ est dans (C) (*fig.* 1).

I étant la projection de H sur le vecteur $\overrightarrow{O\Omega}$ (de composantes α_1, α_2, α_3) parallèle à l'axe du complexe, on a

$$\overline{OI} = \alpha_1\Delta(\Phi, X) + \alpha_2\Delta(\Phi, Y) + \alpha_3\Delta(\Phi, Z).$$

D'autre part, si $\overrightarrow{OA}$ est le vecteur fixe de composantes (a_1, a_2, a_3), $a_1 X + a_2 Y + a_3 Z$ représente la projection $\overline{HJ}$ de ce vecteur sur le rayon D de cosinus directeurs X, Y, Z.

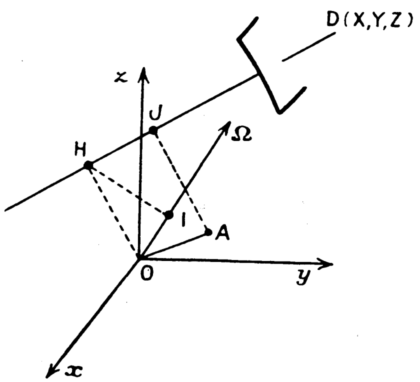
L'équation (10) peut donc s'écrire sous la forme

$$\frac{\overline{\mathrm{HJ}}}{\overline{\mathrm{OI}}} = -\mathrm{Z}\,\mathcal{F}(\mathrm{Z}),$$

et elle exprime, comme l'on voit, que le rapport $\frac{\overline{\mathrm{HJ}}}{\overline{\mathrm{OI}}}$ est uniquement fonction de l'angle que fait le rayon générateur de la congruence (D) avec la direction fixe Oz. Ainsi :

Les congruences normales dont les transformées par une transformation T[$\mathcal{F}$(Z)] *sont situées dans un complexe linéaire*

Fig. 1.



sont les congruences (D) *pour lesquelles il existe deux vecteurs fixes* $\overrightarrow{\mathrm{O\Omega}}$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ *tels que, si* $\overline{\mathrm{OI}}$ *est la projection sur le vecteur* $\overrightarrow{\mathrm{O\Omega}}$ *de la perpendiculaire* $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ *abaissée de* O *sur un rayon quelconque de* D, *et si* $\overline{\mathrm{HJ}}$ *est la projection de* $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ *sur* D, *le rapport* $\frac{\overline{\mathrm{HJ}}}{\overline{\mathrm{OI}}}$ *ne dépend que de l'angle que le rayon* D *fait avec la direction fixe* Oz, *et est par suite une fonction déterminée* Θ(Z) *du cosinus* Z *de l'angle que fait* D *avec* Oz.

La fonction transformatrice à adopter est alors $\mathcal{F}(\mathrm{Z}) = -\frac{\Theta(\mathrm{Z})}{\mathrm{Z}}$, et le complexe dans lequel se trouve la congruence transformée a pour coordonnées les six quantités a_1, a_2, a_3 (composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$) et α_1, α_2, α_3 (composantes du vecteur unitaire $\overrightarrow{O\Omega}$). L'axe du complexe est parallèle à $\overrightarrow{O\Omega}$.

Les congruences générales à surface moyenne plane à enveloppée moyenne point ou à foyers associés équidistants d'une droite fixe situées dans un complexe linéaire, dérivent des congruences normales (D) que l'on vient de définir géométriquement, moyennant les valeurs respectives $-Z^2$, -1, Z^2-1, du rapport

$$\theta(Z) = \frac{\overline{HJ}}{\overline{OI}}.$$

3. Les trois types spéciaux de congruences. — Pour rattacher à l'énoncé général qui termine le numéro précédent, les congruences particulières des trois types ci-dessus pour lesquelles l'axe du complexe occupe les positions spéciales indiquées dans l'Introduction, commençons par supposer que dans l'énoncé en question les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{O\Omega}$ soient deux vecteurs unitaires portés par l'axe Oz de la transformation. L'équation du complexe (C) considéré a alors la forme

$$\text{(C)} \qquad Z + N = 0$$

et il s'agit de rechercher les congruences normales (D) dont les transformées par une transformation $T[\mathcal{F}(Z)]$ quelconque d'axe Oz (axe du complexe) sont situées dans le complexe (C).

Supposons trouvée une congruence (D) répondant à la question. Donnons-nous un plan quelconque (P) passant par Oz, défini par sa trace OT sur le plan xOy faisant un angle déterminé θ avec l'axe Ox. Envisageons l'ensemble des rayons de (D) parallèles au plan (P). Si d est la projection sur (P), de l'un quelconque des rayons D envisagés, on a la figure (2), déduite de la figure (1), compte tenu des hypothèses faites sur les positions des vecteurs $\overrightarrow{O\Omega}$ et $\overrightarrow{OA}$, et dans laquelle h et j sont les projections orthogonales sur (P) des points H et J.

La relation générale

$$\frac{\overline{HJ}}{\overline{OI}} = \theta(Z)$$

donne

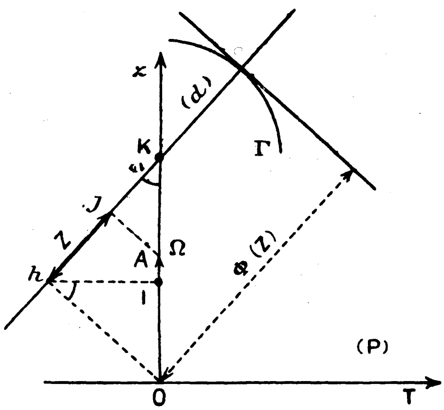
$$\frac{\overline{hj}}{\overline{\mathrm{OI}}} = \theta(\mathrm{Z});$$

d'où, puisque la valeur de $\overline{hj}$ n'est autre chose que le cosinus de l'angle de d avec Oz, c'est-à-dire Z,

$$(11) \qquad \overline{\mathrm{OI}} = \frac{\mathrm{Z}}{\theta(\mathrm{Z})} = -\frac{1}{\mathcal{F}(\mathrm{Z})}$$

[$\mathcal{F}$(Z) étant la fonction transformatrice].

Fig. 2.



Comme

$$\overline{h\mathrm{I}} = \overline{\mathrm{OI}}.\mathrm{tang}\,\widehat{h\mathrm{OI}} = \mathrm{OI}.\frac{\mathrm{Z}}{\sqrt{1-\mathrm{Z}^2}} = \frac{-\mathrm{Z}}{\mathcal{F}(\mathrm{Z})\sqrt{1-\mathrm{Z}^2}},$$

on voit que le triangle OhI, et par suite le triangle OhK (K étant le point où d coupe Oz), *ne dépend que de* Z *et nullement de l'orientation du plan* (P) *autour de* Oz.

Cela étant, envisageons l'une des surfaces S normales aux rayons de la congruence (D). Le cylindre circonscrit à S de génératrices orthognales à (P) coupe (P) suivant une courbe Γ normale aux ∞^1 droites d situées dans (P).

Réciproquement, si l'on choisit dans chaque plan (P) une trajectoire orthogonale Γ des droites d, la loi de variation de cette trajectoire orthogonale, quand on passe d'un plan (P) à un autre, étant absolument arbitraire, la surface enveloppe des cylindres droits ayant pour bases les différentes courbes I est une surface S dont les normales parallèles à un même plan (P) se projettent sur ce plan suivant la famille des droites (d) qu'il contient, et la congruence des normales à la surface S ainsi obtenue est la congruence normale la plus générale dont la transformée par $T[\mathcal{F}(Z)]$ est dans un complexe linéaire d'axe Oz. Si l'on observe qu'en disposant de la fonction transformatrice $\mathcal{F}(Z)$ on peut faire en sorte que la courbe Γ de la figure 2 soit une courbe arbitraire du plan (P), on arrive au résultat suivant :

Les congruences normales dont les transformées par une $T[\mathcal{F}(Z)]$ *convenable sont situées dans un complexe linéaire d'axe* Oz *sont constituées par les normales à la surface enveloppe d'un cylindre de génératrices perpendiculaires à* Oz *et de forme absolument arbitraire, le cylindre étant mis en rotation autour de* Oz *et subissant en même temps une dilatation* [1] *fonction arbitraire de l'angle de rotation.*

Si la base Γ du cylindre dont il est question dans l'énoncé précédent, située dans le plan TOz, est définie tangentiellement dans ce plan comme l'enveloppe de la droite

$$x\sqrt{1-Z^2}+zZ=M(Z)$$

(x et z sont les coordonnées courantes relatives à OT et Oz respectivement), on voit aussitôt que l'on a dans la figure 2

$$\overline{OI}=(1-Z^2)\,M'(Z),$$

et il résulte de (11) que la fonction transformatrice à adopter pour réaliser la transformation de la congruence des normales à l'enveloppe du cylindre ci-dessus dans sa rotation et dilatation simultanées est

$$\mathcal{F}(Z)=\frac{-1}{M'(Z)(1-Z^2)}. \tag{12}$$

En appliquant les résultats généraux qui précèdent à la recherche des congruences d'un complexe linéaire ($Z+N=0$) admettant

[1] Nous entendons par dilatation l'opération habituelle qui consiste à porter une longueur constante sur chaque normale.

pour surface moyenne un plan perpendiculaire à l'axe du complexe (que l'on peut supposer être le plan xOy), congruences pour lesquelles la fonction transformatrice $\mathcal{F}(Z)$ est égale à Z, on obtient pour M(Z), d'après l'équation (12) et profitant de la dilatation arbitraire pour négliger la constante additive, l'expression

$$M(Z) = -\int \frac{dZ}{Z(1-Z^2)} = \operatorname{Log} \frac{\sqrt{1-Z^2}}{Z}.$$

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Les congruences d'un complexe linéaire (d'axe Oz*) admettant pour surface moyenne un plan perpendiculaire à l'axe du complexe s'obtiennent, en soumettant à la transformation* T[Z] *les congruences des normales aux enveloppes d'un cylindre droit dont la base est définie tangentiellement, dans un plan* TOz *quelconque passant par* Oz*, par l'équation*

$$x\sqrt{1-Z^2} + zZ = \operatorname{Log}\frac{\sqrt{1-Z^2}}{Z}$$

(x *et* z *étant les coordonnées courantes sur la tangente et* Z *le paramètre dont dépend cette tangente), lorsque le cylindre tourne autour de* Oz *en se dilatant arbitrairement.*

La distance de l'origine O au plan tangent (normal à la direction X, Y, Z) à l'une quelconque des enveloppes ci-dessus ayant évidemment pour expression

$$(13) \qquad \Phi = \operatorname{Log}\frac{\sqrt{1-Z^2}}{Z} + \Psi\left(\frac{Y}{X}\right),$$

où Ψ est une fonction arbitraire de $\frac{Y}{X}$ définissant la loi de dilatation du cylindre enveloppant, les congruences à surface moyenne plane actuelle peuvent être définies, conformément au n° 1, par les équations (5) où Φ est remplacée par son expression (13), soit par les équations

$$(14) \qquad \begin{cases} x = -Z\Delta\left\{\left[\operatorname{Log}\frac{\sqrt{1-Z^2}}{Z} + \Psi\left(\frac{Y}{X}\right)\right], Y\right\}, \\ y = Z\Delta\left\{\left[\operatorname{Log}\frac{\sqrt{1-Z^2}}{Z} + \Psi\left(\frac{Y}{X}\right)\right], X\right\}, \end{cases}$$

où, rappelons-le, X, Y, Z sont les cosinus directeurs du rayon générateur, x et y les coordonnées du point où ce rayon perce le plan xOy, et Δ le paramètre différentiel mixte relatif au ds^2 de la représentation sphérique $[X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)]$ de la congruence, représentation d'ailleurs arbitrairement choisie.

En prenant $\mathcal{F}(Z) = \frac{1}{Z}$, et en raisonnant comme il vient d'être fait pour les congruences à surface moyenne plane, on obtient les congruences à enveloppée moyenne point situées dans le complexe linéaire $Z + N = 0$ dont le point enveloppé moyen est sur l'axe du complexe (en O par exemple).

L'équation (12) donne ici (la constante additive étant toujours négligée)

$$M(Z) = \operatorname{Log} \sqrt{1 - Z^2},$$

et l'on peut dire :

Les congruences d'un complexe linéaire d'axe Oz *dont l'enveloppée moyenne est un point* O *de* Oz *s'obtiennent, en soumettant à la transformation* $T\left(\frac{1}{Z}\right)$, *les congruences des normales aux surfaces enveloppes d'un cylindre droit dont la base est l'enveloppe dans le plan* TOz *de la droite*

$$x \sqrt{1 - Z^2} + zZ = \operatorname{Log} \sqrt{1 - Z^2},$$

lorsque le cylindre tourne autour de Oz *en se dilatant suivant une loi arbitraire.*

Les équations définissant ces congruences se déduisent des équations (6) du n° 1, où l'on remplace Φ par $\operatorname{Log}\sqrt{1 - Z^2} + \Psi\left(\frac{Y}{X}\right)$, Ψ étant encore une fonction arbitraire de $\frac{Y}{X}$: ce sont :

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= -\frac{1}{Z}\Delta\left\{\left[\operatorname{Log}\sqrt{1 - Z^2} + \Psi\left(\frac{Y}{X}\right)\right], Y\right\}, \\ y &= \frac{1}{Z}\Delta\left\{\left[\operatorname{Log}\sqrt{1 - Z^2} + \Psi\left(\frac{Y}{X}\right)\right], X\right\}. \end{aligned} \right.$$

Avec $\mathcal{F}(Z) = \frac{1}{Z} - Z$, on obtient les conguences du complexe linéaire à foyers associés équidistants de l'axe Oz du complexe.

(12) donne

$$M(Z) = -\frac{1}{2(1-Z^2)}.$$

Les congruences à foyers associés équidistants de l'axe Oz du complexe linéaire $Z + N = 0$ *sont les transformées par* $T\left[\frac{1}{Z} - Z\right]$ *des congruences des normales aux enveloppes d'un cylindre droit, dont la base est définie dans* TOz *par*

$$x\sqrt{1-Z^2} + zZ = -\frac{1}{2(1-Z^2)},$$

le cylindre tournant autour de Oz *en se dilatant arbitrairement.*

En remplaçant dans les équations (7) du n° **1**, Φ par

$$-\frac{1}{2(1-Z^2)} + \Psi\left(\frac{Y}{X}\right),$$

on obtient les équations générales des congruences envisagées

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= -\frac{1-Z^2}{Z}\Delta\left\{\left[\frac{-1}{2(1-Z^2)} + \Psi\left(\frac{Y}{X}\right)\right], Y\right\}, \\ y &= \frac{1-Z^2}{Z}\Delta\left\{\left[\frac{-1}{2(1-Z^2)} + \Psi\left(\frac{Y}{X}\right)\right], X\right\}. \end{aligned}\right.$$

4. Les congruences d'un complexe linéaire à surface moyenne plane perpendiculaire à l'axe envisagées comme congruences de Ribaucour. — On peut obtenir une nouvelle construction des congruences d'un complexe linéaire (d'axe Oz) admettant pour surface moyenne un plan perpendiculaire à l'axe du complexe (plan xOy) en procédant comme il suit. La congruence (G) la plus générale admettant pour surface moyenne le plan xOy peut être considérée comme une congruence de Ribaucour, déduite d'une surface arbitraire S (dite surface *génératrice* de la congruence) par la construction suivante :

M étant un point quelconque de S, MN la normale en M à S, μ la projection orthogonale de M sur le plan xOy, m le point de xOy déduit de μ par rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de O, la congruence (G) est constituée par les parallèles menées par chaque point m à la normale MN au point correspondant de la surface génératrice.

Définissons S par l'équation $z = f(x, y)$. Les coordonnées du point μ sont alors x et y; celles de m seront $(-y, x)$, et le rayon G de la congruence (G) issu de m aura pour paramètres directeurs $p, q, -1$ $\left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$

Les deux coordonnées plückériennes Z et N de G sont -1 et $-(px + qy)$. G sera donc dans le complexe linéaire $Z + N = 0$ si la surface S est telle que l'on ait

$$px + qy + 1 = 0. \tag{17}$$

L'intégration de (17) donne pour S l'équation

$$z = -\operatorname{Log} x + f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (f = \text{fonction arbitraire}). \tag{S}$$

Les congruences d'un complexe linéaire admettant pour surface moyenne un plan (xOy) perpendiculaire à l'axe Oz du complexe sont, comme l'on voit, *les congruences admettant pour génératrices les surfaces obtenues, en coupant un cylindre droit ayant pour base une courbe logarithmique d'asymptote* Oz *par les différents plans passant par* Oz, *et en déplaçant chaque section parallèlement à* Oz *la loi du déplacement étant choisie arbitrairement.*

L'équation des génératrices peut s'écrire

$$e^z = \frac{1}{x}\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{S}$$

Les surfaces S sont des surfaces de Jamet particulières.

Leurs asymptotiques se déterminent par une quadradure. Les développables d'une congruence de Ribaucour correspondant, comme il est bien connu, aux asymptotiques de la surface génératrice, on voit que, pour les congruences d'un complexe linéaire dont la surface moyenne est un plan perpendiculaire à l'axe du complexe, la détermination des développables n'exige qu'une quadrature.

5. **Surfaces moyennes. Nouvelle construction des congruences d'un complexe linéaire à foyers associés équidistants de l'axe.** — Les trois familles de congruences du complexe linéaire dont il

vient d'être question dans les deux numéros qui précèdent jouissent d'une propriété intéressante, que j'ai établie dans le Mémoire des *Annales de Toulouse* déjà cité, mais que je rappelle ici, pour montrer que les liens qui existent entre les trois familles, dont j'ai parlé dans l'Introduction, continuent à se manifester à l'intérieur d'un complexe linéaire.

Toutes les congruences des trois types ci-dessus *jouissent de la propriété commune d'admettre comme surfaces moyennes* (*lieux des milieux des segments focaux*) *des conoïdes droits ayant pour axe l'axe du complexe dans lequel elles se trouvent.*

La chose est évidente pour les congruences à surface moyenne plane dont le plan est normal à l'axe du complexe, et la vérification pour les deux autres types ne présente aucune difficulté.

Tout conoïde droit d'axe Oz est d'ailleurs la surface moyenne d'une congruence du complexe dont l'enveloppée moyenne est un point de l'axe du complexe, et d'une congruence du complexe à foyers associés équidistants de l'axe de ce dernier. En outre, en ce qui concerne plus spécialement les congruences à foyers associés équidistants de l'axe du complexe, on a le résultat suivant :

Si l'on déplace les différentes génératrices du conoïde moyen par des translations parallèles à l'axe du complexe, chaque génératrice entraînant dans sa translation les rayons de la congruence qui s'y appuient et la translation variant suivant une loi arbitraire quand on passe d'une génératrice à l'autre, on transforme la congruence initiale en une nouvelle congruence du complexe à foyers associés équidistants de l'axe.

En faisant varier la loi définissant les différentes translations, on obtient, à partir d'une congruence particulière d'un complexe linéaire à foyers associés équidistants de l'axe, toutes les congruences du complexe jouissant de la même propriété. Nous allons voir qu'en choisissant convenablement la congruence particulière dont il vient d'être question, on peut mettre en évidence une construction remarquablement simple des congruences d'un complexe linéaire à couples de foyers associés équidistants de l'axe.

Si, dans les équations (14), (15), (16), qui définissent respectivement les congruences des trois types étudiés situées dans un complexe linéaire d'axe Oz, on suppose nulle la fonction arbitraire $\Psi\left(\frac{Y}{X}\right)$ qui fixe la loi de dilatation du cylindre introduit au numéro 3, les trois systèmes (14), (15), (16) se réduisent à un seul, que l'on peut par exemple former en prenant le ds^2 de la représentation sphérique (que nous avons laissée arbitraire) sous la forme $ds^2 = 2F\,du\,dv$.

On obtient ainsi sans difficulté les équations

$$(\mathcal{C})\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{-YZ}{1-Z^2}, \\ y &= \frac{XZ}{1-Z^2}, \end{aligned}\right.$$

qui définissent, par le point où le rayon de cosinus directeurs (X, Y, Z) perce le plan xOy, une congruence $(\mathcal{C})$ du complexe linéaire $Z + N = 0$ admettant, le plan xOy pour surface moyenne, le point O pour enveloppée moyenne, et dont les couples de foyers associés sont équidistants de Oz.

$(\mathcal{C})$ est la seule congruence du complexe linéaire appartenant aux trois types considérés. La coexistence dans une même congruence des trois propriétés précédentes exige, comme on le voit aussitôt, que la congruence soit de révolution autour de Oz. La surface enveloppe du cylindre, introduit au numéro 3, dont dérive la congruence considérée, est par suite de révolution autour de Oz. Cela exige que le mouvement du cylindre se réduise à une simple rotation autour de Oz. La fonction $\Psi\left(\frac{Y}{X}\right)$ qui définit la dilatation du cylindre est donc identiquement nulle, et la congruence envisagée est précisément la congruence $(\mathcal{C})$ obtenue plus haut en annulant Ψ dans les équations (14), (15) et (16).

Les deux nappes focales de $(\mathcal{C})$ sont, comme il est aisé de le constater, les deux paraboloïdes de révolution d'axe Oz, de sommet O et symétriques par rapport à O, d'équations respectives

$$z = \pm\frac{x^2+y^2}{2}.$$

En outre, si l'on groupe les droites de la congruence s'appuyant (normalement) sur une droite quelconque du plan xOy issue de O on obtient l'un des systèmes de génératrices rectilignes d'un paraboloïde hyperbolique équilatère d'axe $Oz[z = xy$ si la droite d'appui est Ox ou $Oy]$.

De cette dernière propriété, et de ce que l'on a dit plus haut au sujet de la construction de toutes les congruences d'un complexe linéaire à foyers associés équidistants de l'axe, résulte le mode de génération très simple suivant de la congruence du complexe la plus générale du type en question :

On obtient la congruence la plus générale d'un complexe linéaire à foyers associés équidistants de l'axe du complexe, en soumettant un paraboloïde hyperbolique équilatère ($\mathcal{H}$) *au mouvement à un paramètre le plus général dans lequel l'axe de la surface glisse sur lui-même. La congruence est engendrée par les génératrices d'un même système de* ($\mathcal{H}$), *et l'axe du complexe est la droite fixe le long de laquelle glisse l'axe de* ($\mathcal{H}$).

6. Suites périodiques de Laplace de réseaux quadratiques de Wilczynski de période 4. — La congruence ($\mathcal{C}$) du numéro précédent est intéressante à plus d'un titre. Elle fait partie d'un complexe linéaire; ses couples de foyers associés sont équidistants d'une droite fixe, d'un point fixe et d'un plan fixe, qui sont respectivement l'axe du complexe un point de cet axe et le plan normal à l'axe en ce point; en tant que congruence à surface moyenne plane, elle est de Ribaucour (ses développables déterminent un réseau à invariants égaux dans le plan moyen); nous allons voir que ses réseaux focaux *sont des réseaux de Wilczynski* (dont les congruences des tangentes appartiennent chacune à un complexe linéaire), et qu'en outre ces réseaux *font partie d'une suite périodique de Laplace de réseaux de Wilczynski de période* 4. Nous montrerons au numéro suivant *qu'il n'existe pas d'autres suites de Laplace de réseaux quadratiques de période* 4 que les précédentes et leurs transformées projectives.

Les deux nappes focales de $\mathcal{C}$ sont (n° 5) les deux paraboloïdes de révolution $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ d'équations respectives

$$z = \pm \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Ces deux paraboloïdes sont polaires réciproques par rapport au complexe linéaire $Z + N = o$ contenant $(\mathcal{C})$. Soient dès lors F_1 un foyer de $(\mathcal{C})$ situé sur $\mathfrak{T}_1$ et F_2 le foyer associé sur $\mathfrak{T}_2$. La deuxième tangente F_2F_3 du réseau focal (F_2), qui est conjuguée de F_1F_2 par rapport au paraboloïde $\mathfrak{T}_2$, est par cela même située dans le complexe polaire réciproque de $Z + N = o$ par rapport à $\mathfrak{T}_2$, soit, comme on le voit aussitôt, le complexe $Z - N = o$, symétrique du complexe $Z + N = o$ et de même axe Oz que ce dernier. Les deux tangentes F_2F_1 et F_2F_3 du réseau focal F_2 de la congruence (F_1F_2) décrivant chacune une congruence d'un complexe linéaire, le réseau (F_2) est un réseau de Wilczynski; il en est évidemment de même du réseau (F_1), conformément d'ailleurs à une propriété générale suivant laquelle les dérivés successifs de Laplace d'un réseau de Wilczynski sont des réseaux de Wilczynski.

La droite F_2F_3 est située d'une part dans le plan tangent en F_2 au paraboloïde de révolution $\mathfrak{T}_2$, et d'autre part dans le complexe $Z - N = o$ symétrique par rapport au plan F_2Oz du complexe $Z + N = o$ contenant F_2F_1. Cette droite est donc symétrique de F_2F_1 par rapport au plan F_2Oz, et est par suite tangente à $\mathfrak{T}_1$ au point F_3 symétrique de F_1 par rapport à ce même plan. F_2F_3, tangente aux deux mêmes paraboloïdes $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ que F_1F_2, engendre une congruence du même type que $(\mathcal{C})$ [déduite de $(\mathcal{C})$ par une symétrie par rapport à un plan issu de Oz], et son réseau focal (F_3) est de Wilczynski tout comme (F_1) et (F_2). En poursuivant on voit que le réseau (F_1) et ses transformés de Laplace successifs (F_2), (F_3), ... sont des réseaux de Wilczynski portés alternativement par $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$.

Pour voir que la suite de Laplace se ferme après quatre opérations (est périodique de période 4), il suffit par exemple de se reporter aux projections orthogonales (f_1), (f_2), (f_3), (f_4) des réseaux (F_1), (F_2), (F_3), (F_4) sur le plan xOy. Le réseau plan (f_2), projection d'un réseau (F_2) du paraboloïde de révolution $\mathfrak{T}_2$ est un réseau orthogonal. En outre, les droites f_2f_1 et f_2f_3, projections de F_2F_1 et F_2F_3, sont, comme ces deux dernières droites, symétriques par rapport au plan f_2Oz. Les segments Of_1, Of_2, Of_3, Of_4, qui sont égaux entre eux, bissectent donc les angles du quadrilatère $f_1f_2f_3f_4$, lequel, par suite, est un carré de centre O. Il résulte de là que le quatrième réseau (F_4) transformé de Laplace de (F_1) est confondu avec (F_1). La suite est périodique de période quatre.

Les réseaux de Wilczynski de la suite précédente se projettent, sur le plan xOy, suivant des réseaux orthogonaux dont les deux familles de courbes sont des spirales logarithmiques de pôle O coupant les droites issues de O sous un angle de 45 degrés. Les réseaux projections (f_1), (f_2), ... sont évidemment à invariants égaux, et il en est de même des réseaux (F_1), (F_2), ..., portés par les paraboloïdes $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$.

Les milieux des côtés du carré $f_1f_2f_3f_4$ décrivent, en même temps que $f_1, f_2, \ldots$, des réseaux orthogonaux à invariants égaux. Ces réseaux sont les réseaux déterminés, dans le plan xOy, par les développables des congruences (F_1F_2), (F_2F_3), ... Les congruences (F_1F_2), ... sont donc des congruences de Ribaucour à surface moyenne plane dont les développables déterminent, dans le plan moyen, des réseaux orthogonaux à invariants égaux (isothermes). Comme telles elles appartiennent à une famille étudiée par M. Vaulot [1], et que, dans un Mémoire qui paraîtra prochainement aux *Annales de l'École Normale Supérieure*, j'ai rattachée aux surfaces harmoniques. On obtient la famille en question (c'est-à-dire l'ensemble des congruences de Ribaucour à surface moyenne plane dont le réseau moyen est orthogonal isotherme), en envisageant la surface harmonique $\mathcal{H}$ la plus générale $[z = f(x, y)]$, et en menant par la projection orthogonale m, sur le plan xOy, d'un point quelconque M de $\mathcal{H}$, la parallèle à la normale en M à $\mathcal{H}$. Pour les congruences (F_1F_2), (F_2F_3), ... actuelles la surface harmoniques $\mathcal{H}$ est un hélicoïde minima réglé, comme cela résulte de la construction générale indiquée au numéro 5 pour déduire les différentes congruences d'un complexe linéaire à foyers équidistants de l'axe du complexe de l'une quelconque d'entre elles. Le caractère W de ces congruences résulte ici du fait qu'elles sont dans un complexe linéaire.

Il convient également de noter que les quatre réseaux quadra-

---

(1) *Congruences rectilignes qui sont en même temps* W *et de Ribaucour. Thèse*, Paris, 1923.

tiques de la suite périodique (F_1), (F_2), (F_3), (F_4) sont tels que deux réseaux opposés quelconques, $[F_1, F_3]$ ou $[F_2, F_4]$, coïncident dans leur ensemble, les points homologues étant symétriques par rapport à l'axe commun Oz des paraboloïdes $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$.

De même les couples de congruences focales (F_1F_2) et (F_3F_4) ou $[(F_2F_3)$ et $(F_4F_1)]$, coïncident dans leur ensemble avec l'une ou l'autre des deux congruences distinctes admettant pour nappes focales $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$, les droites homologues de deux congruences d'un même couple étant symétriques par rapport à Oz.

Par homographie on peut déduire de la suite périodique précédente, une suite périodique de réseaux quadratiques de Wilczynski à invariants égaux de période 4, telle que deux réseaux opposés quelconques de la suite soient confondus dans leur ensemble, et se correspondent point par point dans une involution biaxiale ayant pour axes deux droites quelconques de l'espace (transformés de l'axe commun de $\mathfrak{T}_1$ et $\mathfrak{T}_2$ et de la droite à l'infini dans la direction de plan perpendiculaire à cet axe). Les congruences focales de la suite précédente de réseaux se correspondent deux à deux, dans les mêmes conditions, dans la même involution biaxiale, et les deux complexes linéaires dont elles font partie sont transformés chacun en lui-même par l'involution en question.

Sur chacune des deux quadratiques Q_1, Q_2 portant les réseaux (F_1), (F_2), (F_3), (F_4), l'involution biaxiale transformant en lui-même le réseau porté par la quadrique considérée peut, comme l'on voit, être réalisée par deux transformations de Laplace consécutives.

Les couples de quadriques Q_1 et Q_2 portant les suites périodiques de réseaux de Wilczynski dont il vient d'être question (transformés homographiques des couples de paraboloïdes P_1 et P_2) s'obtiennent, en se donnant arbitrairement l'une des deux quadriques, Q_1 par exemple, et en prenant pour Q_2 une quadrique homologique de Q_1 dans une homologie dont le centre est sur Q_1 et dont le plan est tangent à Q_1.

Ces couples $[Q_1, Q_2]$ jouissent de la propriété, qui les caractérise, que l'une quelconque des deux quadriques est sa propre polaire réciproque par rapport à l'autre. L'ensemble des tangentes communes à Q_1, Q_2 se décompose en deux congruences distinctes situées chacune dans un complexe linéaire L_1 ou L_2, et les deux complexes L_1, L_2 se transforment chacun en lui-même dans la polarité définie par l'autre.

7. **Remarques complémentaires.** — Les premières suites périodiques de Laplace de réseaux ont été rencontrées par G. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. III, p. 472 et suiv.). Tout réseau minima (M) de la géométrie cayleyenne de quadrique fondamentale Q (don les tangentes sont tangentes à Q) fournit une suite périodique de période 4; le deuxième réseau transformé de Laplace de (M) est aussi minima, et les deux réseaux restants sont portés par Q. G. Darboux n'avait d'ailleurs pas reconnu la périodicité des suites de Laplace issues des réseaux minima non euclidiens. Cette périodicité a été mise en évidence pour la première fois par C. Guichard (¹).

Les suites périodiques de réseaux quadratiques de période 4, dont deux réseaux non consécutifs sont situés sur une même quadrique Q_1, les deux autres étant situés sur une autre quadrique Q_2, ont été étudiés par G. Tzitzeica (²) qui a signalé la configuration $[Q_1, Q_2]$ définie, à une homographie près, par deux paraboloïdes de révolution égaux tangents en leur sommet. G. Tzitzeica n'a toutefois pas indiqué la propriété, mise en évidence dans le travail actuel, suivant laquelle les quatre réseaux quadratiques de la suite périodique envisagée sont des réseaux de Wilczynski à tangentes situées dans l'un ou l'autre de deux complexes linéaires (se transformant comme on l'a vu chacun en lui-même dans la polarité définie par l'autre). D'autre part, il convient de montrer qu'il n'existe pas d'autres suites périodiques de réseaux quadratiques de Wilczynski de période 4 que celles dont il vient d'être question. C'est ce que l'on peut faire de la façon suivante.

Considérons une suite périodique de Laplace de période 4. Nous désignerons par (A), (B), (C), (D) les quatre réseaux

---

(¹) C. Guichard, *Sur les surfaces minima non euclidiennes* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. XIII, 1896, p. 401).

(²) G. Tzitzeica, *Géométrie projective différentielle des réseaux.* Paris, Gauthier-Villars, 1924.

consécutifs distincts de la suite ainsi que leurs quadriques supports, et par (AB), (BC), (CD), (DA) la suite de leurs congruences focales. Envisageons la réciprocité définie par la quadrique (A). Dans cette réciprocité les congruences (AB) et (AD) se correspondent; il en est par suite de même de leurs nappes focales (B) et (D) autres que (A), et par suite de même aussi des congruences (BC) et (DC) dont les rayons BC et DC sont respectivement conjugués de BA et DA par rapport à (B) et (D). BC et DC sont deux droites concourantes polaires réciproques par rapport à la quadrique (A); leur point de rencontre C est donc sur (A); il en résulte que la quadrique (C) est confondue avec (A). De même (B) est confondue avec (D). Les quatre réseaux envisagés sont donc tels que *deux réseaux non consécutifs* (A) *et* (C) *soient portés par une même quadrique* Q_1, *les deux autres* (B) *et* (D) *étant portés par une autre quadrique* Q_2.

Nous avons vu plus haut que (B) et (D) étaient polaires réciproques par rapport à (A). Il en résulte que la quadrique Q_2 portant (B) et (D) est sa propre polaire réciproque par rapport à la quadrique (A) ou Q_1. Chacune des deux quadriques Q_1, Q_2 *se transforme donc en elle-même dans la polarité définie par l'autre.*

Il reste à voir quelle est la position relative de Q_1 et Q_2.

Dans le problème de la recherche des quadriques Q_2 identiques à leurs polaires réciproques par rapport à une quadrique Q_1 (1), il y a lieu d'envisager deux cas suivant que la développable circonscrite à Q_1 et Q_2, ou bien touche Q_1 et Q_2 suivant une courbe, laquelle, d'après les propriétés de la transformation par polaires réciproques, est une conique le long de laquelle Q_2 est inscrite dans Q_1, ou bien se réduit à deux plans que Q_1 et Q_2 touchent aux deux mêmes points. Dans le premier cas il suffit par exemple de supposer, comme le fait Darboux dans l'Ouvrage cité, que Q_1 est une sphère, pour obtenir aussitôt les quadriques Q_2 inscrites dans Q_1 identiques à leurs polaires réciproques par rapport à Q_1. Une vérification immédiate montre alors que Q_1 ne

(1) Voir, par exemple, l'Ouvrage de G. DARBOUX (où seul le premier cas est examiné), *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires.*

se transforme en elle-même par rapport à aucune de ces quadriques. Plaçons-nous dans le deuxième cas. On peut alors admettre que Q_1 et Q_2 sont deux paraboloïdes tangents en O au plan xOy et tangents au plan de l'infini au point à l'infini sur Oz. Si l'on suppose en outre, ce que l'on peut toujours faire, que Q_1 est de révolution autour de Oz, les équations de Q_1 et Q_2 auront respectivement les formes

$$(Q_1) \qquad 2z = x^2 + y^2,$$

$$(Q_2) \qquad 2z = ax^2 + by^2 \qquad (ab > 0).$$

Le plan polaire d'un point quelconque x, y, z de Q_2 par rapport à Q_1 a pour équation

$$2xX + 2yY - 2Z - ax^2 - by^2 = 0,$$

et l'on voit que ce plan est tangent à Q_2 si l'on a, soit

$$a = 1, \qquad b = 1$$

(Q_2 est alors confondue avec Q_1); soit

$$a = -1, \qquad b = -1,$$

auquel cas Q_2 est symétrique de Q_1 par rapport au plan xOy. Nous retombons sur les couples de paraboloïdes symétriques par rapport au sommet commun, qui constituent par suite, avec leurs transformés homographiques, les seuls couples de quadriques tels que chaque quadrique du couple se transforme en elle-même dans la polarité définie par l'autre.

Il résulte de là que *les seules suites périodiques de réseaux quadratiques de période 4* sont les suites de Wilczynski que nous avons été conduits à envisager dans ce travail, et qui sont constituées par les réseaux focaux des deux congruences formées par les tangentes communes à un couple quelconque de quadriques, homologiques dans une homologie dont le centre et le plan sont respectivement un point et un plan tangent de l'une des deux quadriques du couple.

Systèmes cycliques dont les axes sont dans un complexe linéaire. — Comme couples intéressants de quadriques homologiques associées conformément à l'énoncé qui précède, nous signalerons ceux pour lesquels l'une des quadriques est une sphère S. Il existe ∞^1 couples [S, H] distincts de cette espèce, un couple étant déterminé par la distance du centre d'homologie A au point de contact B de S et du plan (P) d'homologie (¹).

Pour chacun de ces couples les deux réseaux de la suite de Wilczynski portés par S sont des réseaux orthogonaux à invariants égaux (isothermes), confondus d'ailleurs dans leur ensemble, et auto-conjugés dans l'involution bi-axiale ayant pour axes la droite D support de la corde AB et sa polaire réciproque Δ par rapport à S (*voir* le n° 6).

Ces réseaux orthogonaux sont susceptibles d'une définition très simple. Il suffit de se reporter, par homographie, à la figure initiale formée des deux paraboloïdes symétriques P_1, P_2 qui est l'origine du développement actuel (D est alors l'axe commun de P_1, P_2, et Δ est à l'infini dans la direction de plan normale à D), pour voir que l'un quelconque de ces réseaux est constitué *par les courbes de la sphère* S, *bissectant les faisceaux orthogonaux de cercles déterminés, sur* S, *par deux faisceaux de plans dont les arêtes* D *et* Δ *sont conjuguées par rapport à* S.

Les réseaux sphériques isothermes que l'on vient de définir peuvent, en particulier, être considérés comme les représentations sphériques des lignes de courbure des adjointes des surfaces minima de O. Bonnet à lignes de courbure planes dans les deux systèmes. Il est intéressant d'avoir mis en évidence la propriété, qui les classe parmi les réseaux de Wilczynski, suivant laquelle les congruences des tangentes aux courbes sphériques qui les constituent appartiennent à des complexes linéaires.

C'est une propriété bien connue des réseaux de Wilczynski que, parmi les congruences *harmoniques* (²) à un tel réseau il en existe une infinité appartenant à un complexe linéaire [plus

---

(¹) Si A et B sont diamétralement opposés sur S, H est un hyperboloïde de révolution équilatère à deux nappes de sommets A, B. Les tangentes communes à S et H sont distribuées dans deux complexes linéaires symétriques d'axe AB, et les courbes qu'elles enveloppent sur S sont les loxodromies coupant à 45 degrés les méridiens de S issus de A, B.

(²) C'est-à-dire décrites par une droite située dans le plan tangent du réseau, et dont les développables correspondent aux courbes du réseau (les foyers étant alors sur les tangentes du réseau).

précisément ∞^1 dans chacun des complexes du faisceau admettant pour complexes de base les deux complexes auxquels appartiennent les tangentes du réseau considéré]. Les congruences déduites de l'une quelconque des congruences harmoniques précédentes par la méthode de Laplace appartiennent toutes à des complexes linéaires. Chacune d'elles est harmonique à un réseau de la suite de Laplace déduite du réseau considéré, et, si la suite des réseaux est périodique, celle des congruences harmoniques l'est aussi et a la même période.

Pour les réseaux sphériques de Wilczynski donnant lieu à des suites périodiques de Laplace de période 4, dont nous avons donné plus haut la construction géométrique, les congruences harmoniques appartenant à des complexes linéaires dont nous venons de rappeler l'existence sont des *congruences cycliques* (formées par les axes des cercles d'un système cyclique). En outre, chacune de ces congruences donne une suite de Laplace de période 4, dont les congruences appartiennent à des complexes linéaires et dans laquelle deux congruences opposées sont cycliques.

Nous venons ainsi de mettre en évidence une infinité de systèmes cycliques, formés de cercles orthogonaux à une sphère donnée, et dont les congruences des axes appartiennent à des complexes linéaires.

Le problème général de la recherche des congruences cycliques appartenant à un complexe linéaire semble intéressant; j'y reviendrai peut-être ultérieurement. Envisageons ici l'une quelconque, G, des congruences cycliques d'un complexe linéaire dont nous venons d'établir l'existence, qui sont harmoniques à un réseau sphérique isotherme quelconque Ω dont les tangentes bissectent deux faisceaux orthogonaux de cercles de la sphère. Soit Σ une surface quelconque admettant le réseau Ω pour représentation sphérique de ses lignes de courbure. Il existe, comme l'on sait, ∞^1 congruences Γ parallèles à G et harmoniques au réseau de courbure de Σ, et ces congruences, harmoniques à un réseau orthogonal, sont cycliques comme G. Si l'on effectue la suite de Laplace à partir de l'une quelconque des congruences Γ précédentes, les congruences de cette suite seront parallèles aux congruences de même rang de la suite périodique de période 4 que l'on obtiendrait à partir de G. Il suffit dès lors de se rappeler que toute congruence parallèle à une congruence cyclique est elle-même cyclique, pour voir que les congruences de la suite (nécessairement illimitée dans les deux sens si Σ n'est pas une sphère) envisagée sont cycliques de deux en deux, et pour pouvoir énoncer le résultat suivant.

Parmi les systèmes cycliques normaux aux surfaces admettant pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure les réseaux isothermes Ω envisagés ici, il y en a une infinité dont les congruences des axes sont parallèles à des congruences appartenant à un complexe linéaire. Ces congruences donnent lieu à des suites illimitées de Laplace jouissant de la propriété suivante : *leurs éléments sont, de deux en deux, des congruences cycliques parallèles à des congruences de l'un ou l'autre de deux complexes linéaires fixes.*

(Manuscrit reçu le 20 décembre 1944).