BULLETIN DE LA S. M. F.

PICQUET

Détermination de la classe de la courbe enveloppe des axes des coniques, perspectives sur un plan vertical de cercles de rayons égaux situés dans un plan vertical et dont les centres sont sur une horizontale. Construction des axes de ces courbes

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 82-84

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__82_0>

Détermination de la classe de la courbe enveloppe des axes des coniques, perspectives sur un plan vertical de cercles de rayons égaux situés dans un plan vertical et dont les centres sont sur une horizontale. Construction des axes de ces courbes; par M. Picquet.

(Séance du 18 juillet 1877.)

On a souvent, en perspective, à considérer ce système de coniques; il est facile de faire voir que leurs axes enveloppent une courbe de la quatrième classe. Nous remarquerons d'abord que leurs centres décrivent une ligne droite : le centre de l'une d'elles Σ est, en effet, le pôle par rapport à cette courbe de la droite de l'infini, dont la perspective s'obtiendra sur le plan des cercles en menant par l'œil un plan parallèle au plan des coniques. Les deux plans étant verticaux, leur intersection V sera verticale et conséquemment perpendiculaire à la droite des centres des cercles; d'où il suit que le lieu de ses pôles par rapport aux cercles est la droite des centres, et que, par conséquent, le lieu des centres des coniques est sur le plan des coniques la droite perspective de la droite des centres des cercles. Considérons maintenant un point P de la droite des centres des coniques : si p coniques du système ont leur centre en ce point, la classe cherchée sera $2p$, puisqu'à chacune d'elles correspondent deux tangentes menées du point P à la courbe enveloppe, lesquelles sont les axes de cette conique; à condition toutefois que la droite des centres, sur laquelle est le point P, ne soit pas tangente à l'enveloppe.

D'abord cette droite n'est pas tangente à l'enveloppe si l'œil n'est pas dans le plan horizontal passant par la droite des centres des cercles; car si cela était, elle serait axe d'une certaine conique du système ayant son centre en un point Q pris sur elle, perspective d'un point Q_1 de la droite des centres des cercles, et l'on obtiendrait l'autre axe de la même conique en cherchant la perspective de la droite du plan des cercles, issue du point Q_1 et conjuguée de la droite de leurs centres par rapport au cercle pour lequel Q_1 est le pôle de la verticale V. La droite cherchée dans le plan des cercles sera évidemment verticale, ainsi que sa perspective sur le plan des coniques; le second axe serait donc vertical, ce qui est impossible, puisque le premier n'est pas horizontal, à moins que l'œil ne soit dans le plan horizontal des centres des cercles.

De plus, les coniques du système qui ont leur centre en P sont les perspectives des cercles par rapport auxquels P_1, perspective de P, est le pôle de la verticale V. Pour les trouver, il faut construire les cercles d'un rayon donné, dont le centre est sur une droite donnée et conjuguée à deux points, l'un P_1 et l'autre le pied V_1 de la verticale V sur la droite des centres; la dernière condition peut se remplacer par celle de couper orthogonalement le cercle ayant PV_1 pour diamètre. Or le centre d'un cercle de rayon donné qui coupe orthogonalement un cercle donné décrit un cercle concentrique au dernier. Il y aura donc deux cercles répondant à la question, et la construction sera la suivante. Sur P_1V_1 comme diamètre on décrira un cercle. En un point m de ce cercle, on lui mènera une tangente sur laquelle on prendra à partir du point m une longueur mp égale au rayon constant des cercles; le cercle concentrique au précédent et passant par le point p coupera la droite des centres en deux points α et β qui seront les centres de cercles de rayons mp, et par rapport auxquels le point P sera le pôle de la verticale V; leurs perspectives seront les deux coniques cherchées ayant leur centre en P, dont les axes sont les *quatre* tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe considérée, puisque, d'ailleurs, la droite des centres n'est pas tangente à cette courbe. L'une de ces coniques sera une ellipse et l'autre une hyperbole, puisque, sur les deux cercles qui sont leurs perspectives, l'un coupe la verticale V et l'autre ne la coupe pas. Il est facile de construire leurs axes :

1° Pour l'ellipse, perspective du cercle de centre α, il suffit de remarquer que la direction P_1V_1 et la direction perpendiculaire, étant conjuguées dans le cercle, se perspectiveront suivant deux diamètres conjugués de la courbe dont on pourra, dès lors, construire les axes en grandeur et en direction par une des méthodes connues.

2° Pour l'hyperbole, perspective du cercle de centre β, on voit immédiatement que ses asymptotes sont les droites PT, PU, perspectives des tangentes menées du point P_1 à ce cercle, et ses axes seront les deux bissectrices des angles de ces deux droites.

Remarque. — Si le point P est la perspective de celui des centres des cercles qui est à l'infini, c'est-à-dire le point d'intersection avec le plan des coniques de la parallèle menée par l'œil au plan des cercles, l'ellipse correspondante se réduit à un point et la construction précédente ne s'applique plus; mais le calcul fait voir que, quoique réduite à un point, elle est infiniment aplatie sur la verticale du point P, qui est alors un de ses axes, tandis que l'autre est horizontal. Quant à l'hyperbole perspective du cercle de centre V, la construction subsiste et donne les bissectrices des deux droites issues du point P, qui sont l'enveloppe des coniques du système.