BULLETIN DE LA S. M. F.

PEDRO PI CALLEJA

Note sur les intégrales singulières et leur application à la forme complexe de l'intégrale de Fourier

Bulletin de la S. M. F., tome 68 (1940), p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1940__68__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

NOTE SUR LES INTÉGRALES SINGULIÈRES ET LEUR APPLICATION A LA FORME COMPLEXE DE L'INTÉGRALE DE FOURIER;

PAR M. PEDRO PI CALLEJA.

Dans cette Note, nous résumons les principaux résultats d'un Mémoire de l'*Academia de Ciencias y Artes de Barcelona* [1], que de récents événements ont empêché de faire connaître, en appliquant les susdits résultats à systématiser à la façon de Lebesgue les conditions de convergence de la forme complexe de l'intégrale de Fourier que nous avons étudiées en un travail paru à la *Mathematische Zeitschrift* [2].

A cet effet, nous généralisons et étendons les théorèmes sur les intégrales singulières dus à H. Lebesgue [3] et E. W. Hobson [4], étudiant la convergence de ces intégrales pour des familles plus restreintes comme celle que nous appelons « continues de Lispschitz ».

Dans les théorèmes de M. Lebesgue sur les conditions nécessaires et suffisantes pour que

$$I_n(f) = \int_a^b f(x)\varphi(x, n)\,dx$$

---

(1) P. PI CALLEJA, *Sobre la convergencia de integrales dependientes de un nódulo variable* (*Mem. Ac. Ci. Barcelona*, 1936; *Terc. época*, Vol. XXV, nº 13).

(2) P. PI CALLEJA, *Über die Konvergenzbedingungen der komplexen Form des Fourierschen Integrals* (*M. Z.*, t. 40, 1935, p. 349).

(3) H. LEBESGUE, *Sur les intégrales singulières* (*Ann. Fac. des Sci. de Toulouse*, 3ᵉ série, t. 1, 1909, p. 25).

(4) E. W. HOBSON, *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's Series*, Vol. 2, Chap. VII, 2ᵉ éd., 1926. Cambridge.

tende vers zéro quand n tend vers ∞, on peut substituer dans les deuxièmes conditions et les conclusions les mots « tende vers zéro » par les mots « soit convergente », obtenant ainsi les conditions de convergence de $I_n(f)$ pour les familles des fonctions sommables, mesurables L^q, bornées et sommables, intégrables au sens de Riemann, simplement discontinues, de variation bornée, et continues de variation bornée, non pour la convergence à zéro, mais seulement pour leur convergence vers une limite finie non préalablement fixée.

Il suffit d'appliquer aux nouvelles conditions le théorème général de convergence de Cauchy, en tenant compte des théorèmes de Lebesgue appliqués au noyau $[\varphi(x, n+p) - \varphi(x, n)]$ *uniformément* par rapport à p, d'après l'observation que M. Lebesgue fait sur cette uniformité à la page 68 de son travail cité.

A ces théorèmes, nous pouvons joindre celui qui se rapporte à la famille des fonctions que nous appelons continues de Lipschitz.

Nous disons qu'une fonction est continue de Lipschitz au point c intérieur à l'intervalle (a, b), si cette fonction est continue dans $a \leqq x \leqq b$, et si l'on peut déterminer trois nombres positifs δ, K, γ $(1 \geqq \gamma > 0)$, tels que pour les valeurs de x appartenant à $0 < |x - c| \leqq \delta$ soit

$$|f(x) - f(c)| < K\,|x - c|^{\gamma}.$$

Alors on peut énoncer le théorème suivant :

Pour que $I_n(f)$ *soit convergente vers une limite finie quand* n *tend vers* ∞, *pour toute fonction continue de Lipschitz en un certain point* c *intérieur à l'intervalle* (a, b), *il faut et il suffit :*

1° *Que pour tout nombre* $s > 0$, *il existe un nombre positif* M_s *indépendant de* n, *tel que*

$$\int_a^b |x - c|^s \, |\varphi(x, n)| \, dx < M_s.$$

2° *Que l'intégrale* $\int_a^b \varphi(x, n)\,dx$ *soit convergente quand* n *tend vers* ∞, *et que cette condition soit aussi remplie par l'intégrale* $\int_\lambda^a (x - \lambda)\varphi(x, n)\,dx$ *pour tout point* λ *de l'intervalle* (a, b).

Les conditions sont suffisantes. — Si la fonction $\varphi(x, n)$ remplit pour un certain point c les conditions énoncées, soit f une fonction continue de Lipschitz quelconque au point c.

Alors il existe trois nombres positifs δ, K, γ tels que pour tout nombre positif $s < \gamma \leqq 1$ soit

$$\frac{|f(x) - f(c)|}{|x - c|^s} < \mathrm{K}\,|x - c|^{\gamma - s} < \mathrm{K}\,\delta_1^{\gamma - s}$$

dans $0 < |x - c| < \delta_1$ et pour tout $\delta_1 \leqq \delta$.

Soit δ_p le plus petit des nombres δ et $\left(\frac{1}{p\mathrm{KM}_s}\right)^{\frac{1}{\gamma - s}}$, pour un nombre positif p quelconque.

Alors, on peut écrire

$$\begin{aligned}&\left|\int_{c-\delta_p}^{c+\delta_p} \{f(x) - f(c)\}\,\varphi(x, n)\,dx\right| \\ &\leqq \mathrm{K}\,\delta_p^{\gamma - s} \int_{c-\delta_p}^{c+\delta_p} |x - c|^s\,|\varphi(x, n)|\,dx \leqq \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

Soit $f_p(x)$ un polygone inscrit à $f(x)$ tel que deux de ses segments soient déterminés par les points $f(c - \delta_p)$, $f(c)$ et les $f(c)$, $f(c + \delta_p$ et les autres remplissent la condition

$$|f(x) - f_p(x)| < \frac{\delta_p^s}{p\,\mathrm{M}_s},$$

pour tout x des intervalles

$$a \leqq x \leqq c - \delta_p \qquad \text{et} \qquad c + \delta_p \leqq x \leqq b.$$

Alors pour $0 < |x - c| \leqq \delta_p$, nous pouvons écrire

$$\frac{|f_p(c) - f_p(x)|}{|x - c|} = \frac{|f(c) - f(c \pm \delta_p)|}{\delta_p} < \mathrm{K}\,\delta_p^{\gamma - 1},$$

donc, on a

$$\begin{aligned}&\left|\int_{c-\delta_p}^{c+\delta_p} \{f_p(c) - f_p(x)\}\,\varphi(x, n)\,dx\right| \\ &\leqq \mathrm{K}\,\delta_p^{\gamma - 1} \int_{c-\delta_p}^{c+\delta_p} |x - c|\,|\varphi(x, n)|\,dx \\ &\leqq \mathrm{K}\,\delta_p^{\gamma - s} \int_{c-\delta_p}^{c+\delta_p} |x - c|^s\,|\varphi(x, n)|\,dx \leqq \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

Pour $|x-c|>\delta_p$, on a

$$\left|\int_a^{c-\delta_p}\{f(x)-f_p(x)\}\varphi(x,n)\,dx\right|<\frac{\delta_p^s}{p\mathrm{M}_s}\int_a^{c-\delta_p}|\varphi(x,n)|\,dx$$
$$\leqq\frac{1}{p\mathrm{M}_s}\int_a^{c-\delta_p}|x-c|^s\,|\varphi(x,n)|\,dx<\frac{1}{p},$$

et, de même,

$$\left|\int_{c+\delta_p}^{b}\{f(x)-f_p(x)\}\varphi(x,n)\,dx\right|<\frac{1}{p}.$$

Des inégalités antérieures, on peut déduire

$$\left|\int_a^b f(x)\varphi(x,n)\,dx-\int_a^b f_p(x)\varphi(x,n)\,dx\right|<\frac{4}{p}$$

vérifiée *uniformément* par rapport à n; donc la limite $\mathrm{I}_n(f)$ existera avec la $\lim\limits_{p\to\infty}\mathrm{I}_p$, où I_p est la limite finie de l'intégrale $\mathrm{I}_n(f_p)$ quand $n\to\infty$, qui existe par la condition 2° de l'hypothèse.

Les conditions sont nécessaires. — La condition 2° est nécessaire puisque tout polygone continu est une fonction continue de Lipschitz dans chacun de ses points. La condition 1° est aussi nécessaire parce que, dans le cas contraire, nous pouvons supposer qu'au point c, il existe toujours des nombres n_0 pour une certaine valeur de s qui fassent l'intégrale $\int_a^b|x-c|^s|\varphi(x,n_0)|\,dx$ aussi grande que l'on veut.

Alors soit la fonction $s_0(x)=$ signe de $|x-c|^s\varphi(x,n_0)$, telle que

$$s_0(x)=\begin{cases}+1 \text{ pour } \varphi(x,n_0)\geqq 0,\\ -1 \text{ pour } \varphi(x,n_0)<0,\end{cases}$$

c'est-à-dire qu'elle fasse

$$s_0(x)\,|x-c|^s\,\varphi(x,n_0)=|x-c|^s\,|\varphi(x,n_0)|.$$

Donné $\varepsilon>0$ indifféremment, on peut trouver un $\delta>0$ tel que pour tout ensemble e, part de l'intervalle (a,b), de mesure $m(e)<\delta$, il fasse l'intégrale

$$\int_e|x-c|^s\,|\varphi(x,n_0)|\,dx<\varepsilon.$$

Soit e_s l'ensemble mesurable où $s_0(x) = +1$; alors il existe un ensemble e'_s composé d'un nombre fini d'intervalles partiels de (a, b) sans points communs, tel que l'ensemble des points situés soit dans e_s, soit dans e'_s, mais non communs aux deux, ait une mesure inférieure à $\frac{\delta}{4}$ (Hobson, Ouvrage cité, Vol. 1, p. 189). Soit la fonction $\psi_0(x)$ égale à $+1$ dans e'_s et égale à -1 dans le complémentaire e'_n. Si e_n est l'ensemble complémentaire de e_s, l'ensemble des points situés soit dans e_n, soit dans e'_n, mais non communs aux deux, aura une mesure inférieure à $\frac{\delta}{4}\cdot$ Donc, l'ensemble des points où $\psi(x)$ ne sera pas égale à $s_0(x)$ aura une mesure inférieure à $\frac{\delta}{2}\cdot$ La fonction $\psi_0(x)$ a seulement un nombre fini de points de discontinuité que l'on peut éviter en unissant par segments les points de $\psi_0(x)$ situés à gauche et à droite, et à une distance si petite que l'on veut de chaque point de discontinuité. Ainsi, nous aurons obtenu une fonction continue $g_0(x)$, telle qu'elle remplisse les conditions

$$g_0(a) = g_0(b) = 0; \qquad | g_0(x) | \leqq 1$$

et diffère seulement de $s_0(x)$ dans un ensemble de mesure inférieure à δ.

Puisque

$$\left| \int_e g_0(x) \, | x - c |^s \, \varphi(x, n_0) \, dx \right| \leqq \int_e | x - c |^s \, | \varphi(x, n_0) | \, dx,$$

la différence des intégrales

$$\int_a^b s_0(x) \, | x - c |^s \, \varphi(x, n_0) \, dx \qquad \text{et} \qquad \int_a^b g_0(x) \, | x - c |^s \, \varphi(x, n_0) \, dx,$$

sera en valeur absolue plus petite que 2ε. Donc, si n_0 est un nombre qui fait

$$\int_a^b | x - c |^s \, | \varphi(x, n_0) | \, dx > l_0 + 2\varepsilon,$$

on peut construire une fonction continue $g_0(x)$ telle qui fasse

$$\int_a^b g_0(x) \, | x - c |^s \, \varphi(x, n_0) \, dx > l_0$$

et remplisse les conditions

$$g_0(a) = g_0(b) = 0; \qquad |g_0(x)| \leqq 1.$$

Si nous prenons pour l_0 la valeur $l_1 = 2$, soit n_1 et $g_1(x)$, le nombre et la fonction correspondante, et appellons

$$L_1 = \int_a^b |x - c|^s |\varphi(x, n_1)| dx > l_1 = 2.$$

Si $I_n[|x - c|^s g_1(x)]$ n'est pas bornée quand $n \to \infty$, nous aurons trouvé une fonction continue de Lipschitz au point c :

$$F(x) = |x - c|^s g_1(x),$$

pour laquelle le théorème n'est pas vrai; dans le cas contraire, soit C_1 indépendant de n, la borne correspondante.

Alors, nous pouvons prendre pour l_0 la valeur $l_2 = 2^2 C_1 L_1$, avec n_2 et $g_2(x)$ comme nombre et fonction correspondants et appeler

$$L_2 = \int_a^b |x - c|^s |\varphi(x, n_2)| dx > l_2.$$

Si

$$I_n \left\{ |x - c|^s \left[g_1(x) + \frac{1}{2 L_1} g_2(x) \right] \right\},$$

n'est pas bornée quand $n \to \infty$, la fonction continue de Lipschitz, au point c pour laquelle le théorème n'est pas vrai, sera

$$F(x) = |x - c|^s \left[g_1(x) + \frac{1}{2 L_1} g_2(x) \right].$$

Dans le cas contraire, il existera une borne $C_2 > C_1 + 2$ pour la suite I_n.

Répétant ce raisonnement, où

$$l_{i+1} = 2^{i+1} C_i L_i; \qquad L_i = \int_a^b |x - c|^s |\varphi(x, n_i)| dx; \qquad C_i > C_1 + i,$$

nous aurons obtenu une fonction

$$F(x) = |x - c|^s \left[g_1(x) + \frac{1}{2 L_1} g_2(x) + \frac{1}{2^2 L_2} g_3(x) + \dots \right],$$

représentée par une série uniformément convergente de fonctions continues, qui est continue de Lipschitz au point c et nulle à $x = a$ et $x = b$.

Pour cette fonction

$$\begin{aligned} I_{n_i}(F) &\geqq \frac{1}{2^{i-1}L_{i-1}} \int_a^b g_i(x)\,|x-c|^s \varphi(x, n_i)\,dx \\ &\quad - I_{n_i}\left[|x-c|^s\left(g_1 + \frac{1}{2L_1}g_2 + \ldots + \frac{1}{2^{i-2}L_{i-2}}g_{i-1}\right)\right] \\ &\quad - I_{n_i}\left[|x-c|^s\left(\frac{1}{2^iL_i}g_{i+1} + \frac{1}{2^{i+1}L_{i+1}}g_{i+2} + \ldots\right)\right] \\ &> \frac{l_i}{2^{i-1}L_{i-1}} - C_{i-1} - \left(\frac{1}{2^iL_i}L_i + \frac{1}{2^{i+1}L_{i+1}}L_i + \ldots\right) \\ &\geqq 2C_{i-1} - C_{i-1} - 1 > i - 2, \end{aligned}$$

qu'on peut prendre si grande que l'on veut; donc, pour cette fonction, le théorème ne sera pas vrai.

Ainsi, les conditions sont bien nécessaires.

La démonstration est valable pour les théorèmes référents à la famille de fonctions continues de Lipschitz au point c intérieur à l'intervalle (a, b) et nulles au point $x = a$ et à la famille de fonctions continues de Lipschitz au point c intérieur à l'intervalle (a, b) et nulles aux points $x = a$ et $x = b$ si, dans l'énoncé donné, on remplace pour la première famille la condition 2° par la suivante :

2° que l'intégrale $\int_\lambda^b (x-\lambda)\varphi(x, n)\,dx$ soit convergente quand n tend vers ∞ quel que soit λ pris dans l'intervalle (a, b); et de la même façon pour la deuxième famille, on remplace la condition 2° par la suivante :

2° Que l'intégrale

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\mu-\lambda}{2}} t\,\{\varphi(\lambda+t, n) + \varphi(\mu-t, n)\}\,dt \\ &= \int_\lambda^{\frac{\lambda+\mu}{2}} (x-\lambda)\varphi(x, n)\,dx + \int_{\frac{\lambda+\mu}{2}}^{\mu} (\mu-x)\varphi(x, n)\,dx \end{aligned}$$

soit convergente quand n tend vers ∞ quels que soient λ et μ pris dans l'intervalle (a, b).

On peut déduire du théorème démontré le corollaire suivant :

Il suffit qu'il existe un point c de l'intervalle $a \leqq x \leqq b$ *auquel on peut faire correspondre des nombres* ε *et* M *indépendants de* n *qui remplissent*

$$1 \geqq \varepsilon > 0; \qquad \int_a^b |x - c|^{1-\varepsilon} |\varphi(x, n)| \, dx < M,$$

et que la condition 2° *soit vérifiée pour que toute fonction continue dans l'intervalle* $a \leqq x \leqq b$, *avec dérivée à droite et à gauche au point c fasse* $I_n(f)$ *convergente quand* $n \to \infty$.

Particulièrement, ce corollaire sera valable pour toute fonction continue avec dérivée simplement discontinue dans l'intervalle (a, b); donc, dans ce cas, il existe toujours la dérivée à gauche $f'_-(x)$ et la dérivée à droite $f'_+(x)$; en effet, il suffit d'appliquer la formule des accroissements finis

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h) \qquad (h > 0),$$

dont la validité exige seulement que $f(x)$ soit dérivable à l'intérieur de l'intervalle $(x, x + h)$; en divisant par $h \to 0$, on prouve que

$$f'_+(x) = f'(x + 0).$$

Si $\varphi(x, n)$ dépend de certains paramètres, les théorèmes ci-dessus pourront s'énoncer, d'après la remarque d'uniformité de M. Lebesgue citée auparavant. On peut étendre aussi l'intervalle d'intégration à l'infini.

Dans notre travail cité de la *Mathematische Zeitschrift*, nous étudions les conditions qui permettent de reférer la convergence ou divergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin u(t - x) \, dt$$

à celles de l'intégrale

$$J_n = \int_{-\delta}^{\delta} f(t + x) \frac{1 - \cos nt}{t} \, dt \quad \text{quand } n \to \infty$$

pour δ fixe, si petit soit-il.

Ces conditions sont analogues, mais pas égales, aux conditions données par Dini [5], Pringsheim [6] et Young-Hahn [7] pour référer la convergence ou divergence de l'intégrale de Fourier

$$\int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos u(t-x)\, dt$$

à la convergence ou divergence de l'intégrale de Dirichlet

$$\mathrm{I}_n = \int_{-\delta}^{\delta} f(t+x) \frac{\sin nt}{t}\, dt \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Par l'étude que nous venons de faire, on peut voir à la façon générale et systématique de M. Lebesgue pour quelle raison les intégrales J_n et I_n ne convergent pas dans les mêmes conditions, comme nous le démontrons directement dans le travail de la *Mathematische Zeitschrift*.

En effet, d'après notre travail cité, le noyau de l'intégrale I_n de Dirichlet remplit les conditions

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta'}^{\delta} \frac{\sin nt}{t}\, dt = 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{-\delta'}^{\delta} \frac{\sin nt}{\pi t}\, dt = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{2 \sin nt}{\pi t}\, dt = 1,$$

pour des nombres positifs δ et δ' quelconques, tandis que le noyau de notre intégrale J_n remplit les conditions

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{1-\cos nt}{t}\, dt = \infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\delta'}^{\delta} \frac{1-\cos nt}{t}\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_{\delta'}^{\delta} \frac{1-\cos nt}{t}\, dt = \log\delta - \log\delta' \neq 0$$

pour $\delta > \delta' > 0$ quelconques.

Donc, l'intégrale J_n ne sera pas singulière au sens de Lebesgue ou d'Hobson dans leurs travaux cités.

---

(5) U. Dini, *Serie di Fourier*, Pisa 1880.

(6) A. Pringsheim, *Math. Annalen*, t. 68, 1910, p. 367; t. 71, 1912, p. 289.

(7) W. H. Young, *Proc. Roy. Soc. Edinb.*, t. 31, 1911, p. 559. — H. Hahn, *Acta, mathematica*, t. 49, 1926, p. 301.

Puisque le noyau de J_A ne remplit pas la condition 1° des théorèmes modifiés de Lebesgue relatifs, soit à la famille de fonctions de variation bornée, soit à la famille de fonctions continues de variation bornée qui exige, soit

$$\left|\int^{\lambda} \varphi(x, n)\,dx\right| < M,$$

où le nombre positif M est indépendant de n, et le point λ est pris dans l'intervalle (a, b), on peut voir, d'après la nécessité de cette condition pour quelle raison la condition de Jordan ([8]) n'est pas suffisante pour assurer la convergence de l'intégrale J_n, même aux points de continuité de la fonction.

Cependant, les théorèmes démontrés ci-dessus relatifs à la famille de fonctions continues de Lipschitz, et ses cas particuliers expliquent pourquoi la condition de Lipschitz ([9]) (et ses cas particuliers) est suffisante pour assurer la convergence, soit de l'intégrale I_n, soit de l'intégrale J_n.

([8]) C. Jordan, *Comptes rendus*, t. 92, 1881, p. 228.
([9]) R. Lipschitz, *Journ. reine u. angew. Math.*, t. 63, 1864, p. 296.