

# BULLETIN DE LA S. M. F.

TH. ANGHELUTZA

## **Sur une limite pour les modules des zéros des polynômes**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 67 (1939), p. 120-131

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1939\\_\\_67\\_\\_120\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__120_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UNE LIMITE POUR LES MODULES DES ZÉROS  
DES POLYNOMES;

PAR M. TH. ANGHELOTZA.

1. M. Paul Montel <sup>(1)</sup>, dans son mémoire devenu classique, a montré que le polynôme

$$(1) \quad P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p + \dots + a_n x^n,$$

dont les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_p$  sont fixes, admet  $p$  zéros bornés en modules par un nombre qui dépend de ces coefficients et du nombre des termes non nuls de  $P(x)$ .

M. Edward Van Vleck <sup>(2)</sup> a montré que ce nombre est la racine positive de l'équation

$$(2) \quad |a_p| r^p - C_{n-p+1}^1 |a_{p-1}| r^{p-1} - C_{n-p+2}^2 |a_{p-2}| r^{p-2} - \dots - C_n^n |a_0| = 0,$$

où  $C_n^p$  est le symbole des combinaisons, en supposant  $P(x)$  sans lacunes.

M. Paul Montel <sup>(3)</sup> en retrouvant ce résultat d'une manière plus simple, a démontré en outre que les modules des  $p$  zéros de  $P(x)$  ne peuvent dépasser la racine positive de l'équation

$$(3) \quad |a_n| r^n - C_{n-p}^0 |a_{p-1}| r^{p-1} - C_{n-p+1}^1 |a_{p-2}| r^{p-2} - \dots - C_{n-1}^{p-1} |a_0| = 0,$$

quand on suppose donnés  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, a_n$ .

---

<sup>(1)</sup> Paul MONTEL, *Sur les modules des zéros des polynomes* (Ann. sc. École Norm. Sup., s. 3, t. XL, 1923, p. 1).

<sup>(2)</sup> Van VLECK, *On limits the absolute value of the roots of a polynomial* (Bull. Soc. math. de France, t. 53, 1925, p. 105).

<sup>(3)</sup> Paul MONTEL, *Sur quelques limites pour les modules des zéros des polynomes* (Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. 7, 1934-1935, Fasciculus tertius, p. 178).

Mais M. Van Vleck démontre le théorème suivant : *Pour que le polynome  $P(x)$  ait  $p$  zéros bornés en modules quand on fixe certains de ses coefficients il faut et il suffit que ces coefficients soient  $a_0, a_1, \dots, a_{p+m}$  où l'on a  $0 \leq m \leq n - p$ .*

M. Paul Montel démontre ce théorème par une voie beaucoup plus courte.

2. *Le but de ces lignes est de déterminer le nombre dont il s'agit dans le théorème de M. Van Vleck.*

Considérons l'équation

$$(4) \quad P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p + \dots + a_n x^n = 0$$

et soient  $x_1, x_2, \dots, x_p, \dots, x_n$  ses racines.

*Je me propose d'abord de former l'équation qui admet les racines  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , en supposant connus les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, a_p$ , et les racines  $x_{p+1}, \dots, x_n$ . Cela revient à former le quotient  $P_p(x)$  de  $P(x)$  par le produit*

$$(x - x_{p+1}) \dots (x - x_n).$$

On a

$$(5) \quad P_p(x) = \frac{P(x)}{(-1)^{n-p} x_{p+1} \dots x_n (1 - \alpha x) \dots (1 - \lambda x)}$$

où

$$\alpha = \frac{1}{x_{p+1}}, \quad \beta = \frac{1}{x_{p+2}}, \quad \dots, \quad \lambda = \frac{1}{x_n}.$$

On a les développements

$$(1 - \alpha x)^{-1} = 1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \dots + \alpha^s x^s + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(1 - \lambda x)^{-1} = 1 + \lambda x + \lambda^2 x^2 + \dots + \lambda^s x^s + \dots,$$

convergentes si  $|x|$  est inférieur au plus petit des nombres  $|\alpha|, |\beta|, \dots, |\lambda|$ . En faisant le produit de ces séries, on trouve le développement

$$(6) \quad \frac{1}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x) \dots (1 - \lambda x)} = 1 + K_{n-p}^1 x + K_{n-p}^2 x^2 + \dots + K_{n-p}^s x^s + \dots,$$

où  $K_{n-p}^s$  désigne la somme des combinaisons avec répétition des  $n - p$  nombres  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  pris  $s$  à  $s$ .  $K_{n-p}^s$  est donc un polynome

homogène de degrés par rapport à  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  ayant comme termes ces combinaisons avec le coefficient unité.

Par exemple

$$K_{n-p}^1 = \alpha + \beta + \dots + \lambda, \quad K_{n-p}^2 = \Sigma \alpha^2 + \Sigma \alpha \beta.$$

Le produit de  $P(x)$  par cette dernière série doit se réduire, d'après l'égalité (5), à un polynôme du degré  $p$ . On a donc

$$(7) \quad \begin{aligned} & (-1)^{n-p} x_{p+1} \dots x_n P_p(x) \\ &= a_0 + (a_1 + a_0 K_{n-p}^1) x + \dots \\ & \quad + (a_p + K_{n-p}^1 a_{p-1} + \dots + a_0 K_{n-p}^p) x^p. \end{aligned}$$

Les coefficients des termes en  $x^{p+1}, x^{p+2}, \dots$  sont nuls. J'ai ainsi le quotient cherché

$$P_p(x) = a'_0 + a'_1 x + a'_2 x^2 + \dots + a'_{p-1} x^{p-1} + a_n x^p$$

avec les équations

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & (-1)^{n-p} x_{p+1} \dots x_n a'_0 = a_0, \\ & (-1)^{n-p} x_{p+1} \dots x_n a'_1 = a_1 + a_0 K_{n-p}^1, \\ & (-1)^{n-p} x_{p+1} \dots x_n a'_2 = a_2 + a_1 K_{n-p}^1 + a_0 K_{n-p}^2, \\ & \dots\dots\dots \\ & (-1)^{n-p} x_{p+1} \dots x_n a'_{p-1} = a_{p-1} + a_{p-2} K_{n-p}^1 + \dots + a_0 K_{n-p}^{p-1}. \end{aligned} \right.$$

On a aussi les égalités

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & (-1)^{n-p} x_{p+1} \dots x_n a_n = a_p + a_{p-1} K_{n-p}^1 + \dots + a_0 K_{n-p}^p, \\ & \qquad \qquad \qquad 0 = a_{p+1} + a_p K_{n-p}^1 + \dots + a_1 K_{n-p}^p + a_0 K_{n-p}^{p+1}, \\ & \qquad \qquad \qquad 0 = a_{p+2} + a_{p+1} K_{n-p}^1 + \dots \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + a_2 K_{n-p}^p + a_1 K_{n-p}^{p+1} + a_0 K_{n-p}^{p+2}, \\ & \dots\dots\dots \\ & \qquad \qquad \qquad 0 = a_n + a_{n-1} K_{n-p}^1 + \dots \\ & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + a_{n-p} K_{n-p}^p + \dots + a_0 K_{n-p}^n, \\ & \dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

Les coefficients de  $P_p(x)$  ne dépendent que de  $a_0, \dots, a_{p-1}, a_n$  et de  $x_{p+1}, \dots, x_n$ .

L'équation cherchée est par suite

$$(10) \quad P_p(x) = 0.$$

3. L'équation (10) permet de retrouver les théorèmes de

M. Paul Montel et de M. Van Vleck. Supposons pour cela que les modules des racines  $x_1, x_2, \dots, x_p$  soient inférieurs aux modules de  $x_{p+1}, \dots, x_n$ . De l'équation (10), on déduit l'inégalité

$$|\alpha_n| \rho^p \leq |\alpha'_{p-1}| \rho^{p-1} + \dots + |\alpha'_2| \rho^2 + |\alpha'_1| \rho + |\alpha'_0|.$$

où  $\rho$  désigne le module de l'une quelconque des racines  $x_1, \dots, x_p$ . Mais, des égalités (5), on tire

$$\begin{aligned} |\alpha'_0| &\leq \frac{|\alpha_0|}{\rho^{n-p}}, \\ |\alpha'_1| &\leq \frac{|\alpha_1|}{\rho^{n-p}} + C_{n-p}^1 \frac{|\alpha_0|}{\rho^{n-p+1}}, \\ &\dots\dots\dots \\ |\alpha'_{p-1}| &\leq \frac{|\alpha_{p-1}|}{\rho^{n-p}} + C_{n-p}^1 \frac{|\alpha_{p-2}|}{\rho^{n-p+1}} + C_{n-p+1}^2 \frac{|\alpha_{p-3}|}{\rho^{n-p+2}} + \dots + C_{n-3}^{p-1} \frac{|\alpha_0|}{\rho^{n-1}}. \end{aligned}$$

En tenant compte de ces inégalités, on trouve

$$|\alpha_n| \rho^n \leq |\alpha_{p-1}| \rho^{p-1} + C_{n-p+1}^1 |\alpha_{p-2}| \rho^{p-2} + \dots + C_{n-1}^{p-1} |\alpha_0|,$$

et par suite le polynôme  $P(x)$  a au moins  $p$  zéros inférieurs en modules à la racine positive  $r$  de l'équation (3), car on a

$$\rho \leq r.$$

C'est le théorème de M. Paul Montel obtenu par une autre voie.

Supposons en particulier que l'on ait

$$|\alpha_0| \leq M_p, \quad \dots, \quad |\alpha_{p-1}| \leq M_p,$$

alors l'équation (3) donne l'inégalité

$$|\alpha_n| r^{n-p+1} \leq M_p \left( 1 + C_{n-p+1}^1 \frac{1}{r} + C_{n-p+2}^2 \frac{1}{r^2} + \dots + C_{n-1}^{p-1} \frac{1}{r^{p-1}} \right).$$

Cherchons les solutions  $r > 1$  de cette inégalité. En tenant compte du développement

$$(1-u)^{-(n-p+1)} = 1 + C_{n-p+1}^1 u + C_{n-p+2}^2 u^2 + \dots + C_{n-1}^{p-1} u^{p-1} + \dots$$

valable pour  $|u| < 1$ , on a

$$|\alpha_n| r^{n-p+1} < \frac{M_p}{\left(1 - \frac{1}{r}\right)^{n-p+1}}.$$

D'où la limitation

$$r < 1 + \sqrt[n-p+1]{\frac{M_p}{|a_n|}}$$

due aussi à M. Paul Montel.

Si l'on prend le premier membre de l'équation (10) sous la forme donnée par l'égalité (7), on déduit l'inégalité

$$\begin{aligned} & \left[ |a_p| - C_{n-p}^1 \frac{|a_{p-1}|}{\rho} - \dots - C_{n-1}^p \frac{|a_0|}{\rho^p} \right] \rho^p \\ & \leq \left[ |a_{p-1}| + \frac{C_{n-p}^1}{\rho} |a_{p-2}| + \dots + \frac{C_{n-2}^{p-1}}{\rho^{p-1}} |a_0| \right] \rho^{p-1} + \dots \\ & \quad + \left[ |a_2| + C_{n-p}^1 \frac{|a_1|}{\rho} + C_{n-p+1}^2 \frac{|a_0|}{\rho^2} \right] \rho^2 + \left[ |a_1| + \frac{C_{n-p}^1}{\rho} |a_0| \right] \rho + |a_0|. \end{aligned}$$

où  $\rho$  a la même signification que plus haut, en supposant toujours que les modules des zéros  $x_1, \dots, x_p$  sont inférieurs à ceux de  $x_{p+1}, \dots, x_n$ . On a par suite l'inégalité

$$|a_p| \rho^p \leq C_{n-p+1}^1 |a_{p-1}| \rho^{p-1} + C_{n-p+2}^2 |a_{p-2}| \rho^{p-2} + \dots + C_n^p |a_0|.$$

Le polynôme  $P(x)$  a donc au moins  $p$  zéros de modules inférieurs à la racine positive  $r$  de l'équation (2). Nous avons obtenu ainsi, d'une autre manière et pour le cas général, le résultat de M. Van Vleck.

On peut donner pour  $r$  une limite supérieure par le procédé employé plus haut. En effet, on a

$$|a_p| r^p \leq M_p (C_{n-p+1}^1 r^{p-1} + C_{n-p+2}^2 r^{p-2} + \dots + C_n^p),$$

où  $M_p$  est le nombre considéré plus haut.

On cherche, comme tout à l'heure, les solutions de cette inégalité, qui sont plus grandes que l'unité. En l'écrivant sous la forme

$$|a_p| \leq M_p \left( C_{n-p+1}^1 \frac{1}{r} + C_{n-p+2}^2 \frac{1}{r^2} + \dots + C_n^p \frac{1}{r^p} \right),$$

et en utilisant le même développement, on trouve

$$M_p + |a_p| < \frac{M_p}{\left(1 - \frac{1}{r}\right)^{n-p+1}},$$

d'où la limite cherchée

$$r < \frac{1}{1 - \frac{n-p+1}{\sqrt{\frac{M_p}{M_p + |\alpha_p|}}}}$$

4. Après avoir retrouvé les beaux résultats de MM. Paul Montel et Van Vleck, je passe à la question que je me suis proposé de traiter dans ce travail. Dans ce but, je ferai dépendre les coefficients de l'équation (10) seulement de  $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha_{p+m}$  et de  $x_{p+1}, \dots, x_n$ . J'écris les  $m + 1$  premières relations de (9) sous la forme

$$(11) \left\{ \begin{aligned} & \alpha_p + && H_0 - \sigma \alpha_n = 0, \\ & K_{n-p}^1 \alpha_p + \alpha_{p+1} + && H_1 = 0, \\ & K_{n-p}^2 \alpha_p + K_{n-p}^1 \alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + && H_2 = 0, \\ & \dots \dots \dots \\ & K_{n-p}^{m-1} \alpha_p + K_{n-p}^{m-2} \alpha_{p+1} + K_{n-p}^{m-3} \alpha_{p+2} + \dots + \alpha_{p+m-1} && \\ & && + H_{m-1} = 0, \\ & K_{n-p}^m \alpha_p + K_{n-p}^{m-1} \alpha_{p+1} + K_{n-p}^{m-2} \alpha_{p+2} + \dots + K_{n-p}^1 \alpha_{p+m-1} && \\ & && + \alpha_{p+m} + H_m = 0, \end{aligned} \right.$$

avec les notations

$$(12) \left\{ \begin{aligned} \sigma &= (-1)^{n-p} x_{p+1} \dots x_n, \\ H_0 &= K_{n-p}^0 \alpha_0 + K_{n-p}^1 \alpha_1 + \dots + K_{n-p}^1 \alpha_{p-1}, \\ H_1 &= K_{n-p}^{p+1} \alpha_0 + K_{n-p}^p \alpha_1 + \dots + K_{n-p}^2 \alpha_{p-1}, \\ &\dots \dots \dots \\ H_{m-1} &= K_{n-p}^{p+m-1} \alpha_0 + K_{n-p}^{p+m-2} \alpha_1 + \dots + K_{n-p}^n \alpha_{p-1}, \\ H_m &= K_{n-p}^{p+m} \alpha_0 + K_{n-p}^{p+m-1} \alpha_1 + \dots + K_{n-p}^{m+1} \alpha_{p-1}. \end{aligned} \right.$$

Le système (11) permet de déterminer les coefficients  $\alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+m}$ . En particulier, on a pour  $\alpha_{p+m}$  la valeur suivante

$$\alpha_{p+m} = - \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & H_0 - \sigma \alpha_n \\ K_{n-p}^1 & 1 & 0 & \dots & 0 & H_1 \\ K_{n-p}^2 & K_{n-p}^1 & 1 & \dots & 0 & H_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n-p}^{m-1} & K_{n-p}^{m-2} & K_{n-p}^{m-3} & \dots & 1 & H_{m-1} \\ K_{n-p}^m & K_{n-p}^{m-1} & K_{n-p}^{m-2} & \dots & K_{n-p}^1 & H_m \end{array} \right|$$

ou

$$(13) \quad -a_{p+m} = \Delta_m + (-1)^m (H_0 - \sigma a_n) D_m,$$

où l'on a posé

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & H_1 \\ K_{n-p}^1 & 1 & 0 & \dots & 0 & H_2 \\ K_{n-p}^2 & K_{n-p}^1 & 1 & \dots & 0 & H_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n-p}^{m-2} & K_{n-p}^{m-3} & K_{n-p}^{m-4} & \dots & 1 & H_{m-1} \\ K_{n-p}^{m-1} & K_{n-p}^{m-2} & K_{n-p}^{m-3} & \dots & K_{n-p}^1 & H_m \end{vmatrix},$$

$$D_m = \begin{vmatrix} K_{n-p}^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ K_{n-p}^2 & K_{n-p}^1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n-p}^{m-1} & K_{n-p}^{m-2} & K_{n-p}^{m-3} & \dots & 1 \\ K_{n-p}^m & K_{n-p}^{m-1} & K_{n-p}^{m-2} & \dots & K_{n-p}^1 \end{vmatrix}.$$

*Remarques.* — 1° Le déterminant  $D_m$  est égal à la somme  $S_m$  des combinaisons ordinaires des  $n-p$  nombres  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  pris  $m$  à  $m$ .

Par exemple,

$$D_2 = \begin{vmatrix} K_{n-p}^1 & 1 \\ K_{n-p}^2 & K_{n-p}^1 \end{vmatrix} = (K_{n-p}^1)^2 - K_{n-p}^2 = \Sigma \alpha \beta.$$

D'autre part, en développant  $D_m$  d'après les éléments de sa première colonne, on obtient la relation de récurrence

$$(14) \quad D_m = K_{n-p}^1 D_{m-1} - K_{n-p}^2 D_{m-2} + K_{n-p}^3 D_{m-3} - \dots + (-1)^{m-2} K_{n-p}^{m-1} K_{n-p}^1 + (-1)^{m-1} K_{n-p}^m.$$

Je pose

$$D_0 = 1, \quad D_1 = K_{n-p}^1 = \Sigma \alpha.$$

Je multiplie l'identité

$$(1 - \alpha x) \dots (1 - \lambda x) = 1 - S_1 x + S_2 x^2 - \dots + (-1)^m S_m x^m + \dots + (-1)^n S_n x^n$$

par l'égalité (6) et j'obtiens

$$1 = 1 + (K_{n-p}^1 - S_1) x + (S_2 - S_1 K_{n-p}^1 + K_{n-p}^2) x^2 + \dots + [(-1)^m S_m + (-1)^{m-1} S_{m-1} K_{n-p}^1 + \dots - S_1 K_{n-p}^{m-1} + K_{n-p}^m] x^m + \dots$$



Il en résulte la relation

$$S_m = K_{h-p}^1 S_{m-1} - K_{h-p}^2 S_{m-2} + K_{h-p}^3 S_{m-3} - \dots \\ + (-1)^{m-2} K_{h-p}^{m-1} S_1 + (-1)^{m-1} K_{h-p}^m$$

qui a les mêmes coefficients que la relation (14). Comme on a eu

$$D_0 = S_0 = 1, \quad D_1 = S_1 = \Sigma \alpha,$$

il résulte

$$D_m = S_m.$$

C. Q. F. D.

2° En développant  $\Delta_m$  d'après les éléments de la dernière colonne, on trouve

$$\Delta_m = \Delta_{m-1} + (-1)^{m-1} H_1 S_{m-1},$$

et par suite

$$\Delta_{m-1} = \Delta_{m-2} + (-1)^{m-2} H_2 S_{m-2},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Delta_2 = H_m + (-1) H_{m-1} S_1,$$

d'où

$$(15) \quad \Delta_m = (-1)^{m-1} H_1 S_{m-1} + (-1)^{m-2} H_2 S_{m-2} + (-1)^{m-3} H_3 S_{m-3} + \dots \\ + (-1) H_{m-1} S_1 + H_m.$$

En tenant compte de la première remarque, l'équation (13) donne

$$\sigma a_n = (-1)^n \frac{\alpha_{p+m}}{S_m} + H_0 + (-1)^n \frac{\Delta_m}{S_m}.$$

Substituant cette valeur de  $a_n$  dans l'équation (10), on trouve l'équation

$$(16) \quad [(-1)^m \alpha_{p+m} + H_0 S_m + (-1)^m \Delta_m] x^p \\ + S_m \sigma (\alpha_{p-1} x^{p-1} + \dots + \alpha'_1 x + \alpha'_0) = 0,$$

dont les coefficients dépendent seulement de  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha_{p-m}$  et de  $x_{p+1}, \dots, x_n$ .

3° Pour aller plus loin, il faut établir une formule. Je vais ordonner le coefficient

$$(-1)^m \alpha_{p+m} + H_0 S_m + (-1)^m \Delta_m,$$

de  $x^p$  de l'équation (16) par rapport à  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha_{p+m}$ . Soient  $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$  les coefficients respectifs de  $\alpha_0, \alpha_1, \dots,$

$\alpha_{p-1}$ . Si l'on tient compte des notations (12) et de la valeur de  $\Delta_m$ , donnée par la relation (15), on trouve

$$\begin{aligned} A_0 &= K_{n-p}^{\rho} S_m - K_{n-p}^{\rho+1} S_{m-1} + K_{n-p}^{\rho+2} S_{m-2} - K_{n-p}^{\rho+3} S_{m-3} + \dots \\ &\quad + (-1)^{m-1} K_{n-p}^{\rho+m-1} S_1 + (-1)^m K_{n-p}^{\rho+m}, \\ A_1 &= K_{n-p}^{\rho-1} S_m - K_{n-p}^{\rho} S_{m-1} + K_{n-p}^{\rho+1} S_{m-2} - K_{n-p}^{\rho+2} S_{m-3} + \dots \\ &\quad + (-1)^{m-1} K_{n-p}^{\rho+m-2} S_1 + (-1)^m K_{n-p}^{\rho+m-1}, \\ &\dots\dots\dots \\ A_{p-1} &= K_{n-p}^1 S_m - K_{n-p}^2 S_{m-1} + K_{n-p}^3 S_{m-2} - K_{n-p}^4 S_{m-3} + \dots \\ &\quad + (-1)^{m-1} K_{n-p}^m S_1 + (-1)^m K_{n-p}^{m+1}. \end{aligned}$$

On remarque que  $A_0$  est un polynôme homogène de degré  $p + m$  par rapport à  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ . Ce polynôme, à coefficients entiers, a

$$\begin{aligned} N_0 &= C_{n-1}^{\rho} C_{n-p}^m - C_{n-1}^{\rho+1} C_{n-p}^{m-1} + C_{n-1}^{\rho+2} C_{n-p}^{m-2} - C_{n-1}^{\rho+3} C_{n-p}^{m-3} + \dots \\ &\quad + (-1)^{m-1} C_{n-1}^{\rho+m-1} C_{n-p}^1 + (-1)^m C_{n-1}^{\rho+m} \end{aligned}$$

termes, en comptant chaque terme autant de fois qu'il y figure.

Démontrons maintenant la formule

$$N_0 = C_{n-1}^{\rho+m} C_{p+m-1}^m.$$

À cet effet je vais prouver la formule plus générale

$$\begin{aligned} (17) \quad &(-1)^{m-q} C_{n+m-q-1}^{\rho+m-q} C_{n-p}^q + (-1)^{m-q+1} C_{n+m-q-1}^{\rho+m-q+1} C_{n-p}^{q-1} + \dots \\ &\quad + (-1)^{m-1} C_{n+m-2}^{\rho+m-1} C_{n-p}^1 + (-1)^m C_{n+m-1}^{\rho+m} \\ &= (-1)^{m-q} C_{n+m-q-1}^{\rho+m} C_{p+m-1}^q. \end{aligned}$$

Elle est vérifiée pour  $q = 0$ ; supposons donc qu'elle soit vraie pour  $q$  et prouvons qu'elle l'est aussi pour  $q + 1$ . En écrivant le premier membre de cette formule pour  $q + 1$  et en tenant compte de ce qu'elle est vraie pour  $q$ , on a, successivement,

$$\begin{aligned} &(-1)^{m-q-1} C_{n+m-q-2}^{\rho+m-q-1} C_{n-p}^{q+1} + (-1)^{m-q} C_{n+m-q-1}^{\rho+m} C_{p+m-1}^q \\ &= (-1)^{m-q-1} C_{n+m-q-2}^{\rho+m-q-1} \\ &\quad \times \left[ C_{n-p}^{q+1} - \frac{(n+m-q-1)(n-p-1)(n-p-2)\dots(n-p-q)}{(p+m-q)(p+m-q+1)\dots(p+m)} C_{p+m-1}^q \right] \\ &= (-1)^{m-q-1} C_{n+m-q-2}^{\rho+m-q-1} \frac{(n-p-1)(n-p-2)\dots(n-p-q)}{(p+m)(q+1)!} \\ &\quad \times [(n-p)(p+m) - (n+m-q-1)(q+1)] \\ &= (-1)^{m-q-1} C_{n+m-q-2}^{\rho+m-q-1} \frac{(n-p-1)(n-p-2)\dots(n-p-q)}{(p+m)(q+1)!} \\ &\quad \times (n-p-q-1)(p+m-q-1) \\ &= (-1)^{m-q-1} C_{n+m-q-2}^{\rho+m} C_{p+m-1}^{q+1}. \end{aligned}$$

La formule (17) est donc établie. Si l'on y fait  $q = m$ , on trouve la valeur de  $N_0$ , donnée plus haut. Désignons de même par  $N_1, \dots, N_{p-1}$  les nombres respectifs des termes de  $A_1, \dots, A_{p-1}$ . On obtient  $N_1$  en substituant dans l'expression de  $N_0$  à  $n$  et  $p$ , respectivement  $n - 1$  et  $p - 1$ ; on a  $N_{p-1}$  en substituant dans  $N_0$  à  $n$  et  $p$  les nombres  $n - p + 1$  et 1. Par suite

$$N_1 = C_{n-2}^{p-1+m} C_{p+m-2}^m, \quad \dots \quad N_{p-1} = C_{n-p}^{m+1} C_m^m.$$

J'ai maintenant tous les éléments pour démontrer le théorème suivant.

**THÉORÈME.** — *Le polynôme  $P(x)$ , défini par l'identité (1), a au moins  $p$  zéros inférieurs en module à la racine positive  $r$  de l'équation*

$$(18) \quad |a_{p+m}| r^{m+p} - C_{n-p+1}^{m+1} |a_{p-1}| r^{p-1} - C_{n-p-2}^{m+2} C_{m+1}^1 |a_{p-2}| r^{p-2} - \dots \\ - C_{n-1}^{m+p-1} C_{m+p-2}^m |a_1| r - C_n^{m+1} C_{m+p-1}^m |a_0| = 0.$$

quand on donne les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, a_{p+m}$  le dernier étant supposé différent de zéro (1).

Avec les notations introduites, l'équation (16) s'écrit

$$(19) \quad [(-1)^m a_{p+m} + a_{p-1} A_{p-1} + \dots + a_1 A_1 + a_0 A_0] x^p \\ + S_m \sigma (a'_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0) = 0.$$

Supposons que le polynôme (1) ait  $n - p$  zéros,  $x_{p+1}, \dots, x_n$ , de modules supérieurs ou égaux à ceux de  $x_1, \dots, x_p$  et soit  $\rho$  le module de l'un quelconque de ces  $p$  derniers zéros. On a alors les inégalités

$$|A_0| \leq \frac{N_0}{\rho^{p+m}} = \frac{C_{n-1}^{p+m} C_{p+m-1}^m}{\rho^{p+m}}, \\ |A_1| \leq \frac{N_1}{\rho^{p+m-1}} = \frac{C_{n-2}^{p+m-1} C_{p+m-2}^m}{\rho^{p+m-1}}, \\ \dots, \\ |A_{p-1}| \leq \frac{N_{p-1}}{\rho^{m+1}} = \frac{C_{n-p}^{m+1} C_m^m}{\rho^{m+1}}, \\ |\sigma a'_0| \leq |a_0|, \\ |\sigma a'_1| \leq |a_1| + C_{n-p}^1 \frac{|a_0|}{\rho}, \\ \dots, \\ |\sigma a'_{p-1}| \leq |a_{p-1}| + C_{n-p}^1 \frac{|a_{p-2}|}{\rho} + \dots + C_{n-2}^{p-1} \frac{|a_0|}{\rho^{p-1}}.$$

(1) Th. ANGHELUTZA, *Sur une limite des modules des zéros de polynomes* (Bul. sc. Ac. roum., t. XXI, n° 7-8).

D'autre part, l'équation (19) donne l'inégalité

$$\begin{aligned} & (|a_{p+m}| - |a_{p-1} \Lambda_{p-1}| - \dots - |a_1 \Lambda_1| - |a_0 \Lambda_0|) \rho^p \\ & \leq \frac{C_{n-p}^m \sigma}{\rho^m} (|a'_{p-1}| \rho^{p-1} + \dots + |a'_1| \rho + |a'_0|), \end{aligned}$$

qui devient, en tenant compte des inégalités précédentes,

$$\begin{aligned} |a_{p+m}| \rho^p & \leq \frac{N_0 + C_{n-1}^{p-1} C_{n-p}^m}{\rho^m} |a_0| \\ & + \frac{N_1 + C_{n-2}^{p-2} C_{n-p}^m}{\rho^{m-1}} |a_1| + \dots + \frac{N_{p-1} + C_{n-p}^m}{\rho^{m-p+1}} |a_{p-1}| \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} |a_{p+m}| \rho^{m+p} & \leq C_{n-p+1}^{m+1} C_n^m |a_{p-1}| \rho^{p-1} + C_{n-p+2}^{m+2} C_{m+1}^1 |a_{p-2}| \rho^{p-2} + \dots \\ & + C_{n-2}^{m+p-2} C_{m+p-3}^{m-3} |a_2| \rho^2 \\ & + C_{n-1}^{m+p-1} C_{m+p-2}^{m-2} |a_1| \rho + C_n^{m+p} C_{m+p-1}^{m-1} |a_0|, \end{aligned}$$

car on a

$$C_{n-1}^{m+p} C_{p-m-1}^m + C_{n-1}^{p-1} C_{n-p}^m = C_n^{m+p} C_{m+p-1}^{m-1}.$$

Le théorème est ainsi démontré, car  $\rho$  est plus petit que  $r$ .

Si l'on fait dans l'équation (18) successivement

$$m = n - p, \quad m = 0,$$

on retrouve les équations (2) et (3) de MM. P. Montel et Van Vleck. On peut donner, pour ce cas aussi, une limite supérieure de  $r$ . En effet, l'équation (18) donne l'inégalité

$$\begin{aligned} |a_{p+m}| r^{m+p} & \leq M_p (C_{n-p+1}^{m+1} r^{p-1} + C_{n-p+2}^{m+2} C_{m+1}^1 r^{p-2} + \dots \\ & + C_{n-1}^{m+p-1} C_{m+p-2}^{m-2} r + C_n^{m+p} C_{m+p-1}^{m-1}), \end{aligned}$$

$M_p$  a la même signification que plus haut. Mais on vérifie facilement l'inégalité

$$C_{n-p+h}^{m+h} C_{m+h-1}^{h-1} \leq C_{n-p+h}^h C_{n-p}^m \quad (h = 1, 2, \dots, p).$$

Par suite, on a

$$|a_{p+m}| r^m \leq M_p C_{n-p}^m (C_{n-p+1}^1 r^{p-1} + C_{n-p+2}^2 r^{p-2} + \dots + C_{n-1}^{p-1} r^{p-1} + C_n^p)$$

ou

$$|a_{p+m}| r^m \leq M_p C_{n-p}^m \left[ \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-(n-p+1)} - 1 \right].$$

La limite cherchée est inférieure à la racine, supérieure à  $un$ ,

de l'équation

$$1 + \frac{|a_{p+m}|}{M_p C_{n-p}^m} r^m = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{r}\right)^{n-p+1}}.$$

D'ailleurs, on voit facilement que cette équation a une seule racine plus grande que l'unité.

Je termine ce travail en remarquant que le théorème de M. P. Montel, cité au début, prouve l'existence d'une limite qui dépend des coefficients donnés et du nombre des termes qui entrent *effectivement* dans le polynome.