BULLETIN DE LA S. M. F.

WOLFGANG DOEBLIN

Sur deux problèmes de M. Kolmogoroff concernant les chaînes dénombrables

Bulletin de la S. M. F., tome 66 (1938), p. 210-220
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1938__66__210_0>

SUR DEUX PROBLÈMES DE M. KOLMOGOROFF CONCERNANT LES CHAINES DÉNOMBRABLES;

Par M. W. DOEBLIN.

Introduction. — Soit $p_{ik}(i=1, \ldots, k=1, \ldots)$, une matrice infinie avec

$$p_{ik} \geqq 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} = 1$$

et

$$P_{ik}^{n} = \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}^{n-1} p_{jk}, \qquad P_{ik}^{1} = p_{ik}.$$

Un des problèmes essentiels de la théorie des chaines constantes de Markoff à une infinité dénombrable d'états est d'étudier l'allure asymptotique pour $n \to \infty$ des itérées P_{ik}^{n}, ce problème a été entièrement résolu par M. Kolmogoroff dans son Mémoire *Anfangsgründe der Theorie der Markoffschen Ketten mit unendlich vielen möglichen Zuständen* (*Rec. Math.*, Moscou, nouv. série, t. I, 1936, p. 607-610) (démonstrations en russe, *Bull. Univ. d'État* à Moscou, série intern. vol. I, fasc. 3) (¹).

Dans la théorie des chaînes de Markoff dénombrables, l'on considère un système matériel ne pouvant prendre qu'une infinité dénombrable d'états $E_1, \ldots, E_i, \ldots$, l'on observe la position de ce système matériel dans une suite dénombrée d'instants appelés épreuves et l'on suppose que la probabilité de passer de l'état E_i à l'état E_k en une épreuve est p_{ik} quel que soit le mouvement antérieur du système. La probabilité de passer en n épreuves de E_i en E_k sera P_{ik}^{n}. Nous supposerons dans tout ce qui suit que les p_{ik} sont tels que, pour tous i et k, on a au moins un n avec $P_{ik}^{(n)} > 0$,

(¹) Pour la théorie des chaînes de Markoff à un nombre fini d'états (*cf.* le livre de M. Fréchet, *Théorie des événements en chaîne; Traité du Calcul des probabilités*, de M. Borel, t. I, fasc. III, livre 2. Paris, 1938.

les états $E_1, \ldots, E_i, \ldots$, formeront alors une classe d'états essentiels dans la terminologie de M. Kolmogoroff, un groupe final dans la nôtre.

Nous utiliserons les notations de M. Kolmogoroff. Appelons $K_{ij}^{(n)}$ la probabilité pour que le système parti à l'instant initial de E_i se trouve n épreuves après dans E_j, mais ne se soit pas trouvé dans E_j à aucune des épreuves intermédiaires. On aura

$$(1) \qquad P_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n-1} K_{ij}^{(l)} P_{jj}^{(n-l)} + K_{ij}^{(n)}.$$

Appelons L_{ij} la probabilité pour que le système parti de E_i passe au moins une fois dans E_j dans son mouvement ultérieur. L'on voit très facilement [2] (sous l'hypothèse indiquée) que : *a.* ou bien le système passe quel que soit l'état initial presque sûrement une infinité de fois par chaque état, donc aussi par l'état initial, dans ce cas, tous les L_{ij} sont 1; *b.* ou bien tout état n'est obtenu presque sûrement qu'un nombre fini de fois, dans ce cas, tous les L_{ii} sont < 1, $\left[L_{ij} = \sum_{1}^{\infty} K_{ij}^{(l)} \right]$.

I. M. Kolmogoroff a établi (sa démonstration sera rappelée plus loin) que les P_{ik}^{n} convergent toujours en moyenne de Cesaro vers une grandeur indépendante de i (sous l'hypothèse indiquée). Soit

$$\Pi_{ik}^{(n)} = \frac{P_{ik}^{(1)} + P_{ik}^{(2)} + \ldots + P_{ik}^{(n)}}{n},$$

alors

$$\lim_{n \to \infty} \Pi_{ik}^{(n)} = \Pi_{ik} \quad \text{existe} \quad = \Pi_k.$$

Toutefois il se peut que $\Pi_{ik} = 0$. M. Kolmogoroff nous a posé la question suivante : est-ce que la limite de $\frac{\Pi_{ij}^{(n)}}{\Pi_{kl}^{(n)}}$ existe toujours? Nous allons montrer que la réponse est affirmative.

A l'intérieur d'un groupe final

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Pi_{ik}^{(n)}}{\Pi_{jl}^{(n)}}$$

existe et est $\neq 0$ et $\neq \infty$.

---

[2] *Cf.* Kolmogoroff, *loc. cit.*

Démonstration. — Soit

$$n\,\Pi_{ik}^{(n)} = T_{ik}^{(n)} = \sum_{t=1}^{n} P_{ik}^{(t)},$$

$T_{ik}^{(n)}$ est une fonction monotone non décroissante de n. Il suffit d'étudier

$$\frac{T_{ik}^{(n)}}{T_{jl}^{(n)}}.$$

Notons la relation

$$T_{ik}^{(n)} = \sum_{t=1}^{n} K_{ik}^{(t)} [T_{kk}^{(n-t)} + 1] \tag{2}$$

résultant de (1).

Il faut désigner deux cas :

a. Tous les $L_{ij} = 1$. — Dans ce cas le nombre de passages du système en E_k en n épreuves augmente presque sûrement indéfiniment avec n, il en est par conséquent de même de $T_{ik}^{(n)}$, espérance mathématique du nombre de passages en E_k en n épreuves, l'état initial étant E_i. De (2) résulte alors

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{T_{ik}^{(n)}}{T_{kk}^{(n)}} \leqq 1.$$

Prenons m suffisamment grand pour que $\sum_{1}^{m} K_{ik}^{(t)} > 1 - \varepsilon$, alors

$$\frac{T_{ik}^{(n)}}{T_{kk}^{(n)}} = \frac{\sum_{1}^{m} K_{ik}^{(t)} [T_{kk}^{(n-t)} + 1]}{T_{kk}^{(n)}} + \frac{\sum_{m+1}^{n} K_{ik}^{(t)} [T_{kk}^{(n-t)} + 1]}{T_{kk}^{(n)}},$$

et, comme $P_{ik}^{(n)} \leqq 1$, si $0 < t \leqq m$,

$$T_{kk}^{(n-t)} = T_{kk}^{(n)} - \theta m \qquad (0 < \theta < 1).$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_{ik}^{(n)}}{T_{kk}^{(n)}} = 1. \tag{3}$$

Dans le cas « récurrent » a, il suffit donc de montrer que $\lim \frac{T_{kj}^{(n)}}{T_{kk}^{(n)}}$ existe. Supposons m suffisamment grand pour que

$$\frac{1}{T_{kj}^{(m)}} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \frac{1}{T_{jk}^{(m)}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

et [3])

$$\frac{T^{(m)}_{kj}}{T^{(m)}_{jj}} = 1 + \theta\frac{\varepsilon}{2}, \qquad \frac{T^{(m)}_{jk}}{T^{(m)}_{kk}} = 1 + \theta\frac{\varepsilon}{2} \qquad (-1 < \theta < 1).$$

Soit alors $\mathrm{Pr}_1^{(i)}[\mathrm{K},\ \mathrm{E}_j + \mathrm{E}_k]$ la probabilité pour que le système parti de E_k se trouve i épreuves après pour la première fois depuis l'instant initial dans un des états E_j ou E_k. Soit $\mathrm{Pr}_2^{(l)}[\mathrm{K}, \mathrm{E}_j + \mathrm{E}_k;\ i]$ la probabilité pour que le système parti de E_k qui s'est trouvé i épreuves après l'instant initial dans un des états E_j ou E_k se trouve dans $\mathrm{E}_j + \mathrm{E}_k$ de nouveau à la $(i + m + t)^{\text{ième}}$ épreuve $(t > 0)$ pour la première fois depuis l'épreuve $i + m$. L'on définira de même $\mathrm{Pr}_3^{(s)}[\mathrm{K},\ \mathrm{E}_j + \mathrm{E}_k;\ i,\ t]$, etc. L'algèbre de la logique élémentaire nous permet de mettre $\mathrm{T}^{(n)}_{kj}$ sous la forme [4])

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}^{(n)}_{kj} = \sum_{i=1}^{n-m} \mathrm{Pr}_1^{(i)}[\mathrm{K},\ \mathrm{E}_j + \mathrm{E}_k] \Bigg[& \mathrm{T}^{m}_{kj}(1 + \theta\varepsilon) + \sum_{l=1}^{n-m-i} \mathrm{Pr}_2^{(l)}[\mathrm{K},\ \mathrm{E}_j + \mathrm{E}_k,\ i] \\
& \times \Bigg\{ \mathrm{T}^{(m)}_{kj}(1 + \theta\varepsilon) + \sum_{s=1}^{n-(i+l+2m)} \mathrm{Pr}_3^{(s)}[\mathrm{K},\ \mathrm{E}_j + \mathrm{E}_k,\ i,\ t] \\
& \qquad \times (\mathrm{T}^{m}_{kj}(1 + \theta\varepsilon) + \ldots) \Bigg\} \Bigg] \\
& + \theta \sum_{n-m}^{n} \mathrm{P}^{l}_{kj}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons écrire de même $\mathrm{T}^{(n)}_{kk}$, il résulte, si n est tel que $m < \varepsilon \mathrm{T}^{(n)}_{kj}$ et $< \varepsilon \mathrm{T}^{(n)}_{kk}$,

$$\frac{\mathrm{T}^{(n)}_{kj}}{\mathrm{T}^{(n)}_{kk}} = \frac{(1 + 2\theta\varepsilon)\,\mathrm{T}^{(m)}_{kj}}{(1 + 2\theta'\varepsilon)\,\mathrm{T}^{(m)}_{kk}},$$

donc $\dfrac{\mathrm{T}^{(n)}_{kj}}{\mathrm{T}^{(n)}_{kk}}$ a une limite $\neq 0$ et ∞ et par conséquent dans le cas

---

[3]) Nous désignerons par θ des quantités diverses comprises entre -1 et 1.

[4]) Sous l'hypothèse dont la probabilité est $\mathrm{Pr}_3^{(s)}[\ldots]$, le système se trouve à la $l + i + s + 2m^{\text{ième}}$ épreuve dans un des états E_j ou E_k et par conséquent l'espérance mathématique du nombre des retours en E_j dans les m épreuves suivantes est de la forme $\mathrm{T}^{(m)}_{kj}(1 + \theta\varepsilon)$.

récurrent

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_{jl}^{(n)}}{T_{ik}^{(n)}}=\omega_{l,k},$$

$\omega_{l,k}$ étant de la forme $\frac{\omega_l}{\omega_k}$.

b. Plaçons-nous dans le cas non récurrent où $L_{ii}<1$. La démonstration est encore plus immédiate. Nous allons montrer que $T_{kk}^{(n)}$ est borné. Comme

$$T_{ik}^{(n)}<T_{kk}^{(n)}+1.$$

il résultera que

$$T_{ik}^{(n)}\to T_{ik}<\infty,\qquad T_{jl}^{(n)}\to T_{jl}<\infty.$$

D'autre part, comme un $P_{je}^{(n)}$ est >0, T_{je} est >0.

$$\frac{T_{ik}^{(n)}}{T_{jl}^{(n)}}\to\frac{T_{ik}}{T_{jl}}.$$

Il reste à montrer que $T_{kk}^{(n)}$ est borné. Or la probabilité pour que l'on revienne de E_k en E_k est $L_{kk}<1$, la probabilité pour qu'on y revienne n fois est $(L_{kk})^n$, donc

$$T_{kk}^{(n)}\leqq L_{kk}+L_{kk}^2+\ldots+L_{kk}^n$$

et T_{kk} est l'espérance mathématique du nombre de retours dans E_k, donc

$$T_{kk}=L_{kk}+L_{kk}^2+\ldots=\frac{L_{kk}}{1-L_{kk}}.$$

De (2) résulte alors

$$T_{ik}=L_{ik}\left[\frac{L_{kk}}{1-L_{kk}}+1\right]=\frac{L_{ik}}{1-L_{kk}}.$$

Il n'est pas inutile d'indiquer brièvement ici le principe de la démonstration par laquelle M. Kolmogoroff établit l'existence de Π_{kk} dans le cas récurrent, puisque nous allons en avoir besoin pour II. Appelons m_ρ le numéro de l'épreuve à laquelle a lieu le $\rho^{\text{ième}}$ retour dans l'état E_k. La grandeur $m_\rho-m_{\rho-1}$ est une variable aléatoire indépendante de $m_1, \ldots, m_{\rho-1}$ qui prend avec probabilité $K_{kk}^{(i)}$ la valeur i. Supposons que l'espérance mathématique de $m_\rho - m_{\rho-1} = \Sigma i K_{kk}^{(i)}$ soit $< \infty$, alors d'après un théorème de M. Khintchine, en dehors de cas de probabilité arbitrairement petite, $\sum_{\rho=1} (m_\rho - m_{\rho-1}) = m_t$ est compris entre $t \Sigma i K_{kk}^{(i)}(1+\varepsilon)$ et $t \Sigma K_{kk}^{(i)}(1-\varepsilon)$. Par conséquent, en posant

$$\Pi_k^{-1} = \Sigma i K_{kk}^{(i)},$$

le $n\Pi_k(1-\varepsilon)^{\text{ième}}$ retour en E_k a lieu avant la $n^{\text{ième}}$ épreuve en dehors de cas de probabilité très petite, le $\Pi_k n(1+\varepsilon)^{\text{ième}}$ retour a lieu après cette épreuve. Donc $\Pi_{kk}^{(n)}$ espérance mathématique de la fréquence des retours en E_k pendant les n premières épreuves, fréquence qui est nécessairement ≤ 1, est très sensiblement égale à Π_k. Donc $\Pi_{kk}^{(n)} \to \Pi_k$. Dans le cas où $\Sigma i K_{kk}^{(i)} = \infty$, il résulte de la théorie des variables indépendantes que le $\varepsilon n^{\text{ième}}$ retour a lieu si n est suffisamment grand, après la $n^{\text{ième}}$ épreuve, en dehors de cas de probabilité très petite. Par conséquent, l'espérance mathématique $\Pi_{kk}^{(n)} \to 0$ ([5]).

II. Faisons maintenant correspondre à chaque état E_i un nombre x_i et envisageons une variable aléatoire $X^{(m)}$ égale à x_i si, à la $m^{\text{ième}}$ épreuve, l'état E_i est réalisé. Soit S_n la somme $\sum_1^n X^{(m)}$. Il s'agit d'étudier S_n.

Dans le cas d'un nombre fini d'états ainsi que dans certains cas plus généraux, il fut démontré par M. Mihoc ([6]) et nous-mêmes ([7]) que S_n suit après *réduction* une loi tendant vers la loi de Gauss,

---

([5]) Pour l'étude de l'allure asymptotique des $P_{ik}^{(n)}$ dans le cas dénombrable il y a, à l'heure actuelle, en dehors de la méthode de M. Kolmogoroff, plusieurs autres méthodes qui permettent d'aller aussi rapidement au but et qui sont applicables à des cas plus généraux. Toutefois, la méthode de M. Kolmogoroff si elle ne paraît pas pouvoir être étendue à des cas différents, n'est pas seulement très élégante et la première qui a permis d'étudier complètement le cas dénombrable, mais son idée de départ qui est de se servir de variables aléatoires indépendantes se révèle particulièrement utile dans l'étude des variables aléatoires.

([6]) *Bull. Fac. Sc. Cernauti*, t. 10, 1936, p. 1-20.

([7]) *Thèse* ou *Bull. Soc. Roum. Sc.*, t. 39, 1937.

sauf dans un cas de dégénérescence. En mars 1937, M. Kolmogoroff a signalé dans une lettre adressée à M. Fréchet que la tendance vers la loi de Gauss avait encore lieu dans le cas dénombrable (à l'intérieur d'un groupe final bien entendu) sous les hypothèses suivantes

$$L_{ii} = 1, \qquad \Sigma i^2 K_{11}^{(i)} < \infty \qquad \text{et} \qquad \Sigma x^2 \Pi_i < \infty.$$

Nous nous sommes alors occupé de la même question et en appliquant une idée prolongeant très naturellement l'idée qui était à la base du Mémoire de M. Kolmogoroff (que nous avons indiquée ci-dessus) nous avons démontré aussi la loi de Gauss sous des hypothèses un peu différentes. Il nous paraît probable, vu la différence des conditions auxquelles on arrive, que la démonstration de M. Kolmogoroff soit assez différente de la nôtre. Nous étudierons ensuite la loi de probabilité de S_n sous des hypothèses beaucoup plus générales.

Nous nous bornerons à l'analyse des cas où il y a stabilité à la Poisson, c'est-à-dire où le système passe presque sûrement une infinité de fois par chaque état et où la condition

$$\Sigma i K_{11}^{(i)} < \infty$$

est satisfaite. Soit m_l le numéro de l'épreuve à laquelle a lieu le $l^{\text{ième}}$ passage en E_1, m_l est bien entendu aléatoire. Soit

$$u^{(l)} = X^{(m_l+1)} + \ldots + X^{(m_{l+1})};$$

les $u^{(l)}$ sont des variables aléatoires indépendantes et tous les $u^{(l)}$ suivent la même loi dont le second moment est $\mathcal{E}[u^2]$.

Théorème. — *Si* $\mathcal{E}[u^2] < \infty$ *et si* $\Sigma i^2 K_{11}^{(i)} < \infty$, *alors il existe deux constantes* a *et* σ *telles que la loi de probabilité de* $\dfrac{\left[\sum_1^n X^{(m)} - na\right]}{\sqrt{n}}$ *tend vers une loi de Gauss d'écart-type* σ *et de moyenne nulle.*

Démonstration. — Si le dernier retour (et $p^{\text{ième}}$ retour, p aléatoire) en E_1 avant la n^e épreuve a lieu à la $m_p{}^{\text{ième}}$ épreuve, l'on peut écrire

$$S_n = X^{(1)} + \ldots + X^{(m_1)} + \sum_{j \leqq p-1} u^{(j)} + X^{(m_p+1)} + \ldots + X^{(n)}$$

$$= \sum_{j \leqq p-1} u^{(j)} + R_n = S'_n + R_n.$$

L'on prouve (*cf.* Kolmogoroff, *loc. cit*) que la probabilité pour que $n - m_p$ dépasse K'' peut être rendue $< \varepsilon$ si K'' est suffisamment grand indépendamment de n, il résulte que R_n est borné au sens de Bernoulli [c'est-à-dire $\Pr\{|R_n| > C\} < \varepsilon(C)$, $\varepsilon(C)$ indépendant de n]. Nous n'avons donc à étudier que $\Sigma u^{(j)}$.

Soient

$$\rho = \Pi_1 n(1 - \varepsilon), \qquad \rho' = \Pi_1 n(1 + \varepsilon).$$

En dehors de cas de probabilité très petite nous avons vu que $m_{\rho'} > n > m_\rho$. Soit $\overline{S}_n$ la somme $\sum_1^\rho u^{(e)}$. En dehors de cas de probabilité $< \varepsilon$ [si $n > n(\varepsilon)$] l'on a

$$S'_n - \overline{S}_n = u^{(m_\rho+1)} + \ldots + u^{(m_p-1)} \qquad \text{avec} \quad 0 < m_p - m_\rho < 2\Pi_1 n\varepsilon.$$

Envisageons les sommes successives

$$u^{(m_\rho+1)} - \mathcal{E}[u], \quad u^{(m_\rho+1)} - \mathcal{E}[u] + u^{(m_\rho+2)} - \mathcal{E}[u], \quad \ldots,$$
$$u^{(m_\rho+1)} - \mathcal{E}[u] + \ldots + u^{(m_{\rho'})} - \mathcal{E}[u];$$

chacune de ces sommes est formée de variables aléatoires indépendantes à moyenne nulle. Le carré de l'écart-type de

$$u^{(m_\rho+1)} - \mathcal{E}[u] + \ldots + u^{(m_{\rho'})} - \mathcal{E}[u]$$

est

$$2\varepsilon \Pi_1 n(\mathcal{E}(u^2) - [\mathcal{E}(u)]^2).$$

D'après l'inégalité de Kolmogoroff bien connue ([8]) la probabilité pour qu'une de ces sommes successives considérées dépasse en valeur absolue $\varepsilon^{\frac{1}{3}}\sqrt{n}$ est $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)$. Par conséquent, en dehors de cas de probabilité $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)$, l'on a aussi

$$S'_n - \overline{S}_n = [p - \Pi_1 n(1 - \varepsilon)]\mathcal{E}[u] + \theta\varepsilon^{\frac{1}{3}}\sqrt{n}. \tag{4}$$

([8]) *Ann. Math.*, t. 99, 1928, p. 309-319.

D'autre part, je dis qu'on a aussi en dehors de cas de probabilité $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)$

$$(5) \qquad p - \Pi_1 n(1-\varepsilon) = \Pi_1(n - m_\rho) + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\sqrt{n}\right).$$

Il suffit d'appliquer l'égalité (4) au cas où tous les x_i sont $= 1$, alors

$$S_n = n, \qquad S'_n = S_n - O(1) \qquad \text{et} \qquad \overline{S}_n = m_\rho, \qquad \mathcal{E}[u] = \frac{1}{\Pi_1},$$

d'où l'on obtient (5) et par conséquent

$$(6) \qquad S'_n = \overline{S}_n + \Pi_1 \mathcal{E}[u](n - m_\rho) + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\sqrt{n}\right)$$

en dehors de cas de probabilité $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)$.

Considérons $\overline{S}_n - m_\rho \mathcal{E}[u]\Pi_1$. Soit y_i le nombre des chemins de E_1 en E_1 (ne comprenant pas E_1 à leur intérieur) de durée ou de longueur i réalisées pendant les $\rho = \Pi_1 n(1-\varepsilon)$ premiers retours en E_1, (c'est-à-dire le nombre des $m_e - m_{e-1} = i$, $e \leqq \rho$). L'on a évidemment

$$m_\rho = \sum_{i=1}^{\infty} i y_i + m_1.$$

Par conséquent

$$\overline{S}_n - m_\rho \mathcal{E}[u]\Pi_1 = \overline{S}_n - \sum_{i=1}^{\infty} i \Pi_1 \mathcal{E}[u] y_i + O(1).$$

Or, la variable aléatoire $u^{(l)}$ peut être déterminée de la façon suivante : Une première « épreuve » détermine $m_{l+1} - m_l$ qui est égale à i dans des cas de probabilité $K_{11}^{(i)}$. Sous cette hypothèse, $u^{(l)}$ devient une variable aléatoire $u_i^{(l)}$ dont l'espérance mathématique est φ_i et l'écart-type σ_i. Si nous considérons la variable aléatoire $\overline{u}^{(l)}$ qui est égale, si $m_{l+1} - m_l = i$, à $u_i^{(l)} - i\mathcal{E}[u]\Pi_1$, alors la somme $\overline{S}_n - \Sigma y_i \mathcal{E}[u] i \Pi_1$ est précisément égale à la somme $\Sigma \overline{u}^{(l)}$ qui est formée de quantités indépendantes suivant toutes la même loi, dont l'espérance mathématique est

$$\sum_{i=1}^{\infty} K_{11}^{(i)} \varphi_i - \sum_{i=1}^{\infty} i K_{11}^{(i)} \mathcal{E}[u]\Pi_1 = 0$$

et dont l'écart-type est

$$\sigma'^2 = \sum_{i=1}^{\infty} K_{11}^{(i)} [\varphi_i - i\mathcal{E}(u)\Pi_1]^2 + \sum_{i=1}^{\infty} K_{11}^{(i)} \sigma_i^2.$$

D'après un théorème bien connu de M. Paul Lévy sur les sommes de variables aléatoires indépendantes, il en résulte que la loi de probabilité de $\frac{[S_n - \Sigma y_i \mathcal{E}(u) i \Pi_1]}{\sqrt{\rho}}$ tend vers la loi de Gauss. Il en résulte, d'après ce qui précède, vu la valeur de ρ, que la loi de $\frac{S_n - n\mathcal{E}[u]\Pi_1}{\sqrt{n}}$ tend vers une loi de Gauss à moyenne nulle et écart-type $\sigma'\sqrt{\Pi_1}$. Ce qui démontre le théorème.

Pour que $\sigma' = 0$, il faut et il suffit que $\sigma_i = 0$ et $\varphi_i = i\mathcal{E}[u]\Pi_1$, ce qui conduit immédiatement à la condition bien connue dans le cas d'un nombre fini d'états [*cf.* Mihoc, *loc. cit.* (6), W. Dœblin (7) et Fréchet, *loc. cit* (1)] : Pour que $\sigma' = 0$, il faut et il suffit que la somme des $(x_i - \mathcal{E}[u]\Pi_1)$ prise le long d'un chemin fermé quelconque soit nulle ou que la moyenne arithmétique des X_i prise le long d'un chemin fermé quelconque soit constante (si cette démonstration est plus simple que les autres démonstrations connues, ces dernières ont l'avantage de s'appliquer à des cas différents).

Supprimons maintenant les hypothèses $\Sigma i^2 K_{11}^{(i)} < \infty$ et $\mathcal{E}[u^2] < \infty$, mais gardons toujours l'hypothèse $L_{11} = 1$, $\Sigma i K_{11}^{(i)} < \infty$. Appelons $\overline{D}_n(\alpha)$ la dispersion (9) de $\overline{S_n}$ pour la probabilité α.

Soit $u'^{(l)}$ une variable aléatoire $= u^{(l)}$ si $|u^{(l)}| \leqq \overline{D}_n(\alpha)$, $= 0$ dans le cas contraire. L'on sait (10) que si $n > n_0$ l'on a

$$(7) \qquad n \Pr\{|u^{(l)}| > \overline{D}_n(\alpha)\} < k(\alpha), \qquad n\mathcal{E}\{[u'^{(l)}]^2\} < k'(\alpha)\overline{D}_n^2(\alpha),$$

$k(\alpha)$ et $k'(\alpha)$ étant des fonctions de α ne dépendant pas de la variable aléatoire $u^{(l)}$. Il en résulte que, en dehors de cas de probabilité $O(\varepsilon)$, la somme $u^{(\rho+1)} + \ldots + u^{(p)}$ coïncide avec

---

(9) La longueur du plus petit intervalle qui contient S_n avec probabilité $\geqq \alpha$.

(10) W. Dœblin, *Sur les sommes d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes*, § 2 (*Bull. Sc. Math.*, en impression).

$u'^{(\rho+1)}+\ldots+u'^{(p)}$ [en dehors de cas de probabilité $o(\varepsilon)$ l'on a $\rho'>p>\rho$!]. Nous pouvons appliquer à

$$u'^{(\rho+1)}-\mathcal{E}[u']+\ldots+u'^{(p)}-\mathcal{E}[u']$$

le même raisonnement que ci-dessus à $u^{(\rho+1)}-\mathcal{E}[u]+\ldots$ et nous concluons en vertu de (7) que, en dehors de cas de probabilité $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{3}}\right)$,

$$S'_n=\bar{S}_n+[p-\Pi_1 n(1-\varepsilon)]\,\mathcal{E}[u']+\theta\varepsilon^{\frac{1}{3}}D_n(\alpha).$$

De même, en appelant $C_n(\alpha)$ la dispersion de m_ρ, l'on trouve

$$p-\Pi_1 n(1-\varepsilon)=\Pi_1(n-m_\rho)+O\left[\varepsilon^{\frac{1}{3}}C_n(\alpha)\right]$$

où

$$\frac{1}{\overline{\Pi}_1}=\Sigma i K_1^{(i)}\qquad [i<C_n(\alpha)].$$

L'on déduit

$$S'_n=\bar{S}_n-\overline{\Pi}_1\mathcal{E}[u']\sum_{i=1}^{\infty} i y_i+n\overline{\Pi}_1\mathcal{E}[u']+o[D_n(\alpha)+C_n(\alpha)].$$

En définissant $\bar{u}^{(l)}$ comme ci-dessus, mais en substituant cette fois dans la définition $\mathcal{E}[u']\overline{\Pi}_1$ à $\mathcal{E}[u]\Pi_1$, l'on trouve que *la loi de probabilité de* $\dfrac{S_n-n\overline{\Pi}_1\mathcal{E}(u')}{C_n(\alpha)+D_n(\alpha)}$ *est asymptotiquement équivalente à celle de la somme de quantités indépendantes* $\dfrac{\sum_1^{\rho}\bar{u}^{(l)}}{C_n(\alpha)+D_n(\alpha)}$ et le problème de la représentation asymptotique de la loi de probabilité de cette dernière somme a été résolu dans un autre Mémoire [*cf. loc. cit.* (10)].