ÉMILE TURRIÈRE

De l'intégration des équations des problèmes de poursuite et d'ambiance en géométrie plane

Bulletin de la S. M. F., tome 65 (1937), p. 168-174

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1937__65__168_0>

DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DES PROBLÈMES DE POURSUITE ET D'AMBIANCE EN GÉOMÉTRIE PLANE;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

1. Le problème des *lignes de poursuite*, dans le cas du mouvement *rectiligne* du mobile poursuivi a été l'objet de nombreux écrits. Mais, en dehors de ce cas simple d'intégration, le problème conduit à des équations non intégrables.

Le cas des lignes de poursuite attachées au cercle a été étudié par M. L. Dunoyer et par M. F. Morley (1).

D'autre part, M. F. Morley (2) a, sous la désignation de *courbes d'ambiance*, étudié la question suivante : le maître N décrit une droite (l'axe ox par exemple). Le chien M décrit une trajectoire inconnue, dans le plan oxy, dont la normale en M est précisément MN. Cette trajectoire est déterminée par la condition de constance du rapport des vitesses des deux mobiles.

Le problème d'ambiance est analogue à celui de poursuite, la tangente étant remplacée par la normale à la courbe trajectoire du mobile poursuivant.

Les lignes d'ambiance associées à la droite ont été déterminées par une quadrature par M. Morley, qui, en outre, a réduit aux fonctions elliptiques le problème des lignes d'ambiance du cercle.

2. L'objet de la présente étude est de généraliser la question en supposant que MN est une droite ayant une inclinaison quelconque mais constante, sur la tangente ou la normale et de réduire, dans certains cas, l'intégration à celle d'un type remarquable d'équa-

---

(1) L. DUNOYER, *Sur les courbes de poursuite d'un cercle* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. VI, 1905, p. 193-222); F. MORLEY, *A curve of pursuit* (*American math. Monthly*, t. XXVIII, 1921).

(2) F. MORLEY, *The curve of ambience* (*American Journal of Mathematics*, t. XLVI, 1924, p. 193-200).

tions différentielles : l'équation

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = a_0 y^3 + 3a_1 y^2 + 3a_2 y + a_3,$$

primitivement considérée par R. Liouville et étudiée par P. Appell [1]. De cette même équation, j'ai indiqué tout récemment [2] un certain nombre d'applications géométriques, parmi lesquelles la réduction à cette forme de l'équation des lignes de poursuite attachées à la spirale logarithmique et plus particulièrement au cercle. Dans cette même étude, j'ai réduit à la forme canonique ci-dessus l'équation de l'isochrone paracentrique, de la courbe atuptique et de diverses autres courbes planes d'équations non intégrables au sens ordinaire.

3. Les coordonnées (x, y) du mobile N poursuivi (le maître) seront

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \varpi \cos\varphi - \varpi' \sin\varphi, \\ y = \varpi \sin\varphi + \varpi' \cos\varphi; \end{cases}$$

ϖ est une fonction donnée de φ, de dérivées ϖ' et ϖ''. Ces équations représentent la courbe (c) trajectoire du mobile poursuivi; l'inclinaison sur Ox de la normale à cette courbe (c) en N est φ. Soit

$$(3) \qquad \rho = \varpi + \varpi'',$$

l'expression algébrique du rayon de courbure de (c) en N.

Les coordonnées (x, y) du point poursuivant M seront

$$(4) \qquad \begin{cases} X = x + \lambda \cos(\varphi + \zeta), \\ Y = y + \lambda \sin(\varphi + \zeta), \end{cases} \qquad (\lambda = MN).$$

ζ est l'angle de NM avec la normale en N à (c). λ et ζ caractérisent la trajectoire relative de M par rapport à N. Posons

$$(5) \qquad \begin{cases} -\sin(\varphi + \zeta)\dfrac{dX}{d\varphi} + \cos(\varphi + \zeta)\dfrac{dY}{d\varphi} = T, \\ \cos(\varphi + \zeta)\dfrac{dX}{d\varphi} + \sin(\varphi + \zeta)\dfrac{dY}{d\varphi} = A. \end{cases}$$

---

(1) P. Appell, *Sur les invariants de quelques équations différentielles* [*Journal de Mathématiques pures et appliquées* (de Liouville), 4ᵉ série, t. V, 1895, p. 361-423].

(2) *Sur des courbes spéciales définies par des équations différentielles non intégrables* (*L'Enseignement mathématique*).

L'une des conditions du problème de poursuite est $T = 0$; tandis que $A = 0$ est condition du problème d'ambiance.

Si φ est prise comme variable de dérivation

$$(6)\qquad \begin{cases} T = \lambda(1 + \zeta') + \rho\cos\zeta, \\ A = \lambda' + \rho\sin\zeta. \end{cases}$$

Introduisons maintenant la condition générale

$$\cos(\varphi + \zeta + \delta)\, dX + \sin(\varphi + \zeta + \delta)\, dY = 0;$$

elle exprime que la normale en M à la trajectoire (c) de ce point fait un angle δ avec MN; cette condition s'écrit

$$A\cos\delta + T\sin\delta = 0,$$

et compte tenu des expressions générales de A et T

$$(7)\qquad \lambda'\cos\delta + \lambda(1 + \zeta')\sin\delta + \rho\sin(\zeta + \delta) = 0.$$

Sous cette condition, supposée remplie, les dérivées (par rapport à φ) de X et Y deviennent

$$X' = -\frac{T\sin(\varphi + \zeta + \delta)}{\cos\delta}, \qquad Y' = \frac{T\cos(\varphi + \zeta + \delta)}{\cos\delta},$$

et, par suite, si dS et R représentent l'élément d'arc et le rayon de courbure en M de (C),

$$(8)\qquad \frac{dS}{d\varphi} = \frac{T}{\cos\delta}, \qquad R = \frac{dS}{d(\varphi + \zeta)} = \frac{T}{(1 + \zeta')\cos\delta}.$$

Le rapport K des vitesses des mobiles M et N est donc

$$(9)\qquad K = \frac{dS}{ds} = \frac{T}{\rho\cos\delta}.$$

La seconde condition du problème (la constance du rapport K de vitesses) se présente finalement sous la forme

$$(10)\qquad \lambda(1 + \zeta') = \rho(K\cos\delta - \cos\zeta).$$

En tenant compte de (10), la condition (7) se simplifie et devient

$$(11)\qquad \frac{\lambda'}{\rho} + \sin\zeta + K\sin\delta = 0.$$

Ces conditions sont générales, même si δ est variable, mais sous la réserve de

$$\cos \delta \neq 0.$$

Pour $\delta = \frac{\pi}{2}$ (courbes de poursuite proprement dites), la condition correspondante $T = 0$ donne aux dérivées X' et Y' les expressions

$$X' = A\cos(\varphi + \zeta), \qquad Y' = A\sin(\varphi + \zeta).$$

D'où

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dS}{d\varphi} &= -A, \\ K &= -\frac{A}{\rho}, \\ \lambda' + \rho(K &+ \sin\zeta) = 0. \end{aligned} \right.$$

Par conséquent, la condition (11) reste valable pour $\cos\delta = 0$.

En résumé, le problème dépend des équations simultanées (10) et (11). L'élimination de λ conduit à la relation

$$(13) \qquad \frac{\zeta''}{1+\zeta'}(K\cos\delta - \cos\zeta) = \zeta'(2\sin\zeta + K\sin\delta) + \sin\zeta + K\cos\delta + m(K\cos\delta - \cos\zeta),$$

dans laquelle m représente le rapport

$$(14) \qquad m = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{d}{d\varphi}(\log\rho);$$

δ a été supposé constant dans cette élimination. En général m sera une fonction connue de φ; la condition précédente (13) sera donc une équation du second ordre en $\zeta(\varphi)$, dont les coefficients contiendront explicitement la variable φ; mais si m est constant, la courbe (c) imposée étant alors une spirale logarithmique d'équation naturelle

$$(15) \qquad \rho = \rho_0 e^{m\varphi},$$

et plus particulièrement un cercle ($m = 0$), la variable φ sera absente et l'équation se réduira immédiatement à une équation du premier ordre

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(K\cos\delta - \cos\zeta)\frac{d\zeta'}{d\zeta} = \frac{1+\zeta'}{\zeta'}[B_1\zeta' + C_1], \\ &B_1 = 2\sin\zeta + K\sin\delta, \\ &C_1 = \sin\zeta + K\sin\delta + m(K\cos\delta - \cos\zeta). \end{aligned} \right.$$

Il suffit de poser maintenant $\zeta' = \frac{1}{Z_1}$, pour obtenir

$$(17)\qquad (K\cos\delta - \cos\zeta)\frac{dZ_1}{d\zeta} + Z_1(Z_1+1)(C_1 Z_1 + B_1) = 0;$$

ce qui est le type (1); l'équation obtenue présente la particularité de posséder deux intégrales particulières connues, $Z_1 = 0$ et $Z_1 = -1$.

4. L'équation

$$\frac{dZ_1}{dz} + Z_1(Z_1+1)(CZ_1+B) = 0$$

peut aisément être réduite à la forme canonique (18)

$$(18)\qquad \frac{dZ}{dz} = Z^2(Z+P),$$

qui paraît être pratiquement, dans les applications géométriques, celle qui donne lieu aux calculs et aux expressions les plus simples.

Il suffit d'abord de poser

$$(19)\qquad Z_1 = U\,Z,$$

en déterminant la fonction indéterminée U par la condition

$$\frac{d\log U}{d\zeta} = -B,$$
$$U(\cos\zeta - K\cos\delta)^2 = e^{K\sin\delta\, I},$$

avec

$$(20)\qquad I = \int \frac{d\zeta}{\cos\zeta - K\cos\delta},$$

intégrale élémentaire, pour ramener l'équation (17) à la forme

$$Z' + CZ^2(Z+P) = 0,$$

avec l'invariant P

$$P = \frac{B+C}{CU};$$

une deuxième quadrature permettra d'effectuer le changement de variable ζ en z pour avoir enfin la forme canonique (18).

L'exemple le plus simple d'ambianee est fourni par la cubique de direction d'équation

$$x = t^2, \qquad y = t - \frac{t^3}{3};$$

il y a alors *isométrie* entre la cubique et la droite joignant les points de contact des tangentes parallèles à l'axe de symétrie de la cubique, la correspondance se faisant au moyen des normales de la courbe. Le rapport des vitesses est alors égal à un. Pour tout autre rapport e de vitesses, le problème d'ambiance pour la droite dépend d'une quadrature élémentaire. La trajectoire relative de M par rapport à N est une conique de foyer N, d'excentricité e. Il y a séparation entre ellipses et hyperboles lorsque la trajectoire relative est parabolique, et c'est précisément le cas de la cubique de direction d'isométrie. D'une manière précise l'excentricité e a pour expression

$$e = \frac{\text{vitesse de N}}{\text{vitesse de M}}.$$

Dans le cas des courbes d'ambiance du cercle de centre O, de rayon un, les équations

$$\sin\zeta + \frac{d\lambda}{d\varphi} = 0,$$

$$\lambda\left(1 + \frac{d\zeta}{d\varphi}\right) + \cos\zeta = \frac{1}{e}$$

donnent par élimination immédiate de $d\varphi$, une équation linéaire en $\cos\zeta$, la variable étant λ. L'intégration donne, avec une constante arbitraire A, l'équation

$$\cos\zeta = \frac{1}{e} + \frac{A}{\lambda} - \frac{\lambda}{2}$$

de la trajectoire relative ; et cette dernière équation met en évidence que *la trajectoire relative est un ovale de Descartes*, plus particulièrement le limaçon de Pascal

$$\lambda = 2\left(\frac{1}{e} - \cos\zeta\right)$$

pour $A = 0$. On a ensuite

$$\frac{\varphi}{2} = \pm \int \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}},$$

$$R(\lambda) = \left[2A + 2\lambda\left(1 + \frac{1}{e}\right) - \lambda^2\right]\left[-2A + 2\lambda\left(1 - \frac{1}{e}\right) + \lambda^2\right].$$

Dans le cas de réalité des quatre racines de λ, il suffira de poser

$$2\Lambda = (n^2-1)\left(1-\frac{1}{en^2}\right),$$

$$\lambda_1 = (1+n)\left(1+\frac{1}{en}\right), \qquad \lambda_2 = (1-n)\left(1-\frac{1}{en}\right),$$

$$\lambda_3 = (1+n)\left(1-\frac{1}{en}\right), \qquad \lambda_4 = (1-n)\left(1+\frac{1}{en}\right),$$

$$R(\lambda) = -(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4),$$

pour mettre en évidence les facteurs linéaires du polynome du quatrième degré. La réduction aux fonctions elliptiques est alors immédiate.

Sur la normale en N à la courbe (c) on prend un point N' tel que

$$NN' = n^2-1$$

(dans le sens de $\zeta = 0$). La trajectoire relative a pour équation

$$MN' = n\,MN + \frac{1-n^2}{ne},$$

ce qui montre bien qu'elle est un ovale de Descartes.