BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES CHAPELON

Sur le problème de la roue

Bulletin de la S. M. F., tome 65 (1937), p. 109-118

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1937__65__109_0>

SUR LE PROBLÈME DE LA ROUE;

PAR M. JACQUES CHAPELON.

1. On connaît le théorème de Poincaré, sous la forme que lui a donnée M. Fréchet [1] : si une fonction $f(x)$ désigne la densité d'une charge m portée par le segment (a, b) de l'axe des x, si $f(x)$ est intégrable et si l'intervalle (a, b) est divisé en $2n$ cellules égales, la masse totale des cellules de rang pair tend vers la moitié de la charge totale quand n augmente indéfiniment.

On va démontrer que le théorème subsiste quand les cellules sont inégales, pourvu qu'elles ne soient pas *régulièrement inégales*.

On précisera ensuite l'application du théorème de Poincaré au problème de la roue en supposant que $f(x)$ est une densité de probabilité telle que la densité de la loi réduite ait une dérivée bornée en valeur absolue, la variate prenant toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

Enfin, on examinera le cas où $f(x)$ est la densité d'une loi normale.

2. Supposons l'intervalle $(0, 1)$ décomposé en $2n$ intervalles partiels dits *cellules* et imaginons un processus de décomposition tel que la plus grande cellule tende vers zéro quand n augmente indéfiniment. On dira que les cellules ne sont pas *régulièrement inégales* si pour toute valeur de x $(0 < x \leqq 1)$ la somme des cellules de rang pair de l'intervalle $(0, x)$ tend vers la somme des cellules de rang impair.

Il est à peu près évident que, dans ces conditions, la somme des cellules de rang pair de tout intervalle (x_1, x_2) $(0 \leqq x_1 < x_2 \leqq 1)$

---

[1] M. FRÉCHET, *Remarque sur les probabilités continues* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 45, p. 87).

tend vers la somme des cellules de rang impair du même intervalle. Car si $\sigma_1(x)$ et $\sigma_2(x)$ sont, respectivement, la somme des cellules de rang impair et de rang pair de l'intervalle $(0, x)$, on peut trouver un nombre $2n_1$ de cellules tel que, ε étant donné, positif, on ait, si $n \geq n_1$

$$|\sigma_1(x_2) - \sigma_2(x_2)| < \varepsilon,$$
$$|\sigma_1(x_1) - \sigma_2(x_1)| < \varepsilon,$$

et, par suite,

$$|\sigma_1(x_2) - \sigma_1(x_1) - [\sigma_2(x_2) - \sigma_2(x_1)]| < 2\varepsilon,$$

ce qui établit la proposition.

3. Soit alors $f(x)$ une fonction intégrable dans l'intervalle $(0, 1)$, et le mode de décomposition décrit au numéro 2. A chaque cellule correspond une aire trapézoïdale définie par la courbe $y = f(x)$. On va montrer que, si n augmente indéfiniment, la somme des aires de rang impair tend vers la somme des aires de rang pair.

Divisons l'intervalle $(0, 1)$ en N parties égales, posons $\varepsilon = \frac{1}{N}$ et appelons *intervalles* les segments de longueur ε ainsi obtenus.

On peut supposer la décomposition cellulaire poussée assez loin pour que, dans chaque intervalle, la différence entre la somme des cellules paires et la somme des cellules impaires soit en valeur absolue inférieure à 2η.

Considérons en particulier l'intervalle de rang k. Soient M_k et m_k le maximum et le minimum de $f(x)$, σ_{1k} la somme des cellules impaires, σ_{2k} la somme des cellules paires. La différence des intégrales de $f(x)$ étendues aux cellules impaires et aux cellules paires est comprise entre les nombres $-M_k\sigma_{2k} + m_k\sigma_{1k}$ et $M_k\sigma_{1k} - m_k\sigma_{2k}$. D'ailleurs, η étant donné, arbitrairement petit, on peut trouver n_1 indépendant de k et assez grand pour que si $n > n_1$, on ait

$$(1) \qquad \left|\sigma_{1k} - \frac{\varepsilon}{2}\right| < \eta, \qquad \left|\sigma_{2k} - \frac{\varepsilon}{2}\right| < \eta.$$

Alors

$$\left(\frac{\varepsilon}{2} - \eta\right) M_k - \left(\frac{\varepsilon}{2} + \eta\right) m_k$$
$$< M_k\sigma_{1k} - m_k\sigma_{2k} < \left(\frac{\varepsilon}{2} + \eta\right) M_k + \left(\eta - \frac{\varepsilon}{2}\right) m_k,$$

ou

$$\frac{\varepsilon}{2}(M_k - m_k) - \eta(M_k + m_k) < M_k\sigma_{1k} - m_k\sigma_{2k} < \frac{\varepsilon}{2}(M_k - m_k) + \eta(M_k + m_k).$$

Si donc M est le maximum de $|f(x)|$ dans l'intervalle $(0, 1)$, on a

$$\frac{\varepsilon}{2}(M_k - m_k) - 2\eta M < M_k\sigma_{1k} - m_k\sigma_{2k} < \frac{\varepsilon}{2}(M_k - m_k) + 2\eta M,$$

et l'on a les mêmes limitations pour $M_k\sigma_{2k} - m_k\sigma_{1k}$.

Soient alors ω_1 et ω_2 les domaines totaux définis par les cellules de rang impair et les cellules de rang pair. On a, l'indice k variant de 1 à N,

$$(2) \qquad \left| \int_{\omega_1} f(x)\,dx - \int_{\omega_2} f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \sum_k (M_k - m_k) + 2\eta MN.$$

Si donc ζ est un nombre arbitraire, la fonction $f(x)$ étant intégrable, on peut prendre un nombre N_1 assez grand pour que si $N > N_1$, le premier terme du second membre soit inférieur à ζ. Ayant ainsi déterminé N, et par suite ε, on définit alors η par la condition $2\eta MN < \zeta$ et n_1 par les inégalités (1). Il en résulte que le premier membre de l'inégalité (2) tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. Ainsi :

I. *Si une fonction $f(x)$, intégrable dans l'intervalle (a, b), représente la densité d'une distribution de masses sur le segment (a, b) et si un mode de décomposition cellulaire de la base (a, b) est tel que la plus grande cellule tende vers zéro, les cellules n'étant pas régulièrement inégales, alors la masse totale des cellules de rang impair tend vers la moitié de la masse totale de la distribution.*

Le théorème de Poincaré s'étend au cas où la division cellulaire est telle que chaque intervalle de longueur ε est subdivisé en une cellule, dite cellule impaire, de longueur $p\varepsilon$, et en une cellule paire de longueur $q\varepsilon$, avec $p+q=1$, p et q étant positifs [1], et il suffit de supposer la fonction $f(x)$ intégrable.

On le montre aisément en décomposant l'intervalle $(0,1)$ en n parties égales, de longueur ε, puis chacun de ces segments en k parties égales, numérotées de 1 à k. Si m est la masse totale distribuée sur le segment $(0, 1)$, la somme des masses des cellules d'un rang déterminé i, $(1 \leqq i \leqq k)$ tend vers $\frac{m}{k}$ quand n augmente indéfiniment. Alors, la somme des aires des cellules de rang j tels que $1 \leqq j \leqq i$ tend vers $\frac{i}{k} m$ quand n augmente indéfiniment. Si donc p et q sont rationnels et positifs, on a le théorème :

II. *Si $f(x)$, intégrable dans l'intervalle (a, b), représente la densité d'une distribution de masse totale m et si l'on décompose l'intervalle (a, b) en n intervalles égaux de longueur ε, puis chaque partie en deux cellules de bases $p\varepsilon$ et $q\varepsilon$, la somme des masses des cellules de rang impair tend vers pm.*

Il va de soi que l'exactitude de la proposition, lorsque p et q sont irrationnels, résulte de son exactitude dans le cas où ils sont rationnels.

Le théorème II subsiste si l'intervalle (a, b) est décomposé en n parties non régulièrement inégales, chaque partie étant, à son tour, subdivisée en deux cellules de longueurs proportionnelles à p et q, $(p+q=1)$.

Le théorème de Poincaré s'étend encore à des intégrales doubles, triples, etc., sous la seule réserve que la fonction à intégrer soit intégrable. Par exemple, dans le cas d'une intégrale double, les cellules pourront être des triangles égaux, des parallélogrammes égaux ou des hexagones égaux. On fera un coloriage analogue au coloriage des cartes géographiques, et l'on voit aisément que deux couleurs suffisent dans le cas des triangles ou des parallélogrammes, trois dans le cas des hexagones, pour qu'une cellule quelconque n'ait pas la couleur des cellules contiguës. Alors, dans le cas de l'hexagone, par exemple, où aux trois couleurs on fera correspondre

[1] Fréchet et Halbwachs, *Le Calcul des Probabilités à la portée de tous*, Paris, 1924.
B. Hostinský, *Méthodes générales du Calcul des Probabilités*, Paris, 1931.

les nombres 1, 2, 3, la somme des masses de la distribution superficielle contenue dans les hexagones (1) tend vers le tiers de la masse totale quand le nombre des hexagones augmente indéfiniment.

On peut également obtenir des théorèmes correspondant au théorème II et introduire des formes de décomposition cellulaire beaucoup plus variées que celles énumérées plus haut, par exemple, des octogones et quadrilatères, des ovales sextitangentes, etc.

Enfin, les théorèmes subsistent si les cellules sont inégales, mais non régulièrement inégales, c'est-à-dire si, dans tout domaine D fini où des masses existent, la somme des cellules ayant une certaine qualité (couleur par exemple) tend vers une fraction déterminée de l'aire de D, fraction indépendante de D, lorsque la décomposition se poursuit indéfiniment.

Il n'est d'ailleurs pas nécessaire que la décomposition cellulaire soit telle que la distance de deux points d'une cellule tende vers zéro dans le processus de décomposition. Car si l'on a, par exemple, une distribution de masses dans un plan, les cellules pourront être des tranches égales (ou non régulièrement inégales) parallèles à une droite fixe. Cela revient à projeter la distribution, parallèlement à cette droite fixe, sur une autre droite coupant la première et à décomposer la distribution linéaire obtenue en cellules égales (ou non régulièrement inégales). Plus généralement, le domaine d'existence des masses pourra être décomposé en cellules par un système de courbes C_λ. La masse située d'un côté de la courbe C_λ sera une fonction $\varphi(\lambda)$, et si les cellules sont définies par les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, on est ramené au cas d'une variable pour la fonction $\varphi'(\lambda)$.

4. Le théorème de Poincaré subsiste si la fonction $f(x)$ est la densité d'une masse m finie, distribuée sur la totalité de l'axe des x; il suffit de construire l'énoncé en conséquence : si l'axe des x est décomposé en cellules d'amplitude ε, la somme des masses correspondant aux cellules de rang pair tend vers $\frac{m}{2}$ quand ε tend vers zéro. On peut aussi dire que si l'on a un processus de décomposition cellulaire tel que dans tout intervalle fini (x_1, x_2), la somme des cellules de rang pair tende vers la moitié de $x_2 - x_1$, la plus

grande cellule tendant vers zéro, la somme des masses des cellules de rang pair situées sur la totalité de l'axe des x tend vers $\frac{m}{2}$: cela résulte de la démonstration donnée au n° 3. On cherchera d'abord un nombre x_1 tel que

$$\left| \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx \right| < \zeta,$$

puis x_2 tel que

$$\left| \int_{x_2}^{+\infty} f(x)\,dx \right| < \zeta.$$

Alors, en appelant encore ω_1 et ω_2 les deux domaines définis par les cellules de rang impair et de rang pair, on aura l'inégalité

$$\left| \int_{\omega_1} f(x)\,dx - \int_{\omega_2} f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \sum_k (\mathrm{M}_k - m_k) + 2\eta \mathrm{N}\mathrm{M} + 2\zeta,$$

où M est le maximum de $|f(x)|$ dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et la démonstration s'achève comme plus haut.

5. *Application au Calcul des Probabilités.* Supposons d'abord l'intervalle (a, b) fini et les $2n$ cellules toutes égales et de longueur ε. Soit S'_{ab} la masse totale des cellules impaires, S''_{ab} la masse totale des cellules paires, on a d'après l'inégalité (2) en remarquant qu'ici, $\eta = 0$, et tenant compte du changement de notations :

$$|\mathrm{S}'_{ab} - \mathrm{S}''_{ab}| < \varepsilon \sum_k (\mathrm{M}_k - m_k).$$

où k varie de 1 à n.

Si la densité a une dérivée bornée en valeur absolue par D, dans l'intervalle (a, b), on a

$$\mathrm{M}_k - m_k \leqq 2\varepsilon \mathrm{D},$$

$$\sum_k (\mathrm{M}_k - m_k) \leqq 2\varepsilon \mathrm{D} n,$$

et puisque $2\varepsilon n = b - a$,

$$|\mathrm{S}'_{ab} - \mathrm{S}''_{ab}| < \varepsilon \mathrm{D}(b - a).$$

Si maintenant $f(x)$ est une densité de probabilité, le cas où la loi de probabilité est très étalée est d'un intérêt spécial, car c'est celui qui se présente dans le problème de la roue et les problèmes analogues. On supposera que la distribution a un centre d'inertie et un moment d'inertie et que σ est la déviation type de la loi donnée : par hypothèse, σ est grand. En posant $x = \sigma\xi$, on introduit la loi réduite $\sigma f(\sigma\xi) d\xi$. Le segment (a, b) se transforme en un segment (α, β), et l'on a $S'_{ab} = S'_{\alpha\beta}$, $S''_{ab} = S''_{\alpha\beta}$, donc

$$|S'_{ab} - S''_{ab}| = |S'_{\alpha\beta} - S''_{\alpha\beta}| \leqq (\beta - \alpha) R \frac{\varepsilon}{\sigma},$$

si R est une limitation de la valeur absolue de la dérivée de la loi réduite.

Supposons alors que le domaine de variation de la variate x soit l'axe des x tout entier. Prenons comme intervalle (a, b) un segment $(-t\sigma, t\sigma)$, toujours divisé en $2n$ parties égales à ε, de sorte que $2t\sigma = 2n\varepsilon$. A S'_{ab}, S''_{ab}, on substitue des sommes analogues S', S'' obtenues en prolongeant la division cellulaire en deçà du point d'abscisse a et au delà du point d'abscisse b. On sait que si Σ'_{ab}, Σ''_{ab} sont les sommes correspondantes, on a, par l'inégalité fondamentale du Calcul des Probabilités,

$$\Sigma'_{ab} + \Sigma''_{ab} < \frac{1}{t^2}.$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned} |S'' - S'| &= |S''_{ab} + \Sigma''_{ab} - S'_{ab} - \Sigma'_{ab}| \\ &\leqq |S''_{ab} - S'_{ab}| + \Sigma''_{ab} + \Sigma'_{ab} \leqq 2\varepsilon D t\sigma + \frac{1}{t^2}, \end{aligned}$$

ou encore

$$|S'' - S'| \leqq 2tR\frac{\varepsilon}{\sigma} + \frac{1}{t^2}.$$

Le paramètre t est indéterminé (supérieur à l'unité). On le détermine en rendant le second membre minimum. On trouve

$$t^3 = \frac{\sigma}{\varepsilon R} \qquad \left(\varepsilon < \frac{\sigma}{R}\right),$$

et par suite :

$$|S'' - S'| \leqq 3\left(\frac{\varepsilon R}{\sigma}\right)^{\frac{2}{3}},$$

ou

$$\left|S - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon R}{\sigma}\right)^{\frac{2}{3}}. \tag{3}$$

Donc :

Si la base indéfinie d'une loi de probabilité linéaire est décomposée en cellules égales de longueur ε, *la somme des cellules impaires (ou paires) diffère peu de* $\frac{1}{2}$, *pourvu :*

1° *que la valeur absolue de la densité de la loi réduite soit bornée par un nombre* R;

2° *que la déviation type de la loi donnée soit grande par rapport à* ε.

Dans le cas d'une distribution non linéaire, on généralise sans difficulté l'inégalité (3) en introduisant la quadrique type au lieu de la déviation type.

6. *Applications au problème de la roue.* — On suppose [1] que la longueur de la circonférence d'une roue est divisée en $2N$ parties égales classées en arcs pairs et arcs impairs et que si s est la longueur totale de l'arc qui défile devant un index entre le moment où on lance la roue et celui où elle s'arrête, la loi de probabilité de la variate s est $f(s)ds$. On veut étudier la probabilité que l'index désigne un arc impair quand la roue sera arrêtée.

On est dans les conditions d'application du dernier théorème. Supposons que la longueur de la circonférence soit prise pour unité. Alors $\varepsilon = \frac{1}{2N}$, et donc

$$\left|S' - \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2}\left(\frac{R}{2N\sigma}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

La probabilité cherchée, S′, pourra donc différer assez peu de $\frac{1}{2}$ même si N n'est pas grand. Un cas extrême est celui où $N = 1$: la roue est alors divisée en deux demi-circonférences, l'une paire, l'autre impaire. Si donc σ est grand par rapport à la longueur de

(1) H. Poincaré, *Calcul des Probabilités*, Paris, 1896, p. 127.

la circonférence, on aura la probabilité $\frac{1}{2}$ avec une bonne approximation. Si de plus N est grand, l'approximation pourra devenir excellente.

Si, par exemple, la roue mue par le bras peut tout au plus faire 60 tours, le champ de variation de s sera 60. On pourra donc prendre $\sigma = 10$. Puis, si la loi diffère peu de la normale, R sera voisin de $\frac{1}{4}$. Alors

$$\left| S' - \frac{1}{2} \right| < 0.0808\, N^{-\frac{2}{3}},$$

et si la roue est divisée en grades, $2N = 400$

$$\left| S' - \frac{1}{2} \right| < 0{,}0024.$$

7. *Cas d'une loi normale.* — Si la loi de probabilité est exactement la loi normale, on peut calculer la différence $S' - \frac{1}{2}$.

Une cellule impaire aura la masse

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{x+\varepsilon} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du,$$

de telle sorte que la somme des masses des cellules impaires est

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{x+2n\varepsilon}^{x+2n\varepsilon+\varepsilon} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{x+\varepsilon} du \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(2n\varepsilon+u)^2}{2}}\, du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{x+\varepsilon} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-2n^2\varepsilon^2 - 2n\varepsilon u}. \end{aligned}$$

Or, on connait la fonction de Jacobi :

$$\Theta_1(x, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2nix} = 1 + 2 \sum_1^{\infty} q^{n^2} \cos 2nx,$$

avec $q = e^{i\pi\tau}$.

En posant

$$\tau = \frac{2i\varepsilon^2}{\pi}, \qquad x = \varepsilon i u,$$

on obtient :

$$S' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{x+\varepsilon} \Theta_1 \left(\varepsilon i u, \frac{2 i \varepsilon^2}{\pi} \right) e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

D'ailleurs, les formules de la transformation du premier ordre des fonctions thêta donnent :

$$\Theta_1(x, \tau) = \frac{i}{\sqrt{i\tau}} e^{-\frac{i x^2}{\pi\tau}} \Theta_1 \left(\frac{x}{\tau}, \frac{-1}{\tau} \right),$$

et, par suite,

$$\Theta_1 \left(\varepsilon i u, \frac{2 i \varepsilon^2}{\pi} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\varepsilon\sqrt{2}} e^{\frac{u^2}{2}} \Theta_1 \left(\frac{\pi u}{2\varepsilon}, \frac{\pi i}{2\varepsilon^2} \right).$$

L'intégrale du terme général de la série Θ_1 du second membre est nulle si n est pair. Si n est impair et égal à $2k+1$, elle est

$$-\frac{2\varepsilon}{(2k+1)\pi} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{2\varepsilon^2}} \sin(2k+1)\pi \frac{x}{\varepsilon}.$$

Donc

$$S' = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_0^\infty e^{-(2n+1)^2 \frac{\pi^2}{2\varepsilon^2}} \frac{\sin(2n+1)\pi \frac{x}{\varepsilon}}{2n+1},$$

et, par suite,

$$\left| S' - \frac{1}{2} \right| \sim \frac{2}{\pi} e^{-\frac{\pi^2}{2\varepsilon^2}}.$$

Si l'on reprend les notations du n° 5, il faut changer ε en $\frac{\varepsilon}{\sigma}$:

$$\left| S' - \frac{1}{2} \right| \sim \frac{2}{\pi} e^{-\frac{\pi^2\sigma^2}{2\varepsilon^2}}$$

et enfin, pour le problème de la roue (n° 6) :

$$\left| S' - \frac{1}{2} \right| \sim \frac{2}{\pi} e^{-2\pi^2 N^2 \sigma^2}.$$

Si, par exemple, $\sigma = 10$, $N = 1$

$$\left| S' - \frac{1}{2} \right| \sim \frac{2}{\pi} e^{-200\pi^2}$$

qui est très petit.